Trabajo Monográfico

Construcción de Resoluciones Proyectivas en la Categoría de Módulos

Cecilia Parodi

Orientador: Dr. Marcelo Lanzilotta

CMAT - IMERL

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

Agradecimientos

Sin dudas, en este espacio hay muchas personas a quienes nombrar y a las cuales estoy muy agradecida. Sin embargo, quiero destacar aquellas personas que hicieron que esto fuera posible.

En primer lugar, quiero agradecer al Negro, que sin su preocupación, motivación, confianza y ayuda no hubiera podido terminar este trabajo.

A Marce, por brindarme su apoyo y ayuda incondicional y creer siempre en mí.

A Dalu y Nati, por estar siempre, escucharme y ayudarme a superar los momentos más difíciles.

A mi familia, por haberme acompañado todos estos años.

Resumen

Este trabajo se encuentra en el marco de la Teoría de Representaciones de Álgebras, más específicamente, las álgebras de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados. El objetivo es la construcción de resoluciones proyectivas dentro de la Categoría de Módulos finitamente generados. Se describe cómo realizar esto desde un punto de vista teórico, para luego utilizarlo a efectos de crear una aplicación que pueda calcularlas de forma práctica. Esta aplicación es un programa de computadora que corre en la plataforma Java, y calcula, luego del ingreso del álgebra y módulo, la resolución proyectiva del módulo.

Palabras claves: Teoría de Representaciones de Álgebras, módulos proyectivos, resoluciones proyectivas.

Abstract

This work is within the Theory of Representations of Algebras, more specifically, the finitely dimensional algebras over algebraically closed fields. The aim of this work is the construction of projective resolutions in the Category of finitely generated Modules. It is described how to do this from a theoretical point of view, to then use it to create an application that is able to calculate them in a practical way. This application is a computer program, that runs over the Java platform, and it calculates, after entering the algebra and module, the projective resolution of the module.

Keywords: Theory of Representations of Algebras, projective modules, projective resolutions.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo la construcción de resoluciones proyectivas dentro de la Categoría de Módulos. Es de nuestro interés trabajar con K-álgebras de dimensión finita, donde K es un cuerpo algebraicamente cerrado. Bajo ciertas hipótesis, estas álgebras puedan ser representadas mediante carcajes, que son básicamente grafos orientados. Las condiciones que tienen que cumplir las álgebras para esto, se enuncian en un resultado de P. Gabriel.

El objetivo es alcanzado de dos formas diferentes. La primera consiste en desarrollar la teoría necesaria para ello, mientras que la segunda consiste en construir resoluciones proyectivas de forma práctica. Para esto último, se creó una aplicación que se basa fundamentalmente en toda la teoría presentada. Esta aplicación se trata de un programa de computadora, que corre sobre la plataforma Java. En la misma, se pueden ingresar las álgebras y los módulos en un formato especificado, y se calculará a partir de ellos la resolución proyectiva del módulo.

Los resultados alcanzados en los primeros dos capítulos fueron obtenidos fundamentalmente de [1] y [2]. En el primer capítulo se introducen los conceptos básicos de la Teoría de Representaciones que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. En la primera sección, se definen las álgebras y los módulos. La segunda sección tiene como objetivo alcanzar el resultado de Gabriel mencionado anteriormente. Para ello, es necesario definir los carcajes y las álgebras de caminos. El teorema de Gabriel establece la conexión que existe entre las álgebras de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados, con los carcajes. Luego, en la tercera sección, se definen las representaciones de los módulos y se termina el capítulo con un resultado fundamental, que muestra una equivalencia entre la categoría de módulos finitamente generados y la categoría de representaciones de dimensión finita.

En el segundo capítulo, se definen los módulos proyectivos y las resoluciones proyectivas, y se muestra cómo construirlas. Además, se prueba cómo obtener las representaciones asociadas a los mismos. Todos estos resultados se dualizan para obtener resultados sobre los módulos inyectivos.

El tercer capítulo trata de las conjeturas finitistas. Se definen las dimensiones proyectiva e inyectiva de un módulo, y en base a ellas, se definen las dimensiones finitistas de un álgebra. Se puede pensar que estas dimensiones son una medida de complejidad de una categoría de módulos. Luego, se presentan diferentes conjeturas y se muestran los resultados que se han alcanzado hasta el momento. El desarrollo de este capítulo se basó en los artículos [3], [4] y [7].

El último capítulo, se centra en la aplicación creada para construir las resoluciones proyectivas en la Categoría de Módulos finitamente generados. Se muestra de qué forma fueron utilizados los resultados alcanzados en los capítulos previos, y cómo fueron interpretados para poder realizarlo. Esta aplicación, utiliza la representación mediante grafos de las álgebras y módulos. Se detalla cómo fue realizada cada parte de la construcción de las resoluciones proyectivas, así como también los problemas que surgieron y cómo fueron solucionados.

Capítulo 1

Teoría de Representaciones

En este capítulo introducimos los conceptos de la Teoría de Representaciones de Álgebras que serán necesarios para poder comprender los capítulos posteriores.

Dentro del área de la Teoría de Representaciones de Álgebras, se busca estudiar los módulos asociados a un álgebra a través de los carcajes, que básicamente son grafos orientados que cumplen ciertas propiedades.

Si bien muchos de los resultados se pueden probar en un contexto más general, trabajaremos únicamente con K-álgebras de dimensión finita.

1.1. Álgebras y Módulos

En el área de la Teoría de Representaciones de Álgebras, se trata de comprender a un álgebra a través del estudio de los módulos que están asociados a ella, y un papel importante lo cumplen los módulos indescomponibles. Para poder comprender esto, es necesario definir los conceptos mencionados. Luego, veremos también algunas de sus propiedades principales.

1.1.1. Definiciones básicas

Comenzamos definiendo las estructuras básicas con las cuales vamos a trabajar: los anillos y las K-álgebras.

Definición 1.1.1. Un **anillo** es una terna $(A, +, \cdot\ )$, formada por un conjunto A y dos operaciones: $+ : A \times A \to A$ y $\cdot : A \times A \to A$ de suma y producto respectivamente, donde $(A, +)$ es un grupo abeliano que tiene al elemento 0 como neutro, y donde se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

para $a, b, c \in A$.

Observación 1.1.1. Consideraremos únicamente anillos con unidad, es decir, anillos donde existe un elemento $1 \in A$ que cumple que $1 \neq 0$ y $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para todo $a \in A$.

Definición 1.1.2. Un anillo K es un **cuerpo**, si es conmutativo, es decir $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in K$, y todo elemento tiene inverso, esto es que para todo $a \in K$ existe $b \in K$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Decimos que K es **algebraicamente cerrado** si todo polinomio no constante con una indeterminada t y coeficientes en K cumple que todas sus raíces están en K.

Definición 1.1.3. Sea K un cuerpo. Una K-**álgebra** A es un anillo con unidad, tal que A tiene una estructura de K-espacio vectorial compatible con la multiplicación de A como anillo. Expresado de otra forma,

$$\lambda(a \cdot b) = (a \cdot \lambda) \cdot b = a \cdot (\lambda \cdot b) = (a \cdot b)\lambda$$

para todo $\lambda \in K,\ a, b \in A$.

Una K-álgebra A se dice de **dimensión finita** si su dimensión sobre K como espacio vectorial, $\dim_K A$, es finita.

Definición 1.1.4. Sea A una K-álgebra. Un K-subespacio vectorial I de A es un **ideal a derecha** de A, si $xa \in I$, para todo $x \in I,\ a \in A$. Análogamente, se dice que I es un **ideal a izquierda** de A, si $ax \in I$, para todo $x \in I,\ a \in A$; y que es un **ideal bilateral** de A, si es un ideal a izquierda y a derecha.

Definición 1.1.5. Sea A una K-álgebra. Un A-**módulo** a derecha es un par $(M, \cdot\ )$, donde M es un K-espacio vectorial y $\cdot : M \times A \to M$, $m \to m \cdot a$, es una operación binaria que satisface las siguientes condiciones:

1. $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$
2. $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$
3. $x \cdot (ab) = (x \cdot a) \cdot b$
4. $x \cdot 1 = x$
5. $(x\lambda) \cdot a = x \cdot (a\lambda) = (x \cdot a)\lambda$

para todo $x, y \in M,\ a, b \in A,\ \lambda \in K$.

Observación 1.1.2. Es posible definir de manera análoga A-módulo a izquierda. Además, el propio A se puede ver como un A-módulo a derecha y a izquierda.

De ahora en adelante escribiremos M o M_A en lugar de $(M, \cdot\ )$ para hacer referencia a un A-módulo a derecha.

Definición 1.1.6. Un K-subespacio vectorial N de un A-módulo a derecha M, se dice que es un A-**submódulo** de M si $na \in N$, para todo $n \in N,\ a \in A$.

Definición 1.1.7. Un A-módulo a derecha M, se dice que está **generado** por los elementos $m_1, \ldots, m_n \in M$, si cualquier elemento $m \in M$ se puede escribir de la forma $m = m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n$, para algunos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Si se cumple esto, escribimos a M como $M = m_1A + \ldots + m_nA$. Además, si M está generado por un subconjunto finito de elementos de M, decimos que es **finitamente generado**.

Definición 1.1.8. Sean M y N A-módulos a derecha. Un mapa K-lineal $h : M \to N$ es un **homomorfismo** de A-módulos si $h(ma) = h(m)a$, para todo $m \in M,\ a \in A$. Además, h es un **monomorfismo** si es inyectivo, y es un **epimorfismo** si es sobreyectivo. Decimos que es un **isomorfismo** si es biyectivo.

Escribimos como $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ al conjunto de todos los homomorfismos de A-módulos de M hacia N, y $\operatorname{End} M$ al K-espacio vectorial $\operatorname{Hom}_A(M, M)$.

Observación 1.1.3. $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ es un K-espacio vectorial con respecto a la multiplicación escalar $(f, \lambda) \mapsto f\lambda$, que está dada por $(f\lambda)(m) = f(m\lambda)$, para $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, $\lambda \in K$, $m \in M$. $\operatorname{End} M$ es una K-álgebra considerando la composición de mapas, y tiene unidad, que está dada por el mapa identidad 1_M.

Nombramos $\operatorname{Mod}A$ a la categoría (abeliana) que tiene como objetos a los A-módulos a derecha, y como morfismos a los homomorfismos de A-módulos a derecha. Si nos restringimos a los módulos a derecha que son finitamente generados, éstos forman una subcategoría de $\operatorname{Mod}A$, a la que notaremos $\operatorname{mod} A$.

Si en lugar de considerar los A-módulos a derecha, consideramos los A-módulos a izquierda, podemos construir análogamente las categorías $A\operatorname{Mod}$ y $A\operatorname{mod}$.

Las siguientes definiciones serán esenciales para entender el tema central de este trabajo.

Definición 1.1.9. Sea $M \in \operatorname{mod} A$. Decimos que M es **simple** si es no nulo y no contiene submódulos propios. Además, M será **semisimple** si es suma directa de módulos simples.

Definición 1.1.10. Sea $M \in \operatorname{mod} A$. Se dice que M es **indescomponible** si es no nulo y no se puede escribir de la forma $M \simeq N \oplus L$ donde N y L son A-módulos no nulos.

Que un módulo sea indescomponible no implica necesariamente que no tenga submódulos propios, es decir, que sea simple. Pero sí se cumple que si un módulo es simple, entonces es indescomponible.

1.1.2. Descomposición de módulos

En esta sección vamos a enunciar un teorema importante de descomposición de módulos sobre álgebras de dimensión finita.

Para el estudio de los módulos indescomponibles sobre una K-álgebra A, los elementos idempotentes juegan un papel importante. Consideremos, para las siguientes definiciones, una K-álgebra A.

Definición 1.1.11. Un elemento $e \in A$ se dice que es **idempotente** si $e^2 = e$. Además, e se dice **central** si $ae = ea$ para todo $a \in A$.

Sean $e_1, e_2 \in A$ dos elementos idempotentes. Se dice que son **ortogonales** si $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Un idempotente e se dice que es **primitivo** si no se puede escribir como una suma $e = e_1 + e_2$, donde $e_1, e_2 \in A$ son idempotentes ortogonales no nulos.

Observación 1.1.4. Lo elementos 0 y 1 son idempotentes en toda álgebra, llamados idempotentes triviales. Además, si $e \in A$ es un idempotente no trivial, entonces $1 - e$ también lo es, y se cumple que son ortogonales.

Se puede probar que la observación anterior implica que el álgebra vista como A-módulo, se puede descomponer en una suma directa $A_A = eA \oplus (1 - e)A$. Esto es fácil de ver, ya que $e+(1-e) = 1$, lo que implica que cualquier elemento a del álgebra se puede expresar como $a = ea + (1 - e)a$.

Por otra parte, si descomponemos de forma no trivial a A_A como $A_A = M_1 \oplus M_2$, entonces $1 = e_1 + e_2,\ e_1 \in M_1,\ e_2 \in M_2$. Se cumple así que e_1 y e_2 son elementos idempotentes y ortogonales. Para probar esto, escribimos $e_1 = e_1^2 + e_2e_1 = e_1^2 + e_2(1 - e_2) = e_1^2 + e_2 - e_2^2$, ya que $1 = e_1 + e_2$. Entonces, $\underbrace{e_1 - e_1^2}_{\in M_1} = \underbrace{e_2 - e_2^2}_{\in M_2}$. Como la suma es directa, tenemos que $e_1 = e_1^2$ y $e_2 = e_2^2$, es decir que son idempotentes. Comenzando la cuenta de igual forma, se puede probar que además son ortogonales.

Más adelante utilizaremos que $M_i = e_iA$, es indescomponible si y solamente si e_i es primitivo.

Nuestro interés es trabajar con álgebras de dimensión finita. Supongamos entonces que A es una K-álgebra de dimensión finita. Si consideramos el A-módulo A_A, éste admite una descomposición en suma directa $A_A = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$, donde P_i es un ideal a derecha indescomponible para todo $i = 1, \ldots, n$. Por lo visto anteriormente, si $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, entonces $P_i = e_iA$, para todo $i = 1, \ldots, n$, y $e_1, \ldots, e_n$ son elementos idempotentes primitivos y ortogonales.

El conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ se llama **conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales**.

Definición 1.1.12. Una K-álgebra A es **conexa** (o indescomponible) si cada vez que escribimos $A = A_1 \times A_2$, con A_1, A_2 dos K-álgebras, esto implica que $A_1 = 0$ o $A_2 = 0$.

De forma equivalente, una K-álgebra A será conexa si sus únicos idempotentes centrales son el 0 y el 1.

El siguiente teorema es fundamental dentro de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita, ya que muestra que todo módulo se puede descomponer de forma única como suma directa de módulos indescomponibles.

Teorema 1.1.1. ***(Krull-Remak-Schmidt-Azumaya)*** *Sea A una K-álgebra de dimensión finita.*

a) Todo módulo M en $\operatorname{mod} A$ *se puede descomponer de la forma $M \simeq M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_m$, donde $M_1, M_2 \ldots M_m$ son módulos indescomponibles.*

b) Supongamos que $M \simeq M_1 \oplus M_2 \ldots \oplus M_m \simeq N_1 \oplus N_2 \ldots \oplus N_n$, siendo N_i y M_j indescomponibles para $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$. Entonces, $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots n\}$ tal que $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

1.2. Carcajes y Álgebras de caminos

En esta sección trabajaremos principalmente con álgebras de dimensión finita. Definiremos los conceptos de carcaj y álgebras de caminos.

Concluiremos enunciando el Teorema de Gabriel, que relaciona las álgebras de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados con los carcajes.

Definición 1.2.1. Un **carcaj** es una cuádrupla $Q = (Q_0,\ Q_1,\ s,\ t)$, donde Q_0 es un conjunto cuyos elementos son llamados **puntos** o **vértices**, y Q_1 también es un conjunto en el cual sus elementos son llamados **flechas**. Además, s y t son dos mapas $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada $\alpha \in Q_1$ su fuente y su destino, respectivamente. Si $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$, escribimos $\alpha : i \to j$ para representar a la flecha α.

Definición 1.2.2. Decimos que un carcaj Q es **finito** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

Definición 1.2.3. El **grafo subyacente** $\bar{Q}$ de un carcaj Q se obtiene a partir de Q sin considerar las orientaciones de las flechas. Decimos que un carcaj es **conexo** si $\bar{Q}$ es un grafo conexo.

Definición 1.2.4. Sean $Q = (Q_0,\ Q_1,\ s,\ t)$ un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un **camino** de largo $\ell \geq 1$ con fuente a y destino b (de a en b) es una secuencia

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$, para $1 \leq k \leq \ell$, y que cumple que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, para cada $1 \leq k < \ell$ y $t(\alpha_\ell) = b$. Un camino de esta forma se escribe abreviadamente como $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\ell$.

Denotaremos como Q_ℓ al conjunto de todos los caminos de largo ℓ. Además, asociamos a cada punto $a \in Q_0$ un camino de largo cero, que llamamos camino **trivial** o **estacionario** y que lo representamos como $\varepsilon_a = (a \parallel a)$.

Observación 1.2.1. Por lo dicho anteriormente, los caminos de largo cero están en biyección con Q_0, y los de largo uno están en biyección con las flechas del carcaj.

Definición 1.2.5. Un camino de largo $\ell \geq 1$ se llama **ciclo** si comienza y termina en el mismo punto. Un carcaj que no contiene ciclos se llama **acíclico**.

Como mencionamos al comienzo de esta sección, nos interesa ver la relación que hay entre los carcajes y el álgebra de caminos. Estamos en condiciones de definir esta álgebra, para luego continuar en esta dirección.

Definición 1.2.6. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K-álgebra tal que, como espacio vectorial, tiene como base el conjunto de todos los caminos en Q de largo $\ell \geq 0$; y tal que el producto de dos vectores de la base $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b)$ y $(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d)$ se define como:

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d)$$

donde δ_{bc} denota la delta de Kronecker.

Lo que quiere decir esto es que el producto de dos caminos dará cero siempre que el final del camino α sea diferente al comienzo del camino β, y en el caso en que coincidan, el producto será igual a concatenarlos.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

que consiste de un solo punto y un solo lazo. La base del álgebra de caminos KQ es $\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^\ell, \ldots\}$. Además, la multiplicación de los vectores de la base está dada por

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1\alpha^\ell = \alpha^\ell\varepsilon_1 = \alpha^\ell & \quad \text{para } \ell \geq 0, \text{ y} \\ \alpha^\ell\alpha^k = \alpha^{\ell+k} & \quad \text{para } \ell, k > 0, \end{array}$$

donde $\alpha^0 = \varepsilon_1$. Entonces, KQ es isomorfa al álgebra de polinomios $K[t]$ en una indeterminada t. Este isomorfismo está dado por el mapa K-lineal que verifica que

$$\varepsilon_1 \mapsto 1 \text{ y } \alpha \mapsto t.$$

Este ejemplo nos muestra que si consideramos un carcaj con un lazo, el álgebra de caminos que obtenemos a partir de él no es de dimensión finita. Veamos ahora algunas consecuencias de la definición, que además nos darán condiciones sobre el carcaj para que el álgebra de caminos sea de dimensión finita.

Lema 1.2.1. *Sea un carcaj Q y su álgebra de caminos KQ.*

a) KQ es un álgebra asociativa.

b) KQ es de dimensión finita si y solamente si Q es finito y acíclico.

c) KQ tiene identidad si y solamente si Q_0 es finito.

Demostración:

a) Es una consecuencia de la definición de la multiplicación, la cual es asociativa.

b) Si Q fuera infinito, entonces la base de KQ también lo sería, lo que implicaría que KQ sería de dimensión infinita. Además, si $w = w_1 w_2 \dots w_\ell$ es un ciclo en Q, entonces en la base de KQ habría elementos de la forma $w^t = (w_1 w_2 \dots w_\ell)^t$, para todo $t \geq 0$, lo cual implica que el álgebra es de dimensión infinita nuevamente. Recíprocamente, si Q es finito y acíclico, hay una cantidad finita de caminos posibles, por lo que KQ será de dimensión finita.

c) Cada camino estacionario ε_a es un elemento idempotente de KQ. Entonces, si Q_0 es finito, $\sum\limits_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es una identidad de KQ.

Recíprocamente, si Q_0 es infinito y $1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ es un elemento identidad de KQ, entonces consideremos el conjunto Q'_0 de todas las fuentes de los caminos w_i. Este conjunto tiene a lo sumo m elementos, por lo que es finito. Entonces, si $a \in Q_0 \backslash Q'_0$, obtenemos que $\varepsilon_a \cdot 1 = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Por el lema anterior, para que el álgebra de caminos tenga dimensión finita, es necesario que el carcaj sea finito y acíclico. Ahora, este no es el caso más general que podemos estudiar. Entonces, vamos a considerar carcajes cuya álgebra de caminos no sea necesariamente de dimensión finita, pero que al hacer cociente por ciertos ideales llamados admisibles, ese cociente sí quede de dimensión finita. Los casos en que el álgebra de caminos ya sea de dimensión finita también quedan contemplados, considerando el ideal nulo.

Definición 1.2.7. Sea Q un carcaj finito y conexo. Al ideal bilateral del álgebra de caminos KQ generado por las flechas de Q, lo llamaremos **ideal flecha** y lo denotaremos R_Q.

Hay una descomposición en suma directa de R_Q dada por:

$$R_Q = \bigoplus_{\ell \geq 1} KQ_\ell$$

siendo KQ_ℓ el subespacio de KQ generado por los caminos de largo ℓ.

Además, para cada $\ell \geq 1$,

$$R_Q^\ell = \bigoplus_{m \geq \ell} KQ_m$$

es el ideal de KQ generado por los caminos de largo mayor o igual que ℓ.

Definición 1.2.8. Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos KQ. Un ideal bilateral $\mathcal{I}$ de KQ se dice **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que:

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, el par $(Q, \mathcal{I})$ se dice **carcaj acotado**. Al álgebra cociente $KQ/\mathcal{I}$ la llamaremos **álgebra del carcaj acotado** $(Q, \mathcal{I})$.

Ejemplo 1.2.2. *a*) Si Q es un carcaj finito, el ideal R_Q^m es admisible para todo $m \geq 2$.

b) El ideal cero es admisible en KQ si y solamente si Q es acíclico.

c) Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1\circ & & \circ 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & \underset{3}{\circ} \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

- El ideal $\mathcal{I}_1 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ de la K-álgebra KQ es admisible.
- El ideal $\mathcal{I}_2 = \langle \alpha\beta - \lambda \rangle$ no es admisible. Esto es porque, $\alpha\beta - \lambda \notin R_Q^2$.

d) Consideremos Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1\circ \arrow[loop right, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Los ideales de la forma $\langle \alpha^m \rangle$ son ideales admisibles para $m \geq 2$.

Siempre que trabajemos con ideales admisibles, los vamos a escribir en términos de sus generadores, que se llaman relaciones.

Definición 1.2.9. Sea Q un carcaj. Una **relación** en Q con coeficientes en K es una combinación K-lineal de caminos de largo $l \geq 2$ que comienzan en un mismo vértice y terminan en un mismo vértice. Entonces, una relación ρ es un elemento de KQ que tiene la siguiente forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

con $\lambda_i \in K$ no todos cero y w_i caminos de largo por lo menos 2 tal que $s(w_i) = s(w_j)$ y $t(w_i) = t(w_j)$, para $i, j = 1, \ldots, m$.

A continuación veremos propiedades del álgebra $KQ/\mathcal{I}$, donde Q es un carcaj e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ.

Los siguientes dos lemas que se enuncian, no están demostrados en este trabajo. Sus demostraciones se pueden encontrar en [2].

Lema 1.2.2. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Entonces, el conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \ / \ a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales del álgebra $KQ/\mathcal{I}$.*

Lema 1.2.3. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra $KQ/\mathcal{I}$ es conexa si y solamente si Q es un carcaj conexo.*

Al comienzo de esta sección, comentamos que el trabajo se iba a realizar sobre álgebras de dimensión finita. Entonces, para trabajar con las álgebras acotadas por ideales admisibles, será necesario probar que son de dimensión finita.

Proposición 1.2.4. *Sea Q un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. El álgebra $KQ/\mathcal{I}$ es de dimensión finita.*

Demostración: Dado que $\mathcal{I}$ es un ideal admisible, existe $m \geq 2$ tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$, donde R es el ideal flecha de KQ. Esto induce un homomorfismo de álgebras $KQ/R^m \to KQ/\mathcal{I}$ sobreyectivo, por lo que alcanza con probar que KQ/R^m es de dimensión finita. Como una base de KQ/R^m está formada por las clases residuales de los caminos de longitud menor a m, que son finitos pues Q_1 es finito, entonces KQ/R^m es de dimensión finita. $\square$

Puede ocurrir que si el ideal $\mathcal{I}$ no es admisible, el álgebra $KQ/\mathcal{I}$ no sea de dimensión finita, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.3. Sea Q el carcaj

$$\alpha \circlearrowleft \overset{\circ}{1} \circlearrowright \beta$$

e $\mathcal{I} = \langle \beta\alpha, \beta^2 \rangle$. Es fácil ver que $\mathcal{I}$ no es un ideal admisible, ya que $\alpha^m \notin \mathcal{I}$ para cualquier $m \geq 1$.

Sea ahora $A = KQ/\mathcal{I}$ y J el K-subespacio vectorial de A generado por los elementos de la forma $\bar{\alpha}^n \bar{\beta}$, para todo $n \geq 1$, donde $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ y $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$. Veamos primero que J es un ideal a derecha de A, para lo que alcanza con probar que $J\bar{\alpha} \subseteq J$ y $J\bar{\beta} \subseteq J$. Esto se demuestra fácilmente a partir de las igualdades $\bar{\alpha}^n\bar{\beta}\bar{\alpha} = 0$ y $\bar{\alpha}^n\bar{\beta}^2 = 0$, para todo $n \geq 1$.

En particular, J_A es un submódulo del módulo A_A pero no es finitamente generado. Para probar esto, consideremos $\mathcal{J}$ un conjunto finito de generadores de J y sea m el mayor de los exponentes de $\bar{\alpha}$ entre sus elementos. Entonces, el elemento $\bar{\alpha}^{m+1}\bar{\beta} \in J$ no se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{J}$.

Lema 1.2.5. *Sea Q un carcaj finito. Todo ideal admisible de KQ es finitamente generado.*

Demostración: Consideremos R el ideal flecha de KQ y $m \geq 2$ tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Entonces, tenemos una sucesión exacta corta $0 \to R^m \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/R^m \to 0$ de KQ-módulos.

Es suficiente probar que R^m y $\mathcal{I}/R^m$ son finitamente generados como KQ-módulos. Como R^m está generado por los caminos de longitud m, y hay solamente una cantidad finita de ellos, entonces R^m es finitamente generado. Por otra parte, $\mathcal{I}/R^m$ es un ideal del álgebra de dimensión finita KQ/R^m, como fue probado en la proposición 1.2.4. Entonces, $\mathcal{I}/R^m$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita, y por lo tanto, un KQ-módulo finitamente generado. $\square$

Corolario 1.2.6. *Si Q es un carcaj finito e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ, existe una cantidad finita de relaciones $\{\rho_1, \ldots \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \ldots \rho_m \rangle$.*

Demostración: Por el lema anterior, un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ tiene un conjunto generador finito $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$. En general, estos elementos generadores no son relaciones porque no tiene por qué tener las mismas fuentes y los mismos destinos entre ellos. Por otro lado, para cualquier i tal que $1 \leq i \leq t$ y $a, b \in Q_0$, el término $\varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b$ es o bien cero o bien una relación. Como podemos escribir $\sigma_i = \sum\limits_{a,b \in Q_0} \varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b$ para $i \leq t$, si consideramos el conjunto $\{\varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b \ / \ 1 \leq i \leq t; a, b \in Q_0\}$, éste forma un conjunto finito de relaciones que genera $\mathcal{I}$. $\square$

De esta forma, vemos que dado un carcaj Q conexo y finito, le podemos asociar un álgebra $KQ/\mathcal{I}$ de dimensión finita, siempre que exista un ideal admisible de KQ.

Ahora nos enfocamos en la otra dirección. Nos interesa ver cómo asociarle un carcaj a un álgebra de dimensión finita, básica y conexa, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Definamos primero el concepto de álgebra básica.

Definición 1.2.10. Sea A una K-álgebra con el conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$. Decimos que A es **básica** si $e_iA \not\simeq e_jA$, para todo $i \neq j$.

Antes de pasar a definir el carcaj que le asociaremos a cada álgebra de dimensión finita, básica y conexa, necesitamos saber qué es el radical de un álgebra.

Definición 1.2.11. El **radical** $\operatorname{rad} A$ de una K-álgebra A es la intersección de todos los ideales maximales a derecha de A.

Definición 1.2.12. Sea A una K-álgebra de dimensión finita, básica y conexa, y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de A. El **carcaj ordinario** de A, Q_A, se define como:

a) Los puntos son los números $1, 2, \ldots, n$, que se corresponden de forma biyectiva con el conjunto de idempotentes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

b) Dados dos puntos $a, b \in (Q_A)_0$, las flechas $\alpha : a \to b$ se encuentran en biyección con los vectores de la base del K-espacio vectorial $e_a(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_b$.

Una consecuencia de esta definición es que Q_A es finito, porque A es de dimensión finita.

Se pueden probar los siguientes lemas:

Lema 1.2.7. *Si A es un álgebra de dimensión finita, básica y conexa, entonces el carcaj Q_A de A es conexo.*

Lema 1.2.8. *Sea Q un carcaj finito y conexo, $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ, y $A = KQ/\mathcal{I}$. Entonces, $Q_A = Q$.*

No siempre vamos a poder escribir a un álgebra de la forma $KQ/\mathcal{I}$. La condición para que esto ocurra nos la da el Teorema de Gabriel.

Teorema 1.2.9. ***(Gabriel)*** *Sea A una K-álgebra básica, conexa y de dimensión finita, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces existe un ideal admisible $\mathcal{I}$ y un carcaj Q_A tal que $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$.*

Definición 1.2.13. Bajo las condiciones del teorema anterior, un isomorfismo $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un ideal de KQ_A, se llama una **presentación** del álgebra A, vista como álgebra de carcaj acotado.

1.3. Representaciones y módulos

En la sección anterior, vimos que a través de los carcajes podemos ver las álgebras de dimensión finita. Nuestro interés ahora es poder visualizar los módulos a partir de los carcajes. Para esto, definiremos el concepto de representación de un carcaj y veremos cómo podemos ver los módulos a partir de ellas. Esta forma de ver a los módulos es fundamental dentro de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita.

Definición 1.3.1. Sea Q un carcaj y K un cuerpo algebraicamente cerrado. Una **representación** K-lineal M de Q, o simplemente una representación M de Q, es definida de la siguiente forma:

a) A cada punto $a \in Q_0$ se le asocia un K-espacio vectorial M_a.

b) A cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 se le asocia un mapa K-lineal $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

A una representación definida así, la denotamos $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha \in Q_1}$ o simplemente $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ siempre que no haya ambigüedad. Decimos que la representación M es de **dimensión finita** si cada M_a es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 1.3.2. Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q. Un **morfismo** de representaciones $f : M \to M'$ es una familia $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ de mapas K-lineales, donde $f_a : M_a \to M'_a$, para $a \in Q_0$, que cumple que para toda flecha $\alpha : a \to b$, $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$. De forma análoga, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"'] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Definiremos ahora la composición de morfismos entre representaciones.

Definición 1.3.3. Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ dos morfismos de representaciones de Q, donde $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ y $g = (g_a)_{a\in Q_0}$. Su **composición** se define como la familia $gf = (g_a f_a)_{a\in Q_0}$. Es fácil ver que gf es un morfismo de M a M''.

De esta forma, hemos definido una categoría que la llamaremos **Rep**(Q) de las representaciones K-lineales de Q. A la subcategoría que se obtiene de considerar las representaciones de dimensión finita la denotaremos por **rep**(Q).

Ejemplo 1.3.1. Sea Q el carcaj de Kronecker $1\circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} \circ 2$.

Una representación M de Q es:

$$K^2 \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\overset{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} K$$

Otra representación M' está dada por:

$$K^2 \underset{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\overset{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2$$

Ambas representaciones son de dimensión finita. Definimos un morfismo $M \to M'$ de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"'] & K \arrow[l, shift right, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] \\
K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"]
\end{tikzcd}$$

La verificación de que efectivamente es un morfismo, es simplemente ver que ambos cuadrados son conmutativos.

Ahora queremos definir la noción de representación de un carcaj acotado. En la sección anterior definimos lo que es una relación, ahora veamos lo que es la evaluación de un camino.

Definición 1.3.4. Sea Q un carcaj finito, y $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de Q. Para un camino no trivial $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_\ell$ de a hacia b en Q, definimos la **evaluación** de M en el camino w como el mapa K-lineal $\varphi_w : M_a \to M_b$ definido por:

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell}\varphi_{\alpha_{\ell-1}} \cdots \varphi_{\alpha_1}.$$

La definición anterior se extiende de forma natural a combinaciones lineales de caminos con igual fuente e igual destino. Es decir, si consideramos la relación $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$, obtenemos que $\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}$.

Ahora estamos en condiciones de definir lo que es una representación acotada por un ideal admisible $\mathcal{I}$.

Definición 1.3.5. Sea Q un carcaj finito, e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q se dice **acotada por** $\mathcal{I}$ si cumple que $\varphi_\rho = 0$ para toda $\rho \in \mathcal{I}$. Denotamos por $\mathbf{Rep}_K(Q,\mathcal{I})$ a la subcategoría de $\mathrm{Rep}_K Q$ que consiste de las representaciones de Q acotadas por el ideal admisible $\mathcal{I}$. Análogamente, denotamos por $\mathbf{rep}_K(Q,\mathcal{I})$ a la subcategoría de $\mathrm{rep}_K Q$ que consiste de las representaciones de Q acotadas por el ideal admisible $\mathcal{I}$.

Ejemplo 1.3.2. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{3}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1\circ & \overset{2}{\circ} \arrow[l, "\lambda"'] & & \circ 5 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & \underset{4}{\circ} \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

acotado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Es claro que las siguientes representaciones están acotadas por la relación:

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"'] & \\
K & K^2 \arrow[l, "{[\,1\ 1\,]}"'] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & K \arrow[ul, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "1"'] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, la representación

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

no está acotada por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Vimos anteriormente que los módulos indescomponibles juegan un papel importante. En la categoría $\mathrm{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$, definiremos el concepto de representación indescomponible, las que se corresponderán con los módulos indescomponibles.

Definición 1.3.6. Sean dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$. La **suma directa** $M \oplus M'$ es una nueva representación definida como

$$M \oplus M' = \left(M_a \oplus M'_a, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)$$

Definición 1.3.7. Una representación M de Q se dice **indescomponible** si no es isomorfa a la suma directa de dos representaciones no nulas.

Un objetivo que se busca en la teoría de representaciones de álgebras es poder estudiar la categoría $\operatorname{mod} A$ a través de las representaciones de los módulos. Hemos visto que si consideramos una K-álgebra A de dimensión finita, básica y conexa, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces existe un carcaj Q_A y un ideal admisible de KQ_A tal que $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$. Veamos ahora que las categorías $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$ son equivalentes.

Se asumen conocidos los conceptos utilizados de la Teoría de Categorías.

Teorema 1.3.1. *Sea $A = KQ/\mathcal{I}$ donde Q es un carcaj finito y conexo e $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ. Existe una equivalencia K-lineal de categorías:*

$$F\colon \operatorname{Mod} A \overset{\simeq}{\to} \operatorname{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$$

que se restringe a una equivalencia de categorías:

$$F\colon \operatorname{mod} A \overset{\simeq}{\to} \operatorname{rep}_K(Q, \mathcal{I}).$$

Demostración: Para demostrar este teorema, definiremos dos functores F: $\operatorname{Mod}A \to \operatorname{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ y G: $\operatorname{Rep}_K(Q, \mathcal{I}) \to \operatorname{Mod}A$. Comencemos por la construcción de F. Sea M_A un A-módulo. Defnimos una representación K-lineal $F(M) = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ de $(Q, \mathcal{I})$ de la siguiente forma:

- Sea $a \in Q_0$, y sea $e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I}$ su correspondiente idempotente primitivo en $A = KQ/\mathcal{I}$. Definimos entonces $M_a = Me_a$.
- Sea $\alpha \in Q_1$ y $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ su clase módulo $\mathcal{I}$. Definimos $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$ por $\varphi_\alpha(x) = x\bar{\alpha}$ para $x \in M_a$. Como M es un A-módulo, tenemos que φ_α es un mapa K-lineal.

Veamos que $F(M)$ está acotada por $\mathcal{I}$. Sea $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ una relación desde a hacia b en $\mathcal{I}$, donde $w_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2}\ldots\alpha_{i,\ell_i}$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_\rho(x) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{\alpha_{i,\ell_i}\ldots\alpha_{i,1}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x\bar{\alpha}_{i,1}\ldots\bar{\alpha}_{i,\ell_i}) \\
&= x \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\bar{\alpha}_{i,1}\ldots\bar{\alpha}_{i,\ell_i}) \\
&= x \cdot \bar{\rho} = x0 = 0.
\end{aligned}$$

Definimos el functor en los objetos y ahora definiremos la acción sobre los morfismos. Sea $f : M_A \to M'_A$ un homomorfismo de A-módulos. Queremos definir un morfismo $F(f) : F(M) \to F(M')$ de $\mathrm{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$. Sea $a \in Q_0$ y $x = xe_a \in Me_a = M_a$. Entonces, $f(xe_a) = f(xe_a^2) = f(xe_a)e_a \in M'e_a = M'_a$. Luego, tenemos que la restricción de f a M_a es un mapa K-lineal $f_a : M_a \to M'_a$. Definimos entonces $F(f) = (f_a)_{a\in Q_0}$. Veamos que verifica ser un morifismo de representaciones, es decir, que $\varphi'_\alpha f_a = f_b\varphi_\alpha$, para cualquier flecha $\alpha : a \to b$. Sea $x \in M_a$, entonces, $f_b\varphi_\alpha(x) = f_b(x\bar{\alpha}) = f(x\bar{\alpha}) = f(x)\bar{\alpha} = f_a(x)\bar{\alpha} = \varphi'_\alpha f_a(x)$.

Es fácil verificar que F es un functor K-lineal y que se restringe a un functor K-lineal $\mathrm{mod}\, A \to \mathrm{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.

Veamos ahora cómo construimos al functor K-lineal G: $\mathrm{Rep}_K(Q, \mathcal{I}) \to \mathrm{Mod}A$. Este functor será quasi-inverso de F, lo que nos dará la equivalencia entre las categorías.

Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ un objeto de la categoría $\mathrm{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$. Definimos $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$ como espacio vectorial. Tenemos que $A = KQ/\mathcal{I}$, entonces definiremos una estructura de KQ-módulo en $G(M)$ y luego mostraremos que se anula en $\mathcal{I}$. Sea $x = (x_a)_{a\in Q_0} \in G(M)$. Definimos entonces los productos de la forma xw, donde w es un camino en Q.

- Si $w = \varepsilon_a$ es el camino estacionario en a, entonces $xw = x\varepsilon_a = x_a$.
- Si $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_\ell$ es un camino no trivial de a hacia b, considerando el mapa K-lineal $\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \dots \varphi_{\alpha_1} : M_a \to M_b$, definimos $(xw)_c = \delta_{bc}\varphi_w(x_a)$. Esto implica que la única coordenada no nula será $(xw)_b = \varphi_w(x_a) \in M_b$.

Además, de la definición de $G(M)$, se concluye que para $\rho \in \mathcal{I}$ y $x \in G(M)$, tenemos que $x\rho = 0$. Entonces, definimos una estructura de $KQ/\mathcal{I}$-módulo de la siguiente forma: $x(v + \mathcal{I}) = xv$, para $x \in G(M)$ y $v \in KQ$. Con todo esto definimos al functor G en los objetos.

Sea $(f_a)_{a\in Q_0}$ un morfismo de $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ en $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ en $\mathrm{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$. Definiremos un homomorfismo de A-módulos $f : G(M) \to G(M')$. Por definición, $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$ y $G(M') = \bigoplus_{a\in Q_0} M'_a$ como K-espacios vectoriales, por lo que existe un mapa K-lineal $f = \bigoplus_{a\in Q_0} f_a : G(M) \to G(M')$. Veamos que es un homomorfismo de A-módulos, es decir, que $f(x\bar{w}) = f(x)\bar{w}$, para $x \in G(M)$ y $\bar{w} \in KQ/\mathcal{I}$. Alcanza con probarlo para $x = x_a \in M_a$ y $\bar{w} = w + \mathcal{I}$, con w un camino de a hacia b en Q. Entonces, $f(x\bar{w}) = f(x_a\bar{w}) = f_b\varphi_w(x_a) = \varphi'_w f_a(x_a) = f_a(x_a)\bar{w} = f(x)\bar{w}$.

Es fácil de verificar que G es un functor K-lineal y que se restringe a un functor K-lineal $\mathrm{mod}\, A \to \mathrm{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.

Finalmente, también es fácil de verificar que $FG \simeq 1_{Rep_K(Q,\mathcal{I})}$ y que $GF \simeq 1_{ModA}$. $\square$

Situándonos en las hipótesis del Teorema de Gabriel, como $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$ son equivalentes, podemos ver a los módulos de un álgebra como representaciones.

En el capítulo siguiente, definiremos los módulos proyectivos e inyectivos. Además, situándonos en estas hipótesis, veremos las representaciones asociadas a ellos y a los módulos simples definidos en la sección anterior, como representaciones acotadas de $(Q, \mathcal{I})$, donde Q es un carcaj conexo y finito. Estas transformaciones están dadas por el functor F definido en el teorema anterior.

Capítulo 2

Álgebra Homológica

En este capítulo vamos a estudiar los módulos proyectivos y veremos que dualizando los resultados obtenidos se podrán probar propiedades sobre los módulos inyectivos.

Uno de los resultados importantes al que llegaremos es la construcción de resoluciones proyectivas de módulos. Para esto, necesitamos introducir los conceptos de radical y top de un módulo. Luego, dualizando estos conceptos, podremos construir resoluciones inyectivas de módulos. Para esto, necesitamos conocer qué es el zócalo de un módulo.

Comencemos viendo de qué se trata la dualización.

2.1. Dualidad

Definición 2.1.1. Sea A una K-álgebra de dimensión finita. Definimos el functor de **K-dualidad estándar**

$$D : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op},$$

que asigna a cada módulo a derecha M de $\operatorname{mod} A$ el K-espacio vectorial

$$M^* = \operatorname{Hom}_K(M, K),$$

que tiene una estructura de A-módulo a izquierda dada por la fórmula $(a\varphi)(m) = \varphi(ma)$, para $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(M, K)$, $a \in A$ y $m \in M$.

Además, para cada morfismo de A-módulos $h : M \to N$, le asigna el K-morfismo dual $D(h) = \operatorname{Hom}_K(h, K) : D(N) \to D(M)$, $\varphi \mapsto \varphi h$ de A-módulos a izquierda.

Se prueba que D es una dualidad entre categorías, y que su quasi inversa está dada por un functor también denotado D, que es el siguiente:

$$D : \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} A,$$

que asigna a cada módulo a izquierda Y el K-espacio vectorial

$$Y^* = \operatorname{Hom}_K(Y, K),$$

que tiene una estructura de A-módulo a derecha dada por la fórmula $(\varphi a)(y) = \varphi(ay)$, para $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(Y, K)$, $a \in A$ e $y \in Y$.

2.2. Módulos semisimples y el radical, top y zócalo de un módulo

En esta sección vamos a definir los conceptos de radical, top y zócalo de un módulo y veremos propiedades de ellos. Antes de esto, será necesario conocer algunos resultados de los módulos semisimples y del radical de un álgebra. Recordemos del capítulo anterior, que el radical de un álgebra es la intersección de todos sus ideales maximales a derecha.

Comenzaremos demostrando el lema de Schur.

Lema 2.2.1. (Schur) *Sean S y S' A-módulos a derecha, y $f : S \to S'$ un A-homomorfismo no nulo.*

a) Si S es simple, entonces f es un monomorfismo.

b) Si S' es simple, entonces f es un epimorfismo.

c) Si S y S' son simples, entonces f es un isomorfismo.

Demostración: Como $f : S \to S'$ es un homomorfismo de A-módulos, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ son A-submódulos de S y S' respectivamente. Como $f \neq 0$, $\operatorname{Ker} f = 0$ si S es simple, e $\operatorname{Im} f = S'$ si S' es simple. □

Veamos ahora algunas propiedades de los módulos semisimples.

Lema 2.2.2. *a) Un A-módulo M de dimensión finita es semisimple si y solamente si para cualquier A-submódulo N de M existe un sobmódulo L de M tal que $L \oplus N = M$.*

b) Un submódulo de un módulo semisimple es semisimple.

Demostración:

a) Asumamos que $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$, donde $S_1, \ldots, S_m$ son módulos simples. Sea N un submódulo no nulo de M y $\{S_{j_1}, \ldots, S_{j_t}\}$ una familia maximal de módulos en el conjunto $\{S_1, \ldots, S_m\}$, tal que la intersección de N con el módulo $L = S_{j_1} \oplus \ldots \oplus S_{j_t}$ es cero. Entonces, $N \cap (L + S_h) \neq 0$, para $h \notin \{j_1, \ldots, j_t\}$. Como S_h es simple, podemos concluir que $S_h \subseteq L + N$, para todo $h \notin \{j_1, \ldots, j_t\}$. Esto implica que $M = L + N$ y entonces $M = L \oplus N$. El recíproco se prueba por inducción en $\dim_K M$.

b) Es consecuencia directa de la parte anterior y del teorema de descomposición de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya. □

El lema que sigue enuncia propiedades que serán de utilidad para poder demostrar otros resultados centrales para este trabajo.

Lema 2.2.3. *Sea* $\operatorname{rad} A$ *el radical de un álgebra* A.

a) $\operatorname{rad} A$ *es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de* A.

b) $\operatorname{rad} A$ *es un ideal bilateral y* $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = 0$.

c) Si I *es un ideal de* A *bilateral nilpotente, entonces* $I \subseteq \operatorname{rad} A$. *Si además,* A/I *es isomorfo a un producto* $K \times \ldots \times K$ *de copias de* K*, entonces* $I = \operatorname{rad} A$.

Demostración: Ver [2]. □

Definición 2.2.1. Para cualquier A-módulo a derecha M, el submódulo de M generado por todos sus submódulos simples es un submódulo semisimple denominado **zócalo** de M. Dicho módulo se escribe $\operatorname{soc} M$.

Definición 2.2.2. Sea A una K-álgebra y M un A-módulo. Llamamos **radical** de M_A al submódulo de M que es la intersección de todos los submódulos maximales. Denotaremos al radical como $\operatorname{rad} M$.

Por ejemplo, si consideramos un módulo simple M, éste no tendrá radical. Es decir, que $\operatorname{rad} M = 0$.

A continuación, y previo a que veamos algunas propiedades del radical de un módulo, veremos algunos resultados de los módulos semisimples.

Lema 2.2.4. *Sea* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *una sucesión exacta de* A*-módulos. Si* M *es semisimple, entonces* L *y* N *también lo son.*

Demostración: Como L es un submódulo de M, a partir del lema 2.2.2, L es semisimple, y existe un submódulo L' de M tal que $M = L \oplus L'$. Tenemos entonces que $N \xrightarrow{\sim} M/L \xrightarrow{\sim} (L \oplus L')/L \xrightarrow{\sim} L'$, por lo que N es isomorfo a un submódulo de M. Aplicando nuevamente el lema 2.2.2, concluimos que N es semisimple. □

Definición 2.2.3. Un A-módulo a derecha F es **libre** si es isomorfo a una suma directa de copias de A_A.

Observación 2.2.1. Todo módulo de dimensión finita se puede cubrir por un módulo libre.

Teorema 2.2.5. *Para cualquier álgebra* A *de dimensión finita, el* A*-módulo a derecha* A_A *es semisimple si y solamente si todo* A*-módulo a derecha es semisimple.*

Demostración: Si A_A es semisimple, entonces todo A-módulo libre lo es. Por lo tanto, aplicando el lema anterior, un módulo arbitrario lo es. El recíproco es claro, ya que A_A es un A-módulo a derecha. □

Decimos que una K-álgebra A es **semisimple** si A_A es un A-módulo semisimple.

Teorema 2.2.6. *Sea M un A-módulo de dimensión finita. Entonces, M_A es semisimple si y solamente si no tiene radical.*

Demostración: Ver [1]. □

Observación 2.2.2. El radical $\operatorname{rad} A_A$ del A-módulo a derecha A_A es el radical $\operatorname{rad} A$ del álgebra A. Entonces, a partir de los dos resultados anteriores, deducimos que si una K-álgebra A no tiene radical, entonces es semisimple.

Veamos algunas propiedades del radical de un módulo, enunciadas en el siguiente lema.

Lema 2.2.7. *Sean M, N y L módulos en* $\operatorname{mod} A$.

a) *Un elemento $m \in M$ pertenece a $\operatorname{rad} M$ si y solamente si $f(m) = 0$ para cualquier morfismo $f : M \to S$ con S un módulo simple a derecha.*

b) *Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, entonces, $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$.*

c) **(De Nakayama)** *Supongamos que M y L son submódulos de N. Si $L \subseteq \operatorname{rad} N$ y $L + M = N$, entonces $M = N$.*

d) $\operatorname{rad}(M \oplus N) = \operatorname{rad} M \oplus \operatorname{rad} N$.

e) $M \operatorname{rad} A = \operatorname{rad} M$.

Demostración:

a) Por el lema de Schur, todo morfismo $f : M \to S$, no nulo con S simple, es un epimorfismo. Si L es el núcleo de f, por los teoremas de isomorfismos, $M/L \simeq S$, lo que implica que L es un submódulo maximal. Por otro lado, todo submódulo maximal de M es el núcleo de un epimorfismo de M sobre un módulo simple. Entonces, el radical, que es la intersección de todos los submódulos maximales, coincide con la intersección de todos los núcleos de los epimorfismos de M sobre los módulos simples. Es decir:

$$\operatorname{rad} M = \bigcap_{\substack{f:M\to S \\ S\text{simple}}} \operatorname{Ker} f.$$

Esto prueba lo enunciado.

b) Sea $g : N \to S$ un morfismo, con S un módulo simple. Por la parte anterior, gf se anula en $\operatorname{rad} M$, por lo que g se anula en $f(\operatorname{rad} M)$. Entonces, $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$.

c) Sean M y L submódulos de N, tales que $L \subseteq \operatorname{rad} N$ y $L + M = N$. Supongamos por absurdo que $M \neq N$. Como N es de dimensión finita, entonces M es un submódulo de un submódulo maximal $X \neq N$ de N. Entonces, $L \subseteq \operatorname{rad} N \subseteq X$, obteniendo que $N = L + M \subseteq X + M = X$. Por lo tanto, llegamos a un absurdo, con lo cual, $M = N$.

d) Esto es consecuencia directa de la parte a.

e) Sea $m \in M$ y definamos el homomorfismo $f_m : A \to M$ de A-módulos a derecha, de la forma $f_m(a) = ma$ para $a \in A$. Por la parte b sabemos que si $a \in \operatorname{rad} A$, entonces $ma = f_m(a) \in f_m(\operatorname{rad} A) \in \operatorname{rad} M$. Concluimos que $M\operatorname{rad} A \subseteq \operatorname{rad} M$.

Para probar la otra inclusión, observamos que $(M/M\operatorname{rad} A)\operatorname{rad} A = 0$, y entonces el A-módulo $M/M\operatorname{rad} A$ es un módulo sobre el álgebra $A/\operatorname{rad} A$ con respecto a la acción $(m + M\operatorname{rad} A).(a + \operatorname{rad} A) = ma + M\operatorname{rad} A$. Por la observación 2.2.2, el álgebra $A/\operatorname{rad} A$ es semisimple y por el teorema 2.2.5 el $A/\operatorname{rad} A$-módulo de dimensión finita $M/M\operatorname{rad} A$ es una suma directa de módulos simples. Como el radical de cualquier módulo simple es cero, la parte d implica que $\operatorname{rad}(M/M\operatorname{rad} A) = 0$. Por la parte b, el epimorfismo de A-módulos $\pi : M \to M/M\operatorname{rad} A$ lleva $\operatorname{rad} M$ a cero, es decir, $\operatorname{rad} M \subseteq \operatorname{Ker} \pi = M\operatorname{rad} A$. □

En las hipótesis de la parte c del lema anterior, decimos que el submódulo $L \subseteq \operatorname{rad} N$ es **superfluo** en N.

De las propiedades enunciadas en el lema, obtenemos el siguiente corolario que va a ser muy útil al momento de realizar la aplicación para calcular las resoluciones proyectivas.

Corolario 2.2.8. *Supongamos que M es un módulo en* $\operatorname{mod} A$.

a) *El A-módulo $M/\operatorname{rad} M$ es semisimple y es un módulo sobre el álgebra $A/\operatorname{rad} A$.*

b) *Si L es un submódulo de M tal que M/L es semisimple, entonces $\operatorname{rad} M \subseteq L$.*

Demostración:

a) De la parte e del lema anterior sabemos que $\operatorname{rad} M = M\operatorname{rad} A$. Entonces, $(M/\operatorname{rad} M)\operatorname{rad} A = 0$, por lo que el A-módulo $M/\operatorname{rad} M$ es un módulo sobre $A/\operatorname{rad} A$ con respecto a la acción $(m + M\operatorname{rad} A).(a + \operatorname{rad} A) = ma + M\operatorname{rad} A$. Por la observación 2.2.2, el álgebra $A/\operatorname{rad} A$ es semisimple y, por el teorema 2.2.5, el módulo $M/\operatorname{rad} M$ es semisimple.

b) Supongamos que L es un submódulo de M tal que M/L es semisimple. Si consideramos el epimorfismo canónico $\varepsilon : M \to M/L$, por la parte b del lema 2.2.7, obtenemos que $\varepsilon(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad}(M/L) = 0$. Es decir, que $\operatorname{rad} M \subseteq \operatorname{Ker} \varepsilon = L$. □

En la parte b del lema 2.2.7, vimos que si $f : M \to N$, entonces, $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$. Es por esto, que f induce un morfismo $\bar{f} : M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$, en el cual, si $m \in M$,

$$\bar{f}(m + \operatorname{rad} M) = f(m) + \operatorname{rad} N.$$

Sean $p_M : M \to M/\operatorname{rad} M$ y $p_N : N \to N/\operatorname{rad} N$ las proyecciones canónicas. Entonces, $\bar{f}$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & N \arrow[d, "p_N"] \\ M/\operatorname{rad} M \arrow[r, "\bar{f}"] & N/\operatorname{rad} N \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.9. (De Nakayama) *Sean M y N dos módulos. Un morfismo $f : M \to N$ es un epimorfismo si y solamente si el morfismo inducido $\bar{f} : M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$ es un epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: La condición necesaria sale a partir del diagrama anterior. Dado que el mismo conmuta, se cumple que $\bar{f}p_M = p_N f$. Además, tanto p_N como f son epimorfismos. Por lo tanto, $\bar{f}$ también lo es.
Recíprocamente, de la definición de $\bar{f}$ sale que la sobreyectividad de $\bar{f}$ implica que $N = f(M)+\operatorname{rad}N$. Pero como $\operatorname{rad}N$ es superfluo en N, entonces, $f(M) = N$. Por lo tanto, f es sobreyectiva. □

Definición 2.2.4. Al módulo $M/\operatorname{rad} M$ lo llamamos $\operatorname{top} M$, y al morfismo $\bar{f}$ del lema anterior lo denominamos $\operatorname{top} f$.

A continuación enunciaremos un lema que es técnico, pero nos será de ayuda para poder demostrar la proposición que le sigue.

Lema 2.2.10. (Levantamiento de idempotentes) *Para cualquier K-álgebra A, los idempotentes de $B = A/\operatorname{rad} A$ pueden ser levantados módulo $\operatorname{rad} A$. Esto es, que para cualquier idempotente $\eta = g + \operatorname{rad} A \in B$, $g \in A$, existe un idempotente $e \in A$ tal que $g - e \in \operatorname{rad} A$.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [2]. □

Proposición 2.2.11. *Sea $B = A/\operatorname{rad} A$.*

a) Todo ideal a derecha I de B es una suma directa de ideales simples a derecha de la forma eB, donde e es un elemento idempotente primitivo de B. En particular, el B-módulo a derecha B_B es semisimple.

b) Cualquier módulo N en $\operatorname{mod} B$ es isomorfo a una suma directa de ideales simples a derecha de la forma eB, donde e es un elemento idempotente primitivo de B.

c) Si $e \in A$ *es un elemento idempotente primitivo de* A*, entonces el* B*-módulo* $\operatorname{top} eA$ *es simple y* $\operatorname{rad} eA = e\operatorname{rad} A \subset eA$ *es el único submódulo maximal propio de* eA*.*

DEMOSTRACIÓN:

a) Sea S un ideal a derecha de B no nulo, contenido en I con dimensión mínima. Entonces, S es un B-módulo simple y $S^2 \neq 0$, porque de otra forma, S sería nilpotente y por la parte c del lema 2.2.3, $0 \neq S \subseteq \operatorname{rad} B = 0$, que es una contradicción. Esto implica que $S^2 = S$, por lo que existe $x \in S$ que verifica $xS \neq 0$, $S = xS$ y $x = xe$, para algún elemento no nulo $e \in S$. Entonces, por el lema de Schur, el homomorfismo de B-módulos $\varphi : S \to S$ dado por la fórmula $\varphi(y) = xy$ es biyectivo. Como $\varphi(e^2 - e) = x(e^2 - e) = xee - xe = xe - xe = 0$, $e^2 - e = 0$, con lo cual e es un idempotente no nulo, y $S = eB$. Deducimos que $B = eB \oplus (1-e)B$ y que $I = S \oplus (1-e)I$. Dado que $\dim_K(1-e)I < \dim_K I$, podemos asumir por inducción que lo afirmado se satisface por $(1-e)I$. Es decir, que $(1-e)I$ es suma directa de ideales simples a derecha de la forma $e'B$, por lo que I también lo será.

b) Sea N un B-módulo generado por los elementos $n_1, \ldots, n_s$ y consideremos el epimorfismo $h : B^s \to N$ definido por la fórmula $h(\xi_i) = n_i$, donde $\xi_1, \ldots, \xi_s$ forman la base estándar del B-módulo B^s. Por la parte a, B^s es una suma directa de ideales a derecha simples de la forma eB, donde e es un idempotente primitivo de B. Además, por la parte a de 2.2.2, $B^s = \operatorname{Ker} h \oplus L$ para algún B-submódulo L de B^s. Entonces, h induce un isomorfismo $L \simeq N$, y se concluye b de la parte b de 2.2.2.

c) El elemento $\bar{e} = e + \operatorname{rad} A$ es un idempotente de B y $\operatorname{top} eA \simeq \bar{e}B$. Asumamos por absurdo que $\bar{e}B$ no es simple. Deducimos por la parte a que $\bar{e}B = \bar{e}_1 B \oplus \bar{e}_2 B$, donde $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ son idempotentes no nulos de B tales que $\bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ y $\bar{e}_1\bar{e}_2 = \bar{e}_2\bar{e}_1 = 0$. Como $\bar{e}_1 = \bar{e}_1^2 = (\bar{e} - \bar{e}_2)\bar{e}_1 = \bar{e}\bar{e}_1$, $\bar{e}_1 = g_1 + \operatorname{rad} A$ para algún $g_1 \in eA$. Por 2.2.10, existe $t \in A$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que el elemento $e_1 = (g_1 t)^m$ es un idempotente de A[1]. Como $g_1 \in eA$, $e_1 \in eA$ y $e_1 A \subseteq eA$. Entonces, la descomposición $A_A = e_1 A \oplus (1 - e_1)A$ induce la descomposición $eA = e_1 A \oplus \{(1-e_1)A \cap eA\}$, con lo cual, $eA = e_1 A$, ya que como e es primitivo eA es indescomponible. Entonces, $\bar{e}B = \operatorname{top} e_1 A = \bar{e}_1 B$, lo que implica que $\bar{e}_2 B = 0$, contrario a lo que asumimos. Por lo tanto, el módulo $\operatorname{top} eA$ es simple y entonces $\operatorname{rad} eA = (eA)\operatorname{rad} A$ es un A-submódulo propio maximal de eA. Ahora, si L es un A-submódulo propio de eA que no está en $\operatorname{rad} eA$, entonces $L + \operatorname{rad} eA = eA$ y por el lema 2.2.7 $L = eA$, una contradicción. Esto muestra que $\operatorname{rad} eA$ contiene a todos los A-submódulos propios de eA. $\square$

[1] Esto se puede ver en la demostración del lema 2.2.10, que se encuentra en [2].

2.3. Módulos proyectivos e inyectivos

En esta sección estudiaremos los módulos proyectivos e inyectivos, y luego, en la sección siguiente, veremos las representaciones asociadas a ellos.

Comencemos dando algunas definiciones.

Definición 2.3.1. Sean $h : M \to N$ y $u : L \to M$ homomorfismos de A-módulos a derecha. Decimos que un A-homomorfismo $s : N \to M$ es una **sección** de h, si $hs = 1_N$, y que un A-homomorfismo $r : M \to L$ es una **retracción** de u, si $ru = 1_L$.

Observación 2.3.1. Si s es una sección de h, entonces h es sobreyectiva, s es inyectiva, y hay descomposiciones en suma directa $M = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} h \simeq N \oplus \operatorname{Ker} h$, y h es una retracción de s.

De forma similar, si r es una retracción de u, entonces, r es sobreyectiva, u es inyectiva, u es una sección de r, y existen las descomposiciones en suma directa $M = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} r \simeq L \oplus \operatorname{Ker} r$.

Definición 2.3.2. Un A-módulo a derecha P se dice **proyectivo** si para cualquier epimorfismo de A-módulos a derecha $h : M \to N$, el mapa inducido $\operatorname{Hom}_A(P, h) : \operatorname{Hom}_A(P, M) \to \operatorname{Hom}_A(P, N)$ es sobreyectivo. Esto quiere decir que para cualquier epimorfismo $h : M \to N$ y cualquier homomorfismo $f : P \to N$, existe $f' : P \to M$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Lema 2.3.1. *Todo A-módulo libre P es proyectivo.*

Demostración: Sea una base $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ del A-módulo libre P. Consideremos además un epimorfismo $h : M \to N$ y un morfismo $f : P \to N$. Como h es sobreyectiva, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un elemento $x_\lambda \in M$ tal que $h(x_\lambda) = f(e_\lambda)$. Definimos entonces $f' : P \to M$ por $f'(e_\lambda) = x_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Por linealidad, f' se extiende a todo P. $\square$

Proposición 2.3.2. *Sea $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de A-módulos. La suma directa $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ es proyectivo si y solamente si cada P_λ es proyectivo.*

Demostración: Supongamos que $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ es proyectivo. Definimos $\iota_\lambda : P_\lambda \to \bigoplus_{\mu \in \Lambda} P_\mu$ y $p_\lambda : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} P_\mu \to P_\lambda$ la inclusión y proyección canónica respectivamente. Sea $h : M \to N$ un epimorfismo y $f : P_\lambda \to N$ un morfismo. Existe un morfismo $g : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} P_\mu \to M$ tal que $hg = fp_\lambda$. Pero entonces, $hg\iota_\lambda = fp_\lambda\iota_\lambda = f$.

Recíprocamente, supongamos que cada P_λ es proyectivo. Escribimos $P = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$. Sea $h : M \to N$ un epimorfismo y $f : P \to N$ un morfismo. Nuevamente, denotamos por $\iota_\lambda : P_\lambda \to P$ a la inclusión canónica. Para todo λ, existe $f'_\lambda : P_\lambda \to M$ tal que $hf'_\lambda = f\iota_\lambda$. Por la propiedad universal de la suma directa, P, existe un único $f' : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to M$ tal que $f'\iota_\lambda = f'_\lambda$. Entonces, $hf'\iota_\lambda = f\iota_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $hf' = f$. $\square$

El siguiente lema nos da un resultado que nos aproxima un poco más a nuestro objetivo. Nos muestra qué forma adquieren las descomposiciones de los módulos proyectivos, además de que para cualquier módulo podemos encontrar una sucesión exacta como la que se muestra en la parte c del siguiente lema.

Lema 2.3.3. *a) Un A-módulo a derecha P es proyectivo si y solamente si existe un A-módulo libre F y un A-módulo a derecha P' tal que $P \oplus P' \simeq F$.*

b) Supongamos que $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus \ldots \oplus e_nA$ es una descomposición de A_A en submódulos indescomponibles. Si un A-módulo a derecha P es proyectivo, entonces $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_m$, donde cada sumando P_j es indescomponible e isomorfo a algún e_sA.

c) Sea M un A-módulo a derecha arbitrario. Entonces, existe una sucesión exacta

$$\ldots \to P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \to 0 \tag{2.1}$$

en $\operatorname{Mod} A$, donde P_j es un A-módulo a derecha proyectivo para todo $j \geq 0$. Si además, M está en $\operatorname{mod} A$, cada P_j puede elegirse en $\operatorname{mod} A$.

Demostración:

a) Comencemos por el recíproco. Por el lema y la proposición anteriores, sabemos que todo módulo libre es proyectivo y que todo sumando de un módulo libre es proyectivo. Por lo tanto, P es proyectivo. Para probar el directo, sea P un módulo proyectivo generado por los elementos $\{m_j, j \in J\}$. Si $F = \bigoplus_{j\in J} x_jA$ es un módulo libre con el conjunto $\{x_j, j \in J\}$ de generadores y $f : F \to P$ es el epimorfismo definido por $f(x_j) = m_j$, entonces, como P es proyectivo, existe una sección $s : P \to F$. Por lo tanto, $F \simeq P \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) Sea P un módulo proyectivo. Por la parte a, existe un A-módulo libre F y un A-módulo a derecha P' tal que $P \oplus P' \simeq F$. Por hipótesis, F es una suma directa de copias de los módulos indescomponibles $e_1A, \ldots, e_nA$. Finalmente, por el teorema de descomposición única de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya, se cumple b.

c) Como mostramos en la parte a, para cualquier módulo M (puede ser en mod A), existe un epimorfismo $f : F \to M$, donde F es un módulo libre en Mod A (o mod A, respectivamente). Definimos $P_0 = F$ y $h_0 = f$. Sea $f_1 : F_1 \to \operatorname{Ker} h_0$ un epimorfismo con módulo libre F_1 en Mod A. Sea $P_1 = F_1$ y definimos h_1 como la composición de f_1 con la inclusión $\operatorname{Ker} h_0 \subseteq P_0$. Si M está en mod A, entonces F_1 puede ser elegido en mod A, ya que como A es de dimensión finita, $\dim_K M$ y $\dim_K F_0$ son finitas, y $\operatorname{Ker} h_0$ está en mod A. Si continuamos con este proceso, por inducción completa podemos construir la sucesión exacta 2.1. □

Observación 2.3.2. Bajo las hipótesis de la parte b del lema anterior, y por la proposición 2.3.2, los módulos de la forma $e_s A$ son proyectivos. Esto lo destacamos, ya que será de utilidad para más adelante.

Definición 2.3.3. a) Una resolución como la de 2.1 se llama **resolución proyectiva** del A-módulo M.

b) Un epimorfismo $h : M \to N$ en mod A es **minimal** si $\operatorname{Ker} h$ es superfluo en M. Un epimorfismo $h : P \to M$ en mod A se llama **cobertura proyectiva** de M si P es un módulo proyectivo y h es un epimorfismo minimal.

El lema que sigue nos da una caracterización de las coberturas proyectivas.

Lema 2.3.4. *Un epimorfismo $h : P \to M$ es una cobertura proyectiva de un A-módulo M si y solamente si P es proyectivo y para cualquier A-homomorfismo $g : N \to P$ la sobreyectividad de hg implica la sobreyectividad de g.*

Demostración: Sea $h : P \to M$ una cobertura proyectiva de M y $g : N \to P$ un homomorfismo tal que hg es sobreyectivo. Se verifica que $\operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} h = P$, y esto implica que g es sobreyectivo, dado que asumimos que $\operatorname{Ker} h$ es superfluo en P.

Recíprocamente, asumimos que $h : P \to M$ cumple la propiedad enunciada. Sea N un submódulo de P tal que $N + \operatorname{Ker} h = P$. Si consideramos $g : N \hookrightarrow P$ la inclusión natural, entonces $hg : N \to M$ es sobreyectivo. Entonces, por hipótesis g también es sobreyectivo. Esto prueba que $\operatorname{Ker} h$ es superfluo. □

Definición 2.3.4. a) Una resolución proyectiva con dos términos

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

en mod A se denomina **presentación proyectiva minimal** de un A-módulo M, si los homomorfismos de A-módulos $P_1 \xrightarrow{p_1} \operatorname{Ker} p_0$ y $P_0 \xrightarrow{p_0} M$ son coberturas proyectivas.

b) Una resolución proyectiva como la de 2.1 en mod A se denomina **resolución proyectiva minimal** de M, si $h_j : P_j \to \operatorname{Ker} h_{j-1}$ es una cobertura proyectiva para todo $j \geq 1$ y $P_0 \xrightarrow{p_0} M$ es una cobertura proyectiva.

En el siguiente teorema mostramos que todo módulo M en $\operatorname{mod} A$ admite una cobertura proyectiva y, con su demostración, obtenemos una forma de hallarlas.

Teorema 2.3.5. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita y $A_A = e_1A \oplus \ldots \oplus e_nA$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales.*

a) Para cualquier A-módulo M en $\operatorname{mod} A$ existe una cobertura proyectiva

$$P(M) \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

donde $P(M) \simeq (e_1A)^{s_1} \oplus \ldots \oplus (e_nA)^{s_n}$ y $s_1 \geq 0, \ldots, s_n \geq 0$. El homomorfismo h induce un isomorfismo $P(M)/\operatorname{rad} P(M) \simeq M/\operatorname{rad} M$.

b) La cobertura proyectiva $P(M)$ de un módulo M en $\operatorname{mod} A$ es única. Es decir, si $h' : P' \to M$ es otra cobertura proyectiva de M, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
P(M) \arrow[r, "h"] & M \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & P' \arrow[u, "h'"'] \arrow[ul, "g"] &
\end{tikzcd}$$

donde g es un isomorfismo.

Demostración:

a) Sean $B = A/\operatorname{rad} A$, $\bar{e}_j = e_j + \operatorname{rad} A \in B$, y $p : A \to B$ la proyección. Dado que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de A, $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de B. Además, $B_B = \bar{e}_1B \oplus \ldots \oplus \bar{e}_nB$ es una descomposición de B en indescomponibles. Por la proposición 2.2.11 sabemos que $\operatorname{rad} e_jA \subset e_jA$ es el único submódulo maximal de e_jA, y entonces $\operatorname{top} e_jA \simeq \bar{e}_jB$ es un B-módulo simple y el epimorfismo $p_j : e_jA \to \operatorname{top} e_jA$ inducido por p es una cobertura proyectiva de $\operatorname{top} e_jA$.

Sea M un módulo en $\operatorname{mod} A$. Entonces, $\operatorname{top} M = M/\operatorname{rad} M$ es un módulo en $\operatorname{mod} B$, y por la proposición 2.2.11 y el corolario 2.2.8 existen isomorfismos de B-módulos

$$\operatorname{top} M \simeq (\bar{e}_1B)^{s_1} \oplus \ldots \oplus (\bar{e}_nB)^{s_n} \simeq (\operatorname{top} e_1A)^{s_1} \oplus \ldots \oplus (\operatorname{top} e_nA)^{s_n},$$

para algún $s_1 \geq 0, \ldots, s_n \geq 0$. Sea $P(M) = (e_1A)^{s_1} \oplus \ldots \oplus (e_nA)^{s_n}$. Como $P(M)$ es proyectivo, existe un homomorfismo de A-módulos $h : P(M) \to M$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
P(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] & M \arrow[d, "t'"] \\
\operatorname{top} P(M) \arrow[r, "\operatorname{top} h"] & \operatorname{top} M
\end{tikzcd}
$$

donde t y t' son los epimorfismos canónicos. Tenemos entonces que $\operatorname{top} h$ es un isomorfismo, y por el teorema 2.2.9 sabemos entonces que h es un epimorfismo.

Más aún, por la conmutatividad del diagrama,

$$\operatorname{Ker} h \subseteq \operatorname{Ker} t = \operatorname{rad} P(M).$$

Por el lema 2.2.7, el módulo $\operatorname{rad} P(M)$ es superfluo en $P(M)$, y entonces $\operatorname{Ker} h$ es también superfluo en $P(M)$. Por lo tanto, el epimorfismo h es una cobertura proyectiva de M.

b) La existencia del morfismo $g : P' \to P(M)$ que hace conmutar el diagrama mostrado en b, es una consecuencia de la proyectividad de P'. Como $hg = h'$ es sobreyectivo, por el lema 2.3.4 g es sobreyectivo. Luego, la dimensión de P' debe ser mayor o igual que la de $P(M)$, que es finita por la parte anterior. Realizando el mismo procedimiento, pero ahora utilizando la proyectividad de $P(M)$, obtenemos un morfismo sobreyectivo $g' : P(M) \to P'$. Esto implica que la dimensión de $P(M)$ es mayor o igual que la de P'. Por lo tanto, ambas dimensiones deben ser finitas e iguales. Concluimos que $P(M)$ y P' son isomorfos. □

Observación 2.3.3. La prueba de este teorema nos muestra una forma de construir la cobertura proyectiva $P(M) \to M$ de cualquier módulo en $\operatorname{mod} A$. Por simplicidad, nos referiremos al módulo $P(M)$ como la cobertura proyectiva de M.

El siguiente corolario nos muestra un resultado importante, ya que enuncia que para cualquier módulo en $\operatorname{mod} A$ podemos encontrar una resolución proyectiva minimal, y nos muestra cómo hacerlo. Ésto será central para el desarrollo de una aplicación que pueda calcularlas.

Corolario 2.3.6. *Sea A una K-álgebra. Cualquier módulo en* $\operatorname{mod} A$ *admite una presentación proyectiva minimal y una resolución proyectiva minimal en* $\operatorname{mod} A$.

Demostración: Sea M un módulo en $\operatorname{mod} A$. Por el teorema 2.3.5, existe una cobertura proyectiva $p_0 : P_0 \to M$ en $\operatorname{mod} A$. Entonces, $\operatorname{Ker} p_0$ es de dimensión finita y, de acuerdo al teorema 2.3.5, hay una cobertura proyectiva $p_1 : P_1 \to \operatorname{Ker} p_0$. Esto resulta en una presentación proyectiva minimal $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ de M. Continuando este procedimiento, por inducción obtenemos una resolución proyectiva de M en $\operatorname{mod} A$. □

Ahora que conocemos cómo construir las resoluciones proyectivas minimales de los módulos, dualizaremos los resultados más importantes, para obtener reultados análogos para los módulos inyectivos.

Comencemos definiendo a los módulos inyectivos.

Definición 2.3.5. Un A-módulo a derecha E es **inyectivo** si para cualquier monomorfismo de A-módulos a derecha $u : L \to M$, el mapa inducido $\mathrm{Hom}_A(u, E) : \mathrm{Hom}_A(M, E) \to \mathrm{Hom}_A(L, E)$ es sobreyectivo. Es decir, que para todo monomorfismo $u : L \to M$ y homomorfismo $g : L \to E$, existe $g' : M \to E$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "g'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Recordemos de la sección 2.1 que el functor $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ define dos dualidades

$$\mathrm{mod}\, A \xrightarrow{D} \mathrm{mod}\, A^{op} \xrightarrow{D} \mathrm{mod}\, A$$

de forma que hay equivalencias de functores $D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}\, A}$ y $D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}\, A^{op}}$. Esto permite estudiar los módulos inyectivos de $\mathrm{mod}\, A$ a través de los módulos proyectivos de $\mathrm{mod}\, A^{op}$.

Definimos a continuación, las nociones duales de epimorfismo minimal y cobertura proyectiva.

Definición 2.3.6. Un monomorfismo de A-módulos $u : L \to M$ en $\mathrm{mod}\, A$ es **minimal** si todo submódulo no nulo X de M tiene intersección no vacía con $\mathrm{Im}\, u$. Un monomorfismo $u : L \to E$ en $\mathrm{mod}\, A$ se denomina **envolvente inyectiva** de L si E es un módulo inyectivo y u es un monomorfismo minimal.

Ahora, utilizando la dualidad estándar, obtenemos los siguientes resultados. Aquí, no demostraremos las propiedades, simplemente se quiere mostrar qué se puede probar a partir de los módulos inyectivos.

Teorema 2.3.7. *Sea A una K-álgebra de dimensión finita y $D : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, A^{op}$ la dualidad estándar $D(-) = \mathrm{Hom}_K(-, K)$. Entonces se verifica lo siguiente.*

a) Una sucesión $0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} N \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}\, A$ es exacta, si y solamente si la sucesión inducida $0 \longrightarrow D(M) \xrightarrow{D(h)} D(N) \xrightarrow{D(u)} D(L) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathrm{mod}\, A^{op}$.

b) Un módulo E en $\mathrm{mod}\, A$ es inyectivo si y solamente si el módulo $D(E)$ es proyectivo en $\mathrm{mod}\, A^{op}$. Un módulo P en $\mathrm{mod}\, A$ es proyectivo, si y solamente si el módulo $D(P)$ es inyectivo en $\mathrm{mod}\, A^{op}$.

c) Un módulo S en $\mathrm{mod}\, A$ es simple si y solamente si el módulo $D(S)$ es simple en $\mathrm{mod}\, A^{op}$.

d) Un monomorfismo $u : M \to E$ en $\operatorname{mod} A$ es una envolvente inyectiva si y solamente si el epimorfismo $D(u) : D(E) \to D(M)$ es una cobertura proyectiva en $\operatorname{mod} A^{op}$. Un epimorfismo $h : P \to M$ en $\operatorname{mod} A$ es una cobertura proyectiva si y solamente si $D(h) : D(M) \to D(P)$ es una envolvente inyectiva en $\operatorname{mod} A^{op}$.

Corolario 2.3.8. *Todo módulo M en $\operatorname{mod} A$ tiene una envolvente inyectiva $u : M \to E(M)$ y el módulo $E(M)$ está únicamente determinado a partir de M, a menos de isomorfismos.*

Análogo a lo realizado con las coberturas proyectivas, diremos que $E(M)$ es una envolvente inyectiva de M.

Definición 2.3.7. a) Una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \xrightarrow{u^0} I^0 \xrightarrow{u^1} I^1$ es una **presentación inyectiva minimal** de un A-módulo N si los monomorfismos $u^0 : N \to I^0$ e $\operatorname{Im} u^0 \hookrightarrow I^1$ son envolventes inyectivas.

b) Una resolución inyectiva $0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \to \ldots \to I^m \xrightarrow{d^{m+1}} I^{m+1} \to \ldots$ de un módulo M en $\operatorname{mod} A$ se dice **minimal** si $\operatorname{Im} d^m \to I^m$ es una envolvente inyectiva para todo $m \geq 1$, y $d^0 : M \to I^0$ es una envolvente inyectiva.

Corolario 2.3.9. *Todo módulo M en $\operatorname{mod} A$ tiene una presentación inyectiva minimal y una resolución inyectiva minimal en $\operatorname{mod} A$.*

Corolario 2.3.10. *Supongamos que $A_A = e_1 A \oplus \ldots \oplus e_n A$ es una descomposición de A en submódulos indescomponibles.*

a) Todo A-módulo a derecha simple es isomorfo a uno de los módulos

$$S(1) = \operatorname{top} e_1 A, \ldots, S(n) = \operatorname{top} e_n A.$$

b) Todo A-módulo proyectivo indescomponible a derecha es isomorfo a uno de los submódulos

$$P(1) = e_1 A, \ldots, P(n) = e_n A.$$

Más aún, $e_i A \simeq e_j A$ si y solamente si $S(i) \simeq S(j)$.

c) Todo A-módulo inyectivo indescomponible a derecha es isomorfo a uno de los submódulos

$$I(1) = D(Ae_1) \simeq E(S(1)), \ldots, I(n) = D(Ae_n) \simeq E(S(n)),$$

donde $E(S(j))$ es una envolvente inyectiva del A-módulo simple $S(j)$.

2.4. Representaciones de módulos proyectivos e inyectivos

Al igual que en el capítulo anterior, situándonos en las hipótesis del Teorema de Gabriel, como $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$ son categorías equivalentes, podemos ver a los módulos simples, proyectivos e inyectivos como representaciones. Además, dado que uno de los objetivos de este trabajo es construir resoluciones proyectivas de módulos, vamos a necesitar conocer cómo se ven el radical y top de un módulo en términos de representaciones. Veamos la forma de las mismas, como representaciones acotadas de $(Q, \mathcal{I})$, donde Q es un carcaj conexo y finito. Estas transformaciones están dadas por el functor F definido en el teorema 1.3.1.

Sea $a \in Q_0$. Las representaciones asociadas a los módulos simples las denominaremos $S(a) = (S(a)_b, \varphi_\alpha)$ con $a, b \in Q_0$, siendo:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ K & a = b \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0, \text{ para todo } \alpha \in Q_1.$$

Por otro lado, los módulos indescomponibles se transforman en las representaciones indescomponibles.

A continuación enunciamos un resultado que se utiliza de forma frecuente, y a nosotros nos servirá para probar las propiedades que siguen luego.

Lema 2.4.1. *Sea A una K-álgebra, $e \in A$ un idempotente y M un A-módulo a derecha. El mapa K-lineal*

$$\theta_M : \operatorname{Hom}_A(eA, M) \to Me,$$

definido por la fórmula $\varphi \mapsto \varphi(e) = \varphi(e)e$, para $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(eA, M)$, es un isomorfismo de eAe-módulos a derecha y es functorial en M.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil verificar que $\operatorname{Hom}_A(eA, M)$ es un eAe-módulo a derecha con respecto a la acción $(\varphi \cdot eae)(x) = \varphi(eaex)$, para todo $x \in eA$, $a \in A$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(eA, M)$. Asimismo, es fácil verificar que el K-subespacio vectorial Me de M es un eAe-módulo a derecha con respecto a la acción $(me) \cdot (eae) = meae$, para todo $m \in M$, y $a \in A$.

Además, el mapa θ_M es un homomorfismo de eAe-módulos a derecha y es functorial en la variable M. Definiremos otro mapa, que resultará ser su inverso.

Sea el mapa K-lineal $\theta'_M : Me \to \operatorname{Hom}_A(eA, M)$ definido por la fórmula $\theta'_M(me)(ea) = mea$, para $a \in A$, y $m \in M$. Dado $m \in M$, el mapa $\theta'_M(me)$:

$eA \to M$ está bien definido, y es un homomorfismo de A-módulos. Más aún, θ'_M es un homomorfismo de eAe-módulos, y es inverso de θ_M. □

En el siguiente lema veremos propiedades de las representaciones asociadas a los módulos simples.

Lema 2.4.2. *Sea $A \simeq KQ/\mathcal{I}$.*

a) Para cualquier $a \in Q_0$, $S(a)$ visto como un A-módulo es isomorfo al top del A-módulo proyectivo indescomponible e_aA

b) El conjunto $\{S(a) \ / \ a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de representaciones de las clases de isomorfismos de los módulos simples.

DEMOSTRACIÓN:

a) Comencemos por observar que $S(a)$ es una representación acotada por $(Q, \mathcal{I})$, lo cual es claro dado que todas las transformaciones lineales son 0. Además, para cualquier $a \in Q_0$, el espacio vectorial $S(a)$ tiene dimensión 1, por lo que define una representación simple de $(Q, \mathcal{I})$ y es un A-módulo. Por la definición del functor F y por el lema 2.4.1, tenemos que $\mathrm{Hom}_A(e_aA, S(a)) \simeq S(a)e_a \simeq S(a)_a \neq 0$. Esto quiere decir que existe un homomorfismo no nulo del A-módulo proyectivo indescomponible e_aA hacia el A-módulo simple $S(a)$. Como el homomorfismo es no nulo, y e_aA tiene top simple, entonces e_aA y $S(a)$ son isomorfos.

b) Si consideramos $a \neq b$, entonces $\mathrm{Hom}_A(S(a), S(b)) = 0$, por lo que $S(a) \not\simeq S(b)$. Esto implica que los módulos simples $S(a)$, $a \in Q_0$ son dos a dos no isomorfos. Además, hay una biyección entre un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales y los módulos simples dos a dos no isomorfos (esta biyección está dada por $e_a \mapsto \mathrm{top}\,(e_aA)$). □

Previo a continuar con las representaciones del radical, zócalo y top de un módulo, necesitamos ver qué forma adquiere el radical de un álgebra de la forma $KQ/\mathcal{I}$.

Lema 2.4.3. *Sea Q un carcaj finito, R el ideal flecha de KQ e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ. Entonces,* $\mathrm{rad}\,(KQ/\mathcal{I}) = R/\mathcal{I}$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathcal{I}$ es un ideal admisible de KQ, existe $m \geq 2$ tal que $R^m \subseteq \mathcal{I}$. Luego, $(R/\mathcal{I})^m = 0$ y $R/\mathcal{I}$ es un ideal nilpotente de $KQ/\mathcal{I}$, por lo que $R/\mathcal{I} \subseteq \mathrm{rad}\,(KQ/\mathcal{I})$. Si probamos que $(KQ/\mathcal{I})/(R/\mathcal{I})$ es isomorfo a un producto de copias de K, por el lema 2.2.3, $R/\mathcal{I} = \mathrm{rad}\,(KQ/\mathcal{I})$.

Ahora, $(KQ/\mathcal{I})/(R/\mathcal{I}) \simeq KQ/R$. Consideramos $\varepsilon_a = (a \parallel a)$ para todo $a \in Q_0$. Entonces, hay una descomposición en suma directa

$$KQ/R = \bigoplus_{a,b \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a (KQ/R) \bar{\varepsilon}_b$$

como K-espacio vectorial, donde $\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R$. Como R contiene todos los caminos de largo ≥ 1, esto es lo mismo que

$$KQ/R = \bigoplus_{a \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a (KQ/R) \bar{\varepsilon}_a.$$

Entonces, KQ/R está generado como K-espacio vectorial por las clases residuales de todos los caminos de largo cero, es decir, por el conjunto $\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R \ / \ a \in Q_0\}$. Más aún, para cada $a \in Q_0$, el álgebra $\bar{\varepsilon}_a(KQ/R)\bar{\varepsilon}_a$ está generada, como K-espacio vectorial, por $\bar{\varepsilon}_a$, lo que implica que es isomorfa, como K-álgebra a K. En consecuencia, el álgebra cociente KQ/R es isomorfa a $|Q_0|$ copias de K. Por lo tanto, $R/\mathcal{I} = \mathrm{rad}\,(KQ/\mathcal{I})$. □

Lema 2.4.4. *Sea $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación acotada de $(Q, \mathcal{I})$.*

a) *M es semisimple si y solamente si $\varphi_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in Q_1$.*

b) $\mathrm{soc}\, M = N$*, donde $N = (N_a, \psi_\alpha)$ donde:*

- *$N_a = M_a$ si a es un pozo y $N_a = \bigcap_{\alpha : a \to b} \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha : M_a \to M_b)$ si a no es un pozo.*
- *$\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0$ para cada α de fuente a.*

c) $\mathrm{rad}\, M = J$*, donde $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ donde:*

- *$J_a = \sum_{\alpha : b \to a} \mathrm{Im}\,(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$.*
- *$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ para cada α de fuente a.*

d) $\mathrm{top}\, M = L$*, donde $L = (L_a, \psi_\alpha)$ donde:*

- *$L_a = M_a$ si a es una fuente y $L_a = \bigcap_{\alpha : b \to a} \mathrm{Coker}(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$ si a no es una fuente.*
- *$\gamma_\alpha = 0$ para cada α de fuente a.*

DEMOSTRACIÓN:

a) Dada la definición del functor G del teorema 1.3.1, podemos concluir que $\varphi_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in Q_1$ si y solamente si $M \simeq \bigoplus_{a \in Q_0} S(a)^{dim_K M_a}$, que es semisimple.

b) Una primera observación es que N es un submódulo de M, ya que $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0$. Además, como son cero, aplicando la parte a tenemos que N es semisimple. Consideremos entonces S_A un submódulo simple de M. Si probamos que $S_A \subseteq N$, esto implicaría que N tendría todos los submódulos simples. Veamos que se cumple esto. Como S_A es simple, existe $a \in Q_0$ tal que $S \simeq S(a)$. Esto hace que tengamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K = S(a)_a \arrow[r] \arrow[d] & S(a)_b = 0 \arrow[d] \\ M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & M_b \end{tikzcd}$$

Como el diagrama conmuta, se cumple que $S(a)_a \subseteq \mathrm{Ker}\varphi_\alpha$, para cada $\alpha : a \to b$. Por la definición de N_a, se concluye que $S(a)_a \subseteq N_a$, por lo que $S(a) \subseteq N$. Con esto podemos afirmar que $N = \operatorname{soc} M$.

c) Sea R el ideal flecha de KQ. Sabemos que $\operatorname{rad} A = R/\mathcal{I}$ está generado como ideal bilateral por las clases residuales módulo $\mathcal{I}$ de las flechas $\alpha \in Q_1$, tenemos que $J = \operatorname{rad} M = M \cdot \operatorname{rad} A = M \cdot (R/\mathcal{I}) = \sum_{\alpha \in Q_1} M\bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$.

Entonces, por la definición del functor F dada en el teorema 1.3.1, obtenemos que $J_a = \sum_{\alpha : b \to a} M\bar{\alpha}$ (observar que la suma solamente se toma sobre las flechas cuyo destino es a).

Aplicando nuevamente la definición de F, para $\alpha : b \to a$ tenemos que $M\bar{\alpha} = Me_b\bar{\alpha} = M_b\bar{\alpha} = \varphi_\alpha(M_b) = \operatorname{Im}\varphi_\alpha$. Esto último es porque la acción de φ_α justamente corresponde a la multiplicación a derecha por $\bar{\alpha}$.

Concluimos entonces que $J_a = \sum_{\alpha : b \to a} \operatorname{Im}(\varphi_\alpha : M_b \to M_a)$.

La definición en las flechas es simplemente porque J es un submódulo de M.

d) Esta parte sale de la anterior porque $L = M/\operatorname{rad} M$. □

Hemos visto qué forma adquieren las representaciones de los módulos simples, radical, zócalo y top de cierto módulo. Resta ver de qué forma podemos representar a los módulos proyectivos indescomponibles e inyectivos indescomponibles.

Lema 2.4.5. *Sea $(Q, \mathcal{I})$, $A \simeq KQ/\mathcal{I}$ y $P(a) = e_aA$, con $a \in Q_0$.*

Si $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\alpha)$ entonces se cumple que:

- *$P(a)_b$ es el K-espacio vectorial con base el conjunto de todos los $\bar{w} = w + \mathcal{I}$, con w un camino de a en b.*
- *Dada $\alpha : b \to c$, $\varphi_\alpha : P(a)_b \to P(a)_c$ está dada por la multiplicación a derecha de $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$.*

Demostración: Dada la definición del functor F del teorema 1.3.1, la representación correspondiente al A-módulo $P(a)_A = e_aA$ cumple que para cada $b \in Q_0$, tenemos que $P(a)_b = P(a)e_b = e_aAe_b = e_a(KQ/\mathcal{I})e_b = (\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b)/(\varepsilon_a\mathcal{I}\varepsilon_b)$.

Si $\alpha : b \to c$ es una flecha en Q_1, entonces $\varphi_\alpha : e_aAe_b \to e_aAe_c$. Por la definición del functor F, φ_α está dada por la multiplicación a derecha por $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$. Es decir, si $\bar{w}$ es la clase residual de un camino de a en b, entonces $\varphi_\alpha(\bar{w}) = \bar{w}\bar{\alpha}$. □

A continuación, mostramos un ejemplo que utiliza este resultado recién visto.

Ejemplo 2.4.1. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1\circ & \underset{2}{\circ} \arrow[l, shift right, "\beta"'] \arrow[l, shift left, "\delta"'] & \circ 3 \arrow[l, shift right, "\alpha"'] \arrow[l, shift left, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

acotado por las relaciones $\alpha\beta = 0$ y $\gamma\delta = 0$. Es decir, que el ideal admisible es $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta, \gamma\delta \rangle$. Queremos encontrar los módulos proyectivos indescomponibles.

Comencemos por el asociado al punto 1 del carcaj. Entonces, $P(1)_1$ es el espacio vectorial con base el conjunto de los caminos desde 1 hacia 1. El único camino es ε_1, por lo que $P(1)_1 \simeq K$. Por otro lado, no hay caminos desde 1 hacia ninguno de los otros dos puntos del carcaj, por lo que $P(1)_2 = P(1)_3 = 0$. Entonces,

$$P(1) = \begin{tikzcd} K & 0 \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] & 0 \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd} = S(1).$$

Calculemos ahora el proyectivo indescomponible $P(2)$. Hacia 1 hay dos caminos, entonces $P(2)_1 = \langle \bar{\beta}, \bar{\delta} \rangle$, el espacio vectorial generado por los caminos $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ y $\bar{\delta} = \delta + \mathcal{I}$. Entonces, $P(2)_1 \simeq K^2$. Por otro lado, el único camino hacia 2 es ε_2, por lo que $P(2)_2 \simeq K$. Finalmente, no hay caminos hacia 3, por lo que $P(2)_3 = 0$. Queda hallar las transformaciones lineales. Las correspondientes a α y γ son 0. La correspondiente a β, es $\varphi_{\bar{\beta}} : P(2)_2 \to P(2)_1$, tal que $\varphi_{\bar{\beta}}(\varepsilon_2) = \varepsilon_2\bar{\beta} = \bar{\beta}$. Entonces, $\varphi_{\bar{\beta}} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$. Análogamente, $\varphi_{\bar{\delta}} : P(2)_2 \to P(2)_1$, tal que $\varphi_{\bar{\delta}}(\varepsilon_2) = \varepsilon_2\bar{\delta} = \bar{\delta}$. Es decir, $\varphi_{\bar{\delta}} = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$. Por lo tanto,

$$P(2) = \begin{tikzcd} K^2 & K \arrow[l, shift right, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] \arrow[l, shift left, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"'] & 0 \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}.$$

Resta calcular $P(3)$. Hacia el punto 1, hay únicamente dos caminos, ya que $\alpha\beta = 0$ y $\gamma\delta = 0$. Entonces, $P(3)_1 = \langle \overline{\alpha\delta}, \overline{\gamma\beta} \rangle \simeq K^2$. Hacia el punto 2, hay dos caminos, por lo cual $P(3)_2 = \langle \bar{\alpha}, \bar{\gamma} \rangle \simeq K^2$. Por último, hacia 3 está solamente el camino trivial ε_3, por lo que $P(3)_3 \simeq K$.

En este caso, las 4 transformaciones lineales son diferentes de cero. Primero, $\varphi_{\bar{\alpha}} : P(3)_3 \to P(3)_2$, de forma que $\varphi_{\bar{\alpha}}(\varepsilon_3) = \varepsilon_3\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$, que corresponde al primer elemento de la base de $P(3)_2$. Entonces, $\varphi_{\bar{\alpha}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. De igual forma, $\varphi_{\bar{\gamma}} : P(3)_3 \to P(3)_2$, y $\varphi_{\bar{\gamma}}(\varepsilon_3) = \varepsilon_3\bar{\gamma} = \bar{\gamma}$, que es el segundo elemento de la base de $P(3)_2$. Esto implica que $\varphi_{\bar{\gamma}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Veamos ahora cuánto es $\varphi_{\bar{\beta}} : P(3)_2 \to P(3)_1$, hallando las imágenes de los dos elementos de la base de $P(3)_2$. En primer lugar, $\varphi_{\bar{\beta}}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$. En segundo, $\varphi_{\bar{\beta}}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}\bar{\beta}$, que es el segundo elemento de la base de $P(3)_1$. Entonces, $\varphi_{\bar{\beta}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. La forma de hallar $\varphi_{\bar{\delta}}$ es similar. Primero, $\varphi_{\bar{\delta}}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\bar{\delta}$, que es el primer elemento de la base de $P(3)_1$. Finalmente, $\varphi_{\bar{\delta}}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}\bar{\delta} = 0$. Por lo tanto, $\varphi_{\bar{\delta}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. A partir de todo esto, obtenemos que

$$P(3) = \begin{tikzcd} K^2 & K^2 \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]"'] & K \arrow[l, shift right, "\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[l, shift left, "\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]"'] \end{tikzcd} .$$

Con esto concluye el ejemplo.

Dualizando el resultado anterior, obtenemos la forma de los A-módulos inyectivos indescomponibles.

Lema 2.4.6. *Sea* $(Q, \mathcal{I})$, $A \simeq KQ/\mathcal{I}$ *e* $I(a) = D(Ae_a)$, *con* $a \in Q_0$.

Si $I(a) = (I(a)_b, \psi_\alpha)$, *entonces se cumple que:*

- $I(a)_b$ *es el dual del* K*-espacio vectorial con base el conjunto de todos los* $\bar{v} = v + \mathcal{I}$, *siendo* v *un camino de* b *en* a.

- *Dada* $\alpha : b \to c$, $\psi_\alpha : I(a)_b \to I(a)_c$ *está dada por el dual de la multiplicación a izquierda de* $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$. □

Capítulo 3

Conjeturas Finitistas

3.1. Dimensión Global del Álgebra

En esta sección definimos las dimensiones proyectiva e inyectiva de un módulo, así como también la dimensión global de un álgebra. Asimismo, mostramos algunas características de las mismas.

Como vimos en los capítulos anteriores, si K es un cuerpo y A una K-álgebra, todo A-módulo a derecha tiene una resolución proyectiva y una resolución inyectiva en $\operatorname{Mod} A$. Y, si además, A es de dimensión finita sobre K, entonces todo A-módulo en $\operatorname{mod} A$ tiene una resolución proyectiva minimal y una resolución inyectiva minimal en $\operatorname{mod} A$.

Comencemos por estas definiciones.

Definición 3.1.1. Sea K un cuerpo y A una K-álgebra.

a) La **dimensión proyectiva** de un A-módulo a derecha M es el entero no negativo $\mathrm{dp}M = m$ tal que existe una resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

de M, de largo m, y M no tiene resolución proyectiva de largo $m-1$, en el caso en que exista un tal m. Si M no admite una resolución proyectiva de largo finito, definimos su dimensión proyectiva $\mathrm{dp}M$ como infinito.

b) La **dimensión inyectiva** de un A-módulo a derecha N es el entero no negativo $\mathrm{di}N = m$ tal que existe una resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{h^0} I^0 \xrightarrow{h^1} I^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{m-1} \xrightarrow{h^m} I^m \longrightarrow 0$$

de N, de largo m, y N no tiene resolución inyectiva de largo $m-1$, en el caso en que exista un tal m. Si N no admite una resolución inyectiva de largo finito, definimos su dimensión inyectiva $\mathrm{di}N$ como infinito.

Puede probarse que la dimensión proyectiva de un módulo M es el largo de la resolución proyectiva minimal de M. De igual forma, la dimensión inyectiva de un módulo N es el largo de la resolución inyectiva minimal de N.

La dimensión proyectiva (inyectiva) de un módulo es una forma de medir qué tan lejos está el módulo de ser proyectivo (inyectivo).

Definición 3.1.2. Definimos la **dimensión global derecha** y la **dimensión global izquierda** de una K-álgebra A como:

$$\begin{aligned}
&\text{dim.gl.d } A = \text{máx}\,\{\text{dp}M \;/\; M \text{ es un } A\text{-módulo a derecha}\} \text{ y} \\
&\text{dim.gl.i } A = \text{máx}\,\{\text{dp}L \;/\; L \text{ es un } A\text{-módulo a izquierda}\},
\end{aligned}$$

si estos números existen. De lo contrario, decimos que la dimensión global a derecha de A, y respectivamente a izquierda, es infinita.

Observación 3.1.1. De las definiciones anteriores se desprende que $\text{dp}M = 0$ si y solamente si M es proyectivo, y $\text{di}N = 0$ si y solamente si N es inyectivo.

Los tres resultados que vienen a continuación, se encuentran en [2]. El primero de ellos, es sobre las dimensiones proyectiva e inyectiva.

Proposición 3.1.1. *Sea* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta en* $\text{Mod}\,A$.

a) $\text{dp}N < \text{máx}\{\text{dp}M, 1 + \text{dp}L\}$ *si* $\text{dp}M = \text{dp}L$.

b) $\text{dp}N = \text{máx}\{\text{dp}M, 1 + \text{dp}L\}$ *si* $\text{dp}M \neq \text{dp}L$.

c) $\text{dp}L \leq \text{máx}\{\text{dp}M, -1 + \text{dp}N\}$, *y la igualdad se da si* $\text{dp}M \neq \text{dp}N$.

d) $\text{dp}M \leq \text{máx}\{\text{dp}L, \text{dp}N\}$, *y la igualdad se da si* $\text{dp}N \neq 1 + \text{dp}L$. □

Para calcular la dimensión global de un álgebra, enunciemos el siguiente teorema debido a Auslander.

Teorema 3.1.2. *Si A es una K-álgebra de dimensión finita, entonces*

$$\begin{aligned}
\text{dim.gl.d } A &= \text{máx}\{\text{dp}S \;/\; S \text{ es un A-módulo simple a derecha}\} \\
&= 1 + \text{máx}\{\text{dp}(\text{rad}\, eA) \;/\; e \in A \text{ es un idempotente primitivo}\}.
\end{aligned}$$

□

Una observación relevante, es que si aplicamos la dualidad estándar, $D : \text{mod}\,A \to \text{mod}\,A^{op}$, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.1.3. *Si A es una K-álgebra de dimensión finita, entonces,*

$$\text{dim.gl.d } A = \text{dim.gl.i } A.$$

□

Este número dim.gl.d A =dim.gl.i A, se denomina **dimensión global** de la K-álgebra de dimensión finita A.

3.2. Las Conjeturas Finitistas

La idea general, como es expresado en [3], de introducir las dimensiones homológicas, fue buscar una medida de la desviación de una categoría de módulos dada, respecto a las categorías que denomina *ideales*, y que son aquellas que se caracterizan por la proyectividad de todos sus módulos.

La idea de medir la complejidad de una categoría de módulos en términos de las dimensiones proyectivas de sus objetos, y la de un anillo en términos de su dimensión global, en muchos casos fue una medida muy efectiva. Sin embargo, hay casos en los que la dimensión global es infinita, y la categoría de módulos es muy simple.

Es por eso, que se define una nueva medida de la complejidad, que resulta ser más acertada. Éstas son las **dimensiones finitistas**:

$$\begin{aligned}\text{dim fin } A &= \sup\{\text{dp}M \ / \ M \text{ es un A-módulo a derecha finitamente} \\ &\qquad \text{generado, y dp}M < \infty\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{dim Fin } A &= \sup\{\text{dp}M \ / \ M \text{ es un A-módulo a derecha arbitrario, y} \\ &\qquad \text{dp}M < \infty\}\end{aligned}$$

Las primeras preguntas que surgieron respecto a estas dos medidas, y que son naturales, fueron si coincidían, y si eran siempre finitas. La respuesta para anillos noetherianos fue negativa para ambas preguntas, incluso en el caso conmutativo.

Las conjeturas que enunciamos a continuación, fueron inicialmente publicadas por Bass en 1960 como problemas, pero luego, se restringieron al caso de álgebras de dimensión finita y se denominaron conjeturas.

Conjeturas Finitistas. Sea K un cuerpo, y A una K-álgebra de dimensión finita.

a) dim fin A = dim Fin A.

b) dim fin $A < \infty$.

Más adelante, como está mostrado en el artículo [4], se detalló una jerarquía de conjeturas homológicas. En la misma, se encuentra la segunda conjetura enunciada anteriormente. Dicha jerarquía se presenta a continuación[1]:

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, y A una K-álgebra de dimensión finita.

a) **Conjetura de la Dimensión Finitista**. dim fin $A < \infty$.

b) **Conjetura de Desvanecimiento**.

c) **Condición de Nunke**.

d) **Conjetura de Nakayama Generalizada**.

[1] Las conjeturas que no se definen es porque utilizan conceptos que escapan al alcance de este trabajo.

e) **Conjetura de Nakayama**. Si en una resolución inyectiva minimal de A_A $0 \to A_A \to I_0 \to I_1 \to \ldots$ todos los I_j son proyectivos, entonces todo inyectivo es proyectivo.

Se prueba en [6] que *a*) implica *b*) y que *b*) implica *c*). Viendo las definiciones de *c*) y *d*), es claro que *c*) implica *d*). Finalmente, que *d*) implica *e*) fue observado en [5].

3.2.1. Ejemplo: dim fin $A \neq$ dim Fin A

En dirección a la otra conjetura finitista, que enunciaba que dim fin $A =$ dim Fin A, en el artículo [7] se describió el siguiente ejemplo, que muestra que para cada natural n, existe un álgebra A de dimensión finita sobre un cuerpo, tal que su dimensión finitista pequeña es 1 y su dimensión finitista grande es n.

Sea Q_n el carcaj

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, bend left, "\rho_n"] \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[r, bend right, "\tau_n"'] & n-1 \arrow[r, bend left, "\rho_{n-1}"] \arrow[r, "\sigma_{n-1}"] \arrow[r, bend right, "\tau_{n-1}"'] & \cdot & \cdots & \cdot \arrow[r, bend left, "\rho_3"] \arrow[r, "\sigma_3"] \arrow[r, bend right, "\tau_3"'] & 2 \arrow[r, bend left, "\rho_2"] \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[r, bend right, "\tau_2"'] & 1 \arrow[r, bend left, "\rho_1"] \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[r, bend right, "\tau_1"'] & 0 \arrow[loop above, "\beta"] \arrow[loop below, "\alpha"]
\end{tikzcd},$$

sea K un cuerpo, y A el álgebra de caminos de Q sobre K módulo el ideal generado por las relaciones: $\alpha^2, \beta^2, \beta\alpha, \alpha\beta, \rho_1\alpha, \sigma_1\alpha, \tau_1\beta, y_{i+1}x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $x \neq y; x, y \in \{\rho, \sigma, \tau\}$; y $x_{i+1}x_i - y_{i+1}y_i, x, y \in \{\rho, \sigma, \tau\}, i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Teorema 3.2.1. *Para cada número natural $n \geq 1$, el álgebra A_n presentada arriba tiene dimensión finitista pequeña igual a 1 y dimensión finitista grande igual a n.*

Demostración: Para cada vértice $i = 1, \ldots, n$ del carcaj Q_n, sea e_i el correspondiente idempotente en A_n, y sean $P_i = e_iA_n$ y $S_i = P_i/\operatorname{rad} P_i$ representantes de los A_n-módulos proyectivos indescomponibles y simples respectivamente.

Veamos primero cuándo podemos obtener una inclusión desde un módulo proyectivo P en el radical de otro módulo proyectivo Q. Para esto, observemos primero que la longitud de Loewy de P_0 es 2, y la de todos los otros A_n-módulos proyectivos indescomponibles es 3. Es por esto, que no puede haber una inclusión desde P al radical Q, si P contiene algún sumando directo indescomponible no isomorfo a P_0. Esto quiere decir, que P solamente puede ser isomorfo a una suma directa de copias de P_0.

Ahora, P_0 solamente puede tener morfismos no nulos hacia P_0, P_1 y P_2. Entonces, por lo visto anteriormente, si P es un módulo proyectivo finitamente generado, y que es un submódulo del radical de otro módulo proyectivo Q finitamente generado, tenemos la situación $f : P_0^m \to P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$, donde la imagen de f está en el radical de $P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$.

Si consideramos p_0 la proyección canónica de $P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$ en $P_0^{m_0}$, entonces al componer $p_0 f$, su imagen cae en el zócalo de $P_0^{m_0}$, que es semisimple (recordemos que la imagen de f es el radical y P_0 tiene longitud de Loewy 2). Con $p_2 f$, donde p_2 es la proyección canónica de $P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$ hacia $P_2^{m_2}$ ocurre algo similar, su imagen es semisimple. Entonces, obtenemos la inclusión $P_0^m \to P_1^{m_1}$, componiendo f con p_1, donde p_1 es la proyección canónica de $P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$ en $P_1^{m_1}$. Además, esto será posible solamente si $m \leq m_1$. A partir de esto, como $\operatorname{rad}^2 P_1^{m_1}$ tiene dimensión $3m_1$ como K-espacio vectorial, no puede estar contenido en la imagen de P_0^m, ya que tienen intersección de dimensión $2m$. Esto es porque la intersección contendrá elementos de $\operatorname{rad} P_0^m$, que posee esa dimensión.

Entonces, el cokernel de cualquier inclusión $P \to Q$ de A_n-módulos proyectivos finitamente generados, con imagen en el radical, tendrá longitud de Loewy igual a 3. Esto implica que no se puede meter en el radical de ningún A_n-módulo proyectivo. En consecuencia, la sicigia de cualquier A_n-módulo finitamente generado no puede tener dimensión proyectiva igual a 1. Por lo tanto, la dimensión finitista pequeña de A_n es 1 para todo $n \geq 1$.

Ahora veamos que la dimensión finitista grande de A_n es por lo menos n. Sean $e_{0,i}$ las coordenadas de $P_0^{(\mathbb{N})}$, con e_0 en el lugar i, y 0 en el resto. Análogamente, sean $e_{1,i}$ las coordenadas de $P_1^{(\mathbb{N})}$, con e_1 en el lugar i, y 0 en el resto. Consideremos $\phi : P_0^{(\mathbb{N})} \to P_1^{(\mathbb{N})}$, dado por $\phi(e_{0,2i-1}) = e_{1,2i-1}\tau_1 + e_{1,i}\sigma_1$, y $\phi(e_{0,2i}) = e_{1,2i}\tau_1 + e_{1,i}\rho_1$, donde τ_1, ρ_1, σ_1 denotan las coclases de τ_1, ρ_1, σ_1, respectivamente, en A_n. Se verifica que ϕ es una inclusión tal que $\operatorname{coker}\phi$ se anula en las clases residuales de α y β y que el zócalo es igual a $S_0^{(\mathbb{N})}$.

Observando la definición de A_n, tenemos que para $n \geq 3$, A_n es una extensión por un punto de A_{n-1} por la envolvente inyectiva de S_{n-2} considerada como un A_{n-1}-módulo. Esto significa que $\operatorname{rad} P_n = E(S_{n-2})$.

A_2 es la extensión por un punto de A_1 por la $A_1/(\alpha, \beta)$-envolvente inyectiva de S_0 considerada como un A_1-módulo, donde α y β denotan las clases residuales de α y β en A_1. Denotemos por X_1 a $\operatorname{coker}\phi$, entonces podemos meter X_1 en $P_2^{(\mathbb{N})}$ de forma tal que sus zócalos coincidan, dando lugar a un módulo cociente que denotamos por X_2 y que tiene longitud de Loewy igual a 2 con zócalo isomorfo a $S_1^{(\mathbb{N})}$. Repitiendo esto, se obtiene la siguiente sucesión exacta de módulos

$$0 \to P_0^{(\mathbb{N})} \to P_1^{(\mathbb{N})} \to P_2^{(\mathbb{N})} \to \ldots \to P_n^{(\mathbb{N})} \to X_n \to 0$$

donde cada $\to P_i^{(\mathbb{N})}$ es proyectivo. Esto muestra que la dimensión finitista grande de A_n es por lo menos n.

Que la dimensión finitista grande de A_n no puede exceder n, es porque los vértices en Q_n correspondientes a todos los A_n-módulos proyectivos P_i, excepto P_0, no pertenecen a un ciclo orientado en Q_n. □

Capítulo 4

Aplicación

En este capítulo, describimos el funcionamiento general de la aplicación creada para calcular resoluciones proyectivas en la Categoría de Módulos.

La teoría desarrollada en los dos primeros capítulos nos describió un procedimiento para poder construirlas.

4.1. Procedimiento general

Recordemos los resultados principales alcanzados. Consideremos A una K-álgebra de dimensión finita y su descomposición en módulos indescomponibles $A_A = e_1A \oplus \ldots \oplus e_nA$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales. Para cualquier A-módulo M en $\operatorname{mod} A$ existe una cobertura proyectiva

$$P(M) \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

donde $P(M) \simeq (e_1A)^{s_1} \oplus \ldots \oplus (e_nA)^{s_n}$ y $s_1 \geq 0, \ldots, s_n \geq 0$, y $P(M)$ es única a menos de isomorfismos. El homomorfismo h induce un isomorfismo $P(M)/\operatorname{rad} P(M) \simeq M/\operatorname{rad} M$. Observemos que además, para todo i, s_i es la cantidad de veces que el módulo simple S_i aparece en la descomposición de $\operatorname{top} P(M)$.

Otro resultado importante es que para cualquier módulo en $\operatorname{mod} A$ es posible construir una resolución proyectiva minimal en $\operatorname{mod} A$. La forma de hacerlo está descripta en la prueba de 2.3.6. Si M es un módulo en $\operatorname{mod} A$, existe una cobertura proyectiva $p_0 : P_0 \to M$ en $\operatorname{mod} A$. Entonces, $\operatorname{Ker} p_0$ es de dimensión finita, y hay una cobertura proyectiva $p_1 : P_1 \to \operatorname{Ker} p_0$. Esto resulta en una presentación proyectiva minimal $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ de M. Continuando este procedimiento, obtenemos por inducción una resolución proyectiva de M en $\operatorname{mod} A$:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & P_n \arrow[rr, dashed, "p_n"] \arrow[dr] & & P_{n-1} & \cdots & P_1 \arrow[rr, dashed, "p_1"] \arrow[dr] & & P(M) = P_0 \arrow[r, "p_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \operatorname{Ker} p_{n-1} \arrow[ur] & & & & \operatorname{Ker} p_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

A partir de esto, es necesario describir un algoritmo. Primero precisamos conocer el módulo M y el álgebra, a partir de la cual se conocen los módulos proyectivos indescomponibles, que se calculan de la forma que vimos en el capítulo 2. Luego, para calcular la cobertura proyectiva $P(M)$, calculamos $\operatorname{top} M$ y hallamos los módulos simples que lo componen. Éstos coinciden con los módulos simples de $\operatorname{top} P(M)$, ya que son isomorfos. Conociendo los módulos simples, construimos $P(M)$. Para el primer paso de la iteración, resta encontrar un epimorfismo $p_0 : P(M) \to M$.

Una vez que encontramos p_0, hallamos $\operatorname{Ker} p_0$, quien toma el lugar de M. Se calcula $P(\operatorname{Ker} p_0)$, a quien denominamos P_1 en 4.1, y que se realiza de la misma forma que en el paso anterior. Finalmente, hallamos un epimorfismo $f_1 : P_1 \to \operatorname{Ker} p_0$, y obtenemos $p_1 : P_1 \to P(M)$ realizando $\iota \circ f_1$, donde $\iota : \operatorname{Ker} p_0 \to P(M)$ es la inclusión canónica.

El procedimiento general es el siguiente, suponiendo que nos encontramos en el paso i. Luego, conocemos $p_i : P_i \to P_{i-1}$, donde P_i es la cobertura proyectiva de $\operatorname{Ker} p_{i-1}$. A partir de esto, buscamos $\operatorname{Ker} p_i$ y calculamos $P(\operatorname{Ker} p_i) = P_{i+1}$, su cobertura proyectiva. Hallamos $f_{i+1} : P_{i+1} \to \operatorname{Ker} p_i$ un epimorfismo, y finalmente la composición $\iota \circ f_{i+1}$ determina $p_{i+1} : P_{i+1} \to P_i$, donde $\iota : \operatorname{Ker} p_i \to P_i$.

El próximo paso es preguntarse cuándo termina este procedimiento, ya que necesitamos construir un algoritmo. La respuesta es que no siempre lo hace. En el capítulo anterior definimos la dimensión proyectiva de un módulo. Si la misma es finita, entonces para algún i, $\operatorname{Ker} p_i$ será 0, y ahí se termina de iterar. Para los casos en que es infinita, la resolución también lo sería, por lo que no se puede realizar en una computadora. En estos casos, es necesario terminar de iterar de otra forma, por lo que se ingresa al comienzo de la aplicación una cota máxima de iteraciones, que la denominamos `MAX_ITERACIONES`.

Entonces, de forma general, para un módulo M, el algoritmo es el siguiente:

```
i = 0;
//Cuenta la cantidad de iteraciones

(P, p) = CoberturaProyectiva(M);
//P corresponde al proyectivo y p es el morfismo p:P → M
```

```
Mientras (Ker p ≠ 0 ∧ i < MAX_ITERACIONES)
    M = Ker p;
    (P, p) = CoberturaProyectiva(M);
    i = i + 1;
Fin Mientras
```

4.2. Descripción detallada

En la sección anterior describimos la forma general del algoritmo. En la presente sección, comentamos los detalles de la implementación de cada paso del algoritmo.

Previo a esto, es necesario definir estructuras de datos que representen a las álgebras y a los módulos. Como vimos en los capítulos anteriores, una gran familia de álgebras pueden ser representadas mediante grafos. Éstas son precisamente las que nos interesan, y aprovechamos esa característica para crear la estructura de datos. La información relevante que contiene la estructura que representa a un álgebra, es el grafo del álgebra, y las relaciones de la misma guardadas como arreglos de strings. En el caso de los módulos, la información más importante que se mantiene es el grafo que los representa.

Como lo describimos en la sección anterior, el primer paso del algoritmo calcula la cobertura proyectiva del módulo. Para esto, es necesario realizar los siguientes pasos:

1. Hallar $\operatorname{top} M$.

   Para realizar esto, se aplica el lema 2.4.4 para calcular la representación de $\operatorname{rad} M$. Luego, nuevamente a partir de 2.4.4 y usando que $\operatorname{top} M$ es semisimple, se determina $\operatorname{top} M$.

2. Determinar qué módulos simples componen a $\operatorname{top} M$ y en qué cantidad.

   Conocemos la representación de $\operatorname{top} M$ y además sabemos que es semisimple, entonces, simplemente contamos la dimensión de cada espacio vectorial. Acá estamos usando fuertemente que el cuerpo es algebraicamente cerrado.

3. Calcular la suma directa de los módulos proyectivos que componen a $P(M)$, de acuerdo a lo hallado en el punto anterior.

   Para resolver esto, se realiza la suma directa de las representaciones asociadas a los módulos proyectivos, tantas veces como sea necesario, y de acuerdo a la definición 1.3.6.

   Algo relevante a comentar respecto a este punto, es que calcular las representaciones asociadas a los módulos proyectivos es costoso, por lo que se calculan cuando es necesario, y cuando se calculan una vez se guardan para no tener que recalcularlas. Como vimos en el capítulo 2, para hallar el proyectivo indescomponible en el punto i, hay que calcular todos los caminos desde el punto i hacia todos los otros puntos del carcaj. Hay casos en que esto se hace de forma sencilla, pero a medida que el carcaj es más complejo (puede pensarse en más flechas y más relaciones), calcular los caminos también lo es. Esto hace que sea costoso.

Para determinar todos los caminos desde un vértice fijo a todo el resto, se utilizó un método denominado *backtracking*. Lo que se hace es comenzar a recorrer el grafo, avanzando por las aristas que se pueda, hasta que no se pueda más; y en este caso se continúa por otra rama. No se podrá continuar por una rama, o bien porque el vértice al que se llegó no tiene más adyacencias, o bien porque se encontró que todos los caminos serán cero por esa rama, de acuerdo a las relaciones del álgebra. Este procedimiento se termina cuando no quedan más ramas por recorrer.

También hubo que tener cuidado de no repetir los caminos, es decir, una vez que se encuentra un camino, realizando todas las posibles sustituciones con las relaciones que se tienen, no se obtengan caminos que ya se habían encontrado previamente. Esto es importante, ya que cada camino debe ser tenido en cuenta únicamente una vez, para luego determinar la dimensión de los espacios vectoriales del módulo proyectivo de forma correcta.

Ejemplo 4.2.1. Por ejemplo, consideremos el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
& \overset{2}{\circ} \arrow[dr, "\beta"] & \\
1\circ \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \circ 3 \\
& \underset{4}{\circ} \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

acotado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Queremos hallar todos los caminos desde 1 hacia 3. La primera adyacencia de 1 es 2, recorriendo la flecha α. Luego, llegamos a 3 recorriendo la flecha β que sale de 2. Es decir, que encontramos el camino $\alpha\beta$. Por esta rama no se puede avanzar más, ya que el vértice 3 no tiene adyacencias. Arrancando desde 1 nuevamente, podemos recorrer la flecha γ, llegando al vértice 4. Finalmente, alcanzamos 3 a través de δ, encontrando el nuevo camino $\gamma\delta$. Ahora, dada la relación que define el álgebra, estos dos caminos coinciden y, por lo tanto, deben ser considerados un única vez. Otra forma de poder visualizar esto es, una vez que encontramos el camino $\alpha\beta$, sustituimos de todas las formas posibles, todas las relaciones del álgebra. De esta forma, hubiéramos encontrado lo mismo.

En este caso, este procedimiento termina en pocas iteraciones, pero si la cantidad de relaciones del álgebra aumenta, la cantidad de sustituciones que se deben realizar para encontrar todos los caminos iguales a uno ya encontrado, también aumenta.

4. Hallar un morfismo sobreyectivo de $P(M)$ hacia M.

   En este punto, tenemos la representación asociada a $P(M)$, así como también la asociada a M. Para hallar un morfismo entre ellas, se imponen las condiciones de conmutatividad en cada uno de los cuadrados que se formen. Desde un principio, se conoce la cantidad de incógnitas y la cantidad de ecuaciones, que son calculadas a partir de las dimensiones de los espacios vectoriales. Se arma una matriz cuya cantidad de filas es la cantidad de ecuaciones, y cada columna corresponde a una incógnita. Para determinar un morfismo se resuelve el sistema lineal homogéneo que se obtiene.

   Supongamos por un momento que simplemente queremos hallar un morfismo entre dos representaciones. Veamos un ejemplo para esclarecer el método.

   Ejemplo 4.2.2. Sea Q el carcaj de Kronecker $1\circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} \circ 2$.

   Consideremos las representaciones de Q:

$$K^2 \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\overset{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} K \quad \text{y} \quad K \underset{0}{\overset{1}{\leftleftarrows}} K$$

   Lo que buscamos es un morfismo (f_1, f_2) entre estas dos representaciones, donde $f_1 : K^2 \to K$ y $f_2 : K \to K$. Entonces, si representamos a f_1 y f_2 como matrices, queremos que conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[d, "{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}"'] & K \arrow[l, shift right, "{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}"'] \arrow[l, shift left, "{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "c"] \\
K & K \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[l, shift left, "0"]
\end{tikzcd}$$

   A partir de esto, es fácil ver cuántas incógnitas se tienen.

   Podemos observar del diagrama, que en el mismo se forman dos cuadrados. A partir del primer cuadrado, queremos que se cumpla que

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad = \quad 1 \cdot c$$

Es decir, que $a = c$. A partir del otro cuadrado, obtenemos lo siguiente:

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \quad = \quad 0 \cdot c$$

Es decir, que $b = 0$. Entonces, en total tenemos dos ecuaciones que se tienen que cumplir. La cantidad total de ecuaciones es fácil de determinar. Esto es porque conocemos las dimensiones de los espacios vectoriales, y a partir de ellas podemos determinar la cantidad de ecuaciones que se obtiene por cada cuadrado conmutativo. Si n es la dimensión del espacio de partida, y m la del espacio de llegada, entonces la cantidad de ecuaciones será $n \cdot m$. Luego sumamos las cantidades de cada cuadrado conmutativo para obtener el total. Algo importante a destacar, es que si las dimensiones de los espacios vectoriales son grandes, y hay a la vez muchos puntos en el carcaj, esto puede generar problemas con la memoria y el rendimiento, ya que la matriz quedaría muy grande.

Por lo explicado al comienzo del párrafo anterior, tenemos las dimensiones de la matriz que se quiere construir. Como dijimos, las columnas corresponden a las incógnitas, por lo que en este caso habrá 3 columnas. La cantidad de filas es la cantidad de ecuaciones, por lo que tendrá 2 filas. Entonces, en este caso se obtiene la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{a}{\uparrow} & \overset{b}{\uparrow} & \overset{c}{\uparrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Esta matriz que obtuvimos ya se encuentra escalerizada, y una solución posible es $a = 1, b = 0, c = 1$. Determinar una solución no es difícil, en este caso basta con asignarle un valor a c. El problema, como veremos a continuación, es encontrar una solución que sirva, ya que no todas lo hacen. Esto concluye el ejemplo.

Un detalle de este acercamiento, que es no menor, es que el morfismo que se tiene que hallar debe ser sobreyectivo. En el ejemplo anterior, eso no hubiera ocurrido si el valor asignado a c fuera 0 en lugar de 1. Lo primero que se hizo para tratar de resolver esto, fue que las variables que quedaban libres luego de escalerizar la matriz, eran inicializadas en 1. Esto funcionó en la mayoría de los ejemplos probados, pero luego se encontraron casos para los cuales no funcionaba. La razón era que alguna de las matrices del morfismo quedaban con filas linealmente dependientes, y por lo tanto, el morfismo no era sobreyectivo. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.3. Consideremos el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d, bend right, "\beta"'] \arrow[d, bend left, "\alpha"] \\
\circ \arrow[loop left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
\circ \arrow[d, "\zeta"'] \\
\circ
\end{tikzcd}
$$

con las relaciones $\gamma^2 = 0$, $\delta^2 = 0$, $\gamma\delta = 0$, $\delta\gamma = 0$, $\gamma\varepsilon = 0$, $\delta\varepsilon = 0$, $\alpha\delta = 0$, $\beta\gamma = 0$, $\alpha\varepsilon = 0$, $\beta\varepsilon = 0$, $\varepsilon\zeta = 0$.

Queremos hallar un morfismo entre las dos representaciones que siguen, e imponiendo que conmuten todos los cuadrados, se obtiene:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, bend right, "0"'] \arrow[d, bend left, "0"] \arrow[rr, "f_1"'] & & 0 \arrow[d, bend right, "0"'] \arrow[d, bend left, "0"] \\
K^6 \arrow[loop left, "{\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}}"] \arrow[loop right, "{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}}"'] \arrow[rr, "f_2"'] & & K^2 \arrow[loop left, "{[0\ 0]}"] \arrow[loop right, "{[0\ 0]}"] \arrow[d, "{[0\ 0]}"] \\
K^3 \arrow[d, "{[0\ 0\ 1]}"'] \arrow[rr, "f_3"'] & & K \arrow[d, "0"] \\
K \arrow[rr, "f_4"'] & & 0
\end{tikzcd}
$$

donde $f_1 = 0$, $f_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & d \end{smallmatrix}\right]$, $f_3 = [0\ 0\ e]$ y $f_4 = 0$.

Como mostramos antes, estas variables podrán tomar, en principio, cualquier valor. Inicialmente, les asignamos el valor 1. Como se puede apreciar en este ejemplo, al realizar esto, la transformación lineal f_2 quedaría $f_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, por lo que no es sobreyectiva. Sin embargo, si hubiera alguna forma de lograr, desde el programa, que a y d fueran 1, y b y c cero, entonces sí quedaría sobreyectivo.

En esta dirección, se intentó inicializar estas variables de varias formas, pero no hubo éxito por este lado.

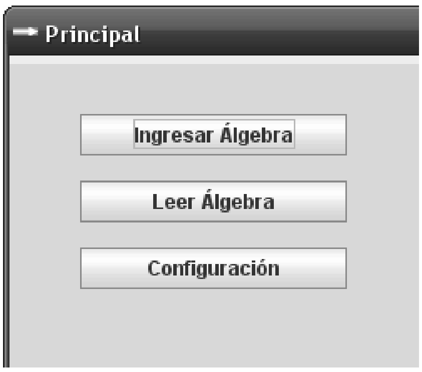
Entonces, lo siguiente que se trató de hacer fue utilizar la estructura de los módulos. En particular, utilizar el hecho de que el top del módulo proyectivo debe corresponderse con el top del módulo. Luego, primero se inicializan las variables que corresponden al top del módulo. Para esto, fue necesario calcular exactamente cuál es el top del módulo, ya que no alcanzaba con conocer únicamente las dimensiones de los espacios vectoriales en cada punto.

El segundo paso del algoritmo consiste en calcular el núcleo del morfismo. Esto se hace de forma similar a la de encontrar un morfismo entre dos representaciones. Sea $f : M \to N$ un morfismo entre dos representaciones de un álgebra dada. Primero observemos que el núcleo de un morfismo, es un submódulo de M, por lo que queremos encontrar un morfismo inyectivo ι entre $\operatorname{Ker} f$ y M, de forma que cada transformación lineal de f compuesta con su correspondiente en ι, sea 0. Entonces, lo que se hace es determinar el núcleo de cada una de las transformaciones lineales del morfismo f, y luego se impone que ι debe ser un morfismo para determinar las transformaciones lineales de $\operatorname{Ker} f$. Cabe destacar, que las dimensiones de los espacios vectoriales de $\operatorname{Ker} f$ son conocidas, ya que estamos trabajando con espacios vectoriales.

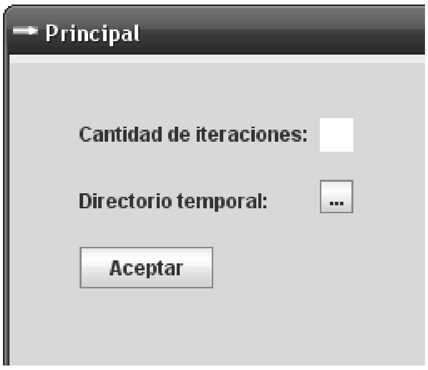
4.3. Uso de la aplicación

En esta sección mostramos el funcionamiento de la aplicación a través de ejemplos.

Cuando se inicia la aplicación, se puede configurar la cantidad máxima de iteraciones que podrán realizarse. Recordemos que el problema surgía cuando la dimensión proyectiva es infinita.



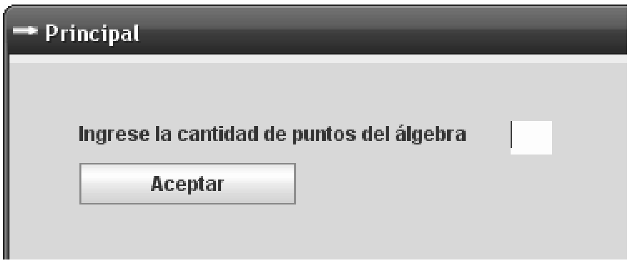
Si seleccionamos la opción *Configuración*, nos permitirá definir la cantidad máxima de iteraciones, así como también un directorio temporal. Ambas cosas se configuran por defecto, pero se da la opción a configurarlas manualmente. Las opciones que se muestran luego de seleccionar dicho botón son:



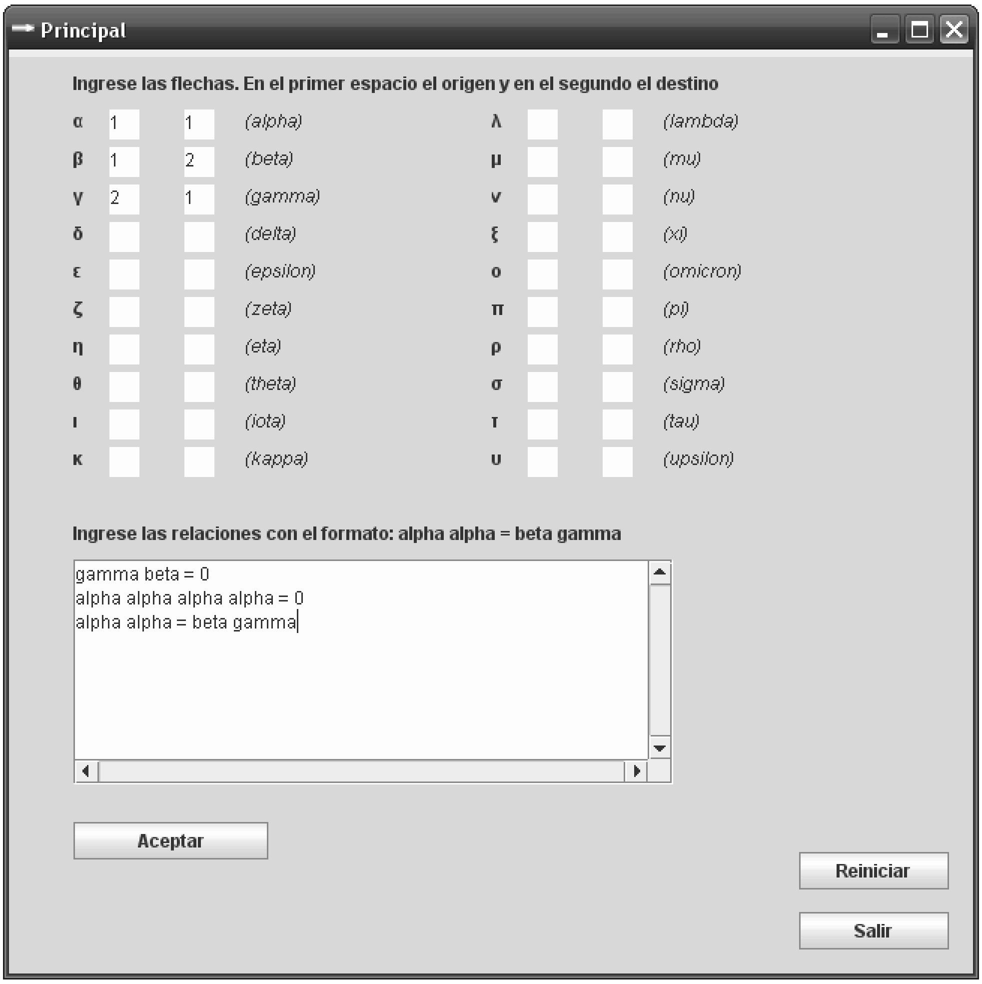
Luego, podemos optar entre dos cosas: o bien ingresar una nueva álgebra, o bien utilizar una que ya había sido ingresada previamente.

Veamos un ejemplo concreto. Sea Q el carcaj $\alpha \circlearrowleft 1\circ \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \circ 2$, con relaciones $\gamma\beta = 0$, $\alpha^4 = 0$ y $\alpha^2 = \beta\gamma$.

Supongamos que deseamos ingresar el álgebra. A continuación, se pide que se ingrese la cantidad de puntos que va a tener el carcaj asociado a la misma, en este caso, Q.

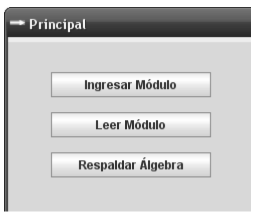


Luego de ingresar 2 en el área de texto, se pasa a la ventana que se muestra a continuación, y en la cual se ingresan los datos del álgebra:

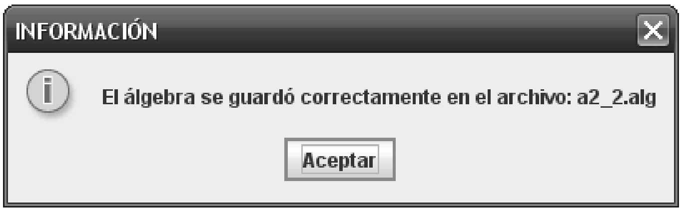


Una vez que están correctamente ingresados, se puede respaldar el álgebra, o se puede pasar directamente a ingresar un módulo. Se recomienda que siempre se respalden las álgebras, para que luego puedan ser reutilizadas, y para saber de qué álgebra es cada módulo.

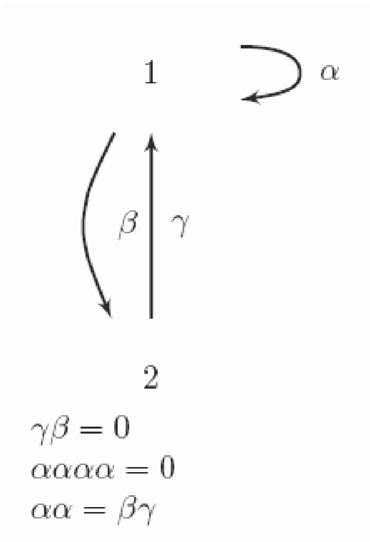
Las opciones se muestran en el siguiente cuadro:



En el caso en que se decida respaldar el álgebra, ésto puede demorar varios segundos, ya que el álgebra se convierte primero a un formato denominado *dot*. Luego, es preprocesado y convertido a LaTeX, y finalmente a PDF. El preprocesamiento realizado es necesario, dado que el grafo que se quiere guardar no es conocido, y de lo contrario podría quedar poco visible[1]. Si se selecciona la opción para respaldar el álgebra, cuando finaliza se muestra un mensaje como este:



Si buscamos el archivo en la carpeta de respaldo, observamos que, en este caso concreto, se generó un archivo PDF con el siguiente contenido:

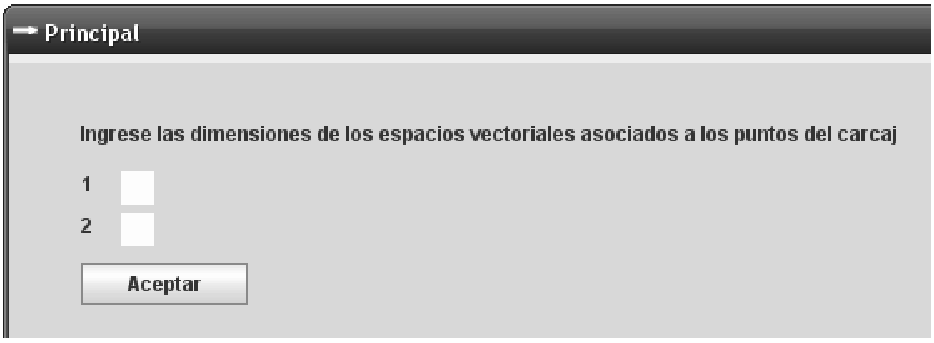


Al igual que con las álgebras, se da la opción de o bien ingresar un nuevo módulo, o bien leer uno ya guardado. Siguiendo con el ejemplo, ingresemos el módulo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[loop left, "0"] \arrow[r, shift left, "1"] & K \arrow[l, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

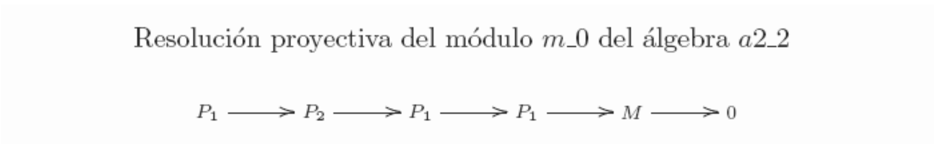
En la aplicación, se muestra la ventana siguiente, donde se ingresan las dimensiones de los espacios vectoriales.

[1]El lenguaje *dot*, define una sintaxis para representar grafos. Se utilizó una biblioteca, *Graphviz*, que lee archivos en este formato, y los procesa para dibujarlos. En este procesamiento, primero se genera otro archivo en formato *dot*, que contiene más información. Luego, a partir de él se genera una archivo LaTeX, y finalmente, un PDF. Para obtener más información, referirse a http://www.graphviz.org/



Luego de ingresar 1 en ambos cuadros de texto, se pasan ventanas sucesivas para ingresar las transformaciones lineales, para finalmente, tener la opción de calcular la resolución proyectiva del módulo. El proceso de cálculo de la resolución proyectiva, también puede llevar varios segundos. En el caso de los módulos, éstos se guardan automáticamente. Luego de calculada la resolución, se guarda la misma en un archivo .tex y se convierte a PDF. Estos archivos se guardan en el mismo directorio donde se encuentra respaldado el módulo.

Para el caso concreto que estamos siguiendo, se generó un archivo que contiene lo siguiente:


Resolución proyectiva del módulo m_0 del álgebra $a2\_2$

$$P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Luego de finalizado este proceso, puede reutilizarse la misma álgebra, e ingresar un nuevo módulo, o bien ingresar una nueva álgebra.

Una observación, es que en todo momento se puede salir de la aplicación, o reiniciar todos los datos. Abajo a la derecha se encuentran los botones:

Bibliografía

[1] Ibrahim Assem, *Algèbres et modules*, Masson, (1997).

[2] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, (2006).

[3] Birge Zimmermann Huisgen, *The finitistic dimension conjectures - A tale of 3.5 decades*, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, CA 93106 USA.

[4] Dieter Happel, *Homological conjectures in Representation Theory of finite dimensional algebras*, Notas de un curso en la Universidad de Sherbrooke, 1992.

[5] M. Auslander, I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc., 1975 vol. 52, 69-74.

[6] Dieter Happel, *On Gorenstein Algebras, in Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 389-404.

[7] Sverre O. Smalø, *The Supremum of the Difference Between the Big and Little Finitistic Dimensions is Infinite*, Proc. Amer. Math. Soc., 1998 vol. 126, 2619-2622.