

TRABAJO MONOGRÁFICO

Fenómeno de Newhouse

Por: Alejandro Passeggi

Orientador: Dr. Martín Sambarino

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

A mis abuelos, Juan y Carlos...

Índice general

1. Dinámica Hiperbólica	7
1.1. Punto fijo hiperbólico y órbita periódica hiperbólica.	7
1.1.1. Foliación estable e inestable.	10
1.2. Conjuntos hiperbólicos, piezas básicas del tipo sillas.	10
1.2.1. Conjunto básico silla.	11
2. Espesura y el espacio $Diff^2(M)$.	13
2.1. Introducción.	13
2.2. Conjuntos de Cantor dinamicamente definidos	14
2.3. Espesura	15
2.3.1. El Tent map.	18
2.4. Espesura y topología C^2	20
3. Tangencias homoclínicas y la familia cuadrática.	27
3.1. Tangencias genéricas y familias de difeomorfismos.	27
3.2. Coordenadas linealizantes.	29
3.3. Teorema central.	31
3.4. Pozos y tangencias.	37
4. Persistencia de tangencias y espesura	39
4.1. Persistencia de tangencias y de tangencias homoclínicas	39
4.2. Espesura y Persistencia de tangencias	41
4.3. Construcción de un abierto con persistencia de tangencias a partir de la herradura	46
4.4. No densidad de los axioma A e infinitos pozos.	49
5. Abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas en $Diff^2(M)$.	51
5.1. Tent map, Logistic map y mapa cuadrático.	51

5.2.	Conjuntos hiperbólicos con espesura estable grande para difeomorfismos cercanos al mapa cuadrático.	53
5.2.1.	Sobre la familia cuadrática.	63
5.3.	Localización de abiertos con persistencia de tangecias homoclínicas en $\mathcal{D}iff^2(M)$	68

Introducción.

Fenómeno de Newhouse.

La monografía tiene como objetivo constructivo la demostración de tres resultados debidos a Sheldon Newhouse.

Estos resultados son la conclusión de los trabajos *Non density of Axiom A(a) on S^2* ([N,1970]), *Diffeomorphisms with infinitely many sinks* ([N,1973]) y *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms* ([N,1979]). Al fenómeno dinámico que surge de tales trabajos le llamamos *fenómeno de Newhouse*.

El primero de los tres trabajos surge como respuesta a la conjetura de S.Smale que afirma la densidad de los difeomorfismos llamados *Axioma A* (esto es, difeomorfismos cuyo no-errante es hiperbólico y tiene puntos periódicos densos). La conjetura fue rápidamente negada en dimensión $n \geq 3$ y topología C^r con $r \geq 1$, Newhouse en su trabajo la logra negar en superficies con la topología C^r para $r \geq 2$. En superficies con la topología C^1 es aún un problema abierto.

La técnica del trabajo se basa en lograr un abierto \mathcal{U} de difeomorfismos (en la topología C^r con $r \geq 2$) tal que sus elementos presenten tangencias entre variedades estables e inestables de una misma pieza básica, lo cual niega naturalmente la hiperbolicidad del no-errante. Para lograr tal abierto surge naturalmente la necesidad de dar condiciones para que dos conjuntos de Cantor se intersecten. A partir de tal necesidad Newhouse introduce la noción de espesura y a partir de ella el *gap-lemma* que nos da una condición suficiente para que dos conjuntos de Cantor se intersecten. Luego logra que la condición suficiente dada por el *gap-lemma* se verifique en todo un abierto de difeomorfismos, y así consigue el abierto \mathcal{U} al cual naturalmente se le llama *abierto con persistencia de tangencias homoclínicas*. El abierto \mathcal{U} que se consigue esta formado por difeomorfismos que presentan tangencia entre variedades de una misma pieza básica, donde la pieza básica varía continuamente al variar el difeomorfismo.

Un segundo resultado de este trabajo es la no existencia en el abierto \mathcal{U} de difeomorfismos Ω -estables (esto es, hay un entorno del difeomorfismo donde todo elemento tiene no-errante topológicamente conjugado al del difeomorfismo considerado), lo cual niega la densidad de esta clase de difeomorfismos. J.Palis y S.Smale habían conjeturado previamente que tales difeomorfismos eran exactamente los axioma A que no tienen ciclos. La respuesta a esta conjetura en cualquier dimensión y la topología C^1 , es dada por R. Mañe en [M,1988].

El segundo de los trabajos puede pensarse como una reflexión sobre el primer trabajo. La negación de la densidad de los difeomorfismos *Axioma A* que se encuentra en el primer trabajo se basa en propiedades de la dinámica de la derivada. Surge de eso, el interés de estudiar la naturaleza de la dinámica para difeomorfismos que se encuentran en el abierto \mathcal{U} hallado en el primer trabajo.

Como respuesta se obtiene el resultado del segundo trabajo, que afirma la existencia de un conjunto residual \mathcal{R} en el abierto \mathcal{U} de difeomorfismos con infinitas órbitas periódicas atractoras, o infinitas órbitas periódicas repulsoras.

El tercer trabajo afirma que si un difeomorfismo cualquiera presenta una tangencia homoclínica, estará en la clausura de un abierto \mathcal{U} con persistencia de tangencias homoclínicas. Es a este fenómeno que se le llama "Fenómeno de Newhouse".

Estos abiertos implican la existencia de conjuntos básicos sillas cuyas prolongaciones presentan tangencia, a tales conjuntos se los llama *salvajes* y por lo tanto el tercer trabajo muestra que por cada difeomorfismo con tangencia homoclínica existe al menos un conjunto salvaje.

El segundo trabajo junto al tercer trabajo concluyen que si un difeomorfismo presenta tangencia homoclínica, entonces está en la clausura de un abierto que contiene un residual \mathcal{R} de difeomorfismos con infinitas órbitas periódicas atractoras o infinitas órbitas periódicas repulsoras.

Construcción matemática.

Las técnicas usadas en la monografía siguen el trabajo de J.Palis y F. Takens [PT,1993]. Estas tienen como base las propiedades de la espesura para difeomorfismos de superficies en la topología C^2 y la *renormalización de desdoblamiento genéricos*. Este último se logra mediante un conjunto de cambios de coordenadas llamado *scaling-maps*.

Sobre la espesura no existe diferencia sustancial con los trabajos de Newhouse, se intenta obtener los mismos resultados que aparecen en el primer trabajo de Newhouse y aplicarlos de forma similar.

La segunda técnica mencionada es parte fundamental para llegar al segundo y tercer resultado del fenómeno de Newhouse y no aparece explícitamente en los trabajos originales. Este resultado muestra que para difeomorfismos que presentan tangencia homoclínica de un punto disipativo, existen curvas de difeomorfismos arbitrariamente cerca de él, cuyos elementos tienen potencias C^2 -próximas a conjugaciones de la familia cuadrática en entornos de la tangencia. Esto nos da propiedades dinámicas para perturbados del difeomorfismo original, las cuales nos permiten encontrar órbitas periódicas atractoras y conjuntos salvajes para tales perturbados.

Dinámica genérica.

La dinámica genérica es la teoría matemática que intenta describir la “mayoría” de los sistemas dinámicos. El desarrollo de esta teoría ha surgido a partir de conjeturas como la de S.Smale (descrita anteriormente). Por lo tanto los trabajos de Newhouse considerados en la monografía han influido fuertemente su desarrollo y estructuración.

Por ejemplo, para superficies existe la conjetura de J.Palis ([PT,1993]) que afirma para el espacio de los difeomorfismos (con la topología C^r $r \geq 1$) que todo elemento es acumulado por tangencias, y/o aquellos que son *esencialmente hiperbólicos*. Este resultado es cierto si consideramos la topología C^1 , lo cual es un trabajo de E. Pujals y M. Sambarino ([PS,2000]).

Otra pregunta muy natural que surge de los trabajos, es sobre la existencia de abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas en superficies con la topología C^1 . Esta pregunta está aún abierta, pero sabemos por trabajos como el de R. Ures ([U,1995]) que las técnicas usadas por Newhouse para la construcción de tal abierto, no pueden ser utilizadas en la topología C^1 .

En el sentido de la dimensión, los trabajos de Newhouse encuentran generalización en el trabajo de J.Palis y M. Viana ([PV,1994]).

Por último decir que en dimensiones mayores a 2, ideas contenidas en el fenómeno de Newhouse son utilizadas en trabajos actuales donde se encuentran abiertos con dinámicas muy ricas, en el sentido de obtener residuales dentro de los abiertos cuyos difeomorfismos presentan infinita cantidad de repulsores, infinita cantidad de atractores

e infinita cantidad de *clases homoclínicas*. Esto último se puede ver en el trabajo de C. Bonatti y L. Diaz [BD,2003].

Monografía.

La monografía está compuesta por 5 capítulos aparte de la introducción.

El primero es un resumen de teoría hiperbólica básico para el desarrollo de la monografía.

El segundo capítulo define *espesura*, estudia algunas de sus propiedades y la relaciona con los sistemas dinámicos C^2 en superficies.

El tercer capítulo introduce la *renormalización sobre desdoblamientos genéricos*, que junto con la *espesura* son las herramientas claves de la monografía.

El cuarto capítulo contiene las pruebas de los dos primeros resultados de Newhouse.

El quinto y último capítulo contiene el tercer resultado de Newhouse, donde se demuestra que dado un difeomorfismo φ C^2 en alguna superficie, con tangencia homoclínica, se tiene φ en clausura de un *abierto con persistencia de tangencias homoclínicas*. Con este resultado se llega al Fenómeno de Newhouse y se concluye la monografía.

Capítulo 1

Dinámica Hiperbólica

En este primer capítulo se establecen resultados clásicos de lo que se conoce como dinámica hiperbólica. En estos resultados se apoya el desarrollo de la teoría presentada en la monografía y su aplicación será por momentos implícita en las demostraciones.

La presentación de los mismos será a través de resumidos enunciados, no habrá demostraciones ni ejemplos ya que se pretende que este capítulo sea una herramienta para la monografía y no un capítulo ilustrativo de la teoría hiperbólica. Demostraciones formales de los resultados se pueden encontrar en [PT,1993], [Sh,1987].

1.1. Punto fijo hiperbólico y órbita periódica hiperbólica.

Definición 1.1.1. Sea φ un difeomorfismo C^r en una variedad diferenciable M . Diremos que un punto fijo P_0 es hiperbólico si los valores propios de $d_{P_0}\varphi$ tiene módulo distinto a uno. Se clasifican además como:

Pozo si todos los valores propios tienen módulo menor a uno.

Fuente si todos los valores propios tienen módulo mayor a uno.

Silla si presenta valores propios de módulo mayor a uno y valores propios de módulo menor a uno.

Definición 1.1.2. Sea M una variedad diferenciable compacta. En el conjunto de los difeomorfismos de clase C^r , $1 \leq r \leq +\infty$, definimos la topología C^r donde una base de entornos de un elemento φ es formada por U_ε definidos por aquellos difeomorfismos tales

que ellos y todas las derivadas hasta orden r estén ε -uniformemente cerca de φ y sus derivadas, respectivamente. A este espacio topológico lo notamos por $\mathcal{D}iff^r(M)$.

Teorema 1.1.1. *Sea una variedad diferenciable M , $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ y P_0 punto fijo hiperbólico de φ . Entonces existe un entorno C^r de φ tal que todo difeomorfismo en él presenta un punto fijo hiperbólico que se lo puede considerar como continuación del original. Además estos serán del tipo de P_0 (pozo, silla, fuente).*

Los próximos teoremas buscan estudiar la influencia de los puntos hiperbólicos en la dinámica.

Teorema 1.1.2 (Hartman). *Sea φ un difeomorfismo de clase C^1 definido sobre una variedad diferenciable M y $P \in M$ punto fijo hiperbólico. Entonces existen U entorno de P en M , V entorno de 0 en $T_P M$ y $h : U \rightarrow V$ homeomorfismo que conjuga a φ con $d_P \varphi$, es decir $h \circ \varphi \circ h^{-1} = d_P \varphi$.*

Definición 1.1.3. Sea M una variedad diferenciable y φ un difeomorfismo de $\mathcal{D}iff^r(M)$, definimos:

Dado $\varepsilon > 0$ $W_\varepsilon^s(\varphi, P) = \{x \in M : \forall n \in \mathbb{N} d(\varphi^n(x), \varphi^n(P)) < \varepsilon\}$, a este conjunto le llamamos variedad estable local de P respecto a φ .

Dado $\varepsilon > 0$ $W_\varepsilon^u(\varphi, P) = \{x \in M : \forall n \in \mathbb{N} d(\varphi^{-n}(x), \varphi^{-n}(P)) < \varepsilon\}$, a este conjunto le llamamos variedad inestable local de P respecto a φ .

$W^s(\varphi, P) = \{x \in M : \lim_n d(\varphi^n(x), \varphi^n(P)) = 0\}$, a este conjunto le llamamos variedad estable de P respecto a φ .

$W^u(\varphi, P) = \{x \in M : \lim_n d(\varphi^{-n}(x), \varphi^{-n}(P)) = 0\}$, a este conjunto le llamamos variedad inestable de P respecto a φ .

Definición 1.1.4. Sea M una variedad diferenciable, φ un difeomorfismo de $\mathcal{D}iff^r(M)$ y $P \in M$. definimos E^s como el subespacio de $T_P M$ suma de autoespacios asociados a valores propios de módulo menores a uno y E^u como el subespacio de $T_P M$ suma de autoespacios asociado a valores propios de módulo mayores a uno.

Definición 1.1.5. Diremos que dos conjuntos A y B contenidos en una variedad diferenciable están ε - C^r cerca si existe una función definida en A , C^r , biyectiva, cuya imagen es B , y tal que está en el entorno U_ε de $i : A \rightarrow M$ siendo i la inclusión.

Teorema 1.1.3 (Variedad Estable). *Sea M una variedad diferenciable, φ un difeomorfismo de $\mathcal{D}iff^r(M)$ y $P \in M$ punto fijo hiperbólico. Entonces:*

La variedad estable es una variedad diferenciable inmersa C^r , que tiene la dimensión de E^s y tal que $T_P W^s(\varphi, P) = E^s$.

La variedad estable de P es un conjunto invariante para el difeomorfismo, o sea $\varphi(W^s(\varphi, P)) = W^s(\varphi, P)$.

Dado un disco compacto contenido en $W^s(\varphi, P)$ de dimensión total, se tiene que existe un entorno de φ en la topología C^r tal que dado un difeomorfismo en él la continuación del punto hiperbólico tendrá una parte compacta de su variedad estable C^r cerca al disco compacto.

Observación 1.1.1. Para la variedad inestable se tiene el teorema análogo, basta considerar φ^{-1} y verificar que $W^s(\varphi^{-1}, P) = W^u(\varphi, P)$.

Teorema 1.1.4 (λ -lema). *Sea M una variedad diferenciable, $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$, $P_0 \in M$ punto fijo hiperbólico silla de φ . Sea D una variedad diferenciable C^r difeomorfa a un disco de la misma dimensión que la variedad inestable, tal que intersecta transversalmente a la variedad estable. Entonces, para todo entorno U de P_0 en la variedad inestable y $\varepsilon > 0$ existe n y un compacto V en D tal que $\varphi^n(V)$ está, según la topología C^r , a menos de ε de U . Estos dos entornos se pueden considerar variedades diferenciables.*

Definición 1.1.6. Sea M una variedad diferenciable, φ un difeomorfismo de $\mathcal{D}iff^r(M)$ y $P \in M$ punto periódico, diremos que es punto periódico hiperbólico de φ si es punto fijo hiperbólico de φ^N donde N es el período de P según φ .

Además se tienen la clasificación de atractor, repulsor o silla conforme a la definición sobre puntos fijos. Para clasificar órbitas periódicas basta estudiar φ^N .

Observación 1.1.2. Si un punto en alguna órbita periódica es hiperbólico entonces todos los elementos de la órbita lo son. Además todos tienen la misma clasificación y los subespacios E^s y E^u son invariantes por la acción de la derivada en el fibrado tangente.

Esto último nos permite hablar de órbitas periódicas hiperbólicas.

Para órbitas periódicas se tienen los siguientes corolarios de los teoremas anteriores.

Corolario 1.1.5. *Sea M una variedad diferenciable, $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ y P_0 punto periódico hiperbólico de φ . Entonces existe un entorno C^r de φ tal que todo difeomorfismo en él presenta una órbita periódica hiperbólico que se la puede considerar C^0 -cerca de la original. Además estas orbitas son del mismo tipo que la original.*

Corolario 1.1.6. *Dada una órbita hiperbólica para un difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}^r(M)$, sea P un elemento de la órbita, entonces:*

$W^s(\varphi, P)$ es una variedad diferenciable C^r inmersa y verifica $T_P W^s(\varphi, P) = E^s$.

$\varphi(W^s(\varphi, P)) = W^s(\varphi, \varphi(P))$.

Si consideramos un disco compacto contenido en $W^s(\varphi, P)$ con dimensión total, se tiene un entorno de φ donde los difeomorfismos presentan puntos periódicos hiperbólicos que son la continuación de P , cuyas variedades estables tienen una parte compacta C^r cerca del disco considerado.

Observación 1.1.3. Se tiene el enunciado análogo al teorema anterior que trata sobre la variedad inestable.

1.1.1. Foliación estable e inestable.

Definición 1.1.7. Sea M una superficie y $P \in M$. En general una foliación de un entorno U se define como un difeomorfismo $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\Phi(0) = P$. La diferenciabilidad de la foliación queda dada por la diferenciabilidad de Φ .

En este caso la foliación del entorno queda caracterizada por el conjunto de hojas $\mathcal{F} = \{\Phi(\{x\} \times [0, 1])\}_{x \in [0, 1]}$, o de otra manera $\mathcal{F} = \{\Phi([0, 1] \times \{x\})\}_{x \in [0, 1]}$.

Teorema 1.1.7. *Sea M superficie, $\varphi \in \text{Diff}^3(M)$ y P punto fijo hiperbólico silla. Entonces existen dos foliaciones de un entorno U de P , \mathcal{F}^u foliación inestable y \mathcal{F}^s foliación estable tales que:*

Si h_q es una hoja de F^u por $q \in M$ entonces $h_{\varphi(q)} \subset \varphi(h_q)$, donde $h_{\varphi(q)}$ es la hoja de F^u por $\varphi(q)$. Mientras si h_q es una hoja de F^s por q se tiene $h_{\varphi^{-1}(q)} \subset \varphi^{-1}(h_q)$, donde $h_{\varphi^{-1}(q)}$ es la hoja de F^s por $\varphi^{-1}(q)$.

La diferenciabilidad de ambas foliaciones se puede considerar $C^{1+\varepsilon}$.

1.2. Conjuntos hiperbólicos, piezas básicas del tipo sillas.

Definición 1.2.1. Conjunto hiperbólico

Sea M una variedad diferenciable y $\varphi : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Sea Λ un conjunto compacto en M φ -invariante. Diremos que es un conjunto hiperbólico si para todo $x \in \Lambda$ se tiene $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ independientes de x , tales que:

Para todo vector $v \in E_x^u$ se tiene $d_x \varphi(v) \in E_{\varphi(x)}^u$, por su parte para $w \in E_x^s$ se tiene $d_x \varphi(w) \in E_{\varphi(x)}^s$.

Dado $v \in E_x^u$ se tiene $\|d_x \varphi^{-n}(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|$.

Dado $w \in E_x^s$ se tiene $\|d_x \varphi^n(w)\| \leq C \lambda^n \|w\|$.

Teorema 1.2.1. *Sea M una variedad diferenciable y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ tal que presenta un conjunto hiperbólico Λ_φ . Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno de φ en $\mathcal{D}iff^r(M)$ tal que para todo difeomorfismo ψ en el entorno se tiene un conjunto hiperbólico del mismo, Λ_ψ , y un mapa $i_\psi : \Lambda_\varphi \rightarrow \Lambda_\psi$ ε -cerca de la inclusión (C^0 cerca) y tal que $i_\psi^{-1} \circ \varphi \circ i_\psi = \psi$ sobre Λ_ψ .*

Teorema 1.2.2 (Teorema de la variedad estable). *Sea M una variedad diferenciable y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ tal que presenta un conjunto hiperbólico Λ . Entonces para todo $x \in \Lambda$ se tiene:*

$W^s(\varphi, x)$ es una variedad diferenciable inmersa tal que para todo y elemento de $W^s(\varphi, x) \cap \Lambda$ $T_y W^s(\varphi, x) = E_y^s$. Además $\varphi(W^s(\varphi, x)) = W^s(\varphi, \varphi(x))$.

Las respectivas variedades estables de elementos de Λ varían C^r -continuamente sobre partes compactas al variar los elementos en Λ . Lo mismo se tiene sobre las variedades estables de las continuaciones de elementos de Λ para difeomorfismos cercanos a φ .

1.2.1. Conjunto básico silla.

Definición 1.2.2. Decimos que un subconjunto Λ de M invariante por $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ es localmente maximal si existe un entorno U de Λ tal que $\bigcap_{z \in \mathbb{Z}} \varphi^z(U) = \Lambda$.

Definición 1.2.3. Sea M una variedad diferenciable y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$, diremos que Λ es un conjunto básico si verifica:

Λ es invariante e hiperbólico.

Λ es transitivo (esto es, tiene una órbita densa en el conjunto).

Λ es localmente maximal.

Diremos además que Λ es atractor cuando existe un entorno U del conjunto tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(U) = \Lambda$, Λ es un repulsor si es un atractor de φ^{-1} y Λ será un conjunto básico silla si no es ni atractor ni repulsor.

Definición 1.2.4 (Estructura de producto local). Sea M variedad diferenciable y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$, se dice que un conjunto hiperbólico silla presenta estructura de producto local si existe $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos x, y en Λ que disten menos que δ se tiene $W_\varepsilon^s(\varphi, x) \cap W_\varepsilon^u(\varphi, y) = \{z\}$ y z está en el conjunto hiperbólico.

Teorema 1.2.3. *Todo conjunto básico silla presenta estructura de producto local.*

Teorema 1.2.4. *Sea M una superficie, $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ tal que Λ es un conjunto básico silla de φ . Entonces Λ es perfecto con interior vacío.*

Definición 1.2.5. Sea $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ con M superficie. Sea una familia de abiertos conexos disjuntos dos a dos U_1, \dots, U_n . Decimos que admiten foliación inestable si cada entorno admite foliación y dada una hoja su imagen por φ intersección cada entorno es una colección finita de hojas.

Teorema 1.2.5. *Sea M una superficie, $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ tal que Λ es un conjunto básico silla de φ . Existe un cubrimiento por finitos abiertos conexos disjuntos de Λ que admiten foliaciones invariantes, estable e inestable, tal que las hojas por elementos de Λ son subconjuntos de la variedad inestable y estable respectivamente. Además para $r \geq 3$, las foliaciones se pueden considerar en la clase $C^{1+\varepsilon}$.*

Capítulo 2

Espesura y el espacio $Diff^2(M)$.

2.1. Introducción.

En este capítulo se definirá el concepto fundamental de esta teoría que es la *espesura de un conjunto de Cantor*. La espesura será un número no negativo del cual se desprende una condición suficiente para que dos conjuntos de Cantor se intersecten.

Para un conjunto de Cantor, dado un gap (con cierto tamaño) se tiene sus puentes que son los intervalos que van desde uno de sus bordes al borde del gap mas cercano con tamaño mayor o igual. La espesura se define como el ínfimo entre las razones formadas por longitud del puente sobre longitud del respectivo gap.

Se tendrá un lema (Gap lema) que afirma para dos conjuntos de cantor *enganchados* con producto de espesuras mayor a uno, hay intersección no vacía entre ellos.

Este lema nos permitirá construir en el capítulo 4.1, un abierto de $Diff^2(M)$ donde todo elemento presente *tangencia homoclínica*. Para ello es necesario probar que la espesura de conjuntos de Cantor *dinamicamente definidos*, varía continuamente en $Diff^2(M)$. Este será el resultado principal del presente capítulo.

La teoría desarrollada será sobre superficies para difeomorfismos de clase C^r con $r \geq 2$. Las causas de no ser mas general (en el sentido de la diferenciación no en el de la dimensión) surgen de las técnicas utilizadas.

Generalizar en tal sentido las técnicas utilizadas es imposible. Esto último no niega la posibilidad de generalizar los resultados principales de la monografía, lo cual representa hasta el momento un problema abierto.

2.2. Conjuntos de Cantor dinamicamente definidos

Esta sección será una herramienta en la teoría. Definiremos conjuntos de Cantor dinamicamente definidos y probaremos que a los conjuntos de Cantor $\Lambda \cap W^s(P) \cap K_0$ (Λ conjunto básico tipo silla, P punto periódico de él y K_0 intervalo conteniendo a P contenido en la variedad estable de forma que efectivamente obtengamos un Cantor) se les puede asociar conjuntos de este tipo. En las siguientes secciones nos centraremos constantemente en estos conjuntos.

Recordamos que un mapa real es expansor si es derivable en su dominio y en cada punto la derivada tiene módulo mayor a uno.

Definición 2.2.1. Cantor dinamicamente definido.

Un conjunto de *Cantor dinamicamente definido* es un conjunto de Cantor K (contenido en \mathbb{R}) tal que existen intervalos disjuntos $\{K_s\}_{s=1\dots n}$ y Ψ mapa expansor $C^{1+\varepsilon}$ definido en $\cup_{s=1}^n K_s$ tales que:

$K \subset \cup_{i=1}^n K_i$ y los bordes de los intervalos K_i están en K . Además $\Psi^{-1}(K) = K$.

Para cualquier i entre 1 y n La imagen de K_i por Ψ es la envolvente convexa de una cantidad finita de intervalos de la familia $\{K_s\}_{s=1\dots n}$.

Dado cualquier j entre 1 y k existe n_j tal que $\Psi^{n_j}(K_j \cap K) = K$ (esto implica Ψ topológicamente mixing).

A la upla (K_1, \dots, K_n) se le llama partición de Markov para el Conjunto K .

Observación 2.2.1. Si K admite una partición de Markov, luego, admite particiones de Markov con longitud de intervalos arbitrariamente pequeñas.

La demostración queda a cargo del lector.

Observación 2.2.2. Si K es un Cantor dinamicamente definido:

definiendo $I_0 = K_1 \cup \dots \cup K_n$, $I_1 = I_0 \cap \Psi^{-1}(I_0), \dots, I_j = I_{j-1} \cap \Psi^{-1}(I_{j-1})$

se tiene $K = \cap_{j=0}^{+\infty} I_j$.

La demostración no es difícil, se deja a cargo del lector.

Consideremos ahora $\varphi \in \mathcal{D}iff^3(M)$ donde M es una superficie, presentando un conjunto básico tipo silla Λ y P punto fijo en él. Luego existe una reparametrización $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow W^s(P)$ de clase C^3 que lleva el 0 en P y verifica que $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ es una contracción lineal (simetricamente existe reparametrización de la variedad inestable que genera una expansión lineal) ([PT,1993]).

Recordamos que por ser el sistema dinámico de clase C^3 se tiene (para conjuntos básicos silla) foliación $C^{1+\varepsilon}$, y por lo tanto la proyección π por hojas de foliaciones inestables desde la variedad estable a la variedad estable es un difeomorfismo que se puede considerar $C^{1+\varepsilon}$. Se anuncia además en [PT,1993] (página 60) que para difeomorfismos C^2 aunque no se tenga foliación $C^{1+\varepsilon}$ las proyecciones (mapas de homonomía) se pueden considerar difeomorfismos $C^{1+\varepsilon}$. **La diferenciabilidad de la holonomía es el punto que limita la teoría ya que si pedimos menos diferenciabilidad de φ no tenemos la diferenciabilidad necesaria de la proyección, la cual es $C^{1+\varepsilon}$.** Además, la holonomía tiene derivada acotada sobre el conjunto básico por ser este último compacto. Ahora estamos prontos para el teorema que hace a esta sección:

Teorema 2.2.1. *Sea $\varphi \in \text{Diff}^3(M)$ presentando Λ conjunto básico silla, P punto periódico en Λ y α la reparametrización de $W^s(P)$ tal que $\alpha(0) = P$ y $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ es una contracción lineal.*

Entonces, existe K_0 intervalo en \mathbb{R} conteniendo el 0 tal que $\alpha^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap K_0$ es un conjunto de Cantor dinamicamente definido.

Se tiene un resultado simétrico para la variedad inestable.

La prueba de este resultado se puede encontrar en el apéndice de [PT,1993].

2.3. Espesura

En esta sección damos la definición de espesura original de Newhouse, luego se verá una definición equivalente que en algunos casos simplifica su cálculo.

Definición 2.3.1. Dado un conjunto de Cantor K en \mathbb{R} con intervalo minimal I , una presentación de él será una enumeración de sus gaps, es decir una familia de intervalos $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que contiene exactamente a los gaps de K . Fijada una presentación \mathcal{U} para $u \in K$ borde de un gap U definimos $\tau(K, \mathcal{U}, u) = \frac{l(C)}{l(U)}$ donde si $U = U_n$ en la presentación, C es la componente conexa de $I \setminus U_1 \cup \dots \cup U_n$ que contiene a u (a C se le llama puente).

Llamando $B = \{u \in K : u \in \partial U \text{ con } U \text{ gap de } K\}$ se define la espesura de K como:

$$\tau(K) = \text{Sup}_{\mathcal{U}} \{ \text{inf}_{u \in B} \{ \tau(K, \mathcal{U}, u) \} \}$$

Donde \mathcal{U} varía en las posibles presentaciones.

Observación 2.3.1. Para calcular $\tau(K)$ basta considerar las presentaciones U tales que numeran los gaps de forma que si $n < m$ $l(U_n) \geq l(U_m)$.

Para ver esto consideramos un gap U y su respectivo puente P para la presentación enunciada. Si el puente llega a un borde, dada cualquier otra presentación, para U la razón puente,gap es menor que la nuestra. Si el puente esta entre dos gaps U y V , dada cualquier otra presentación si el puente para esta fuese mas largo, atraviesa este segundo gap (que es de mayor tamaño que U), y luego para esta nueva presentación el puente hacia U de V es mas corto que P , por lo tanto la razón entre el puente de V y V es menor que la que hay entre P y U .

Corolario 2.3.1. *Como consecuencia de la observación anterior se tiene que*

$$\tau(K) = \inf_U \left\{ \frac{P}{U} \right\}$$

donde ahora U es un gap del conjunto de cantor K y P es, elegido un borde de U , el intervalo que une el borde de U con el gap mas cercano a U que tenga tamaño mayor o igual al de U (para el otro borde de U se tiene otro puente, y otra razón).

Definición 2.3.2. Decimos que dos conjuntos de Cantor están enganchados si sus respectivos intervalos minimales (aquellos cuyos bordes son mínimo y máximo del conjunto) se intersectan en un intervalo con interior no vacío y no se contienen uno al otro. Decimos además que los intervalos minimales están solapados. En general lo decimos para cualquier par de intervalos (abiertos o cerrados) que verifiquen la propiedad de estos últimos.

Lema 2.3.2. *Gap lemma* Dados K_1 y K_2 conjuntos de Cantor enganchados, si el producto de las espesuras $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2)$ es mayor que uno entonces K_1 y K_2 tienen intersección no vacía.

Demostración. Supongamos que los conjuntos considerados no se intersecan. Llamamos $[a, b]$ al intervalo minimal que contiene a K_1 y $[c, d]$ al intervalo minimal que contiene a K_2 , U, P nombraran gaps, puentes de K_1 y G, Q los de K_2 . Entonces por estar los conjuntos enganchados se tienen que existe U_0 y G_0 que están solapados. Ahora bien, por ser el producto de espesuras mayor a uno se tiene que o bien P_0 atraviesa a G_0 o Q_0 atraviesa a U_0 ($P_0Q_0 > U_0G_0$). Luego si es Q_0 quien atraviesa al gap U_0 aparece un nuevo gap G_1 de tamaño extrictamente menor al de G_0 solapado con U_0 que contiene un punto de K_1 , y si P_0 atraviesa a G_0 existe U_1 solapado con G_0 de tamaño menor extricto al de U_0 que contiene un punto de K_2 . De esta forma, por recurrencia, se pueden crear dos familias formadas por gaps $\{U_n\}_n$ y $\{G_n\}_n$ con las siguientes propiedades:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ U_n está enganchado con V_n .

Ambas son infinitas.

La longitud de U_n tiende a cero con n y lo mismo sucede con la longitud de V_n .

Tales propiedades de las familias $\{U_n\}_n$ y $\{G_n\}_n$ implican la existencia de un punto x donde acumulan el conjunto de bordes de los intervalos U_n , y el conjunto de bordes de los intervalos V_n . Por lo tanto x está en $K_1 \cap K_2$.

□

Definición 2.3.3. Dado un conjunto de Cantor K , definimos para un punto k de él la espesura local como:

$$\tau_{loc}(K, k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup\{\tau(\tilde{K}) : \tilde{K} \text{ es un conjunto de cantor contenido en } K \cap B(k, \varepsilon)\}$$

Observación 2.3.2. Dado un conjunto de Cantor K y $k \in K$ se tiene que existen conjuntos de Cantor arbitrariamente cerca de k con espesura arbitrariamente cerca de $\tau(K, k)$.

Observación 2.3.3. Para todo conjunto de Cantor se tiene $\tau(K) \leq \tau_{loc}(K, k)$ cualquiera sea el elemento k considerado.

Para probarlo basta elegir en cada $B(k, \varepsilon)$ dos gaps U y U' de forma que entre ellos los gaps tengan tamaños menores que el mínimo entre el de U y el de U' . Considerando \tilde{K} como el intervalo que queda entre estos dos gaps intersectado con K , se tendrá $\tau(\tilde{K}) \geq \tau(K)$ ya que todos los gaps-puentes considerados para \tilde{K} , son gap-puente de K .

Notación: Dado K conjunto de Cantor y U un Gap de él, $P(U)$ será un puente apoyado en U . En ciertos contextos los nombres de los intervalos significaran sus longitudes.

Observación 2.3.4. Sobre el comportamiento de la espesura y la espesura local de conjuntos de Cantor, que son difeomorfos a un conjunto de Cantor K por un difeomorfismo definido en todo el intervalo minimal se tiene:

$$\tau(f(K)) \leq \frac{M}{m} \tau(K) \text{ donde } M \text{ y } m \text{ son máximo y mínimo de } f'.$$

$$\tau_{loc}(K, k) = \tau_{loc}(f(K), f(k))$$

Para probar la primer afirmación consideramos U gap de K y $P(U)$ uno de sus puentes. Este puede terminar en un borde del intervalo minimal de K o sobre otro gap de K que llamamos V . Para el gap de $f(K)$ $f(U)$, se tiene que si $P(f(U))$ está contenido en $f(P(U))$ entonces $\frac{P(f(U))}{f(U)} \leq \frac{f(P(U))}{f(U)} \leq \frac{M}{m} \frac{P(U)}{U}$. En caso contrario

$P(U)$ no termina en el borde del intervalo minimal, y se tiene un gap V de K tal que $\frac{P(f(V))}{f(V)} \leq \frac{f(P(U))}{f(V)} \leq \frac{M}{m} \frac{P(U)}{V} \leq \frac{M}{m} \frac{P(U)}{U}$. De estas desigualdades se tiene que $\tau(f(K)) \leq \frac{M}{m} \tau(K)$.

La segunda afirmación es corolario de la primera, radica en que en entornos muy chicos de k y $f(k)$ se tiene $\frac{M}{m}$ y $\frac{m}{M}$ muy próximos a 1.

Observación 2.3.5. Consideremos un difeomorfismo definido sobre el intervalo minimal de un conjunto de Cantor K . La espesura de $f(K)$ se podrá considerar cercana a la de K conforme se tenga poca variación de la derivada sobre el intervalo. Para ver esto basta usar la observación anterior para f y f^{-1} observando que $\frac{M}{m}$ y $\frac{m}{M}$ están cerca de 1.

Observación 2.3.6. Sea f un homeomorfismo definido sobre el intervalo minimal de K , tal que es C^1 sobre los gaps de K y los valores de la derivada varían en (m, M) . Luego se tiene que es cierta la relación entre las espesuras dada en la observación 1.2.2 y por lo tanto tiene sentido la observación 1.2.3. La prueba de esto es análoga al caso estudiado en tales observaciones.

2.3.1. El Tent map.

A continuación encontraremos una familia de conjuntos de cantor dinamicamente definidos en el intervalo $[0, 1]$ a través de la función Tent map. Se hará de tal forma que se pueda conseguir espesura y espesura local arbitrariamente grande, y además se buscará que sean conjuntos invariantes, transitivos e hiperbólicos con un punto periódico con preimágenes densas en estos conjuntos.

Definición 2.3.4. Definimos el Tent map como el mapa $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observación 2.3.7. En virtud de que la derivada de T es expansiva sobre el conjunto $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ se puede probar que el T en el conjunto $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cap \cup_{k \in \mathbb{N}} \{T^{-k}(\frac{1}{2})\}$ es conjugado al Shift de dos simbolos (digamos 0 y 1) donde la correspondencia es dada por el itinerario de cada punto, codificando con 0 al intervalo $(0, \frac{1}{2})$ y con 1 al $(\frac{1}{2}, 1)$. Esto ultimo nos permite tomar puntos periódicos verificando cualquier itinerario periódico.

Teorema 2.3.3. *Dado un natural $m > 2$, existe un conjunto de Cantor K_m contenido en $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ invariante por T que verifica:*

Existe $q_m \in K_m$ punto periódico de T tal que el conjunto de preimágenes es denso en K_m .

T tiene diferencial constante 2 sobre K_m .

$\tau(K_m) = 2^{m-2} - 1$ y $\tau_{loc}(K_m)$ no depende del punto y es mayor a $2^{m-2} - 1$.

Demostración. Dado m consideramos una órbita periódica de periodo m tal que ordenándola según las iteraciones se pueda indexar de forma que q_2, \dots, q_{m-1} estén en $(0, \frac{1}{2})$ y q_m, q_1 en $(\frac{1}{2}, 1)$. Para tal órbita consideramos los puntos: q_{m-1}^* preimagen de q_1 en $(0, \frac{1}{2})$, y luego q_3^*, \dots, q_{m-1}^* de forma que $T^{-1}(q_i^*) \cap (0, \frac{1}{2}) = q_{i-1}^*$ con $i = 4 \dots m$. Se considera el conjunto $K^1 = [q_2, q_3^*] \cup \dots \cup [q_{m-1}, q_m^*] \cup [q_m, q_1]$: a partir de el se define, para todo natural n , $K^n = T^{-1}(K^{n-1}) \cap K^{n-1}$, así $K_m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^n$ tenemos un conjunto de Cantor dinamicamente definido.

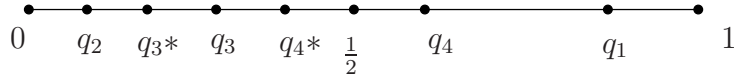


Figura 2.1: q_i, q_i^* para $m = 4$.

La existencia del punto periódico con preimágenes densas en K_m se tiene por construcción, y es q_m . La expansividad de la derivada y por lo tanto la hiperbolicidad se tiene por construcción, ya que la norma del diferencial en cualquier punto de K_m es 2.

En lo que queda nos concentramos en el cálculo de la espesura y la espesura local. para esto nos basamos en dos observaciones:

- 1 La espesura esta dada por $\frac{[q_2, q_3^*]}{[q_3^*, q_3]}$
- 2 $\frac{[q_2, q_3^*]}{[q_3^*, q_3]} = 2^{m-2} - 1$

A continuación nos concentramos en la demostración de 1. Llamamos configuraciones a los pares $(U, P(U))$, las configuraciones iniciales son aquellas tales que U es un gap del tipo (q_i^*, q_i) (o de otra forma $J \setminus K^1$ donde J es el intervalo minimal que contiene a K_m). Consideremos diferentes casos:

Para un gap inicial $(q_i^*, q_i) = T^{i-3}((q_3^*, q_3))$ con $3 \leq i \leq m - 1$ se tiene el puente de la derecha $[q_i, q_{i+1}^*] = T^{i-2}([q_2, q_3^*])$ (en el caso de haber q_5 , no como en la figura en la que igual se entiende la observación), pero entonces la razón que nos dan estos gaps-puentes son $\frac{T^{i-2}([q_2, q_3^*])}{T^{i-3}((q_3^*, q_3))}$, y es claro que todas estas proporciones quedan representadas por $\frac{(q_3, q_4^*)}{(q_3^*, q_3)}$, que obviamente es mayor a $\frac{[q_2, q_3^*]}{[q_3^*, q_3]}$. Al considerar

los gaps iniciales con sus puentes hacia la izquierda se tiene para un gap (q_i^*, q_i) el puente $[q_2, q_i^*]$. De ahí que $\frac{[q_2, q_i^*]}{(q_i^*, q_i)} \leq \frac{[q_{i-1}, q_i^*]}{(q_i^*, q_i)} = \frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)}$, por lo cual de todas las configuraciones iniciales, la razón que esta mas cerca de la espesura será $\frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)}$.

Para cualquier otro gap de K_m U , se observa que sus correspondientes puentes no atraviesan los gaps iniciales, además, para U existe un primer natural n_U tal que $U_0 = T^{n_U}(U)$ es un gap inicial. Como T^{n_U} es una función afín a una lineal de pendiente con módulo 2^{n_U} sobre $U \cup P(U)$ se tiene que $\frac{P(U)}{U} = \frac{T^{n_U}(P(U))}{U_0}$. Aquí se tiene dos casos, si $P(U)$ termina en otro gap no inicial V , se puede extender T^{n_U} sobre V y concluir que $T^{n_U}(P(U)) = P(U_0)$. En el caso que $P(U)$ termina sobre un gap inicial U_1 , se tiene que $T^{n_U}(P(U))$ se apoya entre los gaps U_0 y U_1 , de donde revisando el párrafo anterior se puede concluir $\frac{P(U)}{U} = \frac{T^{n_U}(P(U))}{U_0} \leq \frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)}$. Con estos dos casos se concluye que la espesura de K_m es $\tau(K_m) = \frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)}$.

Corolario 2.3.4. *El conjunto K_m del teorema anterior verifica para todo k en K_m $\tau_{loc}(K_m, k) = 2^{m-2} - 1$.*

Para la segunda observación hacemos el cálculo explícito de $\frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)}$. Dado m , sea $\gamma = 1 - q_1 = \frac{1}{2^{m-1}}$, entonces $q_2 = 2\gamma$, $q_3 = 4\gamma$ y $q_3^* = \frac{1-\gamma}{2^{m-2}}$. De ahí que $\tau(K_m) = \frac{[q_2, q_3^*]}{(q_3^*, q_3)} = \frac{\frac{1-\gamma}{2^{m-2}} - 2\gamma}{4\gamma - \frac{1-\gamma}{2^{m-2}}} = \frac{1-\gamma-2^{m-1}\gamma}{2^m\gamma-1+\gamma} = \frac{2^m-2^{m-1}-2}{2} = 2^{m-2} - 1$.

Por la observación 1.2.6 se tiene que $\tau_{loc}(K_m, k) \geq \tau(K) \geq 2^{m-2} - 1$ y con esto se concluye la demostración. □

2.4. Espesura y topología C^2

Como se observó en la primer sección de este capitulo, en caso de tener un sistema dinámico $\varphi \in \mathcal{D}iff^3(M)$ que presente un conjunto hiperbólico básico del tipo silla no trivial Λ_φ y P_φ punto periódico en él, se tiene que $\Lambda_\varphi \cap W^s(\varphi, P_\varphi) \cap I_\varphi$ es la imagen por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow W^s(\varphi, P_\varphi)$ de un conjunto de Cantor dinamicamente definido, que llamaremos K_φ (α depende continuamente de φ); donde I_φ es un intervalo de P_φ en $W^s(\varphi, P_\varphi)$ y α es una parametrización tal que $\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Recordamos además que se tiene el resultado análogo considerando la variedad inestable.

En esta sección se quiere considerar la dependencia de este conjunto de cantor dinamicamente definido, al variar el sistema dinámico φ en el espacio de los difeomorfismos C^3 ; para luego controlar la variación de la espesura de los mismos.

Para esto recordamos los siguientes aspectos:

El conjunto Λ_φ varía continuamente al variar el sistema dinámico, en el sentido de que existe un homeomorfismo de Λ_φ a Λ_ψ C^0 cercano a la identidad conforme a la cercanía de ψ a φ .

Por lo anterior se tiene P_φ cercano a P_ψ , mas aún sus respectivas variedades estables e inestables varían C^1 continuamente sobre partes compactas.

$\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ varía C^1 continuamente al variar φ .

El par (C, ε) que define la Hölder-continuidad de la derivada de π_φ (Holonomía de φ) depende continuamente φ .

Las parametrizaciones α de las variedades, que ven como una función lineal al difeomorfismo, varían C^1 continuamente al variar este.

Teniendo esto en cuenta surge también (de la construcción que se hizo en la sección 1) que el intervalo I_φ también se puede considerar variando continuamente.

En base a esto damos la siguiente noción de cercanía para conjuntos de Cantor en \mathbb{R} dinamicamente definidos.

Sean K y \tilde{K} conjuntos de cantor dinamicamente definidos, con sus respectivas funciones y particiones $\Psi, \tilde{\Psi}$ y $(K_1, \dots, K_l), (\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_p)$. Diremos que están cerca conforme:

$l = m$ y K_i este cerca a \tilde{K}_i como conjunto.

Ψ y $\tilde{\Psi}$ estén C^1 cerca, y el par (C, ε) este cerca del par $(\tilde{C}, \tilde{\varepsilon})$.

Observación 2.4.1. La noción anterior define una topología en el conjunto de los conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Para ver esto basta definir los entornos como se desprenden de la tal noción.

Observación 2.4.2. Sea $\varphi \in \mathcal{D}iff^3(M)$ tal que presenta un conjunto hiperbólico del tipo silla Λ_φ , con mas de un punto y P_φ punto periódico en él. Sea K_φ su conjunto de Cantor dinamicamente definido asociado. Luego existe \mathcal{U} entorno de φ en $\mathcal{D}iff^3(M)$ tal que para todo sistema dinámico ψ en \mathcal{U} se tiene K_ψ uniformemente cerca, según la topología definida en la observación anterior, a K_φ .

Para probar esto basta tomar la construcción de los conjuntos de Cantor echa en la sección 1 y considerar las propiedades enumeradas antes de la definición.

Lo que resta de la sección lo dedicaremos a probar que la espesura varía continuamente al variar el sistema φ en algún entorno \mathcal{U}_0 de él.

Lema 2.4.1. *(De distorsión acotada) Consideramos un conjunto de Cantor dinámicamente definido K mediante Ψ y la partición (K_1, \dots, K_l) . Luego para todo $\delta > 0$ existe $C_\varepsilon(\delta)$ tal que si q_1 y q_2 son puntos verificando que $\Psi^k(q_1), \Psi^k(q_2)$ están en un mismo K_{i_k} para todo $k = 0 \dots n$, y $[\Psi^k(q_1), \Psi^k(q_2)]$ tiene longitud menor que δ para todo $k = 0 \dots n$, se tiene:*

$$|\ln(|\Psi^{k'}(q_1)|) - \ln(|\Psi^{k'}(q_2)|)| < C_\varepsilon(\delta), \text{ con } C_\varepsilon(\delta) \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0.$$

Además $C_\varepsilon(\delta)$ para delta en un intervalo fijo varía uniformemente con ε siendo este último el exponente de la Hölder continuidad de la derivada de Ψ .

Demostración. Basta probar la fórmula para $k = n$. Se tiene para $i = 1, 2$ $\ln(|\Psi^{n'}(q_i)|) = \ln(|\Psi'(\Psi^{n-1}(q_i))| \cdot |\Psi'(\Psi^{n-2}(q_i))| \dots |\Psi'(q_i)|)$.

$$\text{Por lo tanto } |\ln(|\Psi^{n'}(q_1)|) - \ln(|\Psi^{n'}(q_2)|)| \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} |\ln(\Psi'(\Psi^i(q_1))) - \ln(\Psi'(\Psi^i(q_2)))|.$$

Se tiene además que por ser Ψ función expansora $|\Psi^i(q_1) - \Psi^i(q_2)| < \frac{\delta}{m^{n-i}}$ (con m el mínimo de la derivada) y $|\Psi'(q_{1,2})| > 1$, por lo cual $|\ln(\Psi'(\Psi^i(q_1))) - \ln(\Psi'(\Psi^i(q_2)))| < C|\Psi^i(q_1) - \Psi^i(q_2)|^\varepsilon < C(\frac{\delta}{m^{n-i}})^\varepsilon$

$$\text{Se tiene entonces } \sum_{i=0}^{i=n-1} |\ln(\Psi'(\Psi^i(q_1))) - \ln(\Psi'(\Psi^i(q_2)))| < \sum_{i=0}^{i=n-1} C(\frac{\delta}{m^{n-i}})^\varepsilon = C\delta^\varepsilon \sum_{i=0}^{i=n-1} (\frac{1}{m^\varepsilon})^{n-i} = C\delta^\varepsilon \frac{\sigma^\varepsilon - \sigma^{(n+1)\varepsilon}}{1 - \sigma^\varepsilon} \leq C\delta^\varepsilon \frac{\sigma^\varepsilon}{1 - \sigma^\varepsilon} \text{ donde } \sigma = \frac{1}{m}$$

Tenemos calculada entonces $C_\varepsilon(\delta) = C\delta^\varepsilon \frac{\sigma^\varepsilon}{1 - \sigma^\varepsilon}$ que tiende a cero cuando δ tiende a cero, y fijado un intervalo para δ C_ε varía uniformemente con ε .

□

Notación: A un intervalo con bordes a y b se le notará como $ab = [a, b]$, además haciendo abuso de notación, en ciertos contextos ab será la longitud del intervalo $[a, b]$.

Corolario 2.4.2. *Supongamos que estamos en las hipótesis del lema anterior, notamos $q_1 = a$, $q_2 = c$ y sea b un punto entre a y c . Entonces existe E_ε función continua de δ , tal que para todo $k \leq n$ si $\alpha = \Psi^k(a)$, $\beta = \Psi^k(b)$, $\gamma = \Psi^k(c)$ se tiene:*

$$|\frac{bc}{ab} - \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}| < \frac{bc}{ab} \cdot E_\varepsilon(\delta)$$

Donde $E_\varepsilon(\delta)$ tiende a cero cuando δ tiende a cero y, fijado un intervalo para δ , varía uniformemente con ε .

$$\text{Demostración. } |\frac{bc}{ab} - \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}| < \frac{bc}{ab} \cdot |1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}| = \frac{bc}{ab} \cdot |1 - \frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)}| \text{ con } p_1 \in [a, b] \text{ y } p_2 \in [b, c].$$

Por su parte tenemos por el lema anterior:

si $1 - \frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)} > 0$, entonces $1 - \frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)} < 1 - e^{-C_\varepsilon(\delta)} = E_1(\delta)$

si $1 - \frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)} < 0$, $\frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)} - 1 < e^{C_\varepsilon(\delta)} - 1 = E_2(\delta)$

entonces $|1 - \frac{\Psi^{k'}(p_1)}{\Psi^{k'}(p_2)}| < |E_1(\delta)| + |E_2(\delta)| = E_\varepsilon(\delta)$. Por lo tanto $|\frac{bc}{ab} - \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}| < \frac{bc}{ab} E_\varepsilon(\delta)$, donde $E_\varepsilon(\delta)$ tiende a cero cuando δ tiende a cero y fijado un intervalo donde varíe δ se tiene E_ε variando uniformemente con ε . \square

El próximo corolario será un detalle técnico en la prueba del último teorema de esta monografía.

Corolario 2.4.3. *Todo cantor dinamicamente definido tiene espesura positiva.*

Demostración. La prueba de este corolario surge de una aplicación inmediata del lema de distorsión. La dejamos a cargo del lector. \square

Corolario 2.4.4. *En las hipótesis del lema anterior, consideramos L el intervalo definido por q_1 y q_2 . Sean I y J dos intervalos contenidos en L tales que $J \geq I$ y $\Psi^n(I) \geq \Psi^n(J)$. Entonces $\frac{\Psi^n(I)}{\Psi^n(J)} \in B(1, E_\varepsilon(\delta))$, siendo E_ε La función hallada en el corolario anterior.*

Demostración. Trivialmente se obtiene $\frac{\Psi^n(I)}{\Psi^n(J)} > 1$. Por otra parte $\frac{\Psi^n(I)}{\Psi^n(J)} \leq \frac{J}{I} \frac{\Psi^n(I)}{\Psi^n(J)} = \frac{\Psi^{n'}(p_1)}{\Psi^{n'}(p_2)}$ de lo cual por el mismo cálculo efectuado en el corolario anterior se tiene $\frac{\Psi^n(I)}{\Psi^n(J)} \leq 1 + E_\varepsilon(\delta)$. Esto completa la prueba. \square

Teorema 2.4.5. *Dado un conjunto de Cantor dinamicamente definido K se tiene para todo $\delta > 0$ suficientemente chico, un conjunto finito E_δ formado por pares (U, P) siendo estos gap-puente de K , tales que para $i_\delta = \inf\{\frac{P}{U} : (U, P) \in E_\delta\}$ se tiene:*

Si $\delta_1 < \delta_2$ entonces $E_{\delta_1} \subset E_{\delta_2}$.

$|\tau(K) - i_\delta| < M(K)(\delta)$ donde $M(K)(\delta)$ es una función continua de δ que tiende a cero cuando δ tiende a cero. Además $M(K)$ varía uniformemente (para δ en algún compacto) al variar el conjunto K , según la topología que se definió en los conjuntos de Cantor dinamicamente definidos.

i_δ varía continuamente al variar el conjunto de Cantor dinamicamente definido, según la topología considerada en el ítem anterior.

Demostración. Sean V_1, \dots, V_m los gaps del conjunto K que define su partición de Markov. Consideramos $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i=1\dots n}$ conjunto finito de gaps de K de forma que:

\mathcal{A} tiene como elementos a V_1, \dots, V_m .

Para todo gap U que no esté en \mathcal{A} , se tiene que su longitud es menor a la de todo elemento de \mathcal{A} .

Si definimos $C = I \setminus \cup_{i=1 \dots n} U_i$ donde I es el intervalo minimal que contiene a K , entonces sus componentes conexas tienen longitud menor a $\frac{\delta}{M}$ con M el máximo de la derivada de Ψ . Además pedimos que δ sea suficientemente chico de forma que si U no está en \mathcal{A} pero $\Psi(U)$ sí, entonces $\Psi(U)$ no sea un elemento de $\{V_1, \dots, V_m\}$. O sea $\Psi(U)$ está en el dominio de Ψ .

Definimos entonces $E_\delta = \{(U, P) : U \in \mathcal{A} \text{ y } P \text{ puente de } U\}$. Sea $i_\delta = \min\{\frac{P}{U} : (U, P) \in E_\delta\}$, se tiene que $\tau(K) \leq i_\delta$.

Consideramos F otra familia de pares gap-puente tales que para $(U, P) \in F$ se tiene $\frac{P}{U} < \tau(K) + \delta$.

Dado un gap-puente que esté en F se demostrará que existe un par (U', P') de E_δ tal que:

$$\frac{P}{U} \geq \frac{P'}{U'} \frac{1}{a(\delta)} - 2b(\delta)$$

Donde $a(\delta)$ es mayor que uno y tiende a uno cuando δ tiende a cero, $b(\delta)$ es mayor que cero y tiende a cero cuando δ tiende a cero. Además se tendrá ambas funciones variando uniformemente al variar K según la topología que se dio en el conjunto de los conjuntos de Cantor dinamicamente definidos.

De ahí se tendrá $|\tau(K) - i_\delta| \leq |i(\delta) \frac{1}{a(\delta)} - 2b(\delta) - i(\delta)| \leq i(\delta) |1 - \frac{1}{a(\delta)}| + 2b(\delta) < M |1 - \frac{1}{a(\delta)}| + 2b(\delta)$, donde $M = \max\{\frac{P}{U} : (U, P) \in E_\delta\}$. Se definirá entonces $M(K)(\delta) = M |1 - \frac{1}{a(\delta)}| + 2b(\delta)$ y por lo anterior se tendrá que tal función verifica la propiedad dos enunciada en la tesis del teorema. La propiedad uno es trivial.

A continuación demostraremos la afirmación anterior, la demostración se hará a través del estudio de casos complementarios sobre el par (U, P) . La tercer propiedad que aparece en la tesis del teorema se demostrará al final.

Dado un par $(U, P) \in F$ nombraremos los intervalos mediante los bordes que lo definen: $U = ab$ y $P = bc$. Si (U, P) está en E_δ la afirmación es trivial, consideramos de aquí en adelante que el par no es elemento de E_δ .

Por la definición de \mathcal{A} se tiene ac contenido en alguna componente conexa de C . Por otro lado de la expansividad de la función Ψ se tiene que existe un primer natural n tal que $\Psi^n(ab) = \alpha\beta$ con $\alpha\beta \in \mathcal{A}$. Discutimos según dos grandes casos.

1- Existe $k < n$ y $ns \subset bc$ tal que $\Psi^k(ns) = \eta\xi$ es un gap del conjunto \mathcal{A} . Es fácil ver que tal situación implica la existencia de un gap $n's'$ con las siguientes propiedades:

$Psi^{n-1}(n's') = \eta'\xi'$ gap del conjunto \mathcal{A} , $\Psi^k(as')$ no contiene ningún elemento de \mathcal{A} para todo $k = 1 \dots n - 2$.

Por las propiedades de \mathcal{A} podemos definir $\Psi^n(n's') = \Psi(\eta'\xi) = \eta''\xi''$, siendo este último gap en \mathcal{A} .

En general se tiene en virtud del corolario 1.4.1 y la pertenencia al conjunto F se tiene: $\frac{bc}{ab} > \frac{bn'}{ab} > \frac{\beta\eta''}{\alpha\beta} - (\tau(K) + \delta)E_\varepsilon(\delta)$. Al valor $(\tau(K) + \delta)E_\varepsilon(\delta)$ le llamamos $b(\delta)$ y es claro que como función tiene las propiedades anunciadas.

De aquí tomamos dos posibilidades:

$\alpha\beta \leq \eta''\xi''$ entonces $\frac{bc}{ab} > \frac{P(\alpha\beta)}{\alpha\beta} - b(\delta)$ lo que aprueba la afirmación.

Si por el contrario $\alpha\beta > \eta''\xi''$ se tiene en virtud del corolario 1.4.2 y de las propiedades del conjunto \mathcal{A} que $\frac{\alpha\beta}{\eta''\xi''} \in B(1, E_\varepsilon(M\delta))$. Tenemos entonces $\frac{bc}{ab} > \frac{\beta\eta''}{\alpha\beta} - b(\delta) > \frac{\beta\eta''}{\eta''\xi''} \frac{1}{(1+E_\varepsilon(M\delta))} - b(\delta)$ Definiendo $a(\delta) = \frac{1}{(1+E_\varepsilon(M\delta))}$ se tiene la afirmación para el caso considerado. Ahora consideraremos el segundo caso.

2- $\Psi^k(ac) \subset C$ para todo $k = 1 \dots n - 1$. Consideramos distintas situaciones del gap cd .

Si $\Psi^i(cd)$ está en \mathcal{A} para $0 \leq i \leq n$, sea $\gamma = \Psi^n(c)$ y $\gamma\rho$ gap en \mathcal{A} . Si $\alpha\beta \leq \gamma\rho$ se tiene en virtud del corolario 1.4.1 $\frac{bc}{ab} > \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} - b(\delta) \geq \frac{P(\alpha\beta)}{\alpha\beta} - b(\delta)$ lo cual verifica la afirmación.

Por el contrario, si $\alpha\beta > \gamma\rho$ se verifica que en virtud de la definición de E_δ y los corolarios 1.4.1 y 1.4.2 $\frac{bc}{ab} > \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} - b(\delta) > \frac{\beta\gamma}{\gamma\rho} \frac{1}{a(\delta)} - b(\delta)$ y nuevamente verificamos lo buscado, ya que en este caso $\beta\gamma = P(\gamma\rho)$.

Si $\Psi^k(cd)$ no está en \mathcal{A} para ningún $k = 1 \dots n$. Consideramos en particular $c'd' = \Psi(cd)$, entonces consideramos U gap en $\beta d'$ de mayor longitud posible y si hay varios con esa longitud tomamos el mas cercano a β . Luego su puente estará apoyado en β y $(U, P(U))$ está en las condiciones estudiada para (ab, cd) en el caso anterior. Entonces tenemos $\frac{bc}{ab} \geq \frac{bc}{cd} > \frac{\beta\gamma}{\gamma\rho} - b(\delta) \geq \frac{P(U)}{U} - b(\delta) > \frac{P'}{U'} \frac{1}{a(\delta)} - 2b(\delta)$, lo cual verifica la afirmación.

El estudio de estos casos complementarios concluyen la prueba de las primeras dos afirmaciones enunciadas en la tesis del teorema.

El tercer resultado surge de que dado δ podemos elegir un entorno de K de forma que los conjuntos $E_\delta(\tilde{K})$ contengan pares que al unirlos estén arbitrariamente cerca (con la noción usual de distancia de conjuntos en la recta) para todo \tilde{K} en el entorno. Tal afirmación se demuestra fácilmente a partir de la definición de los entornos y la construcción de los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos.

□

Teorema 2.4.6. *Consideramos el espacio de los conjuntos de Cantor dinámicamente definidos con la topología que venimos utilizando. Entonces la función que a cada elemento K le asocia la espesura $\tau(K)$ es continua.*

Demostración. Dado K conjunto de Cantor dinámicamente definido consideramos un entorno \mathcal{U}_1 tal que para todo par de elementos K_1 y K_2 en él se tenga $\|M(K_1) - M(K_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (la norma es la infinito).

Consideramos δ de forma que $M(K)(\delta) < 3$ y un entorno \mathcal{U}_2 tal que si K_1 y K_2 están en el $|i_\delta(K_1) - i_\delta(K_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por lo tanto se tiene para \tilde{K} en $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ $|\tau(K) - \tau(\tilde{K})| \leq |\tau(K) - i(\delta)(K)| + |i(\delta)(K) - i(\delta)(\tilde{K})| + |\tau(\tilde{K}) - i(\delta)(\tilde{K})| \leq M(K)(\delta) + M(\tilde{K})(\delta) + |i(\delta)(K) - i(\delta)(\tilde{K})| < \varepsilon$

□

Este último teorema nos afirma que la variación de la espesura, de los cantors dinámicamente definidos asociados a sistemas dinámicos C^3 , es continua respecto a la topología C^3 .

En referencia al título podemos decir lo siguiente: a lo largo del capítulo se utiliza la hipótesis de regularidad C^3 ya que esto implica naturalmente foliación $C^{1+\varepsilon}$ y por lo tanto holonomía $C^{1+\varepsilon}$. Como ya se dijo anteriormente en [PT,1993] se anuncia que al considerar sistemas dinámicos C^2 se puede considerar la holonomía con diferenciabilidad $C^{1+\varepsilon}$. Esto último valida todos los resultados para los difeomorfismos en el espacio $Diff^2(M)$.

Capítulo 3

Tangencias homoclínicas y la familia cuadrática.

En este capítulo se consideran difeomorfismos de clase C^2 , que presentan una tangencia homoclínica debida a un punto silla disipativo. Mediante técnicas de renormalización del desdoblamiento de la tangencia, probaremos que arbitrariamente cerca de él (en la topología C^2) se puede conseguir una curva de difeomorfismos cuyos elementos tengan conjugaciones, en regiones arbitrariamente cerca del punto de tangencia, a elementos de la familia cuadrática indexada en un intervalo real de tamaño arbitrario.

Esto último nos permitirá asociar diferentes propiedades dinámicas sobre difeomorfismos de tales curvas, que representan perturbados del difeomorfismo original.

Con esta herramienta se accederá a la teoría de sistemas dinámicos genéricos.

3.1. Tangencias genéricas y familias de difeomorfismos.

Definición 3.1.1. Sea M una variedad diferenciable, S_1 y S_2 variedades encajadas en M tales que se intersecan en P punto de M . Diremos que la intersección es transversal si $T_pM = T_pS_1 \oplus T_pS_2$.

Definición 3.1.2. Sea M una variedad diferenciable y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$. Una tangencia homoclínica es un punto de intersección no transversal entre la variedad estable y la variedad inestable de un mismo punto silla.

Definición 3.1.3. Sea M una superficie y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$ con $r \geq 2$, P_0 punto silla del difeomorfismo cuyas variedades, estable e inestable, presentan un punto de tangencia

en q . Decimos que es una tangencia cuadrática si en algún entorno de q existe una carta tal que $W_\varepsilon^s(\varphi, q)$ está representada por una línea horizontal mientras $W_\varepsilon^u(\varphi, q)$ está representada por una parábola tangente en q a $W_\varepsilon^s(\varphi, q)$.

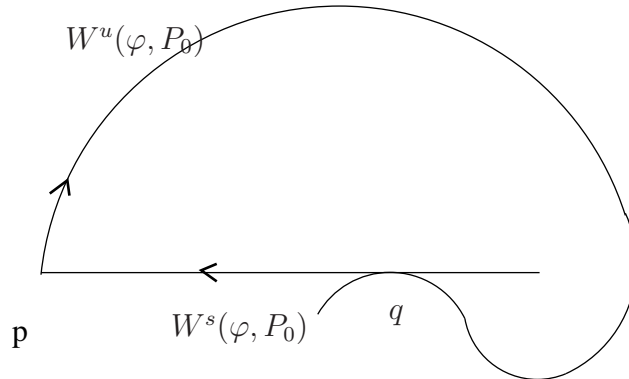


Figura 3.1: Tangencia homoclínica cuadrática.

Observación 3.1.1. Considerando el subconjunto de difeomorfismos en $\mathcal{D}iff^r(M)$ que presentan tangencias homoclínicas, se tiene un subconjunto abierto y denso, relativo, de difeomorfismos que presentan al menos una tangencia cuadrática.

La demostración de esto es evidente, para la propiedad abierta se precisa de la topología C^2 .

Definición 3.1.4. Consideramos una curva de difeomorfismos $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I \subset \mathbb{R}} \subset \mathcal{D}iff^2(M)$, donde el elemento φ_0 presenta en q una tangencia homoclínica cuadrática. Diremos que la familia desdobla genéricamente la tangencia en un entorno de q , si para un entorno de q se tiene una familia de cambios de coordenadas $\{a_\mu\}_{\mu \in I}$ tales que en el entorno ven a la continuación de la variedad estable representada por $\{(x, y) : y = 0\}$, mientras la continuación del intervalo de variedad inestable es representado por el conjunto $\{(x, y) : y = -ax^2 + b\mu\}$.

Para una curva genérica de difeomorfismos de clase C^2 que desdoblen una tangencia cuadrática se tiene desdoblamiento genérico. La regularidad de los cambios de coordenadas a_μ es la misma que la del difeomorfismo φ_μ , para el detalle referirse a [NPT,1983].

Observación 3.1.2. Sea $\varphi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ tal que presenta una tangencia homoclínica cuadrática en q . Luego existe una curva de difeomorfismos C^2 que desdobla la tangencia genéricamente, donde $\varphi_0 = \varphi$.

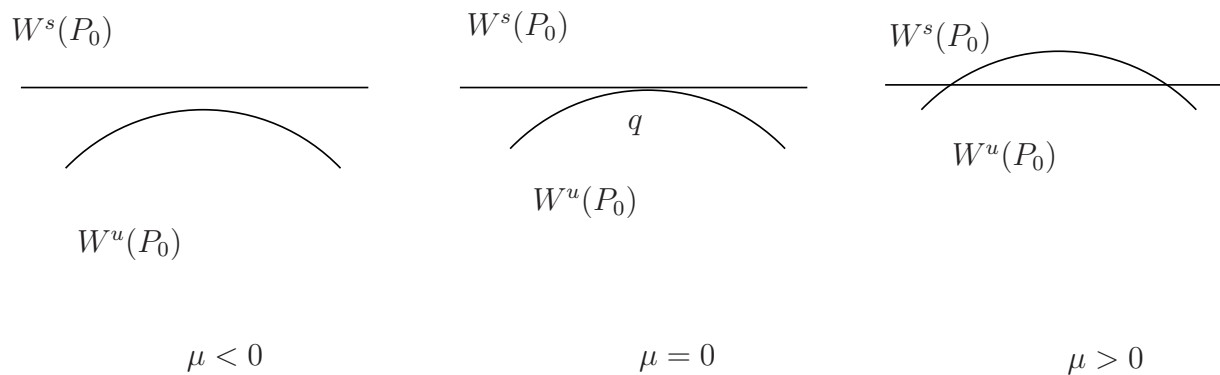


Figura 3.2: Desdoblamiento genérico de la Tangencia homoclínica cuadrática.

Demostración. Consideramos una curva continua de difeomorfismos C^2 $h_\mu : M \rightarrow M$, con $h_0 = Id$, el soporte de los mapas contienen al entorno que define la tangencia cuadrática y los mapas son tales que en tal entorno transforma al conjunto $\{(x, y) : y = -x^2\}$ en el conjunto $\{(x, y) : y = -x^2 + \mu\}$. Si se considera el entorno suficientemente chico, y con él los soportes de los mapas, al considerar la familia de difeomorfismos cuyos elementos son $\varphi_\mu = h_\mu \circ \varphi$ se tiene una familia que desdobla genéricamente la tangencia en q . \square

3.2. Coordenadas linealizantes.

Consideramos φ difeomorfismo en alguna variedad diferenciable de clase C^r , con $2 \leq r \leq \infty$.

Siendo P_0 un punto silla del mismo recordamos que existe un conjugación C^0 local entre φ y $d_{P_0}\varphi$ (teorema de Grobman-Hartman). En lo que sigue llamaremos h a la conjugación con dominio en el espacio tangente. Del resultado original se tiene que la regularidad de h es por lo menos de clase C^0 , en el caso de los difeomorfismos C^∞ en [S,1958], se muestra que en un abierto denso de este conjunto se consigue cambio de coordenadas C^2 .

Lo que se hará a continuación es cambiar el dominio del cambio de coordenadas a un conjunto distinto, extendiendo el cambio de coordenadas h teniendo en cuenta que el difeomorfismo siga siendo, según este nuevo cambio de coordenadas, lineal.

Consideramos en el espacio tangente un cuadrado U centrado en el origen, contenido en el entorno de definición del mapa h . consideramos los conjuntos $U_i = d_{P_0}\varphi^i(U)$ con i

recorriendo los enteros. Ver figura 3.3.

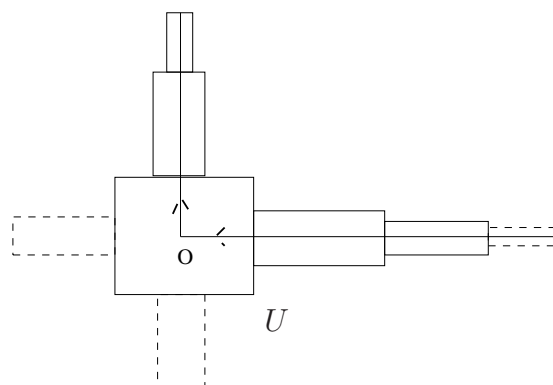


Figura 3.3: Construcción del dominio de las coordenadas linealizantes.

Definimos la extensión de h a la unión de los conjuntos U_i que llamaremos \tilde{h} . Si x está, para $i > 0$, en $U_i \setminus \cup_{j=0..i-1} U_j$ se tendrá $\tilde{h}(x) = \varphi^i \circ h \circ d_{p_0} \varphi^{-i}(x)$, mientras si x está, para $i < 0$ en $U_i \setminus \cup_{j=i+1..,0} U_j$ se tendrá $\tilde{h}(x) = \varphi^i \circ h \circ d_{p_0} \varphi^{-i}(x)$.

Dependiendo del difeomorfismo φ existen dos enteros $j \leq 0$ y $k \geq 0$ tales que $\tilde{h} : \cup_{i=j}^k U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo sobre su imagen, que tiene como regularidad el mínimo entre la regularidad de φ y la regularidad de h . El dominio de las coordenadas linealizantes será $\cup_{i=j}^k U_i$.

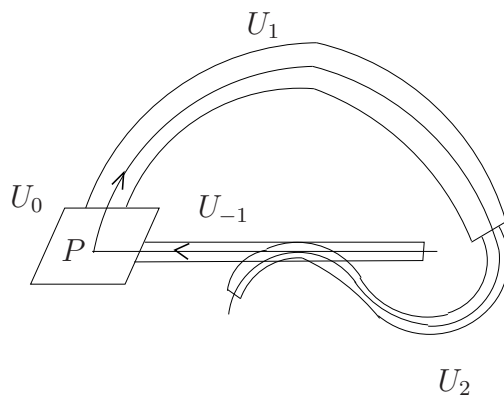


Figura 3.4: En este ejemplo un posible dominio del cambio de coordenadas es definido por $j = -1$ y $k = 1$.

Si consideramos un punto (\tilde{x}, \tilde{y}) en el dominio de las coordenadas linealizantes que verifica que $\varphi(\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ está en el codominio de este, se tendrá entonces $\tilde{h}^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\lambda \tilde{x}, \sigma \tilde{y})$, de ahí la denominación linealizantes.

Sobre la regularidad del cambio de coordenadas tenemos que, tomando en cuenta su construcción y el resultado de Steremberg [s], en un abierto denso de los difeomorfismos C^∞ se puede tomar de clase C^2 .

Las siguientes observaciones no son difíciles de demostrar y forman la base del teorema central de esta sección. Sus demostraciones se basan en el λ -lemma y en la continuidad de partes compactas de variedades estables e inestables al variar el difeomorfismo.

Observación 3.2.1. Sea φ un difeomorfismo C^∞ de alguna superficie, que presenta una tangencia homoclínica cuadrática en un punto q entre las variedades estable e inestable de un punto P_0 . Luego existen coordenadas linealizantes cuyo codominio contiene en su interior a P_0 , a q y al intervalo de variedad estable que une P_0 con q . Además existe un natural N y un punto r en el dominio de tales coordenadas, tales que $\varphi^N(r) = q$.

Observación 3.2.2. Sea $\{\varphi_\mu\}$ familia de difeomorfismos C^∞ sobre una superficie, que desdobra genéricamente una tangencia homoclínica de φ_0 . Supongamos que $\varphi_0 = \varphi$ está en las hipótesis de la observación anterior.

Luego para algún entorno $(-\gamma, \gamma)$ se tiene para todo parámetro $\mu \in (\gamma, \gamma)$ coordenadas linealizantes para φ_μ , tales que:

Para φ_0 se tiene el cambio de coordenadas encontrado en la observación anterior.

Para cada μ el codominio de las coordenadas linealizantes varía continuamente respecto de el del parámetro, en particular se puede considerar que contiene un entorno de q cuya reparametrización es la definida por el desdoblamiento genérico de la tangencia homoclínica.

Para cada μ existe un punto r dentro del dominio tal que $\varphi_\mu^N(r) = v$, siendo v el vértice de la parábola que define en cada μ el desdoblamiento genérico de la tangencia. Este punto r varía continuamente con el parámetro.

3.3. Teorema central.

Definición 3.3.1. Sea M superficie y $\varphi \in \mathcal{D}iff^r(M)$. Decimos que un punto fijo silla P de φ es disipativo si $d_P\varphi$ tiene valores propios λ y σ tales que $\lambda \cdot \sigma < 1$.

Teorema 3.3.1. *Sea $\{\varphi_\mu\}$ una familia de difeomorfismos de clase C^∞ sobre una variedad M de dimensión 2, verificando:*

Para todo valor de parámetro, μ , existe P_μ punto silla disipativo (que es continuo respecto del parámetro).

φ_0 presenta una tangencia cuadrática en $q \in W^s(P_0) \cap W^u P_0$ que es desdoblada genéricamente por la familia.

La curva de difeomorfismos está en el abierto denso que asegura coordenadas linealizantes C^2

Entonces existe un natural N , tal que para cualquier otro natural n suficientemente grande se tienen:

$Mn : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismos (sobre sus respectivas imágenes) afín al tipo lineal, con $\{I_n\}$ intervalos convergiendo a \mathbb{R} .

$\psi_{\tilde{\mu},n} : D_n \rightarrow V$ donde V es algún entorno de q en M y $\{D_n\}$ son rectángulos conteniendo al origen, que tienden a \mathbb{R}^2 cuando n tiende a infinito.

Verificando:

La sucesión de mapas $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (Mn(\tilde{\mu}), \psi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ es tal que fijado un compacto de \mathbb{R}^3 su imagen por esta sucesión converge a $(0, q)$.

Para todo compacto K de \mathbb{R}^3 existe un natural n_k tal que para todo $n > n_k$ la sucesión de mapas $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\mu}, \psi_{\tilde{\mu},n}^{-1} \circ \varphi_{Mn(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ está definida sobre K y tiende C^2 -uniformemente sobre este compacto al mapa $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}_{\tilde{\mu}})$ con $\tilde{\varphi}_{\tilde{\mu}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{y}, \tilde{y}^2 + \tilde{\mu})$.

DEMOSTRACIÓN.

Para cada difeomorfismo φ_μ podemos considerar al punto silla representado por el $(0, 0)$, la variedad estable representada por el eje x , un punto r sobre la variedad inestable representado por $(0, 1)$ y el intervalo de variedad inestable que define el desdoblamiento genérico representado por una parábola con vértice en el punto $(1, \mu)$. Esto se puede hacer en general mediante los cambios de coordenadas que define el desdoblamiento genérico. Sobre tal reparametrización, para cada μ , consideramos las coordenadas linealizantes encontradas en la observación 3.2.2.

Es claro que luego de este primer cambio de coordenada, dado (x, y) dentro de su dominio se tiene al conjugar $\varphi_\mu(x, y) = (\lambda x, \sigma y)$. De ahí que cada (x, y) que verifique que su órbita hasta n quede contenida en tal conjunto se tenga $\varphi_\mu^{n+N}(x, y) = \varphi_\mu^N(\lambda^n x, \sigma^n y)$.

Luego, se considera $\varphi_\mu^N(x, y+1) = (1, 0) + (H_1(x, y, \mu), H_2(x, y, \mu))$ y luego utilizando el desarrollo de Taylor de las funciones coordenadas, escribimos $\varphi_\mu^N(x, y+1) = (1, 0) + (\alpha y + \tilde{H}_1(x, y, \mu), \beta y^2 + \mu + \gamma x + \tilde{H}_2(x, y, \mu))$.

Introducimos ahora nuestro primer cambio de coordenadas M_n . Sean $0 < \lambda < 1 < \sigma$ valores propios de $d_{P_0}\varphi$, la reparametrización viene dada por $M_n(\tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mu}}{\sigma^{2n}} + \sigma^{-n} - \gamma\lambda^n$ con dominios intervalos compactos (por definición), tales que su imagen sea un conexo por cero de forma que quede en los parámetros considerados por las parametrizaciones previas. De cualquier forma ya se puede ver que por ser aquellos parámetros un intervalo fijo, los dominios de estos mapas se pueden considerar compactos que tiendan a \mathbb{R} .

Para la construcción de los cambios de coordenadas $\psi_{\tilde{\mu},n}$ fijado un intervalo arbitrario $[a, b]$ observamos:

Para todo $\tilde{\mu} \in [a, b]$ y todo natural n suficientemente grande existe $B_n = [0, 1 + a] \times [0, \sigma^{-n}]$ tal que $\varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^k(B_n)$ está contenido en el dominio de coordenadas linealizantes para $k = 1 \dots n$.

Para tales conjuntos B_n existe $V_n = [0, \gamma_n] \times [1 - \varepsilon_n, 1 + \varepsilon_n]$ tales que $\varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^N(V_n)$ está contenido en B_n . Además se tiene $\gamma_n = c_1\sigma^{-n}$ y $\varepsilon_n = c_2\sqrt{M_n(\tilde{\mu})}$.

A continuación se justifica la existencia de tales conjuntos. Introducimos la figura 3.5 en la que se apoya la construcción.

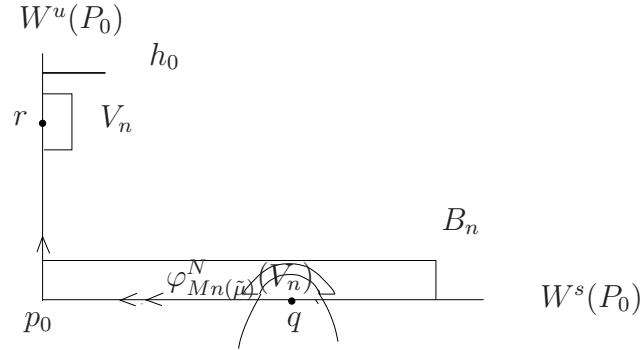


Figura 3.5: h_0 es el borde superior del dominio de las coordenadas linealizantes, y es mayor a uno. Recordamos que según nuestras parametrizaciones $r = (0, 1)$ y $q = (1, 0)$.

Para construir $B_n = [0, 1 + a] \times [0, h_0\sigma^{-n}]$ basta tomar $h_0 < 1$ de forma que $(0, h_0)$ esté en el dominio de las coordenadas linealizantes.

Construido B_n tenemos que asociarle V_n . Para esto se observa que para $\tilde{\mu} \in [a, b]$ se tiene para n suficientemente grande $M_n(\tilde{\mu}) = \sigma^{-n}(\tilde{\mu}\sigma^{-n} + 1 - \gamma(\sigma\lambda)^n)$ positivo y menor a $h_0\sigma^{-n}$, mas aún se puede considerar $h_0\sigma^{-n} - M_n(\tilde{\mu}) > c\sigma^{-n}$. Esto nos permite construir para los parámetros en $[a, b]$ y n suficientemente los conjunto V_n como se muestra en la

figura 3.5. Además utilizando la continuidad de las derivadas parciales se puede construir $V_n = [0, \gamma_n] \times [1 - \varepsilon_n, 1 + \varepsilon_n]$ con $\gamma_n = c_1 \sigma^{-n}$ y $\varepsilon_n = c_2 \sqrt{M_n(\tilde{\mu})}$.

Estamos ahora en condiciones de definir los mapas $\psi_{\tilde{\mu}, n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$x = \sigma^{-n} \tilde{x} + 1$$

$$y = \sigma^{-2n} \tilde{y} + \sigma^{-n}$$

Donde $D_n = \psi_{\tilde{\mu}, n}^{-1}(B_n)$.

Observamos, para lo que resta de demostración, que fijado $[a, b]$ dado cualquier compacto K existe un natural n_k tal que para todo natural n mayor a n_k el conjunto K queda contenido en los dominios D_n . Mas aún, se puede considerar $\varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^n \circ \psi_{\tilde{\mu}, n}(K)$ contenido en V_n , para todo $\tilde{\mu} \in [a, b]$.

Para observar esto consideramos sin pérdida de generalidad $K = I \times J$, entonces tenemos $\varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^n \circ \psi_{\tilde{\mu}, n}(K) = \lambda^n \sigma^{-n} I \times \sigma^{-n} J + 1$. Por su parte para n suficientemente grande tenemos:

$\lambda^n \sigma^{-n} I$ queda contenido en $[0, \gamma_n]$ ya que el orden de infinitésimo de γ_n es $c_1 \sigma^{-n}$.

$\sigma^{-n} J$ queda contenido en $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ ya que $\varepsilon_n = c_2 \sigma^{-\frac{n}{2}}$.

Esto último nos permite concluir que existe tal n_k .

De la definición de los mapas ya tenemos demostrada la primera parte del teorema.

Ahora estamos en condiciones de calcular el mapa sobre un compacto K de \mathbb{R}^2 . La cuenta que se hará, como ya se aclaró, tiene sentido para todo natural suficientemente grande.

$$\psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \circ \varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{n, \tilde{\mu}}(\tilde{x}, \tilde{y}):$$

$$\psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \circ \varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^{N+n} \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma^n} + 1, \frac{\tilde{y}}{\sigma^{2n}} + \sigma^{-n} \right) = \psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \circ \varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^N \left(\lambda^n \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma^n} + 1 \right), \sigma^n \left(\frac{\tilde{y}}{\sigma^{2n}} + \sigma^{-n} \right) - 1 + 1 \right) \quad (3.1)$$

donde sumo y resto uno para obtener $\varphi_{\tilde{\mu}}^N(x, y + 1)$ quedando 5.1

$$= \psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \circ \varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^N \left(\lambda^n \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma^n} + 1 \right), \frac{\tilde{y}}{\sigma^n} + 1 \right) = \psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \left((1, 0) + \left(\alpha \left(\frac{\tilde{y}}{\sigma^n} \right) + \tilde{H}_1(\cdot), \beta \left(\frac{\tilde{y}}{\sigma^n} \right)^2 + M_n(\tilde{\mu}) + \gamma \left(\lambda^n \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma^n} + 1 \right) \right) + \tilde{H}_2(\cdot) \right) \right)$$

Luego obtenemos

$$\begin{aligned} & \psi_{n, \tilde{\mu}}^{-1} \circ \varphi_{M_n(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{n, \tilde{\mu}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \\ & \left(\sigma^n \alpha \left(\frac{\tilde{y}}{\sigma^n} \right) + \sigma^n \tilde{H}_1(\cdot), \sigma^{2n} \beta \left(\frac{\tilde{y}}{\sigma^n} \right)^2 + \sigma^{2n} (M_n(\tilde{\mu}) - \sigma^{-n}) + \sigma^{2n} \gamma \left(\lambda^n \left(\frac{\tilde{x}}{\sigma^n} + 1 \right) \right) + \sigma^{2n} \tilde{H}_2(\cdot) \right) \\ & = \left(\alpha \tilde{y} + \sigma^n \tilde{H}_1(\cdot), \beta \tilde{y}^2 + \tilde{\mu} + \gamma \lambda^n \sigma^n \tilde{x} + \sigma^{2n} \tilde{H}_2(\cdot) \right) \end{aligned}$$

Consideraremos coordenada a coordenada y buscaremos su límite.

Tomamos la primer coordenada $f_1(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha\tilde{y} + \sigma^n \tilde{H}_1(\cdot)$. La función $\tilde{H}_1(\cdot)$ tiene un desarrollo de Taylor de forma que $\tilde{H}_1(\cdot) = P_1(\cdot) + R_2(\cdot)$ con $\lim_{\|(\cdot)\| \rightarrow 0} \frac{R_2(\cdot)}{\|(\cdot)\|^2} = 0$. Para P_2 se tiene termino independiente, coeficiente en y y coeficiente en μ nulos. Luego fijada la terna $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y})$ se tiene que $\sigma^n P_2(Mn(\tilde{\mu}), \lambda^n(\sigma^{-n}x + 1), \sigma^n(\sigma^{-2n}y + \sigma^{-n}))$ tiende a 0 en n . Pues del primer diferencial el único término que no es nulo es el termino en x y es claro que $\sigma^n(\lambda^n(\sigma^{-n}x + 1))$ tiende a cero por disipación del punto silla. Por lo tanto se tiene que fijado un compacto a partir de algún n $P_1(\cdot)$ es uniformemente chico en él (pues cada monomio se puede acotar por un valor máximo en un punto fijo, independiente de n). Para ver que pasa con $\sigma^n |R_2(\cdot)|$ se considera $\sigma^n \|(\cdot)\|^2$ ya que en algún entorno fijo de 0 (llámese W_1) se tiene $|R_2(\cdot)| < \|(\cdot)\|^2$. Y nuevamente por ordenes se tiene que tiende a 0, y sobre compactos, a partir de algún n , se puede considerar uniformemente chico. Es así que sobre compactos dicha coordenada converge uniformemente a $\alpha\tilde{y}^2$.

Ahora se considera la segunda coordenada, dada por $f_2(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \beta\tilde{y}^2 + \tilde{\mu} + \gamma\lambda^n\sigma^n\tilde{x} + \sigma^{2n}\tilde{H}_2(\cdot)$. Es claro que sobre compactos $\gamma\lambda^n\sigma^n\tilde{x}$ estará, a partir de algún natural, cerca de 0. Lo que queda es estudiar $\sigma^{2n}\tilde{H}_2(\cdot)$, para esto análogamente al caso anterior escribimos $\tilde{H}_2(\cdot) = P_2(\cdot) + R_3(\cdot)$ donde nuevamente el resto verifica $\lim_{\|(\cdot)\| \rightarrow 0} \frac{R_3(\cdot)}{\|(\cdot)\|^3} = 0$. Para $P_2(\cdot)$ se tiene que son nulos el termino independiente, el diferencial primero, y los términos en $x\mu$ y en $y\mu$ ya que $\tilde{H}_{2\mu}$ es constante. Esto asegura que fijado un compacto a partir de algún natural $\sigma^{2n}(P_2(\cdot))$ se puede considerar cerca de 0; su argumentación es análoga a la anterior. Resta considerar $\sigma^{2n}|R_3(\cdot)|$, para lo cual nuevamente se toma $\sigma^{2n}\|(\cdot)\|$ (por la monotonía que se de en algún entorno de 0 W_2) y se verifica por ordenes que sobre compactos tiene a 0 cuando n tiende a infinito. Es claro que con menos velocidad que en el caso anterior.

Esto prueba que los mapas definidos por $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\mu}, \psi_{\tilde{\mu}, n}^{-1} \circ \varphi_{Mn(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{\tilde{\mu}, n}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ convergen uniformemente sobre compactos al mapa dado por $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\mu}, \alpha\tilde{y}, \beta\tilde{y}^2 + \tilde{\mu})$.

llamando ahora $\psi_{\tilde{\mu}, n}$ a nuestro cambio de coordenadas anterior compuesto con un cambio deseable que no depende ni de $\tilde{\mu}$ ni de n se tiene que los mapas convergen sobre compactos al mapa $(\tilde{\mu}, \tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\mu}, \tilde{y}, \tilde{y}^2 + \tilde{\mu})$

La convergencia de las derivadas de orden uno y dos recorre las mismas ideas, por lo tanto no se explicitará su demostración.

□

Observación 3.3.1. Para un difeomorfismo $\varphi \in C^2$ de una variedad suficientemente diferenciable, que presenta una tangencia homoclínica, se tiene en todo entorno de él según la topología C^2 una curva de difeomorfismos de clase C^∞ que desdoblan genéricamente una tangencia homoclínica. Esta curva de difeomorfismos se puede considerar en general verificando las hipótesis del teorema 3.3.

Para el último capítulo se demuestra el siguiente teorema, que surge de bifurcar la prueba anterior. Este resultado intenta asegurar la existencia de una sucesión de conjugaciones de difeomorfismos sobre la curva $\{\varphi_\mu\}$ del teorema 3.3.1, que converjan a φ_0 y estén uniformemente cerca del mapa cuadrático, sobre regiones (y esto es lo importante) de tamaño lo mas grande posible.

Previamente Definimos la familia cuadrática $\{H_{\tilde{\mu}}\}_{\tilde{\mu}}$ donde $H_{\tilde{\mu}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{y}, \tilde{y}^2 + \tilde{\mu})$. Siguiendo el teorema anterior, definimos además, $\xi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \psi_{\tilde{\mu},n}^{-1} \circ \varphi_{Mn(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Teorema 3.3.2. *Dado $\varepsilon > 0$ y un compacto $K = I \times J$ existe n_0 tal que para todo $\tilde{\mu} \in [-10, 10]$ se verifica:*

$\xi_{\tilde{\mu},n_0}$ está C^2 ε -cerca de $H_{\tilde{\mu}}$ sobre K .

Para todo natural $l > 0$ si $K_l = \sigma^l I \times \sigma^{\frac{3}{2}l} J$ se tiene $\xi_{\tilde{\mu},n_0+l}$ definido sobre K_l y C^2 ε -cerca de $H_{\tilde{\mu}}$.

Demostración. En la prueba se usa fuertemente los cálculos hechos en la demostración del teorema 3.3.

La demostración de la primer afirmación se desprende directamente del teorema anterior.

Para la segunda afirmación bastaría probar:

- 1- $\psi_{\tilde{\mu},n_0+1}(K_1) \subset B_{n_0+1}$, $\varphi_{M_{n_0+1}(\tilde{\mu})}^{n_0+1}(\psi_{\tilde{\mu},n_0+1}(K_1)) \subset V_{n_0+1}$.

- 2- $\xi_{\tilde{\mu},n_0+1}$ C^2 ε -cerca de $H_{\tilde{\mu}}$ sobre K_1 .

Donde B_n y V_n son los conjuntos definidos en la prueba del teorema anterior.

En la afirmación 1 se tiene naturalmente que $\psi_{\tilde{\mu},n_0+1}(K_1) \subset B_{n_0+1}$. Por otra parte $\varphi_{M_{n_0+1}(\tilde{\mu})}^{n_0+1}(\psi_{\tilde{\mu},n_0+1}(K_1)) = \lambda^{n_0+1} \sigma^{-n_0} I \times \sigma^{n_0+1} \sigma^{-2(n_0+1)} \sigma^{\frac{3}{2}} J + 1 = \lambda^{n_0+1} \sigma^{-n_0} I \times \sigma^{-(n_0+\frac{1}{2})} J$, mientras $V_{n_0+1} = [0, \gamma_{n_0+1}] \times [1 - \varepsilon_{n_0+1}, 1 + \varepsilon_{n_0+1}]$ donde $\gamma_{n_0+1} = c_1 \sigma^{-(n_0+1)}$ y $\varepsilon_{n_0+1} = c_2 \sqrt{M_{n_0+1}(\tilde{\mu})}$. Se tiene entonces para n_0 suficientemente grande:

$$\lambda^{n_0+1} \sigma^{-n_0} I \subset [0, \gamma_{n_0+1}] \text{ ya que } \lambda^{n_0} \sigma^{-n_0} \sup I < \gamma_{n_0} = c_1 \sigma^{-n_0} \text{ y por lo tanto}$$

$$\lambda^{n_0+1} \sigma^{-n_0} \sup I < c_1 \sigma^{-(n_0+1)} = \gamma_{n_0+1} \text{ (esto último por hipótesis de disipación).}$$

$\sigma^{-(n_0+1-\frac{3}{2})}J \subset [-\varepsilon_{n_0+1}, \varepsilon_{n_0+1}]$:

Sabemos que $\sigma^{-n_0} \sup J < \varepsilon_{n_0}$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $\sigma^{-\frac{1}{3}}$ y obtenemos $\sigma^{-(n_0+\frac{1}{3})} \sup J < \sigma^{-\frac{1}{3}} \varepsilon_{n_0}$.

Por otra parte tenemos $\varepsilon_n = c_2 \sqrt{M_n \tilde{\mu}}$ con $M_n \tilde{\mu}$ infinitésimos del orden de σ^{-n} . Entonces $\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{\varepsilon_{n_0}} = \sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot a_{n_0}$ donde a_{n_0} se acerca a 1 cuando n_0 aumenta. Por lo tanto existe n_0 tal que $\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{\varepsilon_{n_0}} > \sigma^{-\frac{1}{3}}$, por lo cual para tal n_0 $\varepsilon_{n_0+1} > \sigma^{-\frac{1}{3}} \varepsilon_{n_0}$. Pero entonces para tal n_0 se tiene $\sigma^{-(n_0+\frac{1}{3})} \sup J < \varepsilon_{n_0+1}$.

Por lo tanto concluimos la primer afirmación del teorema.

Para la segunda afirmación basta dirigirse a los cálculos hechos en la demostración del teorema 3.3.1 y observar que para algún $\delta > 0$ se tiene $\|\xi_{\tilde{\mu}, n_0+l} - H_{\tilde{\mu}}\|_\infty < \delta \sigma^{-l} \text{diam}(K_l)$ (para todo $\tilde{\mu} \in [-10, 10]$) y la misma cota para las distancias entre las derivadas de primer y segundo orden. De esto se deduce, eligiendo correctamente n_0 y el compacto K , la segunda afirmación del teorema. □

3.4. Pozos y tangencias.

En esta sección se demuestra que para un difeomorfismo que presenta una tangencia homoclínica en q , existen perturbados arbitrariamente chicos de él que presentan un punto periódico atractor (pozo) en un entorno arbitrariamente chico de q .

Observación 3.4.1. El endomorfismo $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $H(x, y) = (y, y^2 + \frac{1}{8})$ presenta un pozo en el punto $P = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$

Demostración. Del sistema de ecuaciones $(x_0, y_0) = H(x_0, y_0)$ surgen los puntos fijos $P = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ y $P' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{1}{2}})$. El diferencial de H en P tiene a $(1, 0)$ como vector propio asociado al valor propio 0, y la dirección tangente a la parábola es un espacio propio asociado al valor propio $(1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ que es de módulo menor que uno. Por lo tanto P es un pozo de H . □

Teorema 3.4.1. *Sea M una superficie y $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$ difeomorfismo tal que presenta una tangencia homoclínica en un punto q entre las variedades estable e inestable de un punto P_0 disipativo. Entonces para todo entorno \mathcal{U} de φ en la topología C^2 y todo entorno V de q existe un difeomorfismo en \mathcal{U} que presenta un pozo en V . De ser P_0 un punto no disipativo se puede asegurar un perturbado presentando un punto fuente en las condiciones anteriores.*

Demostración. Consideramos \mathcal{U} entorno de φ y V entorno de q . En las secciones anteriores se probó que se puede encontrar un difeomorfismo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{U}$ tal que una potencia de él sea conjugado en una región contenida en V a un difeomorfismo arbitrariamente cerca, según la topología C^2 , de H (endomorfismo considerado en la observación anterior) sobre un compacto arbitrariamente grande. Todo lo que hay que probar entonces es que si se tiene un difeomorfismo definido en un compacto del plano, por ejemplo $K = [-10, 10] \times [-10, 10]$, que está suficientemente cerca de H , se tiene un pozo para el difeomorfismo que es la continuación del encontrado para H .

Consideramos un entorno B del pozo P (pozo de H) tal que

B es un producto de intervalos

$$H(B) \subset \text{int}(B)$$

Luego si $f : [-10, 10] \times [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2$ está suficientemente cerca (en la topología C^1) de H se tiene $f(B) \subset \text{int}(B)$. Por el teorema de punto fijo de Brouwer se tiene $P_f \in B$ punto fijo de f , y por la cercanía C^1 de f a H se tiene $d_{P_f} f$ con valores propios reales de módulo menor a uno. Por lo tanto P_f es un pozo para f , y es claro por construcción que se lo puede tomar como la continuación de P .

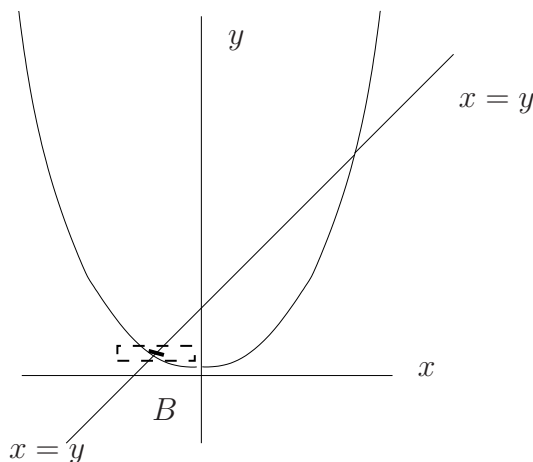


Figura 3.6: Construcción del pozo para perturbados de φ .

Para el caso no disipativo se o bien φ^{-1} es disipativo y aplicamos lo anterior, o bien φ es perturbable a algo disipativo y se puede considerar la prueba anterior.

□

Capítulo 4

Persistencia de tangencias y espesura

4.1. Persistencia de tangencias y de tangencias homoclínicas

Definición 4.1.1. Sea M una superficie y $\varphi \in \mathcal{D}iff^2(M)$. Decimos que φ presenta tangencia si para Λ_1 y Λ_2 conjuntos básicos silla de φ , existen $x_1 \in \Lambda_1$ y $x_2 \in \Lambda_2$ tales que $W^u(\varphi, x_1)$ y $W^s(\varphi, x_2)$ presentan un punto de intersección no transversal. Si $\Lambda_1 = \Lambda_2$ decimos que φ presenta tangencia homoclínica.

Definición 4.1.2 (*Persistencia de tangencias y de tangencias homoclínicas*). Sea M una superficie.

En general decimos que un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}iff^2(M)$ presenta *persistencia de tangencias* si existen dos mapas Λ_1 y Λ_2 definidos en el abierto \mathcal{U} que asocian continuamente a cada difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{U}$ una pieza básica del tipo silla $\Lambda_1(\varphi)$ y $\Lambda_2(\varphi)$ de forma que para un conjunto denso de difeomorfismos en \mathcal{U} haya una tangencia entre $\Lambda_1(\varphi)$ y $\Lambda_2(\varphi)$.

Se dirá que el abierto \mathcal{U} presenta *persistencia de tangencias homoclínicas* si $\Lambda_1 = \Lambda_2$ ($= \Lambda$).

Observación 4.1.1. En un abierto \mathcal{U} que presenta persistencia en tangencias se tiene en un conjunto denso de él que la tangencia se da entre variedades inestables y estables de puntos periódicos, pero no puede ser así en todo el abierto, ya que tales difeomorfismos no son del tipo Kupka-Smale y es sabido que estos últimos son densos en $\mathcal{D}iff^2(M)$.

Aclaremos que construiremos abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas de forma que en todo difeomorfismo de él se tenga tangencia entre las piezas, lo cual es más fuerte que lo que pide la definición. Sobre tales abiertos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.1. *Sea M una superficie y \mathcal{U} un abierto en $\mathcal{D}iff^2(M)$ tal que todo φ en \mathcal{U} presenta tangencia homoclínica. Entonces todo difeomorfismo en \mathcal{U} tiene no-errante no hiperbólico.*

Demostración. Dado $\varphi \in \mathcal{U}$ consideramos q punto de tangencia de Λ pieza básica. Luego es claro que q es un elemento del no-errante de φ y por lo tanto este no puede ser hiperbólico ya que las variedades estable e inestable del punto q son tangentes. \square

El siguiente teorema muestra la complejidad de las dinámicas que se pueden encontrar en abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas. Esta es otra parte importante en los trabajos de Newhouse y muestra que para estos abiertos, de tener todos los difeomorfismos un punto disipativo en la pieza básica, existe un residual (dentro del abierto) de difeomorfismos que presentan infinitos pozos (infinitas órbitas periódicas atractoras).

Teorema 4.1.2. *Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}iff^2(M)$ un abierto que presenta persistencia de tangencias homoclínicas, donde para cada $\varphi \in \mathcal{U}$ se puede tomar $P(\varphi) \in \Lambda(\varphi)$ punto periódico disipativo ($|\det(d\varphi^k)_{P(\varphi)}| < 1$, con k el periodo del punto considerado). Entonces existe un conjunto residual de difeomorfismos de \mathcal{U} que llamaremos \mathcal{R} donde todo difeomorfismo en él presenta infinitos puntos periódicos atrectores (pozos). Si por el contrario se verifica $|\det(d\varphi^k)_{P(\varphi)}| > 1$ tales difeomorfismos presentarían infinitos puntos periódicos repulsores (fuentes).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}_1 = \{\varphi \in \mathcal{U} : \varphi \text{ presenta al menos 1 pozo}\}$, es claro que \mathcal{U}_1 es abierto en \mathcal{U} . Sea $\varphi \in \mathcal{U}$, consideramos un perturbado (que seguimos llamando φ) que presente tangencia homoclínica entre las variedades de $P(\varphi)$. En virtud del teorema 3.4.1 tenemos que un perturbado que está en \mathcal{U}_1 . Por lo tanto \mathcal{U}_1 es abierto y denso en \mathcal{U} .

Sea ahora $\mathcal{U}_n = \{\varphi \in \mathcal{U} : \varphi \text{ presenta al menos } n \text{ pozos}\}$, es claro que este conjunto es abierto.

Sea $\varphi \in \mathcal{U}_n$, por estar en \mathcal{U} tenemos un perturbado de φ (que seguimos llamando φ) tal que presenta n pozos y además presenta una tangencia homoclínica en un punto q entre variedades de un punto disipativo. Consideramos un entorno V de q de forma que este a una distancia $d > 0$ de la unión de las órbitas de los n pozos (es claro que q no es

un pozo). Luego por el teorema 3.4.1 existe un perturbado de φ que tiene n pozos cuyas órbitas están fuera de V y un pozo en V , este perturbado estará en \mathcal{U}_{n+1} .

Esto demuestra que para todo natural n , \mathcal{U}_n es abierto y denso. Definiendo $\mathcal{R} = \bigcap_n \mathcal{U}_n$ se tiene el residual de difeomorfismos con infinitos pozos.

Para el caso no disipativo basta considerar φ^{-1} .

□

4.2. Espesura y Persistencia de tangencias

En esta sección se demostrará un teorema fundamental de la teoría, donde se asocia la espesura de *cantors estables e inestables* de difeomorfismos C^2 con tangencia a la persistencia de tangencias en un abierto de $\mathcal{D}iff^2(M)$.

Definición 4.2.1 (*Espesura estable e inestable*). Sea Λ un conjunto básico tipo silla asociado a un difeomorfismo de clase C^2 y $P \in \Lambda$ punto periódico. Parametrizando las variedades estables e inestables de forma que el difeomorfismo restringido a ellas se vuelva lineal (parametrizaciones que en el capítulo de espesura las llamamos α) se definen :

$$\text{Espesura inestable de } P \text{ en } \Lambda \text{ como } \tau^u(\Lambda, P) = \tau_{loc}(\alpha_s^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap I, 0)$$

$$\text{Espesura estable de } P \text{ en } \Lambda \text{ como } \tau^s(\Lambda, P) = \tau_{loc}(\alpha_u^{-1}(\Lambda \cap W^u(P)) \cap J, 0)$$

Donde I y J son intervalos que contienen al origen de forma que los conjuntos considerados sean efectivamente conjuntos de Cantor. Llamamos cantor inestable a $K_u = \alpha_s^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap I$ y cantor estable a $K_s = \alpha_u^{-1}(\Lambda \cap W^u(P)) \cap J$.

Es claro que la definición anterior no depende de los intervalos I, J .

Teorema 4.2.1. *Continuidad de la espesura estable e inestable.* Sea M superficie y $\varphi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ un difeomorfismo en las condiciones de la definición anterior. Consideramos \mathcal{U} entorno de φ tal que para todo $\tilde{\varphi}$ se tenga las continuaciones de la pieza $\Lambda(\tilde{\varphi})$ y del punto periódico $P(\tilde{\varphi})$. Entonces $\tau^u(\Lambda(\tilde{\varphi}), P(\tilde{\varphi}))$ y $\tau^s(\Lambda(\tilde{\varphi}), P(\tilde{\varphi}))$ son funciones continuas de $\tilde{\varphi}$.

Demostración. Veamos la propiedad para τ^u . Recordando que α_s es la parametrización que ve al difeomorfismo lineal sobre la variedad estable, se tiene que $\tau_{loc}(\alpha_s^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap I, 0) = \tau(\alpha_s^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap L)$ donde L es cualquier intervalo que defina en esa intersección un conjunto de Cantor. En el sección 3 del capítulo 1 observamos

que $\tau(\alpha_s^{-1}(\Lambda \cap W^s(P)) \cap L)$ se puede considerar variando continuamente al variar el difeomorfismo $\tilde{\varphi}$. Esto último concluye la prueba. □

Presentamos otra definición en la que se apoyarán los siguientes resultados.

Definición 4.2.2 (*Línea de tangencias*). Se considera un difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{D}iff^2(M)$, Λ_1 y Λ_2 conjuntos básicos silla, sea U_1 y U_2 entornos de las mismas con foliación inestable y estable respectivamente. Decimos que el conjunto $L(\varphi)$ es una línea de tangencias si:

$$L(\varphi) \subset U_1 \cap U_2$$

$L(\varphi)$ es difeomorfo a un intervalo

las hojas de las foliaciones son tangentes sobre $L(\varphi)$

Observación 4.2.1 (Propiedades de la línea de tangencia).

Si el difeomorfismo considerado presenta tangencia cuadrática en q entre dos piezas, existe una línea de tangencia y pasa por q . Este resultado surge del teorema de función implícita considerando una función que en cada punto de un entorno de q asocia el ángulo entre las hojas de las respectivas foliaciones.

Para un difeomorfismo como el de arriba se tiene que en un entorno de él, todo elemento tendrá línea de tangencia asociada a las continuaciones de los conjuntos básicos originales que dependen C^1 -continuamente de los difeomorfismos. Para esto hay que usar que las variedades varían uniformemente sobre partes compactas en la topología C^2 .

El siguiente resultado nos permite encontrar abiertos con persistencia de tangencias y persistencia de tangencias homoclínicas, en este punto aparece el concepto de espesura usado para asegurar tangencias entre variedades estables e inestables de difeomorfismos en cierto abierto.

Teorema 4.2.2. *Sea φ difeomorfismo de clase C^2 sobre una superficie M . Se considera Λ_1 y Λ_2 conjuntos básicos sillas de φ tales que presentan puntos periódicos, P_1 y P_2 respectivamente, verificando:*

$$\tau^u(\Lambda_1, P_1) \cdot \tau^s(\Lambda_2, P_2) > 1$$

existe $q \in W^u(P_1) \cap W^s(P_2)$ punto de intersección no transversal.

Luego φ esta en la clausura de un abierto \mathcal{U} que presenta persistencia de tangencias. Además las tangencias serán debidas a las continuaciones de las piezas Λ_1 y Λ_2 . Si $\Lambda_1 = \Lambda_2$ φ está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias homoclinicas.

Demostración. Consideramos la tangencia como tangencia cuadrática (si no fuese originalmente así, la perturbamos para que sea y le llamamos φ al perturbado). Tomamos un entorno \mathcal{V} de φ suficientemente pequeño de modo que:

se puede asociar continuamente a cada elemento $\tilde{\varphi}$ $\Lambda_1(\tilde{\varphi})$, $\Lambda_2(\tilde{\varphi})$, $P_1(\tilde{\varphi})$ y $P_2(\tilde{\varphi})$ conjuntos básicos sillas y puntos periódicos en ellos continuaciones de los originales. Esto define los mapas de la persistencia de tangencias.

para todo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}$ se tiene $L(\tilde{\varphi})$ linea de tangencias dependiendo C^1 -continuamente de los difeomorfismos, donde $L(\varphi)$ contiene al punto q .

Para cada elemento $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}$ se definen las proyecciones:

$$\pi_1(\tilde{\varphi}) : \alpha_s(I(\tilde{\varphi})) \rightarrow L(\tilde{\varphi})$$

$$\pi_2(\tilde{\varphi}) : \alpha_u(I(\tilde{\varphi})) \rightarrow L(\tilde{\varphi})$$

Donde: $I(\tilde{\varphi})$ es un intervalo que contienen a 0 arbitrariamente chico, $\pi_{1,2}(\tilde{\varphi})$ son las proyecciones por las foliaciones de la variedad estable e inestable respectivamente a $L(\tilde{\varphi})$ restringidas a los intervalos.

Aquí, por ser $L(\tilde{\varphi})$ de clase C^1 , $\pi_1(\tilde{\varphi})$ y $\pi_2(\tilde{\varphi})$ se pueden considerar difeomorfismos sobre sus imágenes ya que tenemos foliaciones C^1 (por estar en $\mathcal{D}iff^2(M)$).

Se considera además $\beta(\tilde{\varphi}) : [0, 1] \rightarrow M$ parametrización de clase C^1 para la linea de tangencias. Es claro que estas parametrizaciones se pueden considerar variando C^1 -continuamente al variar el difeomorfismo.

Para cada $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}$ consideramos las funciones $\gamma_1(\tilde{\varphi}) = \beta^{-1} \circ \pi_1 \circ \alpha_s$ y $\gamma_2(\tilde{\varphi}) = \beta^{-1} \circ \pi_2 \circ \alpha_u$ definidas sobre $I(\tilde{\varphi})$. Estas funciones son difeomorfismos sobre sus imágenes que dependen C^1 continuamente de $\tilde{\varphi}$.

Por el teorema 4.2.1 existe $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ tal que para todo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}'$ se tiene

$\tau^u(\Lambda(\tilde{\varphi}), P(\tilde{\varphi})) \cdot \tau^s(\Lambda(\tilde{\varphi}), P(\tilde{\varphi})) > 1$. Para cada $\tilde{\varphi}$ consideramos K_u como el cantor inestable maximal en $I(\tilde{\varphi})$ y K_s como el cantor estable maximal en $I(\tilde{\varphi})$. Si se considera $I(\tilde{\varphi})$ suficientemente chico de forma que:

$$1 \quad \tau(K_u) \cdot \tau(K_s) > 1$$

2 el rango de $\gamma'_{1,2}(\tilde{\varphi})$ se mantenga en un entorno fijo suficientemente chico de uno

por el resultado 2.3.5 del capítulo 1 se puede asegurar para todo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}'$:

$$\tau(\gamma_1(\tilde{\varphi})(K_u)) \cdot \tau(\gamma_2(\tilde{\varphi})(K_s)) > 1.$$

Es claro que los intervalos $I(\tilde{\varphi})$ se pueden considerar variando continuamente, y por lo tanto los intervalos minimales de K_u y K_s .

En \mathcal{V}' definimos \mathcal{U} como el conjunto de los difeomorfismos tales que para algún intervalo $I(\tilde{\varphi})$ para el cual se cumpla 1 y 2 se tengan $\gamma_1(\tilde{\varphi})(K_u) = K_1(\tilde{\varphi})$ y $\gamma_2(\tilde{\varphi})(K_s) = K_2(\tilde{\varphi})$ enganchados.

Veamos que \mathcal{U} es un abierto que presenta persistencia de tangencias homoclínicas:

que es abierto es obvio ya que los extremos de los conjuntos K_1 y K_2 varían continuamente con los difeomorfismos.

para un difeomorfismo $\tilde{\varphi}$ de \mathcal{U} se tiene por el lema 2.3.2 (gap lemma) que K_1 y K_2 se intersecan. Por lo tanto $\beta(K_1)$ se interseca con $\beta(K_2)$. Es claro que tales intersecciones representan tangencias entre la variedad inestable de un elemento de $\Lambda_1(\tilde{\varphi})$ y la variedad estable de un elemento de $\Lambda_2(\tilde{\varphi})$. Esto último afirma que \mathcal{U} tiene persistencia de tangencias, y de ser $\Lambda_1 = \Lambda_2$ se tiene persistencia de tangencias homoclínicas.

Resta ver que \mathcal{U} es distinto de vacío. Para ello consideramos φ y un entorno U arbitrariamente chico de q de forma que tenga foliación inestable y estable que son tangentes sobre $L(\varphi)$. Dado un entorno de φ existe un intervalo J en $\mathbb{L}(\varphi)$ para el cual se tiene una familia de difeomorfismos $\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ tal que:

$$\varphi_0 = \varphi$$

$\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ está en el entorno de φ considerado.

φ_t coincide con φ fuera del entorno U de q .

Para cada t se puede considerar la foliación estable de φ_t igual a la de φ , la línea de tangencia de φ_t igual a la de φ y además que esta última está formada por tangencias cuadráticas.

Las hojas de foliación inestable de φ_t en U se puede considerar variando continuamente (a partir de la foliación de φ).

Si para cada t definimos J_t como el intervalo sobre $L(\varphi_j)$ de extremos definido por las continuaciones de las hojas inestables que pasaban (para φ) por los extremos de J , se tiene $J_0 = J$ y $J_1 \cap J = \emptyset$.

Por lo tanto dado un entorno de φ consideramos $I(\varphi)$ de forma que $\pi_1 \circ \alpha_s(I(\varphi))$ esté en J y $\pi_2 \circ \alpha_u(I(\varphi))$ también. Luego para φ_t elemento de una familia como la que se describió, se tendrá K_1 y K_2 enganchados.

Concluimos entonces que el abierto \mathcal{U} es no vacío y que φ está en su clausura. □

Observación 4.2.2. El abierto con persistencia de tangencias construido en el teorema anterior verifica, como se había anunciado antes, que para todo difeomorfismo del mismo hay tangencias homoclínicas.

A continuación demostraremos dos corolarios que permiten extender nuestro resultado a situaciones mas generales.

Corolario 4.2.3. *Sea M superficie, $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$. Supongamos que presenta:*

Λ_1 conjunto básico silla y P_1 punto periódico de el.

Λ_2 conjunto básico silla y P_2 punto periódico de el.

P_3 punto periódico silla tal que $W^u(P_1)$ presenta corte transversal con $W^s(P_3)$ y $W^u(P_3)$ presenta tangencia con $W^s(P_2)$.

$$\tau^u(\Lambda_1, P_1) \cdot \tau^s(\Lambda_2, P_2) > 1.$$

entonces φ esta en la clausura de un abierto \mathcal{U} con persistencia de tangencias. Además si $P_1 = P_2$ tal abierto presenta persistencia de tangencias homoclínicas.

Demostración. Basta aplicar el λ -Lema para observar que en un perturbando tan chico como se quiera de φ presenta tangencia entre $W^u(P_1)$ y $W^s(P_2)$. Controlando, además, que el producto de espesuras se mantenga mayor que uno se cae en las hipótesis del último teorema. □

Corolario 4.2.4. *Sea M una superficie, $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$. Sean Λ_0 pieza básica con P_0 punto periódico, Λ pieza básica con Q punto periódico y P punto silla tales que:*

$W^u(P)$ interseca transversalmente a $W^s(P_0)$, $W^s(P)$ interseca transversalmente a $W^u(P_0)$

$W^s(Q)$ interseca transversalmente a $W^u(P)$, $W^u(Q)$ interseca transversalmente a $W^s(P)$ y tiene una tangencia con $W^s(P)$

$$\tau^u(\Lambda_0, P_0) \cdot \tau^s(\Lambda, Q) > 1$$

Entonces φ está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias homoclínicas, de la pieza Λ_0 .

Demostración. Por λ -lemma podemos afirmar que un perturbado de φ (que seguiremos llamando φ) presenta tangencia entre la variedad estable y la inestable de Q . Por el mismo tipo de argumento podemos suponer para un nuevo perturbado, tangencia entre la variedad inestable de P_0 y la estable de Q .

Por continuidad podemos considerar para el perturbado $\tau^u(\Lambda_0, P_0) \cdot \tau^s(\Lambda, Q) > 1$, por lo tanto el teorema 4.2.2 nos afirma que φ está en la clausura de un abierto \mathcal{U} con persistencia de tangencias debida a las continuaciones de las piezas Λ_0 y Λ .

Podemos suponer que los difeomorfismos de este abierto están en las hipótesis del corolario. Esto nos permite asegurar, utilizando λ -lema, que para un difeomorfismo en el abierto se tiene que $W^s(P_0)$ interseca transversalmente a $W^u(Q)$.

Por lo tanto, para un difeomorfismo del abierto que presenta tangencia entre la piezas Λ_0 y Λ tenemos un perturbado de este difeomorfismo que presenta tangencia de la pieza Λ_0 con si misma.

Concluimos entonces que \mathcal{U} presenta persistencia de tangencias homoclínicas. □

Esto finaliza la sección con resultados que nos permitirán encontrar abiertos con persistencia de tangencias y persistencia de tangencias homoclínicas.

4.3. Construcción de un abierto con persistencia de tangencias a partir de la herradura

En este capítulo se construye un ejemplo que verifique las hipótesis de los teoremas principales de las secciones anteriores. Este ejemplo podrá considerarse como un contraejemplo a la conjetura de Smale mencionada en la introducción.

Se considera una herradura lineal definida por la transformación φ construida a partir de la figura 4.1.

Considerando $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(R)$ se tiene un conjunto básico silla (conocido como la herradura).

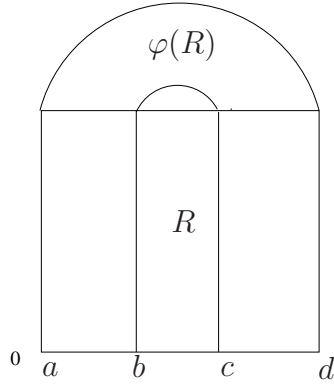


Figura 4.1: Construcción de la herradura.

Nosotros estamos interesados en conseguir que Λ tenga espesura estable e inestable respecto a O , de forma que su producto sea mayor a uno. Para ello considerando $R = [0, 1] \times [0, 1]$ tomamos φ de forma que el valor propio contractivo sea $\lambda > \frac{1}{3} + \varepsilon_0$ y el valor propio expansivo σ sea de forma que $\frac{1}{\sigma} > \frac{1}{3} + \varepsilon_0$ para alguna constante positiva ε_0 .

Es claro que sobre el lado inferior del cuadrado se va formando un conjunto de Cantor cuya espesura representa a $\tau^u(\Lambda, 0)$ mientras que sobre el lado izquierdo se formará un conjunto de Cantor cuya espesura represente a $\tau^s(\Lambda, 0)$.

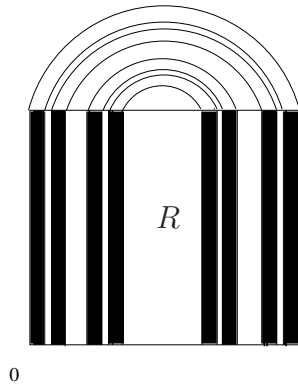


Figura 4.2: Construcción de herradura con el producto de la espesura estable y la inestable mayor a uno, el conjunto indicado por el color negro representa la intersección entre R , el primer iterado futuro de R y el segundo iterado futuro de $R \cap \varphi^{-1}(R)$.

Para este conjunto la espesura de ambos conjuntos de Cantor es mayor a uno. Por ejemplo para $\tau^u(\Lambda, 0)$, por suponer la herradura lineal, es claro que dado un gap se tiene $\frac{\text{puente}}{\text{gap}} = \frac{ab}{bc} > 1 + \varepsilon_1$. Por lo tanto nos aseguramos que $\tau^u(\Lambda, 0)\tau^s(\Lambda, 0) > 1$.

Para conseguir las hipótesis del teorema 3.1.2 haremos una modificación de φ en la topología C^2 de forma que tenga el mismo conjunto invariante Λ con la misma dinámica y además exista una tangencia homoclínica entre las variedades estable e inestable de P_0 .

En la figura 4.3 se considera un tramo de variedad inestable de P_0 que interseca transversalmente a la variedad estable de P_0 y consideramos el conjunto B . Existe un difeomorfismo ξ con soporte en B de forma que:

Λ es invariante hiperbólico de $\tilde{\varphi} = \xi \circ \varphi$, de hecho $\xi \circ \varphi|_{\Lambda} = \varphi$

Se puede considerar $W^s(\tilde{\varphi}, P_0)$ y $W^u(\tilde{\varphi}, P_0)$ como en la figura 4.4

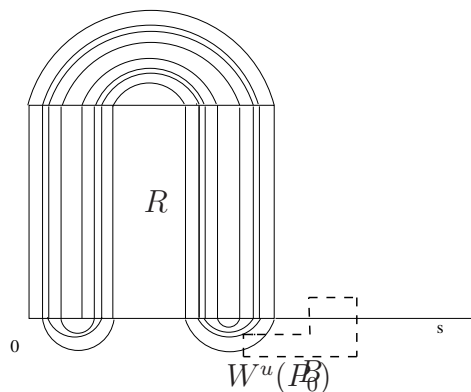


Figura 4.3: Construcción del ejemplo en las hipótesis del teorema 4.2.2; soporte de la modificación.

Observación 4.3.1. El ejemplo construido se puede considerar como un difeomorfismo de $[-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ en si mismo.

Es claro que podemos considerar el punto P_0 disipativo, por lo tanto se tiene:

por el teorema 4.2.2 $\tilde{\varphi}$ está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias homoclínicas donde se puede considerar que todo difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{U}$ presenta tangencia homoclínica debida a un punto silla disipativo.

por el teorema 4.1.2 existe un residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ de difeomorfismos que presentan infinitos pozos.

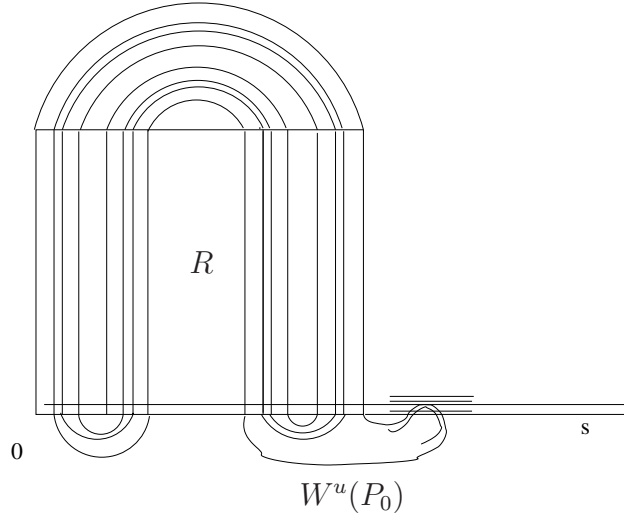


Figura 4.4: Construcción de herradura con el producto de la espesura estable y la inestable mayor a uno, y las proyecciones de los conjuntos de Cantor enganchadas.

4.4. No densidad de los axioma A e infinitos pozos.

En esta sección se demuestra que los difeomorfismos axioma A no son densos en $\mathcal{D}iff^2(M)$ para M superficie, además se construye un abierto \mathcal{U} de $\mathcal{D}iff^2(M)$ que presenta un residual de difeomorfismos con infinitos pozos.

Definición 4.4.1. Dado $\varphi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ decimos que φ es axioma A si verifica:

φ tiene no-errante hiperbólico

Los puntos periódicos son densos en el no-errante.

Al conjunto de los difeomorfismos axioma A los llamamos $\mathcal{A}(M)$.

Observación 4.4.1. Sea M variedad y $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}iff^2(M)$ abierto con persistencia de tangencias homoclínicas, tal que todos los difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{U}$ presentan tangencia homoclínica. Entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{A}(M) = \emptyset$

Demostración. Para probarlo basta aplicar 4.1.1. □

Observación 4.4.2. Sea M una superficie. Entonces existe $\psi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ para el cual se cumple $h^{-1} \circ \psi \circ h = \tilde{\varphi}$ donde:

h es un difeomorfismo de clase C^2 definido en el conjunto $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

$\tilde{\varphi}$ es el difeomorfismo considerado en 4.3.1.

Corolario 4.4.1. *Sea M variedad diferenciable. Entonces existe $\psi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ tal que:*

ψ presenta tangencia homoclínica de una pieza hiperbólica Λ entre las variedades estable e inestable de P_0 .

$$\tau^u(\Lambda, P_0) \cdot \tau^s(\Lambda, P_0) > 1.$$

Demostración. El difeomorfismo ψ es el hallado en 4.4.2. □

Teorema 4.4.2. *Sea M superficie. Entonces $A(M)$ no es denso en $\mathcal{D}iff^2(M)$.*

Demostración. Consideramos $\psi \in \mathcal{D}iff^2(M)$ el difeomorfismo hallado en 4.4.1. Por el teorema 4.2.2 existe \mathcal{U} abierto con persistencia de tangencias homoclínicas y mas aún por 4.2.2 podemos afirmar para todo difeomorfismo en \mathcal{U} se tiene tangencia homoclínica. Luego por 4.4.1 se tiene que $A(M)$ no es denso en $\mathcal{D}iff^2(M)$. □

Observación 4.4.3. Es claro que por construcción se puede considerar en el abierto \mathcal{U} del teorema anterior, un residual \mathcal{R} de difeomorfismos que presentan infinitos pozos.

Esta prueba concluye el capítulo y con él se alcanzan los resultados de Newhouse en [N,1970] y del trabajo de Newhouse en [N,1973]. Estos últimos son los dos primeros trabajos señalados en la introducción.

Capítulo 5

Abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas en $\mathcal{D}iff^2(M)$.

En este capítulo se demostrará que en superficies todo difeomorfismo de $\mathcal{D}iff^2(M)$ que presenta una tangencia homoclínica asociada a un punto silla disipativo, está en la clausura de algún abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}iff^2(M)$ que presenta persistencia de tangencias homoclínicas y que, por lo tanto, se puede considerar que contiene un residual de difeomorfismos con infinitos pozos o fuentes.

5.1. Tent map, Logistic map y mapa cuadrático.

En esta sección se demuestra que los mapas Tent, Logistic y cuadrático restringido a un arco de parábola son conjugados topológicamente. Mas aún estas conjugaciones se pueden considerar diferenciables salvo en los bordes de los intervalos que definen sus respectivos dominios.

La aparente arbitrariedad en la traducción o no de los nombres de los mapas está apoyada en la subjetiva estética personal.

Definición 5.1.1 (Tent-map, Logistic-map y mapa cuadrático). Se definen los siguientes mapas:

Tent-map mapa del intervalo, dado por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Logistic-map mapa del intervalo, dado por

$$L(x) = 4x(1 - x)$$

mapa cuadrático mapa del plano, dado por:

$$H(x, y) = (y, y^2 - 2)$$

Observación 5.1.1. Existe una conjugación topológica entre el tent-map y el logistic-map dada por la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, con $h(y) = -\frac{1}{2} \cos(\pi y) + \frac{1}{2}$. Para demostrarlo hay que verificar que es un homeomorfismo del intervalo y que $h \circ T = L \circ h$.

Se tiene además que la función h es diferenciable en todo su dominio, mientras que su inversa es diferenciable en el conjunto $(0, 1)$.

Observación 5.1.2. El logistic-map y el mapa cuadrático restringido a un arco de su imagen (el conjunto caracterizado por $y = x^2 - 2$) que une los puntos $(2, 2)$ y $(-2, 2)$ son conjugados. A este último conjunto lo llamamos l .

Para su demostración basta verificar que la función $g : [0, 1] \rightarrow l$ dada por $g(t) = (4(t - \frac{1}{2}), 16(t - \frac{1}{2})^2 - 2)$ verifica $H \circ g = g \circ L$.

Observación 5.1.3. Sea $H : l \rightarrow l$ el mapa cuadrático, entonces para todo natural m existe Λ_m conjunto de Cantor invariante con espesura local mayor a $2^{m-2} - 1$ que no contiene al punto crítico.

Demostración. Para esto basta aplicar la conjugación entre T y H al conjunto K_m construido en 2.3.1.

□

Observación 5.1.4. Sea Λ_m el conjunto hallado en la observación anterior. Entonces existe n_0 tal que para todo $x \in \Lambda_m$, $d_x H^{n_0}$ expande uniformemente en la dirección tangente a la parábola en x .

Demostración. Para probar esto basta usar la conjugación con el Tent-map en algún entorno de K_m donde tenga derivada lejos de 0 por una cantidad suficiente de iterados.

□

En este punto es preciso introducir notación que se usará durante todo el capítulo:
 W_ε será el conjunto de funciones $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^2 tales que:

f está ε -uniformemente cerca de H sobre D .

el primer diferencial de f está ε uniformemente cerca de el de H .

El segundo diferencial de f está ε -uniformemente cerca de el de H .

Corolario 5.1.1. *Existe W_ε entorno C^2 de H , V entorno de Λ y $\{C_u(x)\}$ conos definidos en $T_x\mathbb{R}^2$ con $x \in V$ tales que para todo $f \in W$ y $x \in V$ se tiene $d_x f^{n_0}$ uniformemente expansor sobre $C_u(x)$. Además los conos se pueden tomar con ángulo uniformemente lejos de 0.*

5.2. Conjuntos hiperbólicos con espesura estable grande para difeomorfismos cercanos al mapa cuadrático.

Recordamos que del capítulo 3 se puede concluir que para difeomorfismos que presentan una tangencia homoclínica se tienen perturbados (tan chicos como se quiera) con potencias conjugadas, en regiones cercanas al punto de tangencia, a difeomorfismos arbitrariamente próximos al mapa cuadrático restringido a $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Esto inspira a buscar conjuntos hiperbólicos de espesura estable grande para tales perturbados, ya que el mapa cuadrático como vimos presenta conjuntos de Cantor con espesura local arbitrariamente grande.

Para esto si Λ_m es el Cantor hallado para el mapa cuadrático H buscamos una manera de redefinirlo a través de particiones de Markov de dimensión dos.

Recordamos que Λ_m está sobre el conjunto que se llamó l y contenido en los intervalos I_2, \dots, I_m que son su partición de Markov (que nacieron en la construcción de conjuntos de Cantor dinámicamente definidos para el Tent-map). Además la dinámica de estos intervalos es conocida: $H(I_k) = I_{k+1}$ si $k < m$ y $H(I_m)$ es el mínimo intervalo que cubre a todos los intervalos I_2, \dots, I_m (ver figura 5.1).

Este mismo conjunto lo interpretaremos como el conjunto maximal invariante que contienen $U_2 \dots U_m$ siendo estos, entornos como se muestran en la figura 5.2. Los bordes superiores e inferiores son segmentos horizontales, y los otros dos lados son paralelos a la parábola.

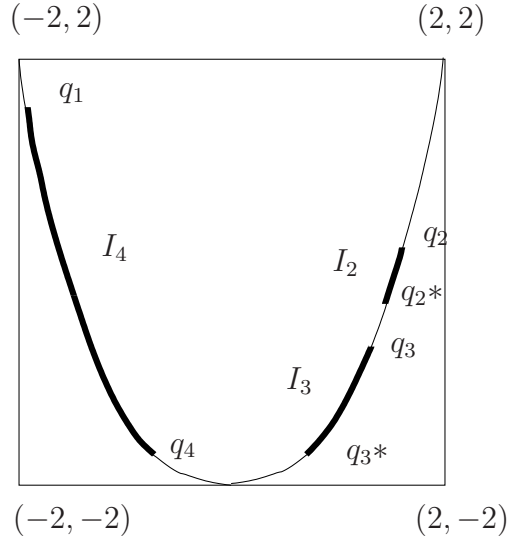


Figura 5.1: Partición de Λ_m con $m=4$.

Veremos primero que Λ_m se puede definir a partir de este tipo de abiertos, y luego que en general existirá un entorno \mathcal{W}_m de H en la topología C^2 tal que para cualquier $f \in \mathcal{W}_m$ difeomorfismo se tenga (de manera análoga que para H) un conjunto básico silla en $U_2 \cup \dots \cup U_m$ con espesura estable cercana a la local de Λ_m . Esto se hará en diferentes teoremas.

Para lo que sigue conviene definir los siguientes conjuntos:

$$\tilde{K}_0 = U_2 \cup \dots \cup U_m$$

$$\text{Para } i > 0 \quad \tilde{K}_i = \tilde{K}_{i-1} \cap H(\tilde{K}_{i-1})$$

$$\text{Para } i > 0 \quad \tilde{K}_{-i} = \tilde{K}_{-(i-1)} \cap H^{-1}(\tilde{K}_{-(i-1)})$$

Teorema 5.2.1. *Definiendo $K = \bigcap_0^{+\infty} \tilde{K}_i \cap \bigcap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$, se tiene $K = \Lambda_m$*

Demostración. Para demostrar este teorema haremos las siguientes observaciones

- 1) $\tilde{K}_{i+1} \subset \tilde{K}_i$
- 2) \tilde{K}_i es no vacío para todo i .
- 3) $\tilde{K}_{-(i+1)} \subset \tilde{K}_{-i}$
- 4) \tilde{K}_{-i} es no vacío para todo i .

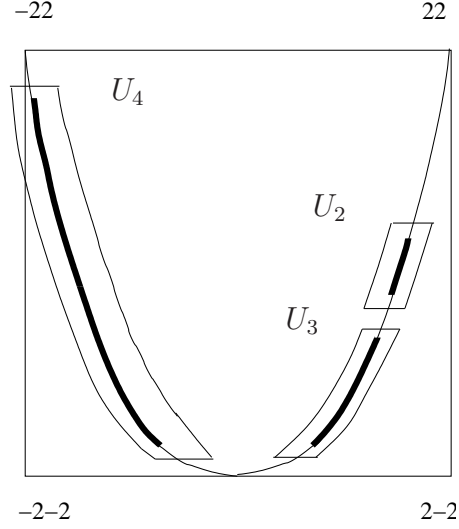


Figura 5.2: Partición de dimensión dos para Λ_m con $m=4$.

Luego se verá que K es no vacío y por definición será maximal invariante en la unión de los abiertos. Por último se mostrará que $K = \Lambda_m$.

Continuando demostraremos las observaciones echas.

Las observaciones 1 y 3 surgen trivialmente de las definiciones.

Para la segunda observación, precisaremos mas aún quienes son los entornos U_2, \dots, U_m (para lo que sigue hay que tener en mente los intervalos I_2, \dots, I_m).

Se elegirá U_m de forma que $H(U_m)$ contenga a $I_2 \cup \dots \cup I_{m-1} \cup (U_m \cap l)$. Es claro que esto se puede hacer ya que $H(I_m)$ es el mínimo arco que contiene los conjuntos $I_2 \dots I_m$, luego basta controlar la altura de los segmentos horizontales que definen a U_m .

U_2 será un entorno de forma que $U_2 \cap l$ además de contener a I_2 esté contenido en $H(U_m)$. Su existencia es obvia.

Definimos U_k con $2 \leq k < m$ de forma que $U_k \cap l$ este contenido en $H(U_m)$, $U_{k+1} \cap l \subset H(U_k)$. Es claro que esta construcción se puede hacer.

Es fácil ver que para todo i positivo \tilde{K}_i es exactamente $U_2 \cap l \cup \dots \cup U_m \cap l$. Por lo tanto no solo se concluye lo observado sino también se tiene que el conjunto $\bigcap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$ esta contenido en l .

A la hora de considerar la última observación aparecen dos caminos posibles: uno es usar el conjunto Λ_m que sabemos que existe y está contenido en la intersección de los \tilde{K}_{-i} y en l , el otro es no usarlo. Este último es el que seguiremos, lo cual nos servirá para construir los conjuntos hiperbólicos de difeomorfismos cercanos a el mapa cuadrático.

Usamos el mecanismo de inducción para probar la última observación. Tenemos \tilde{K}_0 distinto de vacío, sea un natural $i > 0$ para \tilde{K}_{-i} tenemos:

Existen V_1, \dots, V_m disjuntos dos a dos con $V_k = U_l \cap H$ donde H es alguna franja horizontal, tales que $\tilde{K}_{-i} = V_1 \cup \dots \cup V_{m_i}$. A priori los conjuntos V_l pueden ser todos vacíos.

Tenemos para esta situación la siguiente afirmación: Si \tilde{K}_{-i} contiene a V_j en U_k con $k = 3 \dots m$ entonces $H^{-1}(V_j) \cap U_m \subset V_l$ con V_l otra componente conexa de \tilde{K}_i .

Para demostrar la afirmación utilizamos inducción. El caso particular por como se eligió $U_2 \dots U_m$ es \tilde{K}_{-1} , supongamos que \tilde{K}_{-i} contiene a V_j en la hipótesis de la afirmación. Luego por definición e hipótesis de inducción $V_j = V'_j \cap H^{-1}(V'_{j+1})$. Entonces $H^{-1}(V_j) \cap U_m = H^{-1}(V'_j \cap H^{-1}(V'_{j+1})) \cap U_m \subset H^{-1}(V'_j) \cap V'_l = V_l$. Y esto prueba la afirmación.

La afirmación anterior demuestra que para todo i , si \tilde{K}_{-i} es no vacío entonces $\tilde{K}_{-(i+1)}$ es no vacío:

Si \tilde{K}_{-i} no vacío podemos suponer sin pérdida de generalidad que tiene V_j en las condiciones de la afirmación, luego por la afirmación sabemos que $H^{-1}(V_j) \cap U_m \subset V_l$ lo cual implica que $V_l \cap H^{-1}(V_j) \neq \phi$ y por lo tanto $\tilde{K}_{-(i+1)} \neq \phi$.

Demostradas las observaciones se tiene que K es no vacío ya que es intersección decreciente de cerrados no vacíos (recordar que por como se consideró a U_m con respecto a los otros intervalos tenemos que $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i = (U_2 \cup \dots \cup U_m) \cap l$). Que es maximal dentro de la unión de los abiertos es obvio.

Resta ver que en este caso coincide con Λ_m para lo cual si usaremos el conjunto Λ_m . Recordamos que Λ_m es la imagen de $K_m \subset [0, 1]$ por la conjugación h , por lo cual como K_m es invariante maximal en algún entorno de $I_2 \dots I_m$ se tiene lo mismo para Λ_m . Observando que $U_2 \dots U_m$ se pueden tomar tan cercanos a $I_2 \dots I_m$ como se quiere, se tiene que se los puede considerar de forma que Λ_m sea invariante maximal en $U_2 \cup \dots \cup U_m$. \square

Redefinimos los conjuntos \tilde{K} para poder crear conjuntos básicos a difeomorfismos vecinos del mapa cuadrático:

$$\tilde{K}_0 = U_2 \cup \dots \cup U_m$$

$$\text{Para } i > 0 \quad \tilde{K}_i = \tilde{K}_{i-1} \cap f(\tilde{K}_{i-1})$$

Para $i > 0$ $\tilde{K}_{-i} = \tilde{K}_{-(i-1)} \cap f^{-1}(\tilde{K}_{-(i-1)})$

Teorema 5.2.2. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Para todo natural m existe un entorno $\mathcal{W}_m = \mathcal{W}_{\varepsilon_m}$ arbitrariamente chico, tal que para $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ difeomorfismo sobre su imagen en \mathcal{W}_m se tiene:*

$\Lambda_m(f)$ conjunto básico (no trivial) tal que:

para $x \in \Lambda_m$ se tiene un intervalo de variedad estable $\varepsilon_m - C^1$ cerca del segmento $x + [-10, 10] \times \{0\}$.

Para el mismo punto se tiene un intervalo de variedad inestable $\varepsilon_m - C^1$ cerca del conjunto l (ver definición en la observación 5.1.2).

Existe $Q(f) \in \Lambda(f)$ punto periódico para el cual $\tau^s(\Lambda(f), Q(f)) > 2^{m-2} - 2$

Para cada m se puede considerar \mathcal{W}_m contenido en \mathcal{W}_{m+1} .

Demostración. La demostración se llevará a cabo en tres partes, la primera es hallar al conjunto $\Lambda_m(f)$ desde un punto de vista topológico, la segunda es estudiar sus propiedades dinámicas y la tercera es estudiar la espesura estable.

Consideramos los abiertos U_2, \dots, U_m con los que venimos trabajando. Sus preimágenes por f en cierto entorno \mathcal{W} de H serán conjuntos cerrados que aunque ya nos serán franjas horizontales, se pueden considerar muy cercanas (como se propone en la figura 5.2) a estas por la cercanía al mapa cuadrático H .

Con respecto a las primeras imágenes de estos abiertos por f si \mathcal{W} es lo suficientemente chico se puede esperar, en virtud de como se eligieron los U_k en el teorema anterior y la cercanía la mapa cuadrático, la figura 5.4. Luego por proceso de iteración se tendrá que $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$ que será un Cantor de líneas cercanas C^1 -próximas a l , ya que la contracción en la dirección horizontal es uniformemente grande.

Por lo tanto hay que estudiar que pasa con $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$. Por construcción y suponiendo a f suficientemente cerca de H , se tiene que la preimagen de U_m intersección U_m será una franja (como se muestra en la figura 5.5), intersección U_{m-1} será también una franja, a los demás entornos no los intersecciona. Para U_k con $2 < k < m$ se tiene que su preimagen intersección U_m es una franja e intersección U_{k-1} es otra franja, para cualquier otro k es vacío. Por último para U_2 su preimagen intersección U_m es una franja e intersección cualquier otro U_k es vacío

Luego por recurrencia es claro que se puede afirmar lo siguiente :

$\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$ es no vacío e intersecciona a $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$.

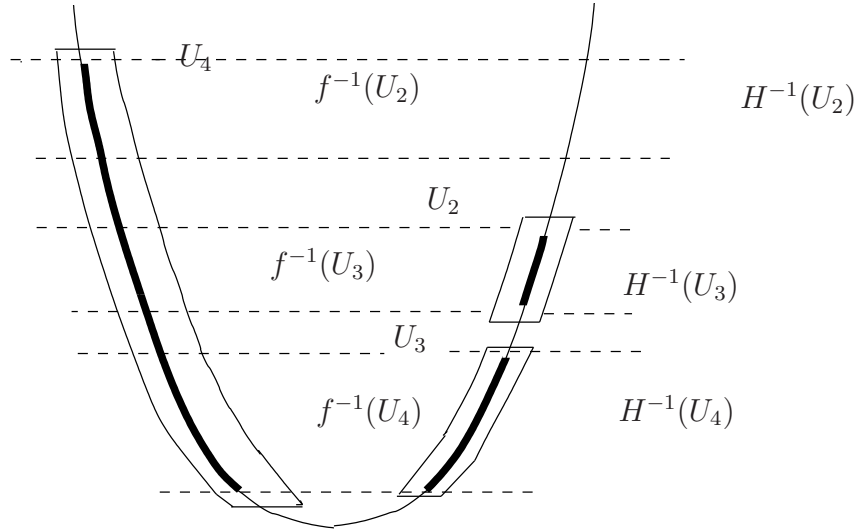


Figura 5.3: Partición de dimensión dos para Λ_m con $m=4$, con las preimágenes de los elementos del cubrimiento.

(La prueba de esto recorre básicamente lo echo en las afirmaciones 3 y 4 de la prueba del teorema anterior).

Además considerando los difeomorfismos suficientemente cerca de H , por el corolario 5.1.1 se tiene que $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$ es un conjunto de líneas casi horizontales que localmente es homeomorfo al producto de un intervalo por un Cantor.

Se concluye entonces que $\Lambda_m(f) = \cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i \cap \cap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$ es no vacío, y es localmente compacto y localmente un producto de dos conjuntos de Cantor. Además por construcción es maximal invariante dentro del entorno $U_2 \cup \dots \cup U_m$. Así culmina la primera parte de la prueba.

Para el estudio de la dinámica que presenta el conjunto $\Lambda_m(f)$ estudiaremos su correspondencia con el shift en el espacio $\{2, 3, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$. De estas sucesiones consideramos aquellas tales que verifiquen lo siguiente:

siempre que se tenga un 2 se debe tener antes un m y después un 3, es decir $\dots m23 \dots$

para $2 < k < m$ se debe tener antes o bien m , o bien $k - 1$ y después un $k + 1$

siempre que se tenga m se debe tener antes $m - 1$ o m y después cualquier número entre dos y m .

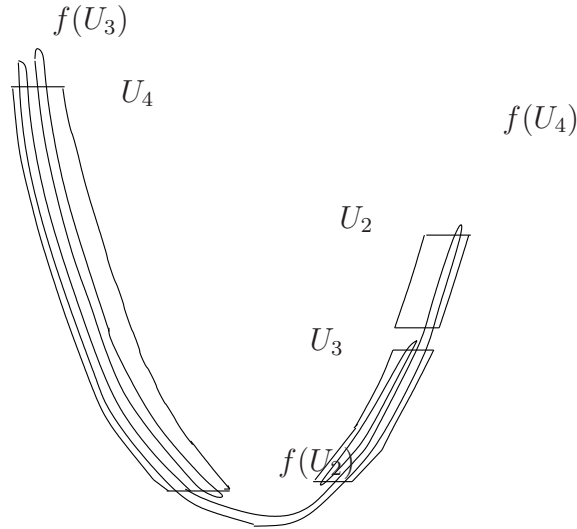


Figura 5.4: Partición de dimensión dos para Λ_m con $m=4$, con las imágenes de los elementos del cubrimiento para difeomorfismos cercanos al mapa cuadrático.

A este conjunto de sucesiones le llamamos \mathcal{R} . Es claro que \mathcal{R} es invariante para el shift que llamaremos σ .

Ahora definimos una función $h : \Lambda \rightarrow \mathcal{R}$ de manera que a cada elemento le asocie su itinerario por los abiertos U_2, \dots, U_n (es decir, si en el paso n el elemento está en U_k la sucesión valdrá en n k). Es claro que h es una función continua (con la topología producto), que de ser un homeomorfismo conjugará ambos sistemas dinámicos (f y σ) y de esto surgirán las propiedades dinámicas de f en $\Lambda_m(f)$.

La inyectividad de h es simplemente por la expansividad uniforme que tiene una potencia f en la dirección de la parábola dentro de los entornos U_2, \dots, U_m , esto no permitirá que dos puntos tengan el mismo itinerario. La sobreyectividad es obvia por construcción. Luego tenemos un homeomorfismo de $\Lambda_m(f)$ a \mathcal{R} que conjuga a f con σ .

Las propiedades dinámicas de σ sobre \mathcal{R} son conocidas y solo las enunciaremos:

Tiene infinitos puntos periódicos, donde uno de ellos es el único de período m que verifica que en los tiempos 0 y 1 está en U_m , en tiempos $1 < k \leq m - 1$ está en U_k . A este último le llamamos Q y $h^{-1}(Q) = Q(f)$. El conjunto de todos los puntos periódicos es además denso

También se tiene la existencia de órbitas transitivas.

Estas dos propiedades son, por lo tanto, ciertas para el sistema dinámico f sobre $\Lambda_m(f)$.

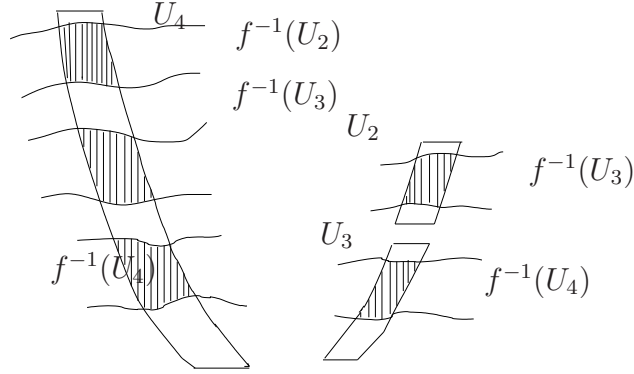


Figura 5.5: Partición de dimensión dos para Λ_m con $m=4$, con las preimágenes de los elementos del cubrimiento por f .

Para terminar la segunda parte de nuestra demostración se estudiará la hiperbolicidad de f sobre $\Lambda_m(f)$. Esta sale a luz (formalmente) a través de conos inestables y estables. Para cualquier punto x en $\Lambda_m(f)$ se puede tomar el cono inestable como se muestra en la figura 5.6 y el estable como su complementario.

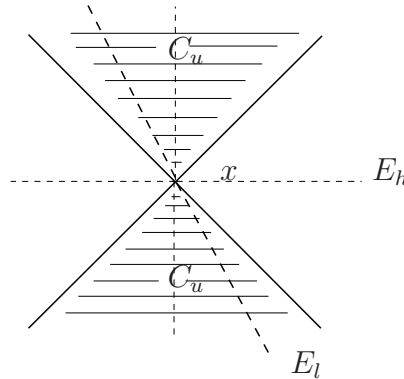


Figura 5.6: Conos para la hiperbolicidad de $\Lambda_m(f)$. Aquí E_l es la dirección paralela a la de la parábola a la altura de x , y E_h es la dirección horizontal. Las direcciones que definen al cono son fijas y aseguran la existencia de E_l dentro de C_u para cualquier x .

Entonces, utilizando el lema 5.1.1 es claro que se verifica para n_0 suficientemente grande $D_x f^{n_0}(C_u(x)) \subset C_u(f^{n_0}(x))$ y para $v \in C_u(x)$ $\|D_x f^{n_0}(v)\| \geq \|v\| \cdot \alpha$ con $\alpha > 1$ (esto último es porque sobre E_h hay un valor propio casi nulo, mientras sobre la dirección de la parábola se tiene una expansión acotada inferiormente por un número mayor a uno). Por su parte $D_x f^{-n_0}(C_s(x)) \subset C_s(f^{-n_0}(x))$ y para $v \in C_s(x)$ $\|D_x f^{-n_0}(v)\| \geq \|v\| \cdot \alpha$ con

$\alpha > 1$. La existencia de estos conos aseguran la hiperbolicidad de $\Lambda_m(f)$.

Se observa además que para el punto periódico que se llamó $Q(f)$ se tiene la variedad estable tendiendo a ser horizontal (conforme nos acercamos a H) y la inestable convergiendo al conjunto l (de nuevo conforme nos acercamos a H), esta cercanía se puede considerar en partes compactas según la topología C^2 . Esto último aunque es un resultado general, se ve observando que las variedades inestables son las líneas que definen $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$ y las estables las que definen $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$.

Se tiene entonces el estudio de la dinámica de f sobre $\Lambda_m(f)$, concluyendo que es un conjunto básico del tipo silla. Estamos ahora en condiciones de hablar de la espesura estable de $Q(f)$ en $\Lambda_m(f)$.

Lo que se hará es demostrar que $\tau^s(\Lambda_m(f))$ está próximo a $\tau(\tilde{K}_m)$, donde \tilde{K}_m será un Cantor dinamicamente definido cerca de K_m (conjunto de Cantor asociado al Tent-map) según la topología definida en el capítulo ???. Luego aplicando el teorema 2.4.6 se tiene la tercer afirmación de la tesis.

Consideramos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow W^u(Q(f))$, parametrización utilizada en la definición de espesura estable. Se tiene que $\tau^s(\Lambda_m(f), Q(f)) = \tau(K'_m)$ donde K'_m es un conjunto de Cantor dinamicamente definido por:

La partición de Markov $\{I'_k = \alpha^{-1}(l' \cap U_k)\}$, donde l' es el menor intervalo de variedad inestable de $Q(f)$ que contiene a $Q(f)$ e intersecta a los bordes horizontales de los entornos $U_m \dots U_2$.

$\Psi = \alpha^{-1} \circ \pi \circ \varphi \circ \alpha$, donde π es la proyección por alguna foliación inestable de los entornos $U_2 \dots U_m$.

Esta función está C^1 -proxima a ser lineal, conforme se está cerca de H (pues π se acerca a la identidad). Además se puede observar que π' tiene constantes de Hölder continuidad (C, ε) con C próximo a cero.

Sea ahora \tilde{K}_m el Cantor dinamicamente definido a partir de:

La partición de Markov surge de aplicar $g_1 \circ g_2$ a la partición de Markov de K'_m , siendo $g_1(x) = -x$ y $g_2(x) = x + q$ con q el punto periódico a partir del cual se construye K_m . Se tiene $\tilde{I}_k = g_1 \circ g_2(I'_k)$

La función será $\tilde{\psi}$, tendrá derivada constante sobre cada intervalo de la partición y cumplirá:

$$\tilde{\psi}(\tilde{I}_k) = \tilde{I}_{k+1} \text{ para } k = 2 \dots m - 1$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{I}_m) = cc(\tilde{I}_2 \dots \tilde{I}_m) \text{ (cápsula convexa)}$$

Se tiene entonces por el teorema 2.4.6 e invariancia de la espesura por isometrías que $\tau(K'_m)$ está próximo a $\tau(\tilde{K}_m)$ conforme lo está f de H .

Probando que $long(\tilde{I}_k)$ es próximo a $long(I_k)$ para $k = 1 \dots m$ conforme f está próximo de H , se tiene que \tilde{K}_m está próximo a K_m lo cual resuelve el teorema como se afirmó antes.

Tenemos l' definido. Sea j el mínimo arco de la imagen de H que intersecta a todos los bordes horizontales de $U_m \dots U_2$. Definimos $t : l' \rightarrow l$ como la función continua tal que a un elemento de l' le corresponde el punto más próximo en j . Es claro que t se aproxima a la inclusión conforme f este cerca de H .

Siendo h la conjugación entre el Tent-map y el mapa cuadrático se tiene $(\alpha^{-1})'(x)$ próximo a $(h^{-1})'(t(x))$ conforme f está próximo a H , esto nos asegura que $long(\tilde{I}_k)$ es próximo a $long(I_k)$ para $k = 1 \dots m$. De lo cual se desprende la conclusión del teorema. \square

Para obtener más información sobre mapas que presentan tangencias homoclínicas a partir del teorema 3.3.2, presentamos el siguiente resultado y el paréntesis dentro de la sección que lo sigue.

Teorema 5.2.3. *Existe un entorno C^2 de H , $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\varepsilon$, tal que para una función $f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ difeomorfismo sobre su imagen en \mathcal{W} , que verifica:*

$$[-10, 10] \times [-10, 10] \subset I \times J,$$

si $\mathcal{P} = \{(x, y) : y = x^2 - 2\}$ entonces $d(\mathcal{P}, J \times \{a\} \cup J \times \{b\}) > \varepsilon_0$ con $[a, b] = I$, ε_0 una constante positiva.

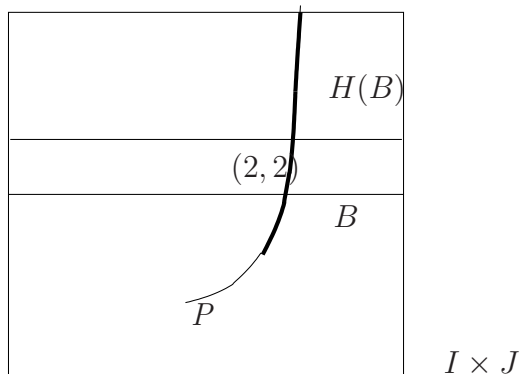
se tiene:

Un punto fijo P silla como continuación del punto $(-2, 2)$.

La variedad estable de P intersecta al conjunto $b \times J$. Además el segmento de variedad estable que va de P hasta tal conjunto se tiene variando C^1 -continuamente respecto al segmento horizontal que une $(-2, 2)$ con el mismo conjunto.

La variedad inestable de P tiene un segmento que une P con el conjunto $I \times d$ siendo d extremo superior de J . Además este segmento se puede considerar variando C^1 -continuamente a partir del arco de \mathcal{P} que une $(-2, 2)$ con $I \times d$.

Demostración. Sea B un rectángulo cuyos lados verticales están sobre los del compacto. Si consideramos B de altura suficientemente chica su imagen por el mapa cuadrático H será un segmento de parábola como se muestra en la figura 5.2. Es así que para f suficientemente cerca de H se puede considerar $f(B)$ como un rectángulo topológico cercano al intervalo de parábola. Considerando $B_0 = f(B)$, $B_1 = f(B \cap f(B_0))$, ..., $B_n = f(B \cap B_{n-1})$, se tiene entonces por la forma del diferencial de f , que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = l_1$ donde l_1 será un intervalo que se puede considerar C^2 -próximo del intervalo $H(B)$.



Podemos suponer además que B lo consideramos de forma que $H^{-1}(B)$ sea una franja horizontal contenida en $\text{int}(B)$, y que contiene al punto $(2, 2)$. Para f suficientemente cerca de H , se tendrá la misma propiedad ($f^{-1}(B)$ será una franja topológica). Definimos $A_1 = B \cap f^{-1}(B)$, $A_n = A_{n-1} \cap f^{-1}(A_{n-1})$, para esta sucesión de conjuntos se tiene $l_2 = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ que será un intervalo próximo al intervalo horizontal en $I \times J$ que pasa por $(2, 2)$.

Luego es claro que el punto fijo P queda definido por $l_1 \cap l_2$, que será un punto fijo silla surge de la forma del diferencial de f estando en un entorno apropiado de H .

Para probar las propiedades anunciadas sobre las variedades estable e inestable de P , basta observar que l_2 es parte de la variedad estable mientras l_1 lo es de la inestable. \square

5.2.1. Sobre la familia cuadrática.

Sea $H_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ función definida por $H_\mu(x, y) = (y, y^2 + \mu)$, a la familia $\{H_\mu\}_{\mu \in I}$ con I intervalo que contiene a -2 le llamamos familia cuadrática. Trabajaremos en general con $I = B(-2, \delta)$.

Observación 5.2.1. Los teoremas 5.2.2 y 5.2.3 son generalizables a endomorfismos suficientemente cercanos a H , con la salvedad de que el conjunto $\bigcap_0^{+\infty} \tilde{K}_{-i}$ no tiene por que

ser, necesariamente, localmente un conjunto de Cantor por un intervalo (en dirección de la parábola), sino que puede ser simplemente un intervalo en la parábola. De echo considerando la familia cuadrática suficientemente cerca de H (solo así será considerada en esta monografía) se tiene exactamente el último caso.

Se llamará Λ_m al conjunto hiperbólico que nos da el teorema 5.2.2 y P al punto fijo del teorema 5.2.3.

Aparece además en Λ_m un punto periódico, de período m , que es la continuación del punto Q usado para la construcción del conjunto hiperbólico de H_{-2} (que antes llamamos H) y de los difeomorfismos cercanos. A este punto le llamaremos, para los mapas cuadráticos y para los difeomorfismos Q .

En función de el objetivo del capítulo nos centraremos en estudiar alguna relación entre las variedades estable e inestable de Q y las estable e inestable de P , para difeomorfismos suficientemente cerca de H_μ con $\mu \in (-2 - \delta, -2)$ y con $\mu \in (-2, -2 + \delta)$.

Estudiemos estos casos por separado pero desde un mismo punto de vista. En lo que sigue es importante recordar la construcción de Λ_m y Q a partir de los entornos U_2, \dots, U_m .

Considerando primero difeomorfismos cerca de H_{μ_1} con $\mu_1 \in (-2, -2 + \delta)$, para tal H_{μ_1} tenemos la figura 5.7.

Siendo V el punto crítico de H_{μ_1} al intervalo de parábola imagen de H_{μ_1} que une a P con $H_{\mu_1}(V)$ le llamamos J .

Para un difeomorfismo f_1 cercano a H_{μ_1} consideramos su punto periódico Q que estará en U_m y muy cerca del punto periódico asociado al mapa H_{μ_1} que está sobre la parábola y en U_m . Podemos considerar un intervalo I de la variedad inestable de Q de forma que esté en U_m , cerca de ser paralelo a los lados de este entorno, cortando los segmentos horizontales que hacen de borde superior e inferior de U_m y cercano a $J \cap U_m$ (conforme f_1 lo esté de H_{μ_1}); esto último se puede ver considerando que este conjunto será la componente conexa de $\cap_0^{+\infty} \tilde{K}_i$ que pasa por Q . Teniendo este intervalo I miremos $f_1^m(I)$, este último se puede cercar al intervalo de parábola que une P con $H_{\mu_1}(V)$ (conforme I este cerca de J), atravesando a los entornos U_2, \dots, U_m por los segmentos que definen sus bordes superiores e inferiores, conteniendo a I y cuya intersección con U_m tiene al menos una nueva componente conexa distinta de I (esto último se observa iterando dos veces a I). Consideramos el extremo de I en el segmento superior de U_m y le llamamos a , seguimos por la variedad inestable de Q desde a hacia el lado que no contiene a Q esto nos llevará a un nuevo primer punto b intersección de la variedad inestable de Q con el segmento que define el borde superior de U_m . Esto último se basa

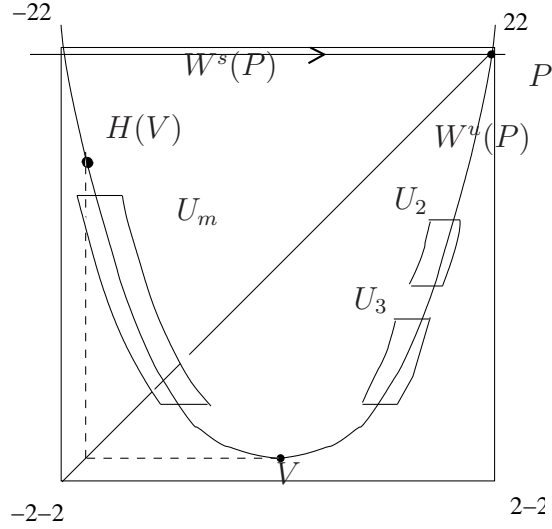


Figura 5.7: H_{μ_1} con $\mu_1 > -2$, observamos que el intervalo de parábola que va de P a $H(V)$ (que es variedad inestable de P en el endomorfismo) solo corta a la variedad inestable de P en P mismo. Se considera μ_1 suficientemente cerca de -2 como para tener la posición que se muestra respecto los entornos U_2, \dots, U_m .

en una suficiente cercanía de f_1 a H_{μ_1} y por lo tanto de I a J , al intervalo en la variedad inestable de Q definido por a y b le llamamos L , y es claro que se lo puede considerar tal que no interseca a un segmento de largo fijo L_0 de la variedad estable de P . Esto último es el tipo de relación que buscamos, y se muestra en la figura 5.8.

El mismo tipo de análisis se hará para difeomorfismos cerca de H_{μ_2} con μ_2 en $(-2 - \delta, -2)$. Para este mapa tenemos la figura 5.9.

Siguiendo los pasos del análisis anterior tenemos podemos considerar el intervalo I , que para un difeomorfismo f_2 suficientemente cercano a H_{μ_2} estará cerca de $J \cap U_m$ (donde J es el intervalo de parábola de P a $H_{\mu_2}(V)$), de forma que $f_1^m(I)$ sea un intervalo cercano a J , que además atraviesa los entornos U_2, \dots, U_m intersectando a todos los bordes formados por segmentos horizontales y solo a estos. Por lo tanto el segmento $f_1^m(I)$ se puede considerar arbitrariamente cerca del segmento J , con mas de una componente conexa en la intersección con U_m . Definiendo L de manera análoga al lo hecho en el caso anterior se tiene que para f_2 suficientemente cerca de H_{μ_2} , L interseca transversalmente al segmento de variedad estable de P considerado de largo, también, L_0 como se muestra en la figura 5.10.

Para f_2 iremos un poco mas a fondo. Recordamos que Q es elemento de la pieza

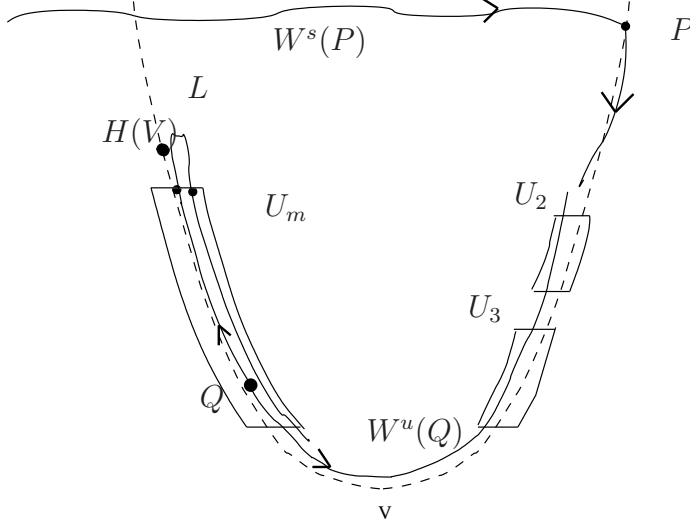


Figura 5.8: Para f_1 suficientemente cerca de H_{μ_1} $\mu_1 > -2$ observamos que el intervalo L no interseca a un segmento largo y fijo de variedad estable del punto P .

básica no trivial Λ_m podemos considerar un segundo arco L_1 de $W^u(Q)$ como se muestra en la figura 5.11. La forma cuadrática que se les da a los arco es debida a la proximidad del difeomorfismo al mapa cuadrático.

Finalizado el análisis anterior terminamos la sección con un teorema que será una herramienta fundamental en el objetivo del capítulo.

Teorema 5.2.4. *Existe un entorno C^2 de H_{-2} \mathcal{W} y un intervalo de parámetros $I = B(-2, \delta)$ para los cuales, si $\{f_{\tilde{\mu}}\}_{\tilde{\mu} \in J}$ es una curva continua de difeomorfismos C^2 en \mathcal{W} tal que*

Los dominios de las funciones contiene al conjunto $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

existen dos parámetros $\tilde{\mu}_1$ y $\tilde{\mu}_2$ para los cuales $f_{\tilde{\mu}_1}$ está lo suficientemente cerca de H_{μ_1} como para tener el comportamiento mostrado en la figura 5.8 y $f_{\tilde{\mu}_2}$ está lo suficientemente cerca de H_{μ_2} como para tener el comportamiento mostrado en las figuras 5.10 y 5.11.

Entonces existe $\tilde{\mu}_0$ tal que para $f_{\tilde{\mu}_0}$ se tiene:

$Q_{\tilde{\mu}_0}$ y $P_{\tilde{\mu}_0}$ continuaciones de los puntos Q y P de las figuras 5.8 y 5.10.

tangencia cuadrática entre la variedad inestable de $Q_{\tilde{\mu}_0}$ y la estable de $P_{\tilde{\mu}_0}$.

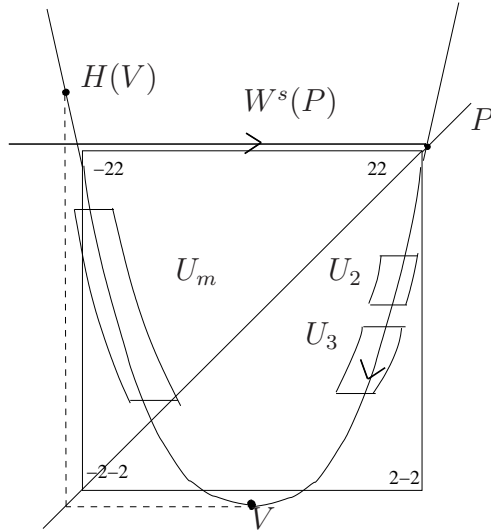


Figura 5.9: H_{μ_2} con $\mu_2 < -2$, se observa que el intervalo de parábola de P a $H(V)$ intersecciona transversalmente a la recta horizontal que pasa por $(2,2)$ (variedad estable de P) en un punto cercano al $(-2,2)$.

intersección transversal entre la variedad inestable de $Q_{\tilde{\mu}_0}$ y la estable de $P_{\tilde{\mu}_0}$.

intersección transversal entre la variedad estable de $Q_{\tilde{\mu}_0}$ y la inestable de $P_{\tilde{\mu}_0}$.

Demostración. Para hallar $\tilde{\mu}_0$ recorreremos los parámetros de $\tilde{\mu}_2$ hacia $\tilde{\mu}_1$. Si exigimos en \mathcal{W} que los difeomorfismos verifiquen:

Para P un intervalo de variedad estable ε -cerca del conjunto $(2, 2) + [-10, 10] \times \{0\}$ (ver teorema 5.2.3).

La variedad inestable de P debe contener un intervalo suficientemente grande ε -cercano a l .

La variedad inestable de Q debe contener un intervalo suficientemente grande ε -cerca del conjunto l (ver teorema 5.2.2).

La variedad estable de Q debe contener un intervalo ε -cerca del conjunto $Q + [-10, 10] \times \{0\}$ (ver teorema 5.2.2).

Eligiendo ε suficientemente chico, podemos asegurar la existencia de un primer parámetro para el cual habrá tangencia cuadrática entre la variedad inestable de Q y la estable de P . Llamando $\tilde{\mu}_0$ a ese parámetro, podemos asegurar que se verifican las demás relaciones homoclinicas. \square

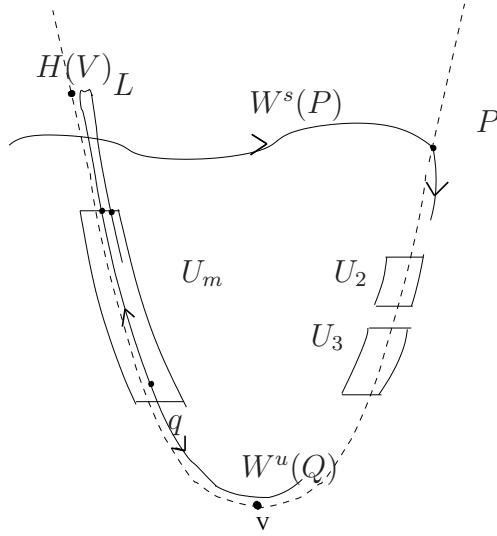


Figura 5.10: Para f_2 suficientemente cerca de H_{μ_2} $\mu_2 < -2$ observamos que el intervalo L intersecta a un segmento de variedad estable del punto P .

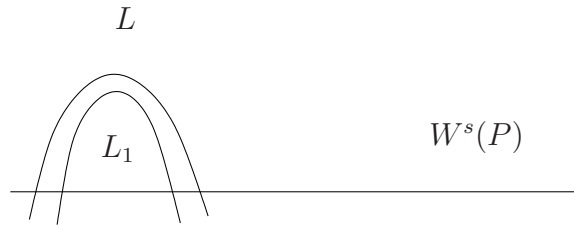


Figura 5.11: L y L_1 arcos de la variedad inestable de Q .

5.3. Localización de abiertos con persistencia de tangencias homoclínicas en $\mathcal{D}iff^2(M)$.

En esta sección se demostrará que dado un difeomorfismo φ que tiene tangencia homoclínica q entre $W^s(P_0)$ y $W^u(P_0)$, con P_0 disipativo, existe un abierto de $\mathcal{D}iff^2(M)$ que presenta persistencia de tangencias homoclínicas cuya clausura contiene a φ . Este resultado es el tercero de los tres trabajos de Newhouse que hacen a la monografía ([N,1979]), y por lo tanto, el último de la monografía.

La hipótesis sobre la disipatividad del punto P_0 se mantendrá hasta al final donde se mencionará la naturaleza en los otros dos casos.

Mediante perturbaciones locales como las que se han hecho en el capítulo 4.1 se tiene

el siguiente resultado.

Teorema 5.3.1. *Sea $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$ difeomorfismo que presenta una tangencia homoclínica cuadrática asociada a un punto periódico hiperbólico R . Entonces*

1. *Existe φ_0 arbitrariamente cerca de φ que presenta una tangencia homoclínica cuadrática $q = q(\varphi_0)$ entre $W^s(P_0(\varphi_0))$ y $W^u(P_0(\varphi_0))$ donde P_0 y $R = R(\varphi_0)$ pertenecen a un conjunto básico $\Lambda(\varphi_0)$ no trivial. Podemos suponer además que las hojas inestables de P_0 acumulan a ambos lados de sí misma (ver figura 5.12).*
2. *Existe una curva de difeomorfismos $\{\varphi_\mu\}_\mu$ que desdobra genéricamente la tangencia homoclínica q de φ_0 (en las condiciones del teorema 3.3, capítulo 3). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que esta curva de difeomorfismos fija la variedad estable de $P_0(\varphi_\mu)$ en un entorno de q (es decir $x = 0$) y el efecto del desdoblamiento sea una traslación por μ en la dirección vertical de las hojas inestables. (ver observación 3.1.2).*

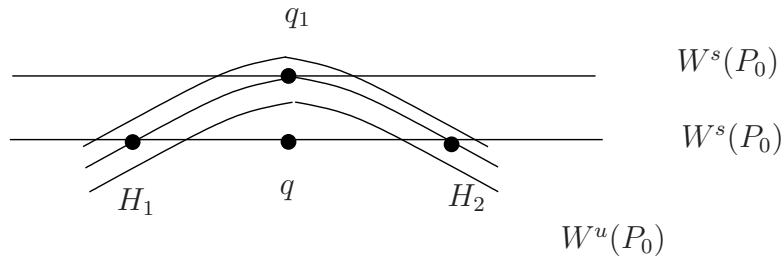


Figura 5.12: Perturbado arbitrariamente chico de φ , observamos que el dibujo se puede suponer en un entorno arbitrariamente chico de q .

Sea, ahora, $\varphi = \varphi_0$ el perturbado del original que nos permite el teorema anterior. Este difeomorfismo presenta un conjunto básico silla $\Lambda_0(\varphi) = \Lambda(\varphi_0)$ que contiene a P_0 , H_1 y H_2 , y por lo tanto tiene sentido $\tau^u(\Lambda_0(\varphi), P_0)$. Además se tiene $\tau^u(\Lambda_0(\varphi), P_0) > 0$ según se vio en el capítulo 2.

Para tal difeomorfismo tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.3.2. *Existe una sucesión de difeomorfismos convergiendo a φ cuyos elementos llamaremos φ_n , tal que cada uno presenta un conjunto básico Λ_n , un punto periódico Q_n en Λ_n y un punto fijo en P_n , verificando:*

$\Lambda_0(\varphi)$ será pieza básica de φ_n .

$\tau^s(\Lambda_n, Q_n) \cdot \tau^u(\Lambda_0(\varphi), P_0) > 1$ para todo natural suficientemente grande.

Se tiene tangencia cuadrática entre $W^u(Q_n)$ y $W^s(P_n)$, además comparten intersecciones transversales. Por su parte $W^s(Q_n)$ interseca transversalmente a $W^u(P_n)$.

A partir de algún natural existen intersecciones transversales de $W^u(P_0)$ con $W^s(P_n)$ y de $W^s(P_0)$ con $W^u(P_n)$.

Demostración. Para la prueba recordamos la notación del capítulo 3: $\xi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \psi_{\tilde{\mu},n}^{-1} \circ \varphi_{Mn(\tilde{\mu})}^{N+n} \circ \psi_{\tilde{\mu},n}(\tilde{x}, \tilde{y})$, donde los mapas $\psi_{\tilde{\mu},n}$ y M_n surgen del teorema 3.3.1.

Observando el teorema 3.3.1, y el teorema 5.2.4, se tiene que para el compacto $K = [-10, 10] \times [-10, 10]$ existe un natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ existe $\tilde{\mu}_n$ tal que $\xi_{\tilde{\mu}_n,n}$ verifica:

Existen \tilde{Q}_n punto periódico, $\tilde{\Lambda}_n$ conjunto básico que contiene a \tilde{Q}_n y un punto fijo \tilde{P}_n verificando las relaciones homoclínicas enunciadas en la tesis del presente teorema. Estas relaciones se representan en la figura 5.13.

La espesura estable $\tau^s(\tilde{\Lambda}_n, \tilde{Q}_n)$ es tal que $\tau^u(\Lambda_0(\varphi), P_0) \cdot \tau^s(\tilde{\Lambda}_n, \tilde{Q}_n) > 1$, esto último se puede asegurar considerando $\xi_{\tilde{\mu}_n,n}$ en \mathcal{W}_m (entorno del teorema 5.2.2), para m suficientemente grande.

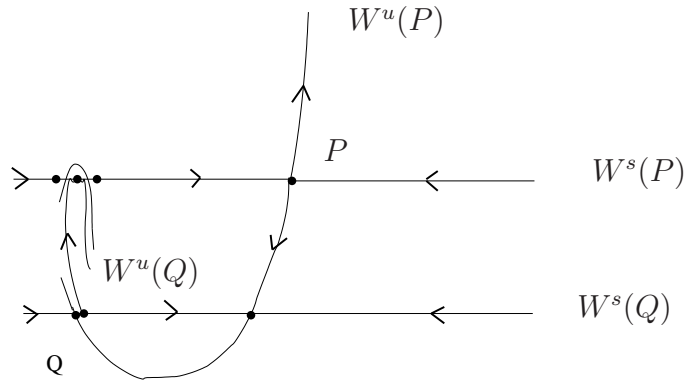


Figura 5.13: Relaciones homoclínicas entre piezas de $\xi_{\tilde{\mu}_n,n}$.

Por lo tanto definiendo $\varphi_n = \varphi_{Mn(\tilde{\mu}_n)}$ para todo n mayor a n_0 , tenemos una sucesión que verifica las dos primeras afirmaciones del teorema. Donde para cada n se tiene:

$Q_n = \psi_{\tilde{\mu}_n, n}(\tilde{Q}_n)$ siendo este último el punto periódico hallado para $\xi_{\tilde{\mu}_n, n}$.

$P_n = \psi_{\tilde{\mu}_n, n}(\tilde{P}_n)$, donde \tilde{P}_n es el punto fijo hallado para $\xi_{\tilde{\mu}_n, n}$.

Λ_n es un conjunto básico que contiene al conjunto $\psi_{\tilde{\mu}_n, n}(\tilde{\Lambda}_n)$, donde $\tilde{\Lambda}_n$ es el conjunto básico hallado para $\xi_{\tilde{\mu}_n, n}$.

Por último $M_n(\tilde{\mu}_n)$ tiende a cero en n , ya que en cada n se considera a $\tilde{\mu}$ variando en un intervalo compacto $[a, b]$ cuya sucesión de imágenes por los mapas M_n tienden al punto 0.

En lo que resta probaremos que se pueden considerar naturales arbitrariamente grandes para los cuales los elementos de la sucesión presentan intersecciones transversales de $W^s(P)$ con $W^u(P_0)$, y de $W^u(P)$ con $W^s(P_0)$. Para descargar la notación no usaremos los índices naturales de los elementos Q_n , Λ_n y P_n .

Recordamos la definición de los mapas $\psi_{\tilde{\mu}_n, n} : D_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por componer al mapa definido por las funciones coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \sigma^{-n}\tilde{x} + 1 \\ y &= \sigma^{-2n}\tilde{y} + \sigma^{-n} \end{aligned}$$

un mapa, fijo, lineal, que preserva las direcciones horizontales y verticales e invierte el sentido en la dirección vertical.

En virtud del teorema 3.3.2, y del teorema 5.2.3 existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene para $\xi_{\tilde{\mu}_n, n}$ y $K = [-10, 10] \times [-10, 10]$ la figura 5.14. A partir de ella quedan definidos para cada $n > n_0$ los puntos T_1 y T_2 , y los dominios $K_n = \sigma^n[-10, 10] \times \sigma^{\frac{2}{3}n}[-10, 10]$.

Utilizando ahora el cambio de coordenadas $\psi_{\tilde{\mu}_n, n}$ se tiene para el difeomorfismo φ_n la figura 5.15. Donde se definen l_1 y l_2 como la imagen por el cambio de coordenadas de los arcos de variedad estable e inestable (PT_2, PT_1) , (x_P, y_P) es el cambio de coordenadas aplicado a P , (x_1, y_1) es la imagen por el cambio de coordenadas de T_1 , (x_2, y_2) es la imagen por el cambio de coordenadas de T_2 e y_0 es $M_n(\tilde{\mu}_n)$.

Se tiene entonces:

para la curva l_1 , la variación máxima entre las coordenadas verticales de puntos sobre ella tiende a cero en n . Mientras la diferencia $x_2 - x_P$ se mantiene mayor a una constante positiva que llamamos γ para todo natural, se concluye de esto que se puede considerar una familia de intervalos E_n contenidos en la variedad estable de P para cada n y que convergen C^0 a un intervalo fijo de $W^s(\varphi_0, P_0)$ que llamaremos E y es de la forma $[q, q + a]$ con a positivo. Observando el difeomorfismo φ en la figura 5.12, aseguramos para n suficientemente grande que

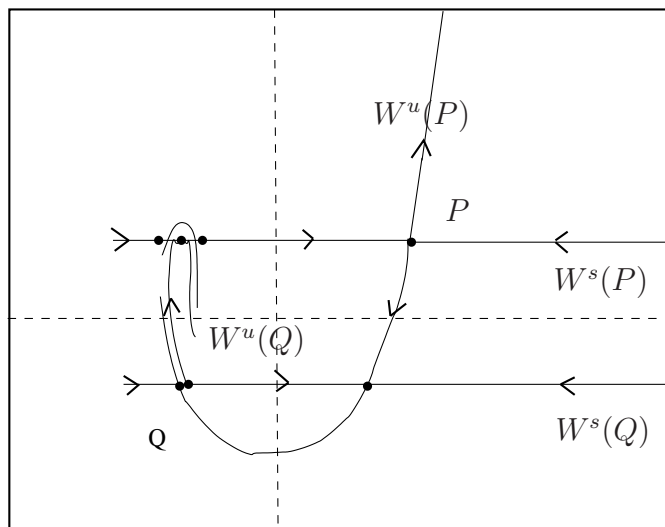


Figura 5.14: Mapas $\xi_{\tilde{\mu}_n, n}$ con $n > n_0$.

hay intersección transversal entre E y $W^u(\varphi_n, P_0)$ dada por un ángulo mayor θ_0 . Eligiendo el entorno del teorema 5.2.3 suficientemente chico, aseguramos que E_n está ε -cerca de un segmento horizontal con ε arbitrario. Podemos elegir entonces, el entorno \mathcal{W} del teorema 5.2.3 de forma que para n suficientemente grande se tenga intersección transversal entre E_n y $W^u(\varphi_n, P_0)$, o sea para n suficientemente grande encontramos intersección transversal entre $W^u(\varphi_n, P_0)$ y $W^s(\varphi_n, P)$.

Para la curva l_2 , se tiene que la diferencia $y_P - y_2$ en cada n se mantiene mayor a $5\sigma^{-(2-\frac{2}{3})n}$. Recordando las propiedades de los mapas $\psi_{\tilde{\mu}_n, n}$ podemos considerar en cada n , el iterado n -ésimo de l_2 por φ_n .

De esta forma se puede construir una sucesión de curvas I'_n tales que:

convergen al punto $(1, 0)$ (según las coordenadas linealizantes de φ_0 usadas en el teorema 3.3)

si notamos los extremos I'_n por i_n (el de menor ordenada) y s_n el (el de mayor ordenada) se tiene que la diferencia entre las coordenadas horizontales de estos puntos tiende a cero con orden mayor al de λ^n , mientras la diferencia entre las coordenadas verticales tiende a cero con orden $\sigma^{-\frac{1}{3}n}$.

Consideramos la sucesión de curvas $I_n = \varphi_n^N(I'_n)$ (N es el natural encontrado en 3.3). Luego tenemos las propiedades:

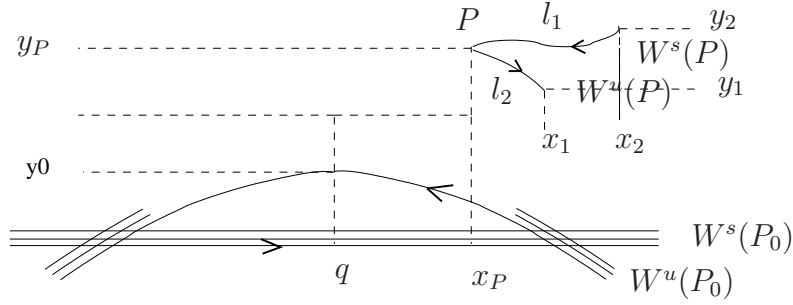


Figura 5.15: Mapas φ_n con $n > n_0$. Se puede asegurar que la parábola que representa la variedad inestable de P_0 tiene su vértice por encima de q , basta para ello mirar $M_n(\tilde{\mu}_n)$ y ver que es positivo.

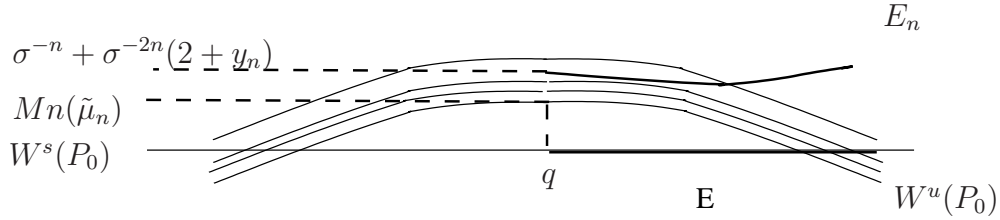


Figura 5.16: Intersección entre E_n y $W^u(P_0)$ para $n > n_E$.

- 1 La sucesión de curvas acumula en q .
- 2 Las curvas tienen como extremo al punto P y a un punto L que se puede considerar con menor ordenada.
- 3 para cada n la curva se puede considerar ε C^2 -próximas a un intervalo compacto del arco de variedad inestable que tiene q como extremo, para algún $\varepsilon > 0$ fijo, arbitrario.
- 4 La diferencia entre las ordenadas de P y L es un infinitésimo del orden de $\sigma^{-\frac{2}{3}n}$ (aquí se utiliza que λ^n es de menor orden que σ^n).

Por otra tenemos y_P que es un infinitésimo de orden σ^{-n} . Esto nos asegura que para $n > n_0$, con n_0 suficientemente grande, se tiene que la diferencia de ordenadas de extremos de I_n es mayor a y_P . Esto junto a la propiedad 3 nos asegura que para $n > n_0$ podemos considerar que I_n intersecciona a $W^s(P_0)$, mas aún la propiedad 3 nos permite asegurar que la intersección será transversal. Esto completa la prueba del teorema.

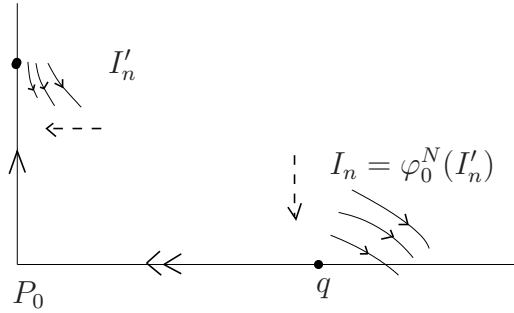


Figura 5.17: Convergencia de los intervalos I_n .

□

Corolario 5.3.3. *Sea φ el difeomorfismo considerado en las hipótesis del último teorema, entonces φ está en la clausura de un abierto que presenta persistencia de tangencias homoclínicas debidas a la pieza Λ_0 , y por lo tanto contiene un residual de difeomorfismos que presentan infinitos pozos.*

Demostración. Considerada la sucesión de difeomorfismos $\{\varphi_n\}_n$ que converge a φ se tiene a partir de algún natural n_0 a φ_n en las hipótesis del corolario 4.2.4. Por lo tanto para $n > n_0$ φ_n está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias de la pieza Λ_0 . □

En general si tenemos $\varphi \in \text{Diff}^2(M)$ con una tangencia homoclínica debido a un punto P_0 se tendrá:

Si P_0 es disipativo φ está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias que presenta un residual de difeomorfismos con infinitos pozos (es lo demostrado en el corolario anterior).

Si P_0 es no disipativo φ está en la clausura de un abierto con persistencia de tangencias que presenta un residual de difeomorfismos con infinitas fuentes. Para ver esto se trabaja con φ^{-1} , y se aplica el teorema anterior.

Este corolario es el resultado que se enunció al principio del capítulo, resultado del trabajo de Newhouse [N,1979], y es quien cierra el objetivo constructivo de la monografía.

Bibliografía

- [BD,2003] C. Bonatti, L. Diaz. On Maximal transitive sets of generic diffeomorphisms. *Publ. Math. de l'IHÉS* vol. 96 171-197 (2003).
- [M,1988] R. Mañé. A proof of the C^1 -stability conjecture. *Publ. Math I.H.E.S* vol. 66 161-210 (1988).
- [N,1970] S. Newhouse. Non density of Axiom A(a) on S^2 . *Proc. A.M.S* Symp. Pure Math. vol. 14 191-202 (1970).
- [N,1973] S.Newhouse. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* vol. 2 9-18 (1973).
- [N,1979] S.Newhouse. The abundance of wild hiperbolic sets and nonsmooth satble sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. I.H.E.S* vol. 50 101-151 (1979).
- [NPT,1983] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens. Bifurcation and stability of families of diffeomorphisms. *Publ. Math. I.H.E.S* vol.57 5-71 (1983).
- [PS,2000] M.Sambarino, E.Pujals. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Ann. of Math.* vol. 3 961-1023 (2000).
- [PT,1993] J. Palis, F. Takens. Hiperbolicity and sensitive chaotic dtnamics at homoclinic bifurcation. *Cambrige studies in Ad. Math.* vol. 35 (1993).
- [PV,1994] J.Palis, M. Viana. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Ann. of Math.* vol. 140 207-250 (1994).
- [Sh,1987] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag (1987).
- [S,1958] S. Sterenberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space, II. *Amer. J. Math* vol. 80 623-631 (1958).

[U,1995] R.Ures. Abundance of hyperbolicity in the C^1 topology. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* vol.6 747-760 (1995).