Trabajo Monográfico

Cubrimientos de carcajes con relaciones

Ignacio Monteverde

Orientador: Dr. Marcelo A. Lanzilotta

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

Agradecimientos

Al jefe, que si realmente hubiera actuado como tal, me hubiera mandado a volar hace tiempo.

A mis amigos, en particular al Largo y al Cabeza, que aunque no tengan ni idea de lo que es un carcaj, siempre me dan para adelante.

A Elena, porque me banca más de lo posible.

A mis padres, que siempre me apoyaron.

A todos aquellos compañeros, docentes y alumnos que hicieron que la carrera fuese muy disfrutable.

A todos los que me preguntaron alguna vez cómo andaba con la monografía, sobre todo a aquellos que lo hacían sólo para preguntarme si iba a haber fiesta cuando me recibiera.

Resumen

Este trabajo se sitúa en el área de las representaciones de álgebras, basándose en la relación que existe entre álgebras y carcajes.
El objetivo de la monografía es intentar relacionar las representaciones de un carcaj con las de su cubierta.
En primera instancia se define cubrimiento de un carcaj, se encuentra su cubierta universal, para luego concluir propiedades de un carcaj a partir de las de su cubierta. Los principales resultados que se muestran aquí tienen que ver con el tipo de representación de un carcaj en función de su cubierta.

Palabras clave: Carcaj, cubrimiento de carcaj.

Abstract

This work is situated in the area of representations of algebras, we will use the relation between quivers and algebras.
The aim of the monograph is to find a relation between the representations of a quiver and the representations of its cover.
At first, the cover of a quiver is defined, we build its universal cover and we demonstrate properties of a quiver from the properties of its cover. The main results are about types of representation.

Keywords: Quiver, cover of a quiver.

Índice general

Introducción

A fines de la década de 1970 fueron introducidas en el área de teoría de representaciones de álgebras técnicas de carácter topológico. Las cubiertas y cubiertas universales fueron exitosamente utilizadas en esos años por Gabriel, Bongartz y Riedtman, entre otros.

Influido por esas ideas que estaban surgiendo, José A. de la Peña escribe en 1982 su tesis de maestría, que trata sobre cubiertas de carcajes y las relaciones entre las representaciones de un carcaj y las de su cubierta. Esta monografía se basa principalmente en este trabajo ([1]).

Introduciremos en el primer capítulo rápidamente los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de representaciones, que utilizaremos en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo definiremos cubierta de un carcaj, mostraremos algunas de sus propiedades y encontraremos cuál es la cubierta universal de un carcaj con relaciones.

Es en los capítulos 3 y 4 donde se encuentran los principales resultados. Allí se definirán algunos funtores que relacionan las representaciones de un carcaj con las de su cubierta, se definirá y se verán algunas propiedades de los carcajes con traslación, se probará la existencia y unicidad de la descomposición de una representación como suma de indescomponibles. Vamos a utilizar luego esas herramientas en la prueba del teorema principal del trabajo: un carcaj finito es de tipo de representación finito si y sólo si su cubierta es localmente de representación finita.

En el capítulo quinto nos centraremos en las cubiertas sin ciclos dirigidos. El principal objetivo es encontrar de alguna forma la unicidad de la cubierta universal, o sea que si tenemos que $\mathbb{K}Q/J$ es isomorfo a $\mathbb{K}Q/I$, sus cubiertas universales también serán isomorfas. Esto no es cierto en general (hay un ejemplo en el capítulo 2), aunque sí en los casos en que la cubierta universal no tiene ciclos dirigidos, algo que se verifica si por ejemplo el álgebra es estándar.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Carcajes y representaciones

A grandes rasgos, un carcaj (o quiver) es un grafo orientado. Para ser más formales:

Definición 1.1.1. (Carcaj) Un carcaj es una cuadrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$, donde Q_0 es el conjunto de vértices o puntos, Q_1 el conjunto de flechas y s, e son mapas de Q_1 en Q_0 que le asignan a cada flecha su vértice inicial y final respectivamente. El carcaj se dice **finito** si Q_0 y Q_1 son finitos.

Ejemplo 1.1.2. La figura de abajo muestra un carcaj Q, donde $Q_0 = \{a, b, c\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$; $s(\alpha) = s(\beta) = a$, $s(\gamma) = b$ y $s(\delta) = c$; $e(\alpha) = e(\beta) = b$ y $e(\gamma) = e(\delta) = c$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & b \arrow[r, "\gamma"] & c \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.3. Dado $x \in Q_0$, llamaremos x^+ al conjunto de puntos de Q_0 a los cuales llega una flecha que empieza en x. De igual forma, definimos x^- como el conjunto de puntos de Q_0 del cual sale una flecha con final x.

Definición 1.1.4. Decimos que un carcaj Q es **conexo** si dados $x, y \in Q_0$ existe una sucesión de flechas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que el comienzo o el final de cada α_i coincide con el comienzo o final de α_{i+1} para $i = 1, ..., n-1$, α_1 empieza o termina en x y α_n tiene como inicio o final a y.

Definición 1.1.5. Un morfismo entre carcajes $f : Q \to C$ es una función $f : Q_0 \cup Q_1 \to C_0 \cup C_1$ y tal que $f(Q_0) \subset C_0$, $f(Q_1) \subset C_1$, $f(e(\alpha)) = e(f(\alpha))$ y $f(s(\alpha)) = s(f(\alpha))$ para toda $\alpha \in Q_1$.

Definición 1.1.6. Decimos que un carcaj Q es **localmente finito** si para todo $x \in Q_0$ los conjuntos x^+, x^- son finitos.

Definición 1.1.7. (representación) Una representación de un carcaj Q sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ asigna a cada punto x de Q_0 un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V(x)$ y a cada flecha $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha) = i$, $e(\alpha) = j$ una transformación $\mathbb{K}$-lineal $V(\alpha) : V(i) \to V(j)$. En general denotamos $V = ((V(i))_{i\in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha\in Q_1})$.

Ejemplo 1.1.8. Para el carcaj del ejemplo anterior, podemos definir V como $V(a) = \mathbb{K}^2$, $V(b) = \mathbb{K}$ y $V(c) = \mathbb{K}$, $V(\alpha)(x, y) = x$, $V(\beta)(x, y) = y$, $V(\gamma) = -id$ y $V(\delta) = id$. Podemos verlo de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^2 \arrow[r, bend left, "(1\quad 0)"] \arrow[r, bend right, "(0\quad 1)"'] & \mathbb{K} \arrow[r, "-1"] & \mathbb{K} \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

Dado un carcaj cualquiera, siempre tenemos la representación cero, que le asigna a cada punto el espacio vectorial nulo y a cada flecha la transformación nula.

Definición 1.1.9. Dado un carcaj Q, y dos representaciones V y W de Q, un **morfismo** de V en W es una familia de transformaciones lineales $(f(i))_{i\in Q_0}$ con $f(i) : V(i) \to W(i)$ tal que para toda flecha $\alpha : i \to j$ se verifica $W(\alpha)f(i) = f(j)V(\alpha)$.

Ejemplo 1.1.10. Dado el carcaj C

$$\begin{tikzcd} 1\bullet \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & \bullet 3 \\ 2\bullet \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

Consideramos las siguientes representaciones de C:

$$V = \begin{tikzcd} \mathbb{K}^2 \arrow[dr, "(1\quad 0)"] & \\ & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^2 \arrow[ur, "(0\quad 1)"'] & \end{tikzcd} \qquad W = \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[dr, "id"] & \\ & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \arrow[ur, "-id"'] & \end{tikzcd}$$

Definiendo $\psi(1) : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ como $\psi(1)(x, y) = x$, $\psi(2) : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ como $\psi(2)(x, y) = -y$ y $\psi(3) : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ como $\psi(3) = id$, tenemos que $\psi : V \to W$ es un morfismo de representaciones. Para ver esto gráficamente, basta observar que los paralelogramos que se forman abajo son diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^2 \arrow[rr, "(1\ \ 0)"] \arrow[dr, "(1\ \ 0)"] & & \mathbb{K} \arrow[dr, "1"] & \\
& \mathbb{K} \arrow[rr, "1"] & & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}^2 \arrow[ur, "(0\ \ 1)"] \arrow[rr, "(0\ \ -1)"] & & \mathbb{K} \arrow[ur, "-1"] &
\end{tikzcd}$$

Dadas V y W, dos representaciones de Q, podemos definir la representación $V \oplus W$, poniendo $(V \oplus W)(i) = V(i) \oplus W(i)$ para cada punto i y $(V \oplus W)(\alpha) = V(\alpha) \oplus W(\alpha)$ para cada flecha de Q.

Definición 1.1.11. Dada V una representación de un carcaj Q, llamamos **soporte** de V al conjunto $sop(V) := \{a \in Q_0 / V(a) \neq 0\}$.

Definición 1.1.12. Una representación V de Q se dice **indescomponible** o **inescindible** si no existen representaciones Z y W no nulas tales que $V \cong Z \oplus W$.

Definición 1.1.13. Decimos que (Q, I) es **localmente de representación finita** si para todo $x \in Q_0$ existe una cantidad finita de representaciones V indescomponibles no isomorfas con soporte finito que contiene a x.

1.2. Álgebras de caminos y sus módulos

Dados $x, y \in Q_0$, un camino de x a y es una n-upla $\alpha_n ... \alpha_1$, $n \geq 0$ donde $\alpha_i \in Q_1$ son tales que $s(\alpha_i) = e(\alpha_{i-1})$ para cada $i = 2, ..., n$, $s(\alpha_1) = x$, $e(\alpha_n) = y$. Vale aclarar que admitimos para cada $x \in Q_0$ el camino trivial τ_x que empieza y termina en x. Podemos extender las funciones e y s de manera obvia: $s(w) = x$ y $e(w) = y$ si w es un camino de x a y. La composición de dos caminos $v = \alpha_l ... \alpha_1$ y $w = \beta_m ... \beta_1$ es $wv = \beta_m ... \beta_1 \alpha_l ... \alpha_1$ si $e(\alpha_l) = s(\beta_1)$, en otro caso $wv = 0$.
Dados dos puntos i y j de un carcaj Q, llamamos $\mathbb{K}Q(i, j)$ al espacio vectorial con base todos los caminos de i a j. Definimos el álgebra de caminos $\mathbb{K}Q$ como $\mathbb{K}Q := \bigoplus_{i,j \in Q_0} \mathbb{K}Q(i, j)$ como espacio vectorial y definimos la multiplicación extendiendo linealmente el producto de caminos. El álgebra tiene unidad si y solo si Q_0 es finito, y en este caso $1_{\mathbb{K}Q} = \sum_{i \in Q_0} \tau_i$. Salvo en unos pocos casos particulares, resulta un álgebra no conmutativa.

Denotamos por F al ideal bilátero generado por los caminos de longitud 1 (las flechas). El ideal F tiene por base (como espacio vectorial) a todos los caminos de longitud mayor o igual que 1.
Si $x \in Q_0$ llamaremos $F(x,-)$ al espacio vectorial generado por los caminos en F que empiezan en x. De igual manera, se define $F(-,x)$ a los caminos de F que terminan en x. Es claro que $F = \bigoplus_{x \in Q_0} F(x,-) = \bigoplus_{x \in Q_0} F(-,x)$.

Definición 1.2.1. Decimos que un ideal I de $\mathbb{K}Q$ es **admisible** si para cada $x \in Q_0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x,-) \subset I(x,-) \subset F^2(x,-)$ y de igual modo para la segunda coordenada.

Dados un carcaj Q, un camino $w = \alpha_n ... \alpha_1$ y una representación V de Q, definimos $V(w) = V(\alpha_n)...V(\alpha_1)$.

Definición 1.2.2. Sea Q un carcaj e I un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$. Una relación $\rho \in I$ es **legible** si existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i$ donde $\gamma_1, ..., \gamma_n$ tienen todos el mismo inicio y final.

Se puede demostrar que si I es admisible, puede generarse por medio de relaciones legibles.

Definición 1.2.3. Una representación de (Q, I) es una representación V de Q que verifica $V(u) = 0$ para todo $u \in I$.

La importancia del estudio de las álgebras de camino está dado por un teorema dentro de la teoría de categorías. Definamos primero algunos conceptos dentro de esa área (para profundizar un poco más y encontrar algunas de las demostraciones que no aparecen, se puede consultar [9]).

Definición 1.2.4. Una **categoría** es una clase de **objetos** $Ob(C)$ junto a conjuntos de **morfismos** $C(X,Y)$ para cada par de objetos X, Y y mapas de composición $C(Y,Z) \times C(X,Y) \to C(X,Z)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$ que son asociativos y admiten el morfismo identidad $1_X \in C(X,X)$ para cada objeto $X \in C$.

Definición 1.2.5. Una categoría D es una **subcategoría** de C si $Ob(D)$ es subclase de $Ob(C)$, $D(X,Y) \subset C(X,Y)$ para todos $X, Y \in Ob(D)$, la composición en D es la misma que en C y el morfismo identidad 1_X coincide en C y en D para todo $X \in Ob(D)$. Una subcategoría D de C es plena si $D(X,Y) = C(X,Y)$ para todos los $X, Y \in Ob(D)$.
Dos objetos $X, Y \in Ob(C)$ son **isomorfos** si existen morfismos $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$ tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

Definición 1.2.6. Una categoría C es **preaditiva** si $C(X,Y)$ tiene estructura de grupo abeliano para todos los $X, Y \in Ob(C)$.

Observación 1.2.7. Si Q es un carcaj, I un ideal de $\mathbb{K}Q$, entonces $\mathbb{K}Q/I$ es una categoría, donde los objetos son los puntos del carcaj y los morfismos $C(x,y)$ son las combinaciones lineales de clases de caminos de x a y.
Dado un carcaj Q y un ideal admisible I, las representaciones de (Q,I) también forman una categoría, a la que llamaremos $Rep(Q,I)$. Las representaciones V de (Q,I) que verifican $dimV(i) < \infty$ para todo $i \in Q_0$ y $sop(V)$ finito forman una subcategoría de $Rep(Q,I)$, a la que denotaremos $rep(Q,I)$.
Dada una $\mathbb{K}$-álgebra Λ, los Λ-módulos forman una categoría, que se denota $Mod(\Lambda)$. Los Λ-módulos de dimensión finita forman una subcategoría de $Mod(\Lambda)$, que se nota usualmente como $mod(\Lambda)$.

Definición 1.2.8. Si C y D son dos categorías, un **funtor** $F : C \to D$ asigna a cada objeto $X \in Ob(C)$ un objeto $FX \in Ob(D)$ y a cada morfismo $g \in C(X,Y)$ le asigna un morfismo $Fg \in D(FX,FY)$ de forma que $F1_X = 1_{FX}$ para todo $X \in C$ y $F(gf) = F(g)F(f)$ para cada $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$.

Definición 1.2.9. El funtor F es **fiel** si dados $X,Y \in C$ el mapa $C(X,Y) \to D(FX,FY)$, $g \mapsto Fg$ es inyectivo; si ese mismo mapa es sobreyectivo, el funtor se llama **pleno**; si para cada objeto $Y \in D$ existe $X \in C$ tal que $FX \cong Y$, el funtor se llama **denso**. En caso que el funtor es pleno, fiel y denso, se denomina **equivalencia**.

Puede demostrarse que en caso que $F : C \to D$ sea una equivalencia, existe un funtor $F^{-1} : D \to C$ tal que todo objeto $A \in Ob(C)$ es isomorfo a $F^{-1}F(A)$ y todo $B \in Ob(D)$ es isomorfo a $FF^{-1}(B)$. En realidad, FF^{-1} y $F^{-1}F$ cumplen un poco más que eso, pero no utilizaremos más que lo dicho.

Definición 1.2.10. Si las categorías C y D son preaditivas, un funtor $F : C \to D$ es **aditivo** si dados $f,g \in C(X,Y)$, $F(f+g) = Ff + Fg$.

Observación 1.2.11. Sea $F : C \to D$ un funtor aditivo. Sean $A_1, A_2 \in Ob(C)$. Entonces las proyecciones $p_i : A_1 \oplus A_2 \to A_i$ y las inclusiones $q_i : A_i \to A_1 \oplus A_2$ $(i = 1,2)$ verifican $p_i q_i = 1_{A_i}$, $q_1p_1 + q_2p_2 = 1_{A_1 \oplus A_2}$, $p_1q_2 = p_2q_1 = 0$. Estas propiedades se preservan por un funtor aditivo, por lo que $F(p_i) : F(A_1 \oplus A_2) \to A_i$ son proyecciones y $F(q_i) : A_i \to F(A_1 \oplus A_2)$ son inclusiones.
De esta manera concluimos que si $F : C \to D$ es aditivo entonces $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$ para todo $A, B \in Ob(C)$.
El recíproco también es cierto, o sea que si para todos $A, B \in Ob(C)$ se verifica $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$, entonces F es aditivo.

Sea Q un carcaj. Dada una representación V de Q, podemos definir el $\mathbb{K}Q$-módulo a izquierda $V' = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ definiendo la acción de la siguiente manera: si $w = \alpha_l ... \alpha_1$ es un camino que empieza en i y termina en j, entonces $(w.v_i)_j = V(\alpha_l)...V(\alpha_1)(v_i)$ y $(w.v_i)_h = 0$ si $h \neq j$; la acción en general se define extendiendo linealmente.
Recíprocamente, dado un $\mathbb{K}Q$- módulo M, definimos $M(i) = \tau_i M$. Es claro que en este caso $M = \bigoplus_{i \in Q_0} M(i)$ y tenemos una representación definiendo $M(\alpha) : M(i) \to$

$M(j)$ como $M(\alpha)(\tau_i m) = \alpha m$ para cada $\alpha \in Q_1$ con $s(\alpha) = i$, $e(\alpha) = j$.
Si $\phi : V \to W$ es un morfismo de representaciones, definimos $\phi' = \bigoplus_{i \in Q_0} \phi_i : V' \to W'$, que es morfismo de $\mathbb{K}Q$-módulos. Recíprocamente, cada $\psi : M \to N$ morfismo de $\mathbb{K}Q$-módulos nos da un morfismo de representaciones colocando $\psi(i) : M(i) \to N(i)$, $\tau_i m \mapsto \psi(\tau_i m) = \tau_i \psi(m)$.
De esta manera, se muestra que la categoría $Rep(Q)$ es equivalente a la categoría $Mod(\mathbb{K}Q)$. Esto se puede generalizar de la siguiente manera:

Teorema 1.2.12. *Sea Q un carcaj e I un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$. Entonces la categoría $Rep(Q, I)$ es equivalente a la categoría $Mod(\mathbb{K}Q/I)$. La restricción de la equivalencia hace $rep(Q, I)$ equivalente a $mod(\mathbb{K}Q/I)$.*

Debido a este teorema, muchas veces notaremos a $Rep(Q, I)$ como $Mod(Q, I)$.

Definición 1.2.13. Una $\mathbb{K}$-categoría es una categoría en la cual los conjuntos de morfismos $C(x, y)$ están provistos con estructura de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de forma que la composición es $\mathbb{K}$-bilineal. Una $\mathbb{K}$-categoría C se llama localmente acotada si verifica:

1. Para cada $x \in Ob(C)$ el álgebra $C(x, x)$ es local.
2. Objetos diferentes en C son no isomorfos.
3. $\displaystyle\sum_{y \in Ob(C)} dim_{\mathbb{K}} C(x, y)$ y $\displaystyle\sum_{y \in Ob(C)} dim_{\mathbb{K}} C(y, x)$ son finitas para todo objeto $x \in C$.

Lema 1.2.14. *Dado Q localmente finito sin flechas dobles e I un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$, se verifica que la categoría $\mathbb{K}(Q, I) = \mathbb{K}Q/I$ es localmente acotada.*

Demostración: Probaremos la siguiente afirmación: dados $h \in \mathbb{N}$, $z \in Q_0$ hay finitos caminos de largo a lo sumo h que empiezan en z. Lo probaremos por inducción en h. Al ser Q localmente finito sin flechas dobles, tenemos para cada $z \in Q_0$ finitos caminos de largo 1 que comienzan en z, lo que nos da la demostración para $h = 1$. Supongamos probado que para todo $y \in Q_0$ la cantidad de caminos de largo a lo sumo $h - 1$ que comienzan en y es finita. Los caminos que empiezan en z de largo h son el producto de flechas que empiezan en z con caminos de largo $h - 1$, por hipótesis de inducción sumado al paso de inducción 1, tenemos el resultado.
Dado $x \in Q_0$, al ser I un ideal admisible, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los caminos que empiezan en x de largo al menos n son el nulo. Entonces $\sum_{y \in Q_0} dim_{\mathbb{K}}(Q, I)(x, y)$ es menor o igual a la cantidad de caminos de largo a lo sumo $n - 1$ que empiezan en x. Por lo probado arriba, esto es finito.

El siguiente teorema nos muestra la importancia del estudio de las álgebras $\mathbb{K}(Q, I)$:

Teorema 1.2.15. ***(Gabriel)***
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, toda categoría localmente acotada es isomorfa a $\mathbb{K}(Q, I)$ para algún carcaj Q localmente finito e I un ideal admisible. En particular, toda álgebra básica de dimensión finita es isomorfa a $\mathbb{K}Q/I$, con Q carcaj finito e I ideal admisible.

Es importante destacar que la demostración del teorema asegura además la unicidad del carcaj Q pero no así la unicidad del ideal I.

En adelante, notaremos $A := \mathbb{K}Q/I$, donde Q es un carcaj e I un ideal admisible.

Definición 1.2.16. Un módulo M se dice **simple** si no contiene submódulos propios no triviales.

Definición 1.2.17. Un A-módulo E se dice **inyectivo** si dados $u : L \to M$ monomorfismo de A-módulos y $f : L \to E$ morfismo, existe $g : M \to E$ tal que $f = gu$.

Definición 1.2.18. Un A-módulo P se dice **proyectivo** si dados $h : L \to M$ epimorfismo de A-módulos y $f : P \to M$ morfismo, existe $g : P \to L$ tal que $f = hg$.

Teorema 1.2.19. *(1) Un A-módulo P es proyectivo si y solo si para todo morfismo $\psi : V \to P$ sobreyectivo existe $\phi : P \to V$ tal que $\phi\psi = id_P$.*
(2) Un A-módulo E es inyectivo si y solo si para todo morfismo inyectivo $f : E \to V$ existe un morfismo $h : V \to E$ tal que $hf = id_E$.

Ya vimos que los módulos sobre $\mathbb{K}Q/I$ pueden verse como representaciones sobre el carcaj. Esta equivalencia respeta lo siguiente:

Proposición 1.2.20.

1. *Los módulos simples son las representaciones $S(i)$, $i \in Q_0$, donde $S(i)_i = \mathbb{K}$ y $S(i)_j = 0$ si $i \neq j$.*
2. *Los módulos indescomponibles son las representaciones indescomponibles.*
3. *Los módulos proyectivos indescomponibles están dados por las representaciones $P(i)$, $i \in Q_0$, siendo $P(i) = (P(i)_j, \phi_\alpha)$ la siguiente representación: $P(i)_j$ es el espacio vectorial con base los caminos de i a j; si $\alpha : a \to b$, entonces $\phi_\alpha : P(i)_a \to P(i)_b$ es la multiplicación a izquierda por α.*
4. *Los módulos inyectivos indescomponibles son las representaciones $I(i) = (I(i)_j, \psi_\alpha)$, con i en Q_0, definida como: $I(i)_j$ es el dual del $\mathbb{K}$-espacio vectorial con base los caminos desde j hasta i; ψ_α está dado por el dual de la multiplicación a izquierda de α.*

Ejemplo 1.2.21. Tomemos el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[r, "\delta"] & 3 \end{tikzcd}$$

Sea I el ideal generado por $\alpha\beta$. Entonces, los proyectivos indescomponibles de $\mathbb{K}(Q, I)$ pueden verse como las siguientes representaciones:

$$P(1) = \begin{tikzcd} \langle \tau_1, \beta\alpha \rangle \arrow[r, bend left, "(1 \;\; 0)"] & \langle \alpha \rangle \arrow[l, bend left, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "1"] & \langle \delta\alpha \rangle \end{tikzcd}$$

$$P(2) = \begin{tikzcd} \langle\beta\rangle \arrow[r, shift left, "0"] & \langle\tau_2\rangle \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[r, "1"] & \langle\delta\rangle \end{tikzcd}$$

$$P(3) = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "0"] & 0 \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[r, "0"] & \langle\tau_3\rangle \end{tikzcd} .$$

Los inyectivos indescomponibles son los siguientes:

$$I(1) = \begin{tikzcd} \langle\tau_1^*, (\beta\alpha)^*\rangle \arrow[r, shift left, "(0\ \ 1)"] & \langle\beta^*\rangle \arrow[l, shift left, "\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

$$I(2) = \begin{tikzcd} \langle\alpha^*\rangle \arrow[r, shift left, "1"] & \langle\tau_2^*\rangle \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

$$I(3) = \begin{tikzcd} \langle(\delta\alpha)^* \arrow[r, shift left, "1"] & \langle\delta^*\rangle \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[r, "1"] & \tau_3^* \end{tikzcd} .$$

Una propiedad importante de los proyectivos e inyectivos es la siguiente:

Teorema 1.2.22. *Sea V un A-módulo.*
(1) Existe un proyectivo P y un morfismo sobreyectivo $f : P \to V$.
(2) Existe un inyectivo L y un morfismo inyectivo $g : V \to L$.

1.3. Sucesiones de Auslander-Reiten

A lo largo de esta sección $A := \mathbb{K}Q/I$, con Q localmente finito conexo e I admisible. Para las pruebas de esta sección, así como otro material relativo a este tema, puede consultarse [4] y [3].

Definición 1.3.1. Dado $M \in A - mod$, el submódulo de M generado por todos sus submódulos simples es un submódulo semisimple denominado **zócalo** de M. Dicho módulo se escribe $soc(M)$.

Definición 1.3.2. Si M es un A-módulo, llamamos **radical** de M al submódulo de M que es la intersección de todos los submódulos maximales. Denotaremos al radical como $rad(M)$.

Definición 1.3.3. (Sucesión de Auslander-Reiten) Un sucesión exacta corta entre A-módulos $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una sucesión de Auslander-Reiten si:
a) no escinde;
b) M y N son indescomponibles;
c) dado $h : X \to M$ morfismo de A-módulos que no sea un epimorfismo que escinde existe $k : X \to E$ tal que $gk = h$;
c') dado $h : N \to X$ morfismo de A-módulos que no sea un monomorfismo que escinde existe $k : E \to X$ tal que $kf = h$.
(En realidad, es equivalente pedir sólo la condición c) o c').)

El siguiente teorema nos muestra en qué casos existen sucesiones de Auslander-Reiten.

Teorema 1.3.4. *Sea $M \in modA$ indescomponible. Entonces:*

1. *Si M no es proyectivo, existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten que termina en M: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$. Al módulo N se le llama el trasladado de Auslander-Reiten de M y se denota τM.*

2. *Si M no es inyectivo, existe y es única la sucesión de Auslander-Reiten que empieza en M: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$. Al módulo D se le llama el trasladado inverso de Auslander-Reiten de M y se denota $\tau^{-1}M$.*

Observación 1.3.5. Vale la pena observar que debido a la unicidad en el teorema, si $M \in modA$ es indescomponible no proyectivo, entonces $\tau^{-1}\tau M = M$. De igual manera, dado $N \in modA$ indescomponible no inyectivo, $\tau\tau^{-1}N = N$.

Las sucesiones de Auslander-Reiten son en algún sentido las "más chicas"que no se escinden. Veremos ahora qué significa esto.

Definición 1.3.6. Sea $M \in modA$ indescomponible.
Un morfismo $g : E \to M$ es un **pozo** en M si:
i) g no es un epimorfismo que escinde;
ii) para todo $h : E \to E$ tal que $gh = g$, h es un automorfismo;
iii) para todo $h : X \to M$ que no sea un epimorfismo que escinde, existe $h' : X \to E$ tal que $gh' = h$.
Un morfismo $f : M \to E$ es una **fuente** en M si:
i) g no es un monomorfismo que escinde;
ii) para todo $h : E \to E$ tal que $hf = f$, h es un automorfismo;
iii) para todo $h : M \to X$ que no sea un monomorfismo que escinde, existe $h' : E \to X$ tal que $h'f = h$.

Definición 1.3.7. Dos morfismos de A-módulos $f : M \to N$ y $g : M' \to N'$ son isomorfos si existen dos isomorfismos $h_1 : M \to M'$ y $h_2 : N \to N'$ tales que $h_2 f = g h_1$.

Proposición 1.3.8. *Sea $0 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0$ sucesión de Auslander-Reiten. Entonces:*
(a) f es una fuente y cualquier otra fuente en N es isomorfa a f.
(b) g es un pozo y cualquier otro pozo en M es isomorfo a g.

Proposición 1.3.9. *Si P es un proyectivo indescomponible no simple, entonces la inclusión $\iota : rad(P) \to P$ es un pozo y todo otro pozo en P es isomorfo a él.*
Si I es un inyectivo indescomponible no simple, la proyección natural $\pi : I \to I/soc(I)$ es una fuente y toda otra fuente es isomorfa a ella.

Definición 1.3.10. Decimos que $f : X \to Y$, un morfismo de A-módulos, es **irreducible** si para toda descomposición de la forma $f = gh$, se tiene que g es un epimorfismo que escinde o h es un monomorfismo que escinde.

El próximo resultado relaciona los morfismos irreducibles con los pozos y las fuentes.

Proposición 1.3.11. *Sea $M \in modA$ indescomponible:*
(a) Un morfismo $h : M \to X$ es irreducible si y sólo si existe $h' : M \to X'$ tal que $h \oplus h' : M \to X \oplus X'$ es una fuente en M.
(b) Un morfismo $h : X \to M$ es irreducible si y sólo si existe $h' : X' \to M$ tal que $X \oplus X' \overset{(h,h')}{\to} M$ es un pozo en M.

A partir de A, podemos construir el **carcaj de Auslander-Reiten**, que se denota Γ_A y se construye de la siguiente manera:
♢ Hay un punto en Γ_A por cada clase de isomorfismos de A-módulos indescomponibles.
♢ Hay una flecha $[M] \to [N]$ si y sólo existe un morfismo irreducible $f : M \to N$.

Observación 1.3.12. ⋄ Γ_A no tiene lazos ni flechas dobles. La no existencia de lazos se debe a que un morfismo irreducible debe ser sobreyectivo o inyectivo pero no isomorfismo.
⋄ Γ_A es localmente finito. Se deduce a partir de las proposiciones 1.3.8 y 1.3.11.
⋄ Si $M \in modA$ es no proyectivo, el número de flechas que salen de $[\tau M]$ es el mismo que la cantidad que llegan a $[M]$. Esto es consecuencia de la proposición anterior.

Capítulo 2

Cubiertas de un carcaj

Presentaremos en este capítulo el principal objeto de estudio de este trabajo: las cubiertas de ciertos carcajes. Primero definiremos cubierta de un carcaj y luego encontraremos la cubierta universal.
Dado un carcaj Q con ciertas propiedades y un ideal admisible I, su cubierta universal es un carcaj $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ que es "localmente igual"a (Q, I) pero no tiene "agujeros". Intentaremos en esta sección formalizar estas ideas.

2.1. Morfismos cubrientes

Definición 2.1.1. (Carcaj con relaciones)
Decimos que (Q, I) es un carcaj con relaciones si Q es localmente finito, conexo y sin flechas dobles e I es un ideal admisible de $\mathbb{K}Q$.

Dado un morfismo de carcajes $f : Q \to C$, se define en forma directa un morfismo entre las álgebras $\mathbb{K}Q$ y $\mathbb{K}C$ extendiendo lineal y multiplicativamente la función $f \mid_{Q_1}$. Abusaremos notación y llamaremos f también a esta extensión.

Definición 2.1.2. Un morfismo entre carcajes de relaciones $f : (Q, I) \to (C, J)$ es un morfismo de carcajes que verifica que $f(I) \subset J$.

Definición 2.1.3. Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Un grupo de automorfismos G de (Q, I) se llama **admisible** si ninguna órbita de G en Q_0 tiene más de un vértice en x^+ ó x^-, con $x \in Q_0$.

Lema 2.1.4. *Si G es admisible, $g \in G$ verifica $gx = x$ para algún $x \in Q_0$, entonces $g = id$.*

Demostración: Si $gx = x$, tenemos, $x^- = \{y_1, ..., y_n\}$. Como $g(x^-) = (gx)^- = x^-$, se tiene que $g(y_i) \in x^-$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, o sea $gy_i = y_j$ para algún j. Pero entonces tenemos $g(y_i) = y_j = id(y_j)$, lo que significa que y_i e y_j están en la misma órbita de G, y al ser G admisible, $y_i = y_j$. De igual manera probamos que $g(z) = z$ para todo $z \in x^+$. Podemos repetir este procedimiento en cada uno de los sucesores y predecesores de x y, usando que Q es conexo, llegar a que $ga = a$ para todo $a \in Q_0$. •

Definición 2.1.5. Un morfismo de carcajes con relaciones $f : (Q, I) \to (\Delta, J)$ es **localmente cubriente** si para todo $x \in Q_0$ los morfismos inducidos $x^+ \to (f(x))^+$ y $x^- \to (f(x))^-$ son biyectivos.

Observación 2.1.6. Sea $f : (Q, I) \longrightarrow (\Delta, J)$ un morfismo localmente cubriente, y sean $x \in \Delta_0$, μ camino en Δ, con $s(\mu) = x$. Es sencillo ver que, si queremos encontrar un levantamiento de este camino, éste existe, y es único si le indicamos su comienzo. O sea, dado $y \in Q_0$ tal que $f(y) = x$, existe un único camino ν en Q, con $f(\nu) = \mu$ y $s(\nu) = y$.

Definición 2.1.7. Dado G un grupo de automorfismos de (Q, I), definimos el carcaj Q/G. Los vértices y las flechas en Q/G son las órbitas de Q_0 y Q_1 bajo la acción de G, o sea $(Q/G)_0 = Q_0/G$ y $(Q/G)_1 = Q_1/G$. El ideal $\hat{I}$ lo definimos como el generado por $\pi(I)$, donde π es la proyección canónica.

Ejemplo 2.1.8. Tomemos el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
 & b_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\epsilon_1"] & d_1 & c_2 \arrow[l, "\delta_2"] & \\
a_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\gamma_1"'] & e_1 & & e_2 & a_2 \arrow[ul, "\gamma_2"'] \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
 & c_1 \arrow[r, "\delta_1"] & d_2 & b_2 \arrow[l, "\beta_2"] \arrow[u, "\epsilon_2"] &
\end{tikzcd}$$

e I el ideal generado por $\{\epsilon_1\alpha_1, \epsilon_2\alpha_2\}$.
Sea $g : (Q, I) \to (Q, I)$ definido en los vértices como $g(a_1) = a_2$, $g(b_1) = b_2$, $g(c_1) = c_2$, $g(d_1) = d_2$ y $g(e_1) = e_2$ con $g^2 = Id$, y de forma análoga en las flechas.
El grupo $G = \{Id, g\}$ es admisible.
Si construimos el carcaj $(Q/G, \hat{I})$, nos queda:

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[d, "\epsilon"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & e & d \\
 & c \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

con $\hat{I}$ generado por $\epsilon\alpha$.

Proposición 2.1.9. *Sea G grupo admisible de (Q, I), entonces:*

1. *$(Q/G, \hat{I})$ es un carcaj con relaciones.*
2. *$\pi : (Q, I) \longrightarrow (Q/G, \hat{I})$ es un morfismo de carcajes localmente cubriente.*

Demostración:

1. Supongamos que tenemos $[x] \rightrightarrows [y]$ en Q/G.
   Esto significa que existen dos flechas $x \xrightarrow{l} y$, $x' \xrightarrow{l'} y'$, con $[x] = [x']$, $[y] = [y']$, $[l] \neq [l']$. O sea, $x' = g_1(x)$, $y' = g_2(y)$ con g_1, g_2 en G, pero $l \neq g(l')$, para todo $g \in G$.
   En particular $g_1(l) \neq l'$. Por lo tanto, $g_1(y) \neq y'$ (si no, tendría dos flechas distintas desde x' a y': l' y $g_1(l)$).
   Se tiene que $g_1(y) \in (x')^+$ (porque $x' = g_1(x)$), $y' \in (x')^+$. Además, $g_2 g_1^{-1}(g_1(y))$ $= g_2(y) = y'$, y por lo tanto tengo dos vértices de x'^+ en una órbita de G, contradiciendo que este grupo es admisible.

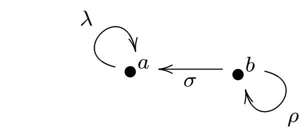
   Veamos ahora que $\hat{I}$ es admisible.
   Sea $[x] \in (Q/G)_0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x, -) \subset I(x, -)$. Vamos a ver que $\hat{F}^n([x], -) \subset \hat{I}([x], -)$. Sea $[y] \in (Q/G)_0$, $\upsilon \in \hat{F}^n([x], [y])$ camino. Por la observación anterior, suponiendo demostrado (2) existe ϱ camino que empieza en x con $\pi(\varrho) = \upsilon$. Como $\varrho \in F^n \subset I$, entonces $\upsilon \in \hat{I}$.
   Por otro lado, como $I \subset F^2$, entonces $\hat{I} = \pi(I) \subset \pi(F^2) = \hat{F}^2$.

2. Hay que probar que para todo $x \in Q_0$ la función $x^+ \xrightarrow{\pi} \pi(x)^+$ es biyectiva.
   La sobreyectividad es obvia, así que veamos la inyectividad.
   Si tengo $x \xrightarrow{l_1} y_1, x \xrightarrow{l_2} y_2$ con $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ entonces $\pi(l_1) = \pi(l_2)$ (porque no hay flechas dobles en Q/G). Luego existe $g \in G$ tal que $g(l_1) = l_2$ y por lo tanto $g(y_1) = y_2$. Tengo entonces que $y_1, y_2 \in x^+$ están en la misma órbita de G. Al ser G admisible, concluimos que $y_1 = y_2$. •

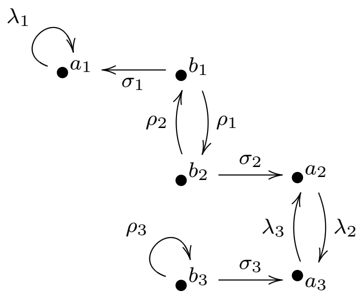
Definición 2.1.10. Un morfismo de carcajes con relaciones $f : (\Delta, J) \to (Q, I)$ es **cubriente** si existe un grupo admisible G de (Δ, J) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(\Delta, J) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f"] & \\
(\Delta/G, \bar{J}) \arrow[r, "\cong"] & (Q, I)
\end{tikzcd}$$

Observación 2.1.11. La proposición anterior nos dice que cubriente implica localmente cubriente. Vemos que el recíproco es falso con el siguiente contraejemplo. Sean Q y C los siguientes carcajes:



Q



C

Definimos $f : C \longrightarrow Q$ como:
$f(a_i) = a$
$f(b_i) = b$
$f(\lambda_i) = \lambda$
$f(\sigma_i) = \sigma$
$f(\rho_i) = \rho$ para $i = 1, 2, 3$.

Claramente f es localmente cubriente, pero no puede ser cubriente, porque en este caso debería existir G grupo de automorfismo tal que para algún $g \in G$ $g(\lambda_1) = \lambda_2$, lo que no puede ocurrir por ser λ_1 un lazo y λ_2 no.

Definición 2.1.12. (relaciones mínimas y cero)

Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Dada $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y u_i caminos de x hasta y, se dice que es relación mínima si $n \geq 2$ y cualquier subconjunto $K \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ verifica $\sum_{i \in K} \lambda_i u_i \notin I(x, y)$.
Si $n = 1$, μ se llama relación cero.

Observación 2.1.13. Es evidente que toda relación puede escribirse como suma de relaciones mínimas y cero. O sea que las relaciones mínimas y cero generan aditivamente (esto es, como espacio vectorial) al ideal I.

Proposición 2.1.14. *Sea $f : (\Delta, J) \longrightarrow (Q, I)$ morfismo cubriente. Sea $\rho \in I(x, y)$ relación mínima (cero), $\bar{x} \in \Delta_0$ con $f(\bar{x}) = x$. Entonces existe $\bar{y} \in \Delta_0$ y una relación mínima (cero) $\bar{\rho} \in J(\bar{x}, \bar{y})$ con $f(\bar{\rho}) = \rho$.*

Demostración: Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ escrita en expresión reducida (esto quiere decir que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$). Como $I = f(J)$, tenemos $\rho_1, ..., \rho_m$, $\rho_i \in J(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ tal que $\rho = f(\sum_{i=1}^{m} \rho_i) = \sum_{i=1}^{m} f(\rho_i)$. Como $f(\bar{x}) = x = f(\bar{x}_i)$, existe $g_i \in G$ con $g_i\bar{x}_i = \bar{x}$ para $i = 1, ..., m$. Definiendo $\sigma_i := g_i\rho_i \in J(\bar{x}, g_i\bar{y}_i)$, tenemos $\rho = \sum_{i=1}^{m} f(\sigma_i)$ y podemos suponer que todos los $g_i\bar{y}_i$ son distintos (si tengo $g_i\bar{y}_i = g_j\bar{y}_j$, sustituimos al comienzo ρ_i, ρ_j por $g_i\rho_i, g_j\rho_j$ respectivamente, ya que $f(\rho_i) = f(g_i\rho_i), f(\rho_j) = f(g_j\rho_j)$ y podemos sumar ambas relaciones y escribirlas como una sola).

Escribimos $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} v_{ij}$ en expresión reducida. Obtenemos así $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} f(v_{ij})$ y esta expresión es reducida pues, por la observación 2.1.6, no puede haber cancelaciones por el levantamiento único de caminos.
Si $m > 1$, tengo $f(\sigma_1) \in I$, pero $f(\sigma_1) = \sum_{i \in K} \lambda_i u_i$, con $K \subsetneq \{1, ..., n\}$, lo que contradice que la relación sea mínima.
Concluimos entonces que $\rho = f(\sigma_1)$. Definiendo $\bar{\rho} = g_1\sigma_1$, $\bar{y} = g_1\bar{y}_1$, nos queda $f(\bar{\rho}) = \rho$, con $\bar{\rho} \in J(\bar{x}, \bar{y})$.
Observemos ahora que $\bar{\rho}$ es cero o mínima si ρ lo es. Esto se debe a que, gracias a la unicidad de los levantamientos, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in J(\bar{x}, \bar{y})$ está expresada en forma reducida, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) \in I(x, y)$ también lo está. •

2.2. La cubierta universal

Fijemos (Q, I) un carcaj con relaciones. Sea W el conjunto de todos los caminos no orientados de Q, esto es, para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$, consideramos también $y \xrightarrow{\alpha^{-1}} x$. Tomamos la relación de equivalencia $\sim$ en W generada por las siguientes relaciones:

1. Si $x \xrightarrow{\beta} y$ es flecha en Q, entonces $\beta\beta^{-1} \sim \tau_y$ y $\beta^{-1}\beta \sim \tau_x$.
2. Si tenemos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ una relación mínima, entonces $v_i \sim v_j$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.
3. Si $u \sim v$ por medio de las relaciones anteriores, entonces $wuz \sim wvz$ siempre que el producto esté bien definido.

A esta relación de equivalencia se la denomina **homotopía** y a las relaciones que se enumeran arriba se les llama homotopías elementales.

Es claro que si tengo $u \sim w$, entonces $s(u) = s(w)$ y $e(u) = e(w)$. Es sencillo ver que el producto de caminos pasa al cociente (o sea, [u][v]=[uv]).
Dado $x \in Q_0$, consideramos *W(Q,x)* $\subset W$ el conjunto de caminos no orientados que empiezan y terminan en x. Es claro que *W(Q,x)*$/\sim$ es un grupo, que denotamos $\Pi_1(Q, I, x)$ y llamamos grupo fundamental de (Q, I) con base en x. Si Q es conexo, dados $x, y \in Q_0$, existe un camino μ (no necesariamente orientado) de x a y. Es sencillo verificar que $\Pi_1(Q, I, y) = \mu\Pi_1(Q, I, x)\mu^{-1}$ y que conjugar por μ es un isomorfismo entre $\Pi_1(Q, I, x)$ y $\Pi_1(Q, I, y)$. Por lo tanto podemos denotar a cualquiera de ellos $\Pi_1(Q, I)$ y llamarlo **grupo fundamental**.

Vamos a construir un carcaj Δ cuyos vértices sean los elementos de $W/\sim$. Si tenemos $a, b \in \Delta_0$, colocamos una flecha $a \to b$ si existen $u, v \in W$ con $[u] = a, [v] = b$ y una flecha α tales que $\alpha u = v$.

Es importante notar que esta flecha α es única, debido a que en Q no hay flechas dobles. Sabiendo esto, podemos sin problemas llamar $a \xrightarrow{\hat{\alpha}} b$ a la flecha entre a y b.

Notaremos $f : \Delta \to Q$ al morfismo de carcajes que lleva $a \xrightarrow{\hat{\alpha}} b$ en $e(u) \xrightarrow{\alpha} e(v)$. Este morfismo es sobreyectivo.

Lema 2.2.1. *Δ es unión de $\sharp Q_0$ componentes conexas, todas isomorfas.*

Demostración: Si $x_1 \xrightarrow{\hat{\alpha}} x_2$ en Δ, entonces $x_1 = [v]$, $x_2 = [\alpha v]$ con $[v]$ camino no necesariamente orientado de Q, $\alpha \in Q_1$. Por lo tanto, si $x = [w], y = [u] \in \Delta_0$ están en la misma componente conexa, debe ocurrir que $s(w) = s(u)$. Por otro lado, si $x = [w], y = [u] \in \Delta_0$ con $s(w) = s(u)$, se tiene $[u] = ([u][w^{-1}])[w]$ y la sucesión de flechas en uw^{-1} conecta x con y. En conclusión, tenemos que dos elementos $[z], [t] \in \Delta_0$ están conectados si y sólo si $s(z) = s(t)$, en particular esto prueba que Δ tiene $\sharp Q_0$ componentes conexas.
Notaremos Δ_a a la componente de Δ con vértice inicial a. Dados $b, d \in Q_0$, al ser Q conexo hay un camino no necesariamente orientado γ de b en d en Q. Definimos $\varphi : \Delta_d \to \Delta_b$ tal que $x \overset{\varphi}{\longmapsto} x[\gamma]$, $\psi : \Delta_b \to \Delta_d$ tal que $y \overset{\psi}{\longmapsto} y[\gamma^{-1}]$. Es claro que φ, ψ son morfismos de carcajes, siendo uno inverso del otro. •

Sea $\tilde{Q}$ una de las componentes conexas de Δ. Llamaremos $\pi : \tilde{Q} \to Q$ a restringir el morfismo $f : \Delta \to Q$ definido arriba a una de las componentes conexas de Δ.
Vale observar que π no depende de cuál componente conexa escogemos. Es decir, si llamamos π_b a la restricción de f a Δ_b y $\pi_d := f|_{\Delta_d}$, entonces $\pi_d = \pi_b\varphi$, donde $\varphi : \Delta_d \to \Delta_b$ es el isomorfismo construido en el lema.

Lema 2.2.2. *Para cada $x \in \tilde{Q}_0$, las funciones $x^+ \xrightarrow{\pi} (\pi(x))^+$ $x^- \xrightarrow{\pi} (\pi(x))^-$ son biyectivas.*

Demostración:
Dados $x \xrightarrow{\hat{\alpha}} y$, $x \xrightarrow{\hat{\beta}} z$, con $\pi(y) = \pi(z)$, como $\pi(y) = e(\alpha)$ y $\pi(z) = e(\beta)$, tendría $\pi(x) \overset{\alpha,\beta}{\rightrightarrows} y$ en Q y al no tener flechas dobles, $\alpha = \beta$ y por lo tanto $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ y $z = y$.
Dada $\pi(x) \xrightarrow{\delta} z$ en Q, entonces $x \xrightarrow{\hat{\delta}} \delta x$ en $\tilde{Q}$ con $\pi(\delta x) = z$.•

Definiremos ahora el ideal $\tilde{I}$ de $\tilde{Q}$.

Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(a, b)$ relación mínima y sea $[w] \in \tilde{Q}_0$ con $\pi([w]) = a$. Por el lema anterior podemos tomar un camino $\tilde{u}_i$ que empieza en $[w]$ tal que $\pi(\tilde{u}_i) = u_i$. El punto final de $\tilde{u}_i$ es $[u_i w]$. Por la definición de la homotopía $u_i \sim u_j$ y por lo tanto $[u_i w] = [u_j w]$. Entonces, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i$ es una relación de $[w]$ a $[u_1 w]$.
Llamaremos $\tilde{I}$ al ideal generado por las relaciones $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i$ y por los caminos $\tilde{u}$ tales que $\pi(\tilde{u}) \in I$.

Ejemplo 2.2.3. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \bullet 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\
1\bullet \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \bullet 3 \arrow[r, "\eta"] & \bullet 5 \\
& \bullet 4 \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideramos I el ideal de Q generado por $\{\beta\alpha - \eta\epsilon\}$.
Tomemos todos los caminos que empiezan en 1. La relación $\beta\alpha - \eta\epsilon$ es mínima, así que $\beta\alpha \sim \eta\epsilon$. Esto implica que $u\beta\alpha \sim u\eta\epsilon$ y $\beta\alpha u \sim \eta\epsilon u$ para cualquier camino u. De este modo, comenzamos a recorrer Q yendo con las flechas en su sentido y en el otro y $\tilde{Q}$ nos queda:

$$\begin{tikzcd}
& & {[\alpha]} \arrow[dr, "\hat{\beta}"] & & & {[\alpha\gamma^{-1}\delta^{-1}\beta\alpha]} \arrow[dr, "\hat{\beta}"] & \\
{[\delta\gamma]} & {[\gamma]} \arrow[l, "\hat{\delta}"] & {[\tau_1]} \arrow[l, "\hat{\gamma}"] \arrow[u, "\hat{\alpha}"] \arrow[d, "\hat{\epsilon}"] & {[\beta\alpha]} & {[\delta^{-1}\beta\alpha]} \arrow[l, "\hat{\delta}"] & {[\gamma^{-1}\delta^{-1}\beta\alpha]} \arrow[l, "\hat{\gamma}"] \arrow[u, "\hat{\alpha}"] \arrow[d, "\hat{\epsilon}"] & {[\eta\epsilon\gamma^{-1}\delta^{-1}\beta\alpha]} \\
& & {[\epsilon]} \arrow[ur, "\hat{\eta}"] & & & {[\epsilon\gamma^{-1}\delta^{-1}\beta\alpha]} \arrow[ur, "\hat{\eta}"] &
\end{tikzcd}$$

El ideal $\tilde{I}$ está generado por los caminos de la forma $\hat{\beta}\hat{\alpha} - \hat{\eta}\hat{\epsilon}$.
De alguna manera lo que ocurrió es que el carcaj Q tiene dos "agujeros", pero uno de ellos ya está "tapado"por el ideal. El carcaj $\tilde{Q}$ transformó ese "agujero no tapado"en una recta. El grupo $\Pi_1(Q, I, 1)$ es libre generado por $[\gamma^{-1}\delta^{-1}\eta\epsilon]$, o sea que es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Si nos fijamos, justamente si cocientamos $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ por ese grupo, obtenemos (Q, I). Esto, dicho aquí de forma informal para este ejemplo, será probado para el caso más general más adelante.

Teorema 2.2.4. *El mapa* $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (Q, I)$ *es un morfismo cubriente.*

Demostración:
Dados $x, y \in \tilde{Q}_0$ con $\pi(x) = \pi(y)$, definimos $g_x^y : \tilde{Q}_0 \to \tilde{Q}_0$, $g_x^y(z) = zx^{-1}y$, que puede extenderse a las flechas para ser morfismo de carcajes. El inverso de g_x^y es g_y^x, así que g_x^y es automorfismo de $\tilde{Q}$.

La flecha $a \xrightarrow{\hat{\delta}} b$ va a parar por g_x^y en $ax^{-1}y \xrightarrow{\hat{\delta}} bx^{-1}y$. Dado $\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \in \tilde{I}(a, b)$ levantamiento de $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in I(\pi(a), \pi(b))$, g_x^y lo manda en el único levantamiento de $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ que empieza en $ax^{-1}y$. O sea que g_x^y preserva $\tilde{I}$ y por tanto g_x^y es automorfismo de $(\tilde{Q}, \tilde{I})$.

Definimos $G = \{g_x^y : x, y \in \tilde{Q}_0, \pi(x) = \pi(y)\}$. Si tengo g_x^y, $g_z^v \in G$, como $y \sim x$, $z \sim v$ entonces $xv^{-1}z \sim y$ y por lo tanto $g_x^y g_z^v = g_{xv^{-1}z}^y \in G$. Si $g_x^y \in G$, entonces

$(g_x^y)^{-1} = g_y^x \in G$. O sea que G es grupo.

Si $\pi(x) = \pi(y)$, entonces $g_x^y(x) = y$, con $g_x^y \in G$. Si $g_x^y \in G$, $z \in \tilde{Q}_0$, entonces $\pi(g_x^y(z)) = \pi(zx^{-1}y) = e(zx^{-1}y) = e(z) = \pi(z)$. Esto muestra que la acción de G define a π.
Sea $x \in \tilde{Q}_0$, $a, b \in x^+$, $g \in G$ tales que $g(a) = b$, entonces $\pi(a) = \pi(b)$ y por el lema anterior concluimos que $a = b$. De esta forma, G es admisible.

Los generadores de $\tilde{I}$ son levantamientos por π de relaciones en I y por lo tanto $\pi(\tilde{I}) \subset I$. Si $\mu \in I(a, b)$ es relación mínima o cero, tenemos por definición $\tilde{\mu} \in \tilde{I}$ con $\pi(\tilde{\mu}) = \mu$. Como toda relación es suma de mínimas y ceros, tenemos $I \subset \pi(\tilde{I})$.

Resta ver que $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es carcaj con relaciones. Ya vimos que no tiene flechas dobles y que es localmente finito, falta ver que $\tilde{I}$ es un ideal admisible.
Dado $x \in \tilde{Q}_0$, al ser I admisible existe $n \in \mathbb{N}$ con $F^n(\pi(x), -) \subset I$. Si tomo un camino $\mu \in F^n(x, -)$, se verifica que $\pi(\mu) \in F^n(\pi(x), -) \subset I(\pi(x), -)$, así que $\mu \in \tilde{I}$. La inclusión $\tilde{I} \subset F^2$ se deduce a partir de que $I \subset F^2$. •

Proposición 2.2.5. *El grupo G que define a π es isomorfo a $\Pi_1(Q, I)$.*

Demostración: Definamos $\varphi : G \to \Pi_1(Q, I, x)$ como $\varphi(g_u^v) = [v^{-1}u]$. Este mapa es claro que está bien definido (no depende de los representantes u y v que tomo) y es morfismo: $\varphi(g_u^v g_z^w) = \varphi(g_{uw^{-1}z}^v) = [v^{-1}uw^{-1}z] = \varphi(g_u^v)\varphi(g_z^w)$.
Si $\varphi(g_u^v) = [\tau_x]$, entonces $[u] = [v]$, así que g_u^v deja fijo $[u]$, lo que implica que $g_u^v = id$, por ser G admisible.
Sea $[\gamma] \in \Pi_1(Q, I, x)$, con γ camino de x a x, entonces $\pi([\gamma]) = x = \pi([\tau_x])$, entonces $g_\gamma^{\tau_x} \in G$, con $\varphi(g_\gamma^{\tau_x}) = [\gamma]$.
En conclusión, φ es isomorfismo y el grupo G es isomorfo a $\Pi_1(Q, I)$. •

Definición 2.2.6. Un morfismo cubriente $f : (\Delta, J) \to (Q, I)$ se llama **cubierta universal** si dado cualquier otro morfismo cubriente $f' : (\Delta', J') \to (Q, I)$ y puntos $x \in \Delta_0, y \in \Delta'_0$ con $f(x) = f'(y)$, existe y es único el morfismo de carcajes $h : (\Delta, J) \to (\Delta', J')$ con $f'h = f, h(x) = y$.

Nuestro objetivo es probar la universalidad de π como morfismo cubriente. El siguiente lema apunta en ese sentido.

Lema 2.2.7. *Sea $f : (\Delta, J) \to (Q, I)$ morfismo cubriente. Sean $\bar{u}, \bar{v}$ caminos en Δ con $s(\bar{u}) = s(\bar{v})$. Si $u = f(\bar{u})$, $v = f(\bar{v})$ verifican $u \sim v$, entonces $e(\bar{u}) = e(\bar{v})$.*

Demostración: Denotaremos $\bar{x} = s(\bar{u})$.
Si $u \sim v$ entonces existen caminos $u = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n = v$ tales que $u_i \sim u_{i+1}$ por alguna de las homotopías elementales. Al ser f cubriente podemos tomar $\bar{u}_i$ tales que $f(\bar{u}_i) = u_i$, $s(\bar{u}_i) = x$. El lema se obtiene entonces si lo probamos para $u \sim v$ por una homotopía elemental.

1. El levantamiento por f de una flecha a partir de un punto es una única flecha, así que un levantamiento de un camino de la forma $\alpha\alpha^{-1}$ es necesariamente de la forma $\beta\beta^{-1}$.

2. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ es relación mínima con $u_1 = u, u_2 = v$. Ya mostramos que existe $\bar{y} \in \Delta_0$ y una relación $\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{w}_i \in J(\bar{x},\bar{y})$ con $f(\bar{\rho}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Como el levantamiento empezando en un punto es único, $\bar{u} = w_1$, $\bar{v} = w_2$ y por lo tanto $e(\bar{u}) = e(\bar{v})$.

3. Si $u = zwl, v = zw'l$, con $w \sim w'$ por medio de una de las relaciones anteriores. Tenemos $\bar{u} = \bar{z}\bar{w}\bar{l}$, $\bar{v} = \bar{z}'\bar{w}'\bar{l}'$, donde $\bar{l}, \bar{l}'$ son levantamientos de l que comienzan en $\bar{x}$, $\bar{w}$ es levantamiento de w comenzando en $e(\bar{l})$, $\bar{w}'$ es levantamiento de w' comenzando en $e(\bar{l}')$, $\bar{z}$ es levantamiento de z comenzando en $e(\bar{w})$ y $\bar{z}'$ es levantamiento de z' comenzando en $e(\bar{w}')$. Por la unicidad del levantamiento a partir de un punto, tenemos que $\bar{l} = \bar{l}'$ y por lo tanto $s(\bar{w}) = e(\bar{l}) = e(\bar{l}') = s(\bar{w}')$. Como $w \sim w'$ por una de las relaciones anteriores y $s(\bar{w}) = s(\bar{w}')$, por lo probado anteriormente tenemos que $e(\bar{w}) = e(\bar{w}')$. Utilizando nuevamente la unicidad del levantamiento, tenemos que $\bar{z} = \bar{z}'$ y por lo tanto $e(\bar{u}) = e(\bar{z}) = e(\bar{z}') = e(\bar{v})$.•

Teorema 2.2.8. *El morfismo $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (Q, I)$ es cubierta universal.*

Demostración:
Sea $f : (\Delta, J) \to (Q, I)$ un morfismo cubriente. Sean $x \in \tilde{Q}_0, y \in \Delta_0$ con $\pi(x) = f(y)$. Vamos a construir $h : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (\Delta, J)$.

Definimos $h(x) = y$. Si tenemos $x \xrightarrow{\hat{\alpha}} z$ flecha en $\tilde{Q}$, esto significa que $x = [w], z = [u]$, con $u = \alpha w$. Al ser f cubriente, existe una flecha (y solo una) $y \xrightarrow{\alpha'} z'$ en (Δ, J), con $f(\alpha') = \alpha$. Si queremos que $fh = \pi$, debemos definir $h(\hat{\alpha}) = \alpha', h(z) = z'$. De igual manera, si tenemos $a \xrightarrow{\hat{\beta}} x$, existe y es única $a' \xrightarrow{\beta'} y$ en (Δ, J), con $f(\beta') = \beta$ y definimos $h(\hat{\beta}) = \beta', h(a) = a'$.

De esta forma, continuamos inductivamente (en el paso n-ésimo tenemos definido $h(a)$ para todo a para el cual existe un camino, no necesariamente orientado, de longitud menor o igual a n entre a y x). Esto nos muestra la unicidad del morfismo (en caso de que exista). El problema es ver si este morfismo está bien definido, o sea, si llegamos a $z \in \tilde{Q}_0$ desde x por caminos distintos $\bar{u}, \bar{v}$, el punto al que llegamos con el procedimiento anterior en Δ_0 por cada uno de estos caminos debería ser el mismo.

Supongamos $u = \pi(\bar{u})$, $v = \pi(\bar{v})$. Como $x = [w]$, el punto final de $\bar{u}$ es $z = [uw]$ y el de $\bar{v}$ es $z = [vw]$, entonces $uw \sim vw$ y por lo tanto $u \sim v$. Si vamos por el camino $\bar{u}$, $h(z)$ estaría definido como el punto final del levantamiento por f de u comenzando en y. Si fuéramos por el camino $\bar{v}$, deberíamos definir $h(z)$ como el punto final del levantamiento por f de v a Δ que empieza en y. El lema anterior nos dice que estos puntos son el mismo, y por lo tanto $h(z)$ no depende del camino elegido.

Falta ver que el morfismo h respeta los ideales, o sea $h(\tilde{I}) \subset J$.
Recordemos que $\tilde{I}$ está generado por levantamientos de relaciones mínimas o cero en I, así que basta probar que $h(\tilde{\eta}) \in J$ para todo $\tilde{\eta}$ de esta forma. Sea $\tilde{\eta} \in \tilde{I}(a,b)$ con $\pi(\tilde{\eta}) \in I$ relación mínima o cero. Entonces $fh(\tilde{\eta}) = \pi(\tilde{\eta}) \in I(\pi(a), \pi(b))$ y $h(\tilde{\eta})$ es un levantamiento de $\pi(\tilde{\eta})$ que empieza en $h(a)$. Por la proposición 2.1.14 tenemos que existe una relación $\bar{\eta} \in J(h(a), \bar{b})$ tal que $f(\bar{\eta}) = \pi(\tilde{\eta})$ (porque esta última es una relación mínima o cero en I y f es cubriente). Usando el levantamiento único de caminos por f, tenemos que $h(\tilde{\eta}) = \bar{\eta} \in J$. •

Comentamos al inicio de este capítulo que la cubierta universal era un carcaj sin agujeros. En topología, un espacio no tiene agujeros si es simplemente conexo, lo que significa que todas las curvas son homotópicas a cero. Veamos que nuestra cubierta universal verifica esto:

Proposición 2.2.9. *El grupo fundamental de $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es el trivial.*

Demostración: Observemos primero que si $u \sim v$ en (Q, I), entonces $\tilde{u} \sim \tilde{v}$ si $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ son levantamientos de u y v que empiezan en el mismo punto. Para eso, basta verificarlo para las homotopías elementales.

1. $\tau_x \sim \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1}$ por definición.

2. Si u, v son caminos en Q tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I(x,y)$ es relación mínima con $u_1 = u$, $u_2 = v$, entonces ya mostramos que hay una relación mínima $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in \tilde{I}(\bar{x}, \bar{y})$, pero por levantamiento único de caminos, esto implica $\tilde{u}_1 = \tilde{u}$, $\tilde{u}_2 = \tilde{v}$ y por lo tanto $\tilde{u} \sim \tilde{v}$.

3. $v = zlw$, $u = zl'w$ tal que $l \sim l'$ por alguna de las anteriores, ya mostramos que esto implica $\tilde{l} \sim \tilde{l}'$. Como $\widetilde{zlw} = \tilde{z}\tilde{l}\tilde{w}$, $\widetilde{zl'w} = \tilde{z}\tilde{l}'\tilde{w}$ (debido al levantamiento único de caminos), concluimos que $\tilde{u} \sim \tilde{v}$.

Veamos ahora que $\Pi_1(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es el grupo trivial. Si tengo $\tilde{w}$ camino en $\tilde{Q}$ (no necesariamente orientado) que empieza y termina en $[v]$, entonces $\pi(\tilde{w})$ es camino en Q tal que $\pi(\tilde{w})v \sim v$ y por lo tanto $\pi(\tilde{w}) \sim \tau_x$, y usando lo anterior concluimos que $\tilde{w} \sim \tau_{[v]}$. •

Dada un álgebra Λ tenemos un carcaj Q y un ideal I tal que $\Lambda \cong \mathbb{K}(Q, I)$. Con esto, gracias al teorema anterior, podemos construir la cubierta universal $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (Q, I)$. Nos gustaría decir que $\mathbb{K}(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es la cubierta universal de Λ. Pero para construir el carcaj $\tilde{Q}$ y su ideal $\tilde{I}$ usamos al ideal I, que recordemos no es único. El ejemplo siguiente nos muestra dos álgebras isomorfas cuyas "cubiertas"no lo son.

Ejemplo 2.2.10. Tomemos $\mathbb{K}$ un cuerpo con característica distinta de 2. Sea Q el carcaj:

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Definimos I_1 como el ideal generado por $\{\alpha^2 - \gamma\beta, \beta\gamma - \beta\alpha\gamma, \alpha^4\}$

Llamaremos I_2 al ideal generado por $\{\alpha^2 - \gamma\beta, \beta\gamma, \alpha^4\}$

El álgebra $\mathbb{K}(Q, I_1)$ tiene dimensión 10, una base es $\{\tau_1, \tau_2, \alpha, \beta, \gamma, \alpha^2, \alpha^3, \beta\gamma, \alpha\gamma, \beta\alpha\}$ (hay que observar que en $\mathbb{K}(Q, I_1)$, $[\beta\alpha^2] = [\beta\gamma\beta] = [\beta\alpha\gamma\beta] = [\beta\alpha^3] = [\beta\gamma\beta\alpha] = [\beta\alpha\gamma\beta\alpha] = [\beta\alpha^4] = [0]$ y $[\alpha^2\gamma] = [\gamma\beta\gamma] = [\gamma\beta\alpha\gamma] = [\alpha^3\gamma] = [\alpha\gamma\beta\gamma] = [\alpha\gamma\beta\alpha\gamma] = [\alpha^4\gamma] = [0]$).

El álgebra $\mathbb{K}(Q, I_2)$ también tiene dimensión 10, una base es $\{\tau_1, \tau_2, \alpha, \beta, \gamma, \alpha^2, \alpha^3, \beta\alpha, \beta\alpha\gamma, \alpha\gamma\}$ (vale observar que en $\mathbb{K}(Q, I_2)$ $[\alpha^2\gamma] = [\gamma\beta\gamma] = [0]$ y $[\beta\alpha^2] = [\beta\gamma\beta] = [0]$).

Definimos $\psi : \mathbb{K}Q \to \mathbb{K}Q$ por $\psi(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2$, $\psi(\beta) = \beta - \frac{1}{2}\beta\alpha$, $\psi(\gamma) = \gamma - \frac{1}{2}\alpha\gamma$.
Entonces:
$\psi(\gamma\beta - \alpha^2) = \gamma\beta - \alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha^2 - \gamma\beta) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma\beta)\alpha + \frac{1}{4}\alpha(\gamma\beta - \alpha^2)\alpha \in I_1$.
$\psi(\beta\gamma) = \beta\gamma - \beta\alpha\gamma + \frac{1}{4}\beta\alpha^2\gamma \in I_1$.
$\psi(\alpha^4) = \alpha^4\mu$, con μ suma de caminos en Q.
O sea que $\psi(I_2) \subset I_1$, y por lo tanto ψ nos determina $\hat{\psi} : \mathbb{K}(Q, I_2) \to \mathbb{K}(Q, I_1)$.

Por otro lado:
$\hat{\psi}(\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^3 + I_2) = \alpha + I_1$.
$\hat{\psi}(\beta + \frac{1}{2}\beta\alpha + I_2) = \beta + I_1$.
$\hat{\psi}(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\gamma) = \gamma + I_1$.
Tenemos entonces que $\hat{\psi}$ es sobreyectiva y por lo tanto es un isomorfismo, ya que vimos que ambas álgebras tienen igual dimensión. Por lo tanto $\mathbb{K}(Q, I_1) \cong \mathbb{K}(Q, I_2)$.

En I_1 tenemos la relación mínima $\beta\gamma - \beta\alpha\gamma$, entonces tenemos $\beta\gamma \sim \beta\alpha\gamma$ y por lo tanto $\alpha \sim \tau_1$, y de aquí, al tener la relación mínima $\alpha^2 - \gamma\beta$ llegamos a que $\gamma\beta \sim \alpha^2 \sim \tau_1$. En conclusión (Q, I_1) es la cubierta universal de sí misma.

En (Q, I_2) tenemos la relación mínima $\alpha^2 - \gamma\beta$, así que $\alpha^2 \sim \gamma\beta$, pero $\alpha \nsim \tau_1$. Así tenemos que la cubierta universal es:

$$
\begin{tikzcd}
{[\beta\alpha^{-3}]} \arrow[dr, "\hat{\gamma}"] & & {[\beta\alpha^{-1}]} \arrow[dr, "\hat{\gamma}"] & & {[\beta\alpha]} \arrow[dr, "\hat{\gamma}"] & & {[\beta\alpha^{3}]} \\
& {[\alpha^{-1}]} \arrow[ur, "\hat{\beta}"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"] & & {[\alpha]} \arrow[ur, "\hat{\beta}"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"] & & {[\alpha^{3}]} \arrow[ur, "\hat{\beta}"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"] & \\
{[\alpha^{-2}]} \arrow[ur, "\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\hat{\beta}"] & & {[\tau_1]} \arrow[ur, "\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\hat{\beta}"] & & {[\alpha^{2}]} \arrow[ur, "\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\hat{\beta}"] & & {[\alpha^{4}]} \\
& {[\gamma^{-1}]} \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] & & {[\gamma^{-1}\alpha^{2}]} \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] & & {[\gamma^{-1}\alpha^{4}]} \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] &
\end{tikzcd}
$$

con $\tilde{I}_2$ generado por todos los caminos de la forma $\{\hat{\alpha}^2 - \hat{\gamma}\hat{\beta}, \hat{\beta}\hat{\gamma}, \hat{\alpha}^4\}$.

Es claro que $\mathbb{K}(\tilde{Q}, \tilde{I}_2) \ncong \mathbb{K}(Q, I_1)$, ya que los carcajes son distintos. Tenemos por lo tanto dos álgebras isomorfas cuyas cubiertas no lo son.

Capítulo 3

Representaciones de un carcaj y su cubierta

En este capítulo empezaremos a ver cómo el tipo de representación de un carcaj está relacionado con el de su cubierta.

3.1. Funtores que relacionan un carcaj con su cubierta

Definición 3.1.1. Dado un carcaj (Δ, J) con relaciones, denotamos $l - mod(\Delta, J)$ a las representaciones V de (Δ, J) con $V(x)$ de dimensión finita para todo $x \in \Delta_0$. De esta manera, $mod(\Delta, J)$ son las representaciones en $l - mod(\Delta, J)$ con soporte finito.

A lo largo de la sección quedará fijo $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \to (Q, I)$ morfismo cubriente definido por la acción de G.
Dada $V \in Mod(\bar{Q}, \bar{I})$, llamaremos $V^g \in Mod(\bar{Q}, \bar{I})$ a la representación que verifica $V^g(x) = V(gx)$ para $x \in \bar{Q}_0$ y $V^g(\alpha) = V(g\alpha)$ para $\alpha \in \bar{Q}_1$. Si $f : V \to W$ es un morfismo de representaciones, se define $f^g : V^g \to W^g$ como $f^g(x) = f(gx)$, para todo $x \in Q_0$.

Definición 3.1.2. Definimos la categoría $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$ como:

1. Los objetos son de la forma $(V, (\phi_g)_{g\in G})$, donde $V \in l{-}mod(\bar{Q}, \bar{I})$, $\phi_g : V \to V^g$ es morfismo en $l - mod$, ϕ_1 es la identidad y $\phi_h^k \phi_k = \phi_{hk}$ para todo $h, k \in G$.
2. $f : (V, (\phi_g)) \to (W, (\psi_g))$ es morfismo en la categoría si $f : V \to W$ es de representaciones y para todo $g \in G, x \in \bar{Q}_0$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V(x) \arrow[r, "f(x)"] \arrow[d, "\phi_g(x)"] & W(x) \arrow[d, "\psi_g(x)"] \\ V^g(x) \arrow[r, "f^g(x)"] & W^g(x) \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.3. Debido a las propiedades que cumplen, es fácil verificar que ϕ_g es invertible para todo $g \in G$ y que $\phi_g^{-1} = (\phi_{g^{-1}})^g$.

La idea de esta categoría recién definida es intentar encontrar una relación entre las representaciones de un carcaj con relaciones y un cubrimiento del mismo. El siguiente teorema nos orienta en dicho sentido.

Teorema 3.1.4. *Las categorías $l - mod(Q, I)$ y $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$ son equivalentes.*

Demostración: Definimos $T : l - mod(Q, I) \to mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$ el funtor que lleva $V \in l - mod(Q, I)$ en $T(V)$, con $T(V)(x) = V(\pi(x))$ para $x \in \bar{Q}_0$ y $T(V)(\alpha) = V(\pi(\alpha))$ para $\alpha \in \bar{Q}_1$. Si $g \in G, x \in \bar{Q}_0$, tenemos $T(V)^g(x) = T(V)(gx) = V(\pi(gx)) = V(\pi(x)) = T(V)(x)$, y podemos entonces definir los ϕ_g como identidades.
Sea $\rho \in \bar{I}(x, y)$, entonces $\pi(\rho) \in I(\pi(x), \pi(y))$. Si $V \in l - mod(Q, I)$, tenemos que $T(V)(\rho) = V(\pi(\rho)) = 0$ y por lo tanto $T(V) \in mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$.
Si $f : V \to W$ es morfismo en $l - mod(Q, I)$, $T(f) : T(V) \to T(W)$ se define para cada $x \in \bar{Q}_0$ como $T(f)(x) = f(\pi(x))$. Dado que los ϕ_g están definidos como la identidad, es claro que $T(f)$ es morfismo en mod^G. Es muy sencillo verificar que $T(id_V) = id_{T(V)}$ y que $T(fg) = T(f)T(g)$.

Veamos primero que T es fiel. Sean $f, g \in Hom(V, W)$ en $l - mod(Q, I)$, tales que $T(f) = T(g)$. Dado $x \in Q_0$, elijo $\tilde{x} \in \bar{Q}_0$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$. Tenemos que $f(x) = f(\pi(\tilde{x})) = Tf(\tilde{x}) = Tg(\tilde{x}) = g(\pi(\tilde{x})) = g(x)$, así que $f = g$.

Veamos ahora que T es pleno. Si $f \in Hom(T(V), T(W))$ en $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$, definimos $f' \in Hom(V, W)$ como $f'(x) = f(\bar{x})$ para cualquier $\bar{x}$ tal que $\pi(\bar{x}) = x$. Si tomamos $\bar{y} \in \bar{Q}_0$ tal que $\pi(\bar{y}) = x$, entonces $\pi(\bar{y}) = \pi(\bar{x})$ y como π está definido por la acción de G, existe $g \in G$ tal que $g\bar{x} = \bar{y}$ y tenemos por definición el diagrama que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T(V)(\bar{x}) \arrow[r, "f(\bar{x})"] \arrow[d, "id=\phi_g"] & T(W)(\bar{x}) \arrow[d, "\psi_g=id"] \\
T(V)^g(\bar{x}) = T(V)(\bar{y}) \arrow[r, "f(\bar{y})"] & T(W)(\bar{y})
\end{tikzcd}$$

O sea, $f(\bar{y}) = f(\bar{x})$, por lo tanto f' está bien definida y $T(f')(\bar{x}) = f'(\pi(\bar{x})) = f(\bar{x})$, o sea $T(f') = f$.

Ver que T es denso lleva un poco más.
Sea $(V, (\phi_g))$ objeto en $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$. Definiremos $V' \in mod(Q, I)$ tal que $T(V') \cong (V, (\phi_g))$. Para cada $x \in Q_0$ fijamos $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ tal que $\pi(\bar{x}) = x$ y definimos $V'(x) = V(\bar{x})$.

Si tenemos $x_1 \xrightarrow{\alpha} x_2$ en Q, como $\pi(\bar{x}_1) = x_1$, entonces existe y es única la flecha $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{x}'_2$ en $\bar{Q}$ con $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$. Como $\pi(\bar{x}'_2) = \pi(\bar{x}_2)$ y G es admisible, existe y es único $g_\alpha \in G$ tal que $g_\alpha(\bar{x}'_2) = \bar{x}_2$. Definimos $V(\bar{x}_1) \xrightarrow{V'(\alpha)} V(\bar{x}_2)$ como $V'(\alpha) = \phi_{g_\alpha}(\bar{x}'_2)V(\bar{\alpha})$.
Veamos primero que V' satisface I. Dado $u : x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} x_3 \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_n$ camino en Q, tenemos $g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, ...$ tales que $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} \bar{x}'_2 \overset{g_{\alpha_1}}{\longmapsto} \bar{x}_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}_2} \bar{x}'_3 \overset{g_{\alpha_2}}{\longmapsto} \bar{x}_3 \dots$. Por la definición de V', se verifica $V'(\alpha_2\alpha_1) = \phi_{g_{\alpha_2}}(\bar{x}'_3)V(\bar{\alpha}_2)\phi_{g_{\alpha_1}}(\bar{x}'_2)V(\bar{\alpha}_1)$.

El único levantamiento de $\alpha_2\alpha_1$ que empieza en $\bar{x}_1$ es $\bar{x}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} \bar{x}'_2 \xrightarrow{g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2)} g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}'_3)$.

$$\begin{tikzcd}
V(\bar{x}_2) \arrow[rr, "\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2)"] \arrow[dd, "V(\bar{\alpha}_2)"'] & & V^{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2) = V(\bar{x}'_2) \arrow[dd, "V^{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{\alpha}_2)"] \\
& V(\bar{x}_3) \arrow[dr, "\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}g_{\alpha_2}^{-1}}(\bar{x}_3)"] & \\
V(\bar{x}'_3) \arrow[ur, "\phi_{g_{\alpha_2}}(\bar{x}'_3)"] \arrow[rr, "\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}'_3)"] & & V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}'_3))
\end{tikzcd}$$

En el diagrama de arriba, el triángulo conmuta por definición de $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$ y el cuadrado por ser $\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}}$ morfismo de representaciones. Por lo tanto:

$$V'(\alpha_2\alpha_1) = \phi_{g_{\alpha_2}}(\bar{x}'_3)V(\bar{\alpha}_2)\phi_{g_{\alpha_1}}(\bar{x}'_2)V(\bar{\alpha}_1) =$$

(el diagrama de arriba conmuta)

$$(\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}g_{\alpha_2}^{-1}})^{-1}(\bar{x}_3)V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2))\phi_{g_{\alpha_1}^{-1}}(\bar{x}_2)\phi_{g_{\alpha_1}}(\bar{x}'_2)V(\bar{\alpha}_1) =$$

(debido a la propiedad que tienen por definición los ϕ_g)

$$\phi_{g_{\alpha_2}g_{\alpha_1}}(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{x}'_3))V(g_{\alpha_1}^{-1}(\bar{\alpha}_2)\bar{\alpha}_1)$$

De igual manera (por inducción) vemos que si $\bar{u}$ es el único levantamiento de u que empieza en $\bar{x}_1$ (y termina en $\bar{y}'_n$), entonces $V'(u) = \phi_g(\bar{y}'_n)V(\bar{u})$, donde $g\bar{y}'_n = \bar{x}_n$.
Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in \bar{I}(x, y)$ es relación mínima o cero, sabemos por 2.1.14 que existe una relación $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in \bar{I}(\bar{x}, \bar{y}')$ de forma que v_i es el único levantamiento de u_i que empieza en $\bar{x}$. Sea $h \in G$ tal que $h(\bar{y}') = \bar{y}$, entonces $V'(u_i) = \phi_h(\bar{y}')V(v_i)$. Así que $V'(\sum_i \lambda_i u_i) = \sum_i \lambda_i V'(u_i) = \sum_i \lambda_i \phi_h(\bar{y}')V(v_i) = \phi_h(\bar{y}')V(\sum_i \lambda_i v_i)$, y esto es 0 porque $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$. Como el ideal I está generado por relaciones mínimas y cero, concluimos que $V' \in l - mod(Q, I)$.
Falta ver que $T(V') \cong V$. Dado $\bar{x}' \in \bar{Q}_0$, $\pi(\bar{x}') = x = \pi(\bar{x})$, entonces existe y es único $g_{\bar{x}'} \in G$ con $g_{\bar{x}'}(\bar{x}) = \bar{x}'$. Definimos $f(\bar{x}') = \phi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{x}) : V(\bar{x}) = V'(x) = V'(\pi\bar{x}') = T(V')(\bar{x}') \to V^{g_{\bar{x}'}}(\bar{x}) = V(\bar{x}')$.

Probaremos que f es isomorfismo en $l-mod(\bar{Q},\bar{I})$. Dado $\bar{x}' \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \bar{y}'$ en $\bar{Q}$. $\pi(\bar{\alpha}')=\alpha$. Tomemos $\bar{x} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{y}''$ el único levantamiento de α que comienza en $\bar{x}$.

$$\begin{tikzcd}
T(V')(\bar{x}')=V(\bar{x}) \arrow[rrr, "f(\bar{x}')=\phi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{x})"] \arrow[dr, "V(\bar{\alpha})"] \arrow[dd, "T(V')(\bar{\alpha}')"'] & & & V(\bar{x}')=V^{g_{\bar{x}'}}(\bar{x}) \arrow[dl, "V^{g_{\bar{x}'}}(\bar{\alpha})"'] \arrow[dd, "V(\bar{\alpha}')"] \\
& V(\bar{y}'') \arrow[r, "\phi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{y}'')"] \arrow[dl, "\phi_{g_\alpha}(\bar{y}'')"'] & V^{g_{\bar{x}'}}(\bar{y}'')=V(\bar{y}') \arrow[dr, equal] & \\
T(V')(\bar{y}')=V(\bar{y}) \arrow[rrr, "f(\bar{y}')=\phi_{g_{\bar{y}'}}(\bar{y})"'] & & & V(\bar{y}')
\end{tikzcd}$$

Veamos que todo en el diagrama conmuta:
$\diamond$ $T(V')(\bar{\alpha}')=V'(\pi\bar{\alpha}')=V'(\alpha)=\phi_{g_\alpha}(\bar{y}'')V(\bar{\alpha})$ (triángulo izquierdo);
$\diamond$ Como $\bar{x}' \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \bar{y}'$, $\bar{x}'=g_{\bar{x}'}(\bar{x}) \xrightarrow{g_{\bar{x}'}(\bar{\alpha})} g_{\bar{x}'}(\bar{y}'')$ son dos levantamientos de α que empiezan en $\bar{x}'$, entonces $\bar{\alpha}'=g_{\bar{x}'}(\bar{\alpha})$, $\bar{y}'=g_{\bar{x}'}(\bar{y}'')$ (triángulo derecho);
$\diamond$ Se tiene que $g_{\bar{y}'}g_\alpha(\bar{y}'')=g_{\bar{y}'}(\bar{y})=\bar{y}'=g_{\bar{x}'}(\bar{y}'')$, entonces, por ser G admisible, $g_{\bar{y}'}g_\alpha=g_{\bar{x}'}$. De esta manera tenemos $\phi_{g_{\bar{y}'}}(\bar{y})\phi_{g_\alpha}(\bar{y}'')=\phi_{g_{\bar{y}'}g_\alpha}=\phi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{y}'')$ (trapecio inferior);
$\diamond$ el trapecio superior conmuta por ser $\phi_{g_{\bar{x}'}}$ morfismo en $l-mod(\bar{Q},\bar{I})$.
Al conmutar el cuadrado grande, tenemos que f es morfismo de representaciones de $(\bar{Q},\bar{I})$.
Para ver que f es morfismo en $mod^G(\bar{Q},\bar{I})$, hay que ver que el siguiente diagrama conmuta para cada $\bar{x}'\in\bar{Q}_0, g\in G$:

$$\begin{tikzcd}
V(\bar{x})=T(V')(\bar{x}') \arrow[r, "f(\bar{x}')=\phi_{g_{\bar{x}}}(\bar{x}')"] \arrow[d, equal] & V(\bar{x}') \arrow[d, "\phi_g(\bar{x}')"] \\
V(\bar{x})=T(V')^g(\bar{x}') \arrow[r, "f(g\bar{x}')=\phi_{gg_{\bar{x}'}}(\bar{x})"] & V^g(\bar{x}')
\end{tikzcd}$$

Como $g_{\bar{x}'}(\bar{x})=\bar{x}'$, entonces $gg_{\bar{x}'}(\bar{x})=g(\bar{x}')$. Pero por otro lado $\phi_g(\bar{x}')\phi_{g_{\bar{x}'}}(\bar{x})=\phi_{gg_{\bar{x}'}}(\bar{x})$, o sea que el cuadrado conmuta.
Para cada $\bar{x}'\in\bar{Q}_0$, $f(\bar{x}')$ es isomorfismo de espacios vectoriales (por la observación previa al teorema). Es fácil verficar que $f^{-1}:V\to T(V')$ definido como $f^{-1}(\bar{x}')=(f(\bar{x}'))^{-1}$ es también morfismo en $mod^G(\bar{Q},\bar{I})$ y es el inverso de f. Concluimos que $T(V')\cong V$ en $mod^G(\bar{Q},\bar{I})$. $\bullet$

Queremos ver representaciones de $mod(\bar{Q},\bar{I})$ como objetos de $mod(Q,I)$. Para eso definimos el funtor $\Sigma: mod(\bar{Q},\bar{I})\to mod^G(\bar{Q},\bar{I})$ como $\Sigma V=(\bigoplus_{g\in G}V^g, id)$ para cada $V\in mod(\bar{Q},\bar{I})$, $\Sigma f=\bigoplus_{g\in G}f^g$ para f morfismo en $mod(\bar{Q},\bar{I})$.
Primero observemos que Σ está bien definido. Si $x\in Q_0$, entonces $gx=hx$ con $h,g\in G$ implica (por ser G admisible) $h=g$ y por lo tanto en el conjunto $\{gx:g\in G\}$ no se repiten elementos. Si $V\in mod(\bar{Q},\bar{I})$, entonces $dim_{\mathbb{K}}\Sigma V(x)=\sum_{g\in G}dim_{\mathbb{K}}V(gx)$, o sea finita por tener V soporte finito. Además, tenemos que $\Sigma(V)$ y $\Sigma(V)^g$ son la

misma representación si $g \in G$, podemos entonces definir los ϕ_g como identidades y por tanto $\Sigma V \in mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$.

Proposición 3.1.5. *Si $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$, entonces $T^{-1}\Sigma(V) \in mod(Q, I)$.*

Demostración: Sea $x \in Q_0$ tal que $T^{-1}\Sigma(V)(x) \neq 0$, tomemos $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ con $\pi(\bar{x}) = x$. Entonces $T^{-1}\Sigma(V)(x) = T^{-1}\Sigma(V)(\pi(\bar{x})) = \Sigma(V)(\bar{x}) = \bigoplus_{g \in G} V^g(\bar{x}) \neq 0$. Por lo tanto $\bar{x} = g\bar{y}$ para algún $g \in G$ y algún $\bar{y}$ en el soporte de V. O sea que $x = \pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y})$.
Concluimos entonces que cualquier punto que esté en el soporte de $T^{-1}\Sigma(V)$ es la imagen por π de algún punto del soporte de V. Como $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$, entonces su soporte es finito y en consecuencia también lo es el soporte de $T^{-1}\Sigma(V)$. •

Tenemos ahora una manera de mirar objetos de $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ dentro de $mod(Q, I)$. Si componemos Σ y T^{-1} tenemos un funtor de $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ en $mod(Q, I)$, que además es aditivo. Esto es muy importante para poder sacar conclusiones acerca del tipo de representación de (Q, I) a partir de $(\bar{Q}, \bar{I})$ y viceversa.

Una primer pregunta que uno se hace es qué ocurre con los indescomponibles de $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ cuando le aplicamos $T^{-1}\Sigma$. Lo primero que a uno se lo podría ocurrir es que $T^{-1}\Sigma(V)$ es indescomponible en $mod(Q, I)$ si V lo es en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$. Esto no es cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.6. Sea $\bar{Q}$ el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[r] & c_1 & \\ a_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & a_2 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & c_2 & b_2 \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

y $Q =$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr] & \\ a \arrow[u] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

El morfismo $\pi : \bar{Q} \to Q$ definido como $\pi(a_i) = a$, $\pi(b_i) = b$ y $\pi(c_i) = c$ es cubrimiento definido por el grupo $G = \{1, g\}$, con $g(a_1) = a_2$, $g(b_1) = b_2$ y $g(c_1) = c_2$ y tal que $g^2 = 1$.
Sea V la siguiente representación de $\bar{Q}$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K} \arrow[r, "1"] & \mathbb{K} & \\
\mathbb{K} \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & & \mathbb{K} \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
& \mathbb{K} & \mathbb{K} \arrow[l, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Si hacemos $T^{-1}\Sigma(V)$ nos queda la siguiente representación de Q:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^2 \arrow[dr, "Id"] & \\
\mathbb{K}^2 \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"'] & \mathbb{K}^2
\end{tikzcd}$$

que puede descomponerse como suma directa de las dos representaciones de abajo:

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \arrow[dr, "Id"] & \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "Id"] & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \arrow[dr, "Id"] & \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "-Id"] & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

Una respuesta un poco más general a la pregunta que nos formulamos arriba se da en la primera sección del capítulo siguiente.

3.2. Descomposición en inescindibles

A lo largo de esta sección, quedará fijo un carcaj con relaciones (Q, I). El objetivo es probar que todo módulo se puede escribir como suma directa de indescomponibles, y mostrar la unicidad en ciertos casos.

Lema 3.2.1. $\diamond$ *Si $A \in Mod(Q, I)$ es tal que $Hom(A, A)$ es anillo local, entonces A es indescomponible.*
$\diamond$ *Si $A \in mod(Q, I)$ es indescomponible, entonces $Hom(A, A)$ es local.*

Demostración:
$\diamond$ Si $A = B \oplus C$, tenemos $p : A \to B$ la proyección y $q : B \to A$ la inclusión. Definimos $f := qp \in Hom(A, A)$. Tenemos $Id_A = f + (Id_A - f)$, por ser A local, f ó $Id_A - f$ es invertible. Pero $f^2 = f$, $(Id_A - f)^2 = Id_A 1 - f$. Si f es invertible, entonces $f = Id$, o sea que $B = A$; si $Id - f$ es invertible, entonces $f = 0$ y por lo tanto $B = 0$.

$\diamond$ Sea ζ endomorfismo de A. $\zeta^k(A) \subset \zeta^{k-1}(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, al estar A en $mod(Q, I)$ esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta^n(A) = \zeta^h(A)$ para todo $h > n$. No es difícil ver (utilizando argumentos con la dimensión de cada $A(x)$) que esto implica $A = \zeta^n(A) \oplus Ker(\zeta^n)$. Al ser A indescomponible, debe ocurrir que $Ker(\zeta^n) = 0$ o que $\zeta^n(A) = 0$. En conclusión, cualquier endomorfismo de A es invertible o nilpotente.
La composición de cualquier endomorfismo con uno no invertible (en cualquier orden), nos da no invertible y por ende nilpotente. Además, si ψ es nilpotente, entonces $Id - \psi$ es invertible (con inversa $Id + \psi + \psi^2 + ...$).
Sean φ, φ' no invertibles. Si $\varphi + \varphi'$ fuera invertible, tendríamos η tal que $Id = \eta\varphi + \eta\varphi'$, lo que es imposible, porque $\eta\varphi' = Id - \eta\varphi$ sería invertible (por ser la identidad menos un nilpotente) y nilpotente (por ser composición de un no invertible con otro endomorfismo). $\bullet$

Observación 3.2.2. Si Q es un carcaj con relaciones, se tiene que Q_0 es numerable: tomamos $x \in Q_0$ y definimos $A_n = \{y \in Q_0 /$ existe un camino de largo a lo sumo n no necesariamente orientado desde x hasta $y\}$. Entonces A_n es finito por ser Q localmente finito y al ser Q conexo, $Q_0 = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Al no haber flechas múltiples, Q_1 también es numerable.

Lema 3.2.3. *Dado $V \in l - mod(Q, I)$, existen $V_1, ..., V_n, ... \in l - mod(Q, I)$ indescomponibles, de forma que $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i$.*

Demostración: Gracias a la observación anterior, tenemos $Q_0 = \{x_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$. Escribimos $V = V_1 \oplus ... \oplus V_{r_0}$ de forma que V_i no puede descomponerse en suma directa $V_i = W_i \oplus Z_i$, con $W_i(x_1) \neq 0, Z_i(x_1) \neq 0$. La descomposición es finita porque $V(x_1) = V_1(x_1) \oplus ... \oplus V_{r_0}(x_1)$, con $V_i(x_1) \neq 0$, y $V(x_1)$ es de dimensión finita.
Repetimos el procedimiento para cada $i = 1, ..., r_0$, escribimos $V_i = V_{(i,1)} \oplus ... \oplus V_{(i,r_i)}$ tal que $V_{(i,j)}$ no puede descomponerse en suma directa $V_{(i,j)} = W \oplus Z$, con x_1 ó $x_2 \in sop(W) \cap sop(Z)$. Así obtenemos $V = V_{(1,1)} \oplus ... V_{(1,r_1)} \oplus ... \oplus V_{(r_0,1)} \oplus ... \oplus V_{(r_0,r_{r_0})}$, tal que $V_{(i,k)}$ no se descompone en $W \oplus Z$, con x_1 ó $x_2 \in sop(W) \cap sop(Z)$
Por inducción, podemos, para todo $n \in \mathbb{N}$, escribir $V = \bigoplus_{j \in I_n} V_j$, con $I_n \subset \mathbb{N}^n$ finito y de forma que para todo $j \in I_n$, si $V_j = W \oplus Z$ entonces $sop(W) \cap sop(Z) \cap \{x_1, ..., x_n\} = \emptyset$. Vale observar que por construcción $V_{(i_1,...,i_n)}$ es sumando de $V_{(i_1,...,i_{n-1})}$.
Definimos entonces para algunas sucesiones $(i_j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $V_{(i_j)}(x_k) = V_{(i_1,...,i_k)}(x_k)$ para $x_k \in Q_0$ y $V_{(i_j)}(\alpha) = V_{(i_1,...,i_k)}(\alpha)$ para $\alpha : x_a \to x_b \in Q_1$, con $k = máx\{a, b\}$. Debido a la forma en que se construyeron, $V_{(i_1,...,i_r)}(x_k) = V_{(i_1,...,i_k)}(x_k)$ y $V_{(i_1,...,i_r)}(\alpha) = V_{(i_1,...,i_k)}(\alpha)$ para todo $r \geq k$.
$\diamond$ $V = \bigoplus_{(a_n) \in H} V_{(a_n)}$, con H el subconjunto de las sucesiones de naturales para las cuales está definido $V_{(a_n)}$:
Dado $x_k \in Q_0$, por construcción $V(x_k) = \displaystyle\bigoplus_{(a_1,...,a_k) \in I_k} V_{(a_1,...,a_k)}(x_k) = \bigoplus_{(a_n) \in I} V_{(a_n)}(x_k)$.
De igual forma, para todo $\alpha \in Q_1$, $V(\alpha) = \displaystyle\bigoplus_{(a_n) \in H} V_{(a_n)}(\alpha)$.

$\diamond$ $V_{(a_n)}$ es indescomponible para toda $(a_n) \in H$:
Tomemos $(b_n) \in H$. Si $V_{(b_n)}$ no fuera indescomponible, tendríamos $V_{(b_n)} = W \oplus Z$, con $W \neq 0$, $Z \neq 0$. Entonces existirían $x_k, x_h \in Q_0$ tal que $Z(x_k) \neq 0$, $W(x_h) \neq 0$, con $k \geq h$. Tenemos que $V_{(b_1,...,b_k)} = \bigoplus_{(i_n)\in J} V_{(i_n)}$, con $J = \{(a_n) \in H / a_i = b_i$ para todo $i = 1, ..., k\}$. O sea que $V_{(b_1,...,b_k)} = V_{(b_n)} \oplus \bigoplus_{(i_n)\in J\setminus(b_n)} V_{(i_n)} = W \oplus (Z \oplus \bigoplus_{(i_n)\in J\setminus(b_n)} V_{(i_n)}) = W \oplus R$, con $W(x_h) \neq 0$, $R(x_k) \neq 0$, lo que contradice la construcción de $V_{b_1,...,b_k}$. $\bullet$
De esta manera hemos mostrado que en $l - mod(Q, I)$ todo objeto se descompone como suma directa de indescomponibles. Vamos ahora en busca de la unicidad de dicha descomposición.

Lema 3.2.4. *Sea* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ *con* $A_i \in Mod(Q, I)$ *tal que* $Hom(A_i, A_i)$ *es un anillo local para todo* $i \in I$. *Sean* $f, g : A \to A$ *tales que* $f + g = 1_A$, $E = \{i_1, ..., i_n\} \subset I$. *Entonces existen* $B_1, ..., B_n \subset A$, *isomorfismos* $h_j : A_{i_j} \to B_j$ *tales que para cada* $j \in \{1, ..., n\}$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_{i_j} \arrow[r, "h_j"] \arrow[d, "\iota"] & B_j \arrow[d, "inc"] \\ A \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta para $h = f$ *o* $h = g$.
Además, $A = B_1 \oplus ... \oplus B_n \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus E} A_i$.

Demostración: Si llamamos $p_i : A \to A_i$ a la proyección y $q_i : A_i \to A$ a la inclusión, tenemos que para todo $i \in I$ $p_i f q_i + p_i g q_i = 1_{A_i}$. Por ser $Hom(A_i, A_i)$ local, al menos uno de los dos mapas debe ser invertible.
Tomemos i_1 y supongamos $p_{i_1} f q_{i_1}$ es isomorfismo, con inversa a_{i_1}. El mapa $f q_{i_1} : A_{i_1} \to A$ es monomorfismo con imagen B_1. Llamemos $h_1 : A_{i_1} \to B_1$ al morfismo tal que $f q_{i_1} = q'_1 h_1$, donde $q'_1 : B_1 \to A$ es la inclusión, h_1 es isomorfismo (es la imagen en sentido categórico).
El mapa $q'_1 h_1 a_{i_1} p_{i_1} : A \to A$ verifica $(q'_1 h_1 a_{i_1} p_{i_1})^2 = q'_1 h_1 a_{i_1} p_{i_1}$, con $Im(q'_1 h_1 a_{i_1} p_{i_1}) = Im(q'_1 h_1) = B_1$ y $Ker(q'_1 h_1 a_{i_1} p_{i_1}) = Ker(p_{i_1}) = \bigoplus_{i\neq i_1} A_i$. Por lo tanto, $A = B_1 \oplus \bigoplus_{i\neq i_1} A_i$.
Tomando $\bigoplus_{i\neq i_1} A_i$, podemos reemplazar A_{i_2} por B_2. Después de n pasos, tenemos probado el lema. $\bullet$

Teorema 3.2.5. ***(Krull-Remak-Schmidt-Azumaya)*** *Sea* $A \in Mod(Q, I)$ *tal que* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, *con* $Hom(A_i, A_i)$ *anillos locales y* $A = \bigoplus_{j\in J} B_j$, *con* B_j *indescomponibles. Entonces existe una biyección* $\phi : I \to J$ *tal que para todo* $i \in I$ *se tiene* $A_i \cong B_{\phi(i)}$.

Demostración: Las inclusiones y proyecciones de A_i se denotarán q_i y p_i respectivamente, las de B_j las llamaremos q'_j y p'_j. Mostraremos primero que para cada $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $B_j \cong A_i$. Una vez probado esto, tendremos que los anillos de endomorfismos de B_j también son locales y las hipótesis para los B_j y los A_i serán las mismas.
Tomemos $j \in J$. Debe existir un subconjunto finito $E = \{i_1, ..., i_n\} \subset I$ de forma

que $A_E := A_{i_1} \oplus ... \oplus A_{i_n}$ se corta en forma no trivial con B_j (tomamos $b \in B_j$ no nulo y se escribe como suma de finitos a_{i_j}, con $a_{i_j} \in A_{i_j}$).
Sean $f = q'_j p'_j$, $g = 1 - f$. Entonces $f + g = 1$ y por el lema anterior para cada $k = 1, ..., n$ existen $C_k \subset A$ e isomorfismos $h_k : A_{i_k} \to C_k$, inducidos por f o por g. Supongamos que están todos inducidos por g. Sea $C_E = C_1 \oplus ... \oplus C_k$. Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_E \cap B_j \arrow[r] \arrow[d] & A_E \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & C_E \arrow[d] \\ B_j \arrow[r, "q'_j"] & A \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

Dado que $gq'_j = 0$ y $A_E \cap B_j \to A_E \cong C_E \to A$ es monomorfismo, se llega a una contradicción con $A_E \cap B_j \neq 0$. Por lo tanto, existe al menos un $i_0 \in E$ tal que el cuadrado de abajo conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_{i_0} \arrow[r, "h_{k_0}"] \arrow[d] & C_{k_0} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Obtenemos como consecuencia que $C_{k_0} \subset Im(f) = B_j$. Como C_{k_0} es sumando directo de A, también será sumando directo de B_j. Al ser B_j indescomponible, se tiene $C_{k_0} = B_j$. Además, $q'_j h_{k_0} = f q_{i_0} = q'_j p'_j q_{i_0}$, y al ser q'_j inyectivo se concluye $h_{k_0} = p'_j q_{i_0}$.

Tomemos ahora $A_{i_0} \cong B_{j_0}$. Vamos a comparar la cantidad $|\alpha|$ de A_i isomorfos a A_{i_0} con la cantidad $|\beta|$ de los B_j isomorfos a B_{j_0}ˇ Como tenemos, luego de lo probado anteriormente, que las hipótesis sobre los A_i y los B_j son las mismas, basta probar $|\alpha| \leq |\beta|$.

Supongamos primero que $\beta = \{j_1, \ldots, j_n\}$ es finito.
Por lo hecho antes, existe para $j_1 \in \beta$ algún $i_1 \in \alpha$ tal que $q'_{j_1} p'_{j_1}$ induce un isomorfismo $A_{i_1} \cong B_{j_1}$. Además, el lema anterior nos dice que también tenemos $B_{j_1} \oplus \bigoplus_{j \neq j_1} B_j = A_{i_1} \oplus \bigoplus_{j \neq j_1} B_j$. Si comparamos la segunda suma directa con $\bigoplus_{i \in I} A_i$, aplicando el mismo procedimiento, tenemos, luego de n pasos:
$A = B_{j_1} \oplus \ldots \oplus B_{j_n} \oplus \bigoplus_{j \neq j_1 \ldots j_n} B_j = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_n} \oplus \bigoplus_{j \neq j_1 \ldots j_n} B_j$.
Si obsevamos que, aunque las proyecciones de A_i y B_j cambian, las inclusiones permanecen iguales, concluimos que $i_1, \ldots, i_n$ son todos distintos y están todos en α. Por lo tanto, concluimos que $|\alpha| \geq |\beta|$.

Ahora supongamos que β es infinito.
Sea $E \subset J$ un subconjunto finito, $j \in \beta$, $j \notin E$. Supongamos $A_i \cong B_j$ por

el isomorfismo inducido por $q'_j p'_j$. Entonces el siguiente diagrama conmuta, donde $B_E = \oplus_{j\in E} B_j$:

$$\begin{tikzcd}
A_i \cap B_E \arrow[r] \arrow[d] & A_i \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & B_j \arrow[d] \\
B_E \arrow[r] & A \arrow[r, "q'_j p'_j"] & A
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $A_i \cap B_E = 0$, porque la composición de las dos flechas de abajo nos da 0, mientras que las de arriba nos dan un monomorfismo.
Por otro lado, dado $i \in \alpha$, existe $E \subset J$ subconjunto finito con $A_i \cap B_E \neq 0$ (esto es porque A es suma directa de los B_i, así que basta tomar $x \in A_i, x \neq 0$, este se escribirá como suma de finitos $b_i \in B_i$). Por lo mostrado arriba, si $j \in J$ induce un isomorfismo $A_i \cong B_j$ por $q'_j p'_j$ entonces debe estar en ese E. Así que sólo habrá finitos de tales j. Llamemos a ese número $E(i)$. Además, para cada $j \in \beta$ podemos construirnos algún i. De esta manera concluimos que $\cup_{i\in\alpha} E(i) = \beta$, lo que prueba que $|\alpha| \geq |\beta|$. •

3.3. Un primer resultado

Con las herramientas presentadas hasta ahora, ya estamos en condiciones de probar el primer resultado que relaciona el tipo de representación de un carcaj y su cubierta.

Teorema 3.3.1. *Si $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \to (Q, I)$ es cubriente y (Q, I) es localmente de representación finita, entonces $(\bar{Q}, \bar{I})$ también lo es.*

Demostración: Sean $V_1, \ldots V_n \in mod(Q, I)$ la lista de todos los indescomponibles no isomorfos que verifican las siguientes condiciones: $V_i(\pi x) \neq 0$ y $TV_i \cong \bigoplus_{h\in H_i} W_i^h$ para algún $W_i \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible y algún subconjunto $H_i \subset G$. Sea A el conjunto de los W_i^g que aparecen tales que $W_i^g(x) \neq 0$. Observemos que A es finito: si $W_i^g(x) \neq 0$, entonces gx está en el soporte de W_i y como el soporte de cada W_i es finito y G es admisible, sólo hay finitos $g \in G$ que satisfacen que gx caiga en el soporte de W_i.
Probaremos que dado $W \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible con $W(x) \neq 0$, existe un elemento de A isomorfo a él.

Sea $W \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible con $W(x) \neq 0$. Por 3.1.4 sabemos que $T^{-1}\Sigma(W) \in mod(Q, I)$, por tanto existen $Z_1, ..., Z_k \in mod(Q, I)$ indescomponibles con $T^{-1}\Sigma(W) = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_k$. Aplicando T obtenemos $\bigoplus_{g\in G} W^g = TZ_1 \oplus ... \oplus TZ_k$. Descomponiendo cada TZ_i, obtenemos una descomposición de $\bigoplus_{g\in G} W^g$ en suma de indescomponibles. A su vez, los W^g están en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ y son indescomponibles, así que 3.2.1 nos muestra que $End(W^g)$ es local. Por el teorema 3.2.5, al tener un objeto escrito por un lado como suma de indescomponibles y por otro lado como suma de objetos con anillos de endomorfismo local, ambas descomposiciones son la misma. De esta forma, W es sumando de algún TZ_j. Para ese j tenemos $TZ_j = \bigoplus_{h\in H} W^h$ con $H \subset G$ y $Z_j(\pi x) = TZ_j(x) \neq 0$. Entonces tenemos que $Z_j \cong V_i$ y por lo tanto $\bigoplus_{h\in H} W^h \cong TZ_j \cong TV_i \cong \bigoplus_{h\in H_i} W_i^h$. Usando nuevamente la unicidad de la descomposición en suma directa obtenemos que $W \cong W_i^h$ para algún $h \in G$. Pero $W_i^h(x) \cong W(x) \neq 0$, así que $W_i^h \in A$. •

Capítulo 4

Tipo de representación es invariante por levantados

En este capítulo mostraremos el recíproco del último teorema del capítulo anterior. Para ello será necesario introducir otras construcciones y algunos resultados.

Proposición 4.0.2. *Sea (Δ, J) un carcaj con relaciones, $V \in mod(\Delta, J)$, g un automorfismo de (Δ, J). Entonces:*
(1) Si V es indescomponible, V^g también lo es.
(2) Si V es proyectivo, V^g también lo es.
(3) Si V es inyectivo, V^g también lo es.

Demostración: (1) Si $V^g = U \oplus W$, entonces es fácil verificar que $V = U^{g^{-1}} \oplus W^{g^{-1}}$. Además, $U = 0$ si y solo si $U^g = 0$, por lo que se concluye que V^g es indescomponible.
(2) Supongamos $f : X \to Y$ morfismo de representaciones sobreyectivo, $h : V^g \to Y$ morfismo de representaciones. Esto genera los morfismos $f^{g^{-1}} : X^{g^{-1}} \to Y^{g^{-1}}$ y $h^{g^{-1}} : V \to Y^{g^{-1}}$, el primero de ellos sobreyectivo. Al ser V proyectivo, existe $r : V \to X^{g^{-1}}$ morfismo de representaciones tal que $f^{g^{-1}} r = h^{g^{-1}}$; por lo tanto $f r^g = h$. •

El siguiente lema será utilizado en la próxima prueba. Para una demostración del mismo, ver [4].

Lema 4.0.3. ***(Harada-Sai)***
Sean $M_1, ..., M_t$ módulos indescomponibles con dimensión menor o igual que b. Sean $f_i : M_i \to M_{i+1}$ morfismos.
Si ningún f_i es isomorfismo y $t \geq 2^b + 1$ entonces $f_t \dots f_1 = 0$.

Teorema 4.0.4. *Sea (Δ, J) un carcaj con relaciones localmente de representación finita. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de (Δ, J) es conexo.*

Demostración: Mostraremos primero que cualquier $V \in mod(\Delta, J)$ indescomponible está conectado en el carcaj de Auslander-Reiten con algún proyectivo. Luego mostraremos que todos los proyectivos indescomponibles están en la misma componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten, lo que concluye la prueba.

Sea $V \in mod(\Delta, J)$ indescomponible no proyectivo. Por 1.2.20 sabemos que existen W proyectivo y $f : W \to V$ morfismo sobreyectivo. Si escribimos W como suma directa de indescomponibles, podemos encontrar un sumando tal que f restringido a él es un morfismo no nulo. Al ser W proyectivo, este sumando P es proyectivo también.
Tenemos $f : P \to V$ morfismo no nulo. Al ser V no proyectivo, sabemos que existe sucesión de Auslander-Reiten que termina en V: $0 \to \tau V \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} V \to 0$. Por ser P proyectivo existe $r : P \to Z$ tal que $hr = f$. Descomponiendo $Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_n$, con Z_i inescindibles, obtenemos para algún $j \in \{1, ..., n\}$ $r_j : P \to Z_j$ tal que hr_j es no nulo. Notaremos $Z_j = A_1$, $r_j = g_1$.
Si g_1 es epimorfismo que escinde, al ser A_1 indescomponible, obtendríamos $P \cong Z_j$ y por lo tanto encontramos un morfismo irreducible de P en V (el que aparece en la sucesión de Auslander-Reiten). Si g_1 no es epimorfismo que escinde, tomamos $f_1 : B_1 \to A_1$ un morfismo pozo, como tenemos $g_1 : P \to A_1$ existe (por definición de pozo) $q_1 : P \to B_1$ tal que $f_1q_1 = g_1$. Como hg_1 es no nulo, existirá A_2 algún sumando indescomponible de B_1 tal que hf_1pq_1 es no nulo, donde p es la proyección de B_1 sobre A_2. Pasando en limpio, obtuvimos $h_1 = f_{1|A_2} : A_2 \to A_1$, $g_2 = pq_1 : P \to A_2$ tales que hh_1g_2 es no nulo, con h y h_1 irreducibles.
De igual manera que antes, tenemos dos opciones. Si g_2 es epimorfismo que escinde, A_2 es isomorfo a P y por lo tanto hemos obtenido un camino de morfismos irreducibles desde P hasta V. Si no, tomamos el pozo que termina en A_2 y, repitiendo el procedimiento que hicimos antes, obtenemos una representación indescomponible A_3, un morfismo $g_3 : P \to A_3$ y un morfismo irreducible $h_2 : A_3 \to A_2$ tales que $hh_1h_2g_3$ es no nulo.
De esta forma podemos continuar. En el momento en que g_i es epimorfismo que escinde, obtenemos un camino de morfismos irreducibles desde P hasta V. La pregunta es si puede esto continuar indefinidamente o necesariamente ocurre que algún g_i es isomorfismo. Veamos que la opción correcta es la segunda.
Observemos que los A_i que vamos obteniendo son indescomponibles de dimensión finita (por construcción) y verifican $A_i(x) \neq 0$ para algún $x \in sop(P)$ (porque $g_i : P \to A_i$ es un morfismo no nulo). Por lo tanto, los posibles A_i son una cantidad finita (porque (Δ, J) es localmente de representación finita). Tomemos l el máximo de las dimensiones de los A_i. Tenemos morfismos irreducibles entre módulos de dimensión menor o igual a l, y la composición de ellos no nos da 0. Como los morfismos irreducibles no son isomorfismos, podemos utilizar el lema de Harada Sai y concluir que los morfismos irreducibles utilizados antes de llegar a un isomorfismo son a lo sumo 2^l.

Mostremos ahora que todos los proyectivos están conectados.
Sabemos que si existe $\alpha \in \Delta_1$ con $s(\alpha) = i$, $e(\alpha) = j$, entonces tenemos un morfismo

no nulo ϕ_α del proyectivo indescomponible $P(j)$ al proyectivo indescomponible $P(i)$. Este morfismo viene dado por multiplicar los caminos de j hasta r por α (recordar que la representación $P(i)$ tiene en el lugar r el espacio vectorial con base todos los caminos de i a r). Tenemos por lo tanto un morfismo de $P(j)$ en $P(i)$. Con el mismo procedimiento que utilizamos arriba, se muestra que esto implica que hay un camino de morfismos irreducibles desde $P(j)$ hasta $P(i)$.
Obtenemos entonces que si $a, b \in Q_0$ están conectados, entonces $P(a)$ y $P(b)$ están conectados en el carcaj de Auslander-Reiten. Al ser Q conexo, se obtiene que todos los proyectivos indescomponibles están en la misma componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten. Esto, sumado a que probamos que toda representación irreducible está conectada con algún proyectivo, muestra que el carcaj de Auslander-Reiten es conexo. •

4.1. Representaciones con estabilizador cíclico

En esta sección siempre supondremos que la característica de $\mathbb{K}$ es cero. Dejaremos fija una cubierta $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \to (Q, I)$ determinada por la acción de un grupo admisible G.

Definición 4.1.1. Dada $V \in Mod(\bar{Q}, \bar{I})$ definimos el estabilizador G_V de V como $G_V := \{g \in G / V^g \cong V\}$.

Observación 4.1.2. Es claro que para todo $V \in Mod(\bar{Q}, \bar{I})$, G_V es un subgrupo de G. Además, un elemento $g \in G_V$ debe verificar $g(sop(V)) \subset sop(V)$, por lo que si V tiene soporte finito, al actuar G libremente en $\bar{Q}_0$, se puede ver G_V como un subgrupo de las biyecciones de $sop(V)$, y por lo tanto es finito. En particular, si G es libre de torsión entonces $G_V = \{1\}$ para todo $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$.

Los siguientes resultados serán utilizados más adelante, aunque sin ser demostrados. Para una prueba de los mismos, puede remitirse a [1].

Teorema 4.1.3. *Si $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ es indescomponible, entonces G_V es no trivial si y sólo si ΣV se escinde. Si además $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado y G_V es cíclico con n elementos, $\Sigma V = (V_1, (\phi_1^g)_{g\in G}) \oplus ... \oplus (V_n, (\phi_n^g)_{g\in G})$, con $(V_i, (\phi_i^g)_{g\in G})$ inescindibles en $mod^G(\bar{Q}, \bar{I})$.*

Lema 4.1.4. *Sea $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible tal que G_V es cíclico. Sea $V_i' := T^{-1}(V_i, (\phi_i^g)_{g\in G}) \in mod(Q, I)$, donde V_i son los del teorema anterior. Entonces, todos los $V_i'/rad(V_i')$ son iguales.*

Observación 4.1.5. Supongamos $0 \longrightarrow \tau V \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow 0$ es sucesión de Auslander-Reiten en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$. Si $g \in G_V$, entonces $0 \longrightarrow (\tau V)^g \longrightarrow W^g \longrightarrow V^g \longrightarrow 0$ es también de Auslander-Reiten y $V^g \cong V$, por lo tanto $(\tau V)^g \cong \tau V$ y $W^g \cong W$. Así concluimos que $G_{\tau V} = G_V$ y $G_V \subset G_W$.

El funtor Σ es exacto, es decir lleva sucesiones exactas en sucesiones exactas (esto se debe a que el funtor suma directa es exacto). Por lo tanto, una sucesión de Auslander-Reiten en $mod(\bar{Q},\bar{I})$ va a parar por Σ a una sucesión exacta. Veamos qué podemos decir de esta sucesión.

Proposición 4.1.6. *Sea $V \in mod(\bar{Q},\bar{I})$ indescomponible no proyectivo con G_V cíclico. Tomemos $T^{-1}\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ descomposición en inescindibles en $mod(Q,I)$. Sea $X : 0 \longrightarrow U \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow 0$ sucesión de Auslander-Reiten en $mod(\bar{Q},\bar{I})$. Para cada $i = 1,...,n$ existe $X_i : 0 \longrightarrow U^i \longrightarrow W^i \longrightarrow V_i \longrightarrow 0$ sucesión de Auslander-Reiten en $mod(Q,I)$. Entonces, $T^{-1}\Sigma X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$.*
El resultado sigue siendo válido para proyectivos, es decir, si tomamos $S : V \longrightarrow P$ un pozo en el carcaj de Auslander-Reiten de $(\bar{Q},\bar{I})$ con P proyectivo, se obtiene que $T^{-1}\Sigma S$ es suma directa de pozos de (Q,I).

En particular, este resultado nos dice que si $T^{-1}\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, con $V_i \in mod(Q,I)$ indescomponible, entonces $T^{-1}\Sigma\tau V = \bigoplus_{i=1}^{n} \tau V_i$ es una descomposición en inescindibles.

Proposición 4.1.7.

1. *Si $P \in mod(\bar{Q},\bar{I})$ es proyectivo indescomponible, entonces $T^{-1}\Sigma P$ también lo es.*

2. *Si $E \in mod(\bar{Q},\bar{I})$ es inyectivo indescomponible, entonces $T^{-1}\Sigma E$ también lo es.*

3. *Si $V \in mod(\bar{Q},\bar{I})$ está en la τ-órbita de un proyectivo o un inyectivo, entonces $T^{-1}\Sigma V$ también lo es.*

4. *Si $W \in mod(\bar{Q},\bar{I})$ es simple, entonces $T^{-1}\Sigma V$ también lo es.*

Demostración:
1) Se deduce del hecho que $T^{-1}\Sigma P(x) = P(\pi(x))$.
Si tenemos w camino desde $\pi(x)$ hasta y en Q, existe y es único el camino $\bar{w}$ en $\bar{Q}$ desde x tal que $\pi(\bar{w}) = w$. A su vez, un camino desde x hasta $\bar{y}$ en $\bar{Q}$ nos da al proyectarlo un camino de $\pi(x)$ a $\pi(\bar{y})$.
Cuando aplico Σ a $P(x)$, en la coordenada $\bar{y}$ queda el espacio vectorial con base todos los caminos desde x hasta algún j con $\pi(j) = \pi(\bar{y})$. Por lo observado arriba, estos caminos corresponden biyectivamente, mediante la proyección, con los caminos desde $\pi(x)$ hasta $\pi(\bar{y})$. También es sencillo observar que si tenemos $\bar{\alpha} : y \to z$, entonces $\Sigma P(x)(\bar{\alpha}) : \Sigma P(x)_{\bar{y}} \to \Sigma P(x)_z$ es multiplicar por el camino $\bar{\alpha}$. Por lo tanto, $T^{-1}\Sigma P(x)_y$ será el espacio vectorial con base los caminos desde x a y, mientras que $T^{-1}\Sigma P(x)(\alpha)$ corresponderá con multiplicar por α.

3) Si $\tau^n V = P$ proyectivo, entonces $G_V = G_P = \{1\}$ (usando la parte 1 y 4.1.3), y por lo tanto (de nuevo usando 4.1.3) V es inescindible. Además $T^{-1}\Sigma\tau V = \tau T^{-1}\Sigma V$, repitiendo eso n veces concluimos $\tau^n T^{-1}\Sigma V = T^{-1}\Sigma P$.

4) Al ser W simple, existe $\bar{x} \in \bar{Q}_0$ tal que $W(\bar{x})$ tiene dimensión 1 y $W(y) = 0$ para todo $y \neq \bar{x}$. Entonces $T^{-1}\Sigma(W)(\pi(\bar{x})) = W(\bar{x})$ tiene dimensión 1 y $T^{-1}\Sigma(z) = 0$ para todo $z \neq \pi(\bar{x})$ y por lo tanto es simple. •

4.2. Carcajes con traslación

Definición 4.2.1. Un carcaj con traslación $\Gamma = (\Gamma, \tau)$ es un carcaj junto con un subconjunto $P_0 \subset \Gamma_0$ y una función inyectiva $\tau : P_0 \to \Gamma_0$ que satisfacen:
a) Γ no tiene flechas dobles ni lazos,
b) para todo $x \in P_0$, $x^- = (\tau x)^+$.

Los ejemplos evidentes de carcajes con traslación son los carcajes de Auslander-Reiten de $\mathbb{K}Q/I$, con (Q, I) carcaj con relaciones.

Observación 4.2.2. Para toda flecha $\alpha : x \to y$, con $y \in P_0$, existe una única flecha $\beta : \tau y \to x$. Poniendo $\sigma\alpha = \beta$ tenemos una biyección entre los conjuntos $\{\alpha \in \Gamma_1 / e(\alpha) \in P_0\}$ y $\{\beta \in \Gamma_1 / s(\alpha) \in \tau P_0\}$.
Donde está definido, τ es un morfismo de carcajes: si $x \in y^-$ entonces $x \in (\tau y)^+$, que es lo mismo que decir $\tau y \in x^- = (\tau x)^+$.

Definición 4.2.3. Un morfismo de carcajes $f : (\Gamma, \tau) \to (\Delta, \eta)$ es un morfismo de carcajes con traslación si verifica que $f(\tau x) = \eta f(x)$.

Sea x un vértice del carcaj con traslación Γ. Decimos que x es estable si $\tau^n x$ está definido para todo $n \in \mathbb{Z}$. En caso contrario, decimos que x es transyectivo. En caso que Γ sea el carcaj de Auslander-Reiten de algún álgebra, los transyectivos son aquellos que están en la τ-órbita de un inyectivo o proyectivo.

Definición 4.2.4. Un carcaj con traslación (Γ, τ) se dice estable si todos sus vértices son estables, o sea si τ está definido en todo Γ_0.

Si tenemos un carcaj Q sin lazos ni flechas dobles, se le asocia naturalmente un grafo Q_c, cuyo conjunto de vértices coincide con el de Q, habiendo un arista entre x e y si hay alguna flecha $x \to y$ o $y \to x$. Decimos que Q es un árbol dirigido cuando no contiene ningún subcarcaj de la forma $x \leftrightarrows y$ y Q_c es un árbol.
Dado un árbol dirigido B, podemos construir un carcaj con traslación $\mathbb{Z}B$ de la siguiente manera. Sus vértices son los pares (n, x), con $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_0$. Por cada flecha $\alpha : x \to y$ en B, colocamos en $\mathbb{Z}B$ una flecha $(n, \alpha) : (n, x) \to (n, y)$ y una flecha $\sigma(n, \alpha) : (n+1, y) \to (n, x)$. La traslación se define en todo $(\mathbb{Z}B)_0$ (por lo tanto $\mathbb{Z}B$ es estable) como $\tau(n, x) = (n+1, x)$. Identificamos B con $\{0\} \times B$ dentro de $\mathbb{Z}B$, y definimos la proyección $p : \mathbb{Z}B \to B$ como $p(n, b) = b$.

Ejemplo 4.2.5. Tomemos el árbol dirigido B:

$$\begin{tikzcd}
b & \\
& a \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
c &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}B$ nos queda:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(-1,b) \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (0,b) \arrow[dl, "\sigma(-1,\alpha)"'] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (1,b) \arrow[dl, "\sigma(0,\alpha)"'] & \\
& (-1,a) \arrow[ul, "(-1,\alpha)"] \arrow[dl, "(-1,\beta)"'] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (0,a) \arrow[ul, "(0,\alpha)"] \arrow[dl, "(0,\beta)"'] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (1,a) \arrow[ul, "(1,\alpha)"] \arrow[dl, "(1,\beta)"] \\
(-1,c) \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (0,c) \arrow[ul, "\sigma(-1,\beta)"] \arrow[rr, dashed, "\tau"] & & (1,c). \arrow[ul, "\sigma(0,\beta)"] & \cdot \quad \cdot
\end{tikzcd}$$

El objetivo principal en esta sección es mostrar que cualquier carcaj con traslación puede ser cubierto con algún $\mathbb{Z}B$, y cómo construir el mismo.

Lema 4.2.6. *Sean B y B' árboles dirigidos y $p : (\mathbb{Z}B')_c \to B'_c$ la proyección canónica. Dados $b \in B_0$ y $g : B_c \to B'_c$ morfismo de grafos, existe y es único el morfismo de carcajes $h : B \to \mathbb{Z}B'$ con $h(b) = (0, g(b))$ y $ph_c = g$.*

Demostración: Sea $\alpha : b \to a$ en B. Como g es morfismo de grafos, $g(a)$ es sucesor o predecesor de $g(b)$ en B'.
Si $g(\alpha) : g(b) \to g(a)$, entonces en $\mathbb{Z}B'$ aparece la flecha $(0, g(\alpha)) : (0, g(b)) \to (0, g(a))$. Defino entonces $h(a) = (0, g(a))$, $h(\alpha) = (0, g(\alpha))$. Hay que observar que esta es la única forma de definir $h(a)$ para que verifique la tesis, esto se debe a que $(0, g(a))$ es el único sucesor de $(0, g(b))$ con segunda coordenada $g(a)$, ya que los sucesores de $(0, g(b))$ son de la forma $(0, z)$, con z sucesor de $g(b)$, o $(-1, x)$ con x predecesor de $g(b)$, y al ser $g(a)$ sucesor de $g(b)$ no puede ser predecesor (porque B' es un árbol dirigido).
Si $g(\alpha) : g(a) \to g(b)$, tendremos en $\mathbb{Z}B'$ la flecha $\sigma(0, \alpha) : (0, g(b)) \to (-1, g(a))$. Defino en este caso $h(a) = (-1, g(a))$. De igual manera que en el caso anterior, es fácil observar que esta es la única forma de definir $h(a)$.
Con el mismo procedimiento, logramos definir h en los predecesores de b.
Ahora nos paramos en cada uno de los sucesores y predecesores de b y efectuamos el mismo procedimiento. De esta manera logramos definir $h(x)$ para todo $x \in B$, ya que B es conexo. Además, por ser B_c un árbol, la forma de llegar desde b hasta x es única (a menos de ir y volver por el mismo camino) y por lo tanto h queda bien definida. $\bullet$

Lema 4.2.7. *Sea B un árbol dirigido y (D, δ) un carcaj con traslación estable. Dado $h : B \to D$ morfismo de carcajes, existe y es único el morfismo de carcajes con traslación $f : \mathbb{Z}B \to D$ con $f_{|B} = h$.*

Demostración: En caso de existir, $f(n,x) = f(\tau^n(0,x)) = \delta^n f(0,x) = \delta^n h(x)$. Esto muestra la unicidad y nos dice cómo definir f. Hay que ver que así definida f es un morfismo de carcajes con traslación.
Sea $(n,x) \in (\mathbb{Z}B)_0$, entonces $f(n,x) = \delta^n h(x)$. Si a es sucesor de (n,x), entonces $a = (n,y)$, con y sucesor de x en B o $a = (n-1,z)$, con $z \in B$ predecesor de x. En el primer caso $f(n,y) = \delta^n h(y)$, por lo tanto, como δ es morfismo de carcajes, queda sucesor de $\delta^n h(x)$. En el segundo caso, $f(n-1,z) = \delta^{n-1}h(z)$; por ser δ y h morfismos de carcajes, $\delta^n h(x) \in \delta^n h(z)^+$. Por las propiedades de la traslación, esto implica $\delta^n h(x) \in \delta^{n-1}h(z)^-$ y por lo tanto $f(a)$ es sucesor de $f(n,x)$. De igual manera se prueba que $f((n,x)^-) \subset f(n,x)^-$. Así se mostró que f es morfismo de carcajes.
Es claro que f respeta la traslación: $f(\tau(n,y)) = f(n+1,y) = \delta^{n+1}h(y) = \delta f(n,y)$. •

La siguiente proposición es clave para la unicidad del cubrimiento de un carcaj con traslación.

Proposición 4.2.8. *Los carcajes con traslación $\mathbb{Z}B$ y $\mathbb{Z}B'$ son isomorfos si y solo si los grafos B_c y B'_c son isomorfos.*

Demostración: Consideremos el grafo $\mathbb{Z}B/\tau$, cuyos vértices son las τ-órbitas de $(\mathbb{Z}B)_0$ y donde ponemos una arista entre $\bar{x}$ e $\bar{y}$ si hay alguna flecha entre (n,x) y (m,y) en $\mathbb{Z}B$ para ciertos $m,n \in \mathbb{Z}$. El grafo $\mathbb{Z}B/\tau$ es claramente isomorfo a B_c por medio del mapa $x \mapsto \bar{x}$.
Si tenemos $f : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B'$ un isomorfismo de carcajes con traslación, será compatible con τ y por lo tanto inducirá $f/\tau : \mathbb{Z}B/\tau \to \mathbb{Z}B'/\tau'$. Es claro que $f^{-1}/\tau = (f/\tau)^{-1}$, sumando esto a lo observado arriba, se obtiene el directo de la proposición.
Sea $g : B_c \to B'_c$ isomorfismo de grafos, entonces, por 4.2.6, existe $h : B \to \mathbb{Z}B'$ morfismo de carcajes tal que $p'h = g$. Por 4.2.7, tenemos $f : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B'$ con $f_{|B} = h$. Se obtiene por lo tanto el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "inc"'] \arrow[dr, "h"] & B' \\
\mathbb{Z}B \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}B \arrow[u, "p'"']
\end{tikzcd}$$

Veremos que f es isomorfismo.
Sea $(k,y) \in \mathbb{Z}B'$. Por ser g sobreyectiva, tenemos que si $y \in B'_0$ existe $x \in B_0$ tal que $g(x) = y$, por lo tanto $h(x) = (n,y)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, así que $f(k-n,x) = \tau'^{k-n}f(0,x) = \tau'^{k-n}h(x) = (k,y)$. O sea que f es sobreyectiva.
Sean $(n,b_1),(k,b_2) \in (\mathbb{Z}B)_0$ tales que $f(n,b_1) = f(k,b_2)$. $f(n,b_1) = \tau'^n f(0,b_1) = \tau'^n h(b_1)$, de igual manera $f(k,b_2) = \tau'^k h(b_2)$. O sea que tenemos la igualdad $\tau'^k h(b_2) = \tau'^n h(b_1)$, aplicando p' obtenemos $g(b_1) = g(b_2)$, usando que g es monomorfismo deducimos que $b_1 = b_2$. Usando que $\tau^r x \neq \tau^l x$ para todo $x \in (\mathbb{Z}B')_0$ si $l \neq r$, se concluye que $n \neq k$. Es decir que f es inyectiva. •

Definición 4.2.9. Sea Γ un carcaj con traslación. Diremos que un grupo de automorfismos G de Γ es t-admisible si ninguna G-óbita en Γ_0 intersecta a un conjunto de la forma $\{x\} \cup x^+$ ó $\{x\} \cup x^-$ en más de un punto.

Para cada grupo t-admisible G de Γ definimos el carcaj de traslación Γ/G: $(\Gamma/G)_0 = \Gamma_0/G$ y $(\Gamma_G)_1 = \Gamma_1/G$. La traslación en Γ/G es inducida por la de Γ. Si Γ es estable, Γ/G también lo es.

Definición 4.2.10. Un morfismo de carcajes con traslación $f : (\Delta, \tau) \to (\Gamma, \lambda)$ es un t-cubrimiento si para todo $z \in \Delta_0$ las restriciones de f a $z^+ \to (f(z))^+$ y $z^- \to (f(z))^-$ son biyectivas; y τp está definida si y sólo si lo está $\lambda f(p)$.

La proyección canónica $p : \Gamma \to \Gamma/G$ es un t-cubrimiento si G es un grupo de automorfismos t-admisible de Γ.

Observación 4.2.11. Si $f : \Delta \to \Gamma$ es un t-cubrimiento y Γ es conexo, entonces f es sobreyectiva. Sea $x \in \Delta$, entonces $(f(x))^+ = f(x^+)$ y $(f(x))^- = f(x^-)$, así que todos los sucesores y predecesores de $f(x)$ están en la imagen de f. Dado y sucesor o predecesor de $f(x)$, por el mismo argumento, $y^+ \cup y^- \subset Im(f)$. Usando que Γ es conexo, concluimos que $\Gamma \subset Im(f)$.

Nuestro objetivo ahora es probar que dado Γ un carcaj con traslación estable, existe un árbol dirigido B y un grupo t-admisible G de forma que $\Gamma \cong \mathbb{Z}B/G$. Además, mostraremos cierta "unicidad"de G y B.
Sea Γ un carcaj con traslación conexo y estable. Elegimos $x \in \Gamma_0$ y consideramos los caminos que empiezan en x que no tengan ningún subcamino de la forma $\cdot \xrightarrow{\sigma\alpha} \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot$.
Estos caminos serán los puntos de un nuevo carcaj $B = x\Gamma$, que tendrá una flecha $u \xrightarrow{\alpha} v$ si $v = \alpha u$.
B es conexo (todos los caminos están conectados con el camino trivial) y en cada vértice termina una única flecha, salvo el vértice que viene del camino trivial, en el cual no finaliza ninguna. Por lo tanto, B es un árbol dirigido.
Tenemos el morfismo de carcajes $e : B \to \Gamma$, que a cada camino le asigna su punto final. Por un lema previo, sabemos que existe y es única la manera de extender e a un morfismo de carcajes con traslación $\pi : \mathbb{Z}B \to \Gamma$.

Proposición 4.2.12. *(1)Sea Γ un carcaj con traslación conexo y estable. Si $x \in \Gamma_0$ y $B = x\Gamma$, el morfismo $\pi : \mathbb{Z}B \to \Gamma$ es un t-cubrimiento.*
(2) Sean B un árbol dirigido, $f : \Delta \to \Gamma$ un t-cubrimiento, $l : B \to \Gamma$ morfismo de carcajes, $b \in B_0$. Para cada $p \in \Delta_0$ con $l(b) = f(p)$ existe exactamente un morfismo de carcajes $h : B \to \Delta$ con $fh = l$ y $h(b) = p$.
(3) Si B es un árbol dirigido, $\pi : \mathbb{Z}B \to \Gamma$ es un morfismo de carcajes con traslación, $f : \Delta \to \Gamma$ un cubrimiento y q un punto de de $\mathbb{Z}B$, entonces para cada $p \in \Delta_0$ con $f(p) = \pi(q)$ existe y es único el morfismo $g : \mathbb{Z}B \to \Delta$ con $\pi = fg$ y $g(q) = p$.

Demostración: (1) Hay que probar que, dado $(n, \delta) \in (\mathbb{Z}B)_0$, π induce una biyección entre $(n, \delta)^+$ y $(\pi(n, \delta))^+$ (la biyección entre los predecesores es consecuencia

de esta al ser ambos carcajes con traslación estables). Dado que π es compatible con τ, podemos suponer $n = 0$.
Si δ es el camino trivial, entonces en B no hay predecesores de δ y hay un sucesor por cada punto de x^+ (porque no hay flechas dobles en Γ). Por lo tanto, $(0, \delta)$ tiene en $\mathbb{Z}B$ un sucesor por cada punto de x^+. Como $\pi(0, \delta) = e(\delta) = x$, se tiene en este caso la biyección buscada.
Sea $\delta = \alpha_m ... \alpha_1$, con $m > 0$, un vértice de B, llamemos $y = e(\delta) = \pi(0, \delta)$. En B, $\delta^+ = \{\beta\alpha_m ... \alpha_1 / e(\beta) \neq \tau^{-1}(s(\alpha_m))\}$, o sea hay un sucesor de δ en B por cada sucesor de y distinto de $\tau^{-1}(s(\alpha_m))$. Como la única flecha que llega a δ en B es α_m, se tiene que $(0, \delta)^+ = \{(0, \epsilon) / \epsilon \in \delta^+\} \cup (-1, \alpha_{m-1} ... \alpha_1)$. Por lo tanto, tenemos también en este caso la biyección.

(2) Sea $a \in b^+$, entonces $l(a) \in l(b)^+$. Como f es t-cubrimiento, induce una biyección entre $f(p)^+ = l(b)^+$ y p^+. Por lo tanto, existe y es único $q \in \Delta_0$ tal que $f(q) = l(a)$. Definimos entonces $h(b) = q$. De igual manera podemos definir $h(c)$ para todo c predecesor de b.
Hacemos lo mismo parándonos en cada sucesor y predecesor de b. Por ser B un árbol dirigido, podemos definir h en todo B sin problemas de esta manera.
La unicidad es clara (en cada paso tengo una y solo una chance de definir h).

(3) Supongamos $q = (0, b)$. Por el punto (2), tenemos un único morfismo de carcajes $h : B \to \Delta$ tal que $fh = \pi_{|B}$ y $h(b) = p$. Por 4.2.7, existe y es único $g : \mathbb{Z}B \to \Delta$ morfismo de carcajes con traslación tal que $g_{|B} = h$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}B \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[l, "inc"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\pi_{|B}"] & \\
& \Delta \arrow[r, "f"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Se tiene entonces $fg_{|B} = fh = \pi_{|B}$ y por ser f, g, π morfismos de carcajes con traslación, esto implica $fg = \pi$. •

Sea Γ un carcaj con traslación conexo estable, $x \in \Gamma_0$, $B = x\Gamma$ y $\pi : \mathbb{Z}B \to \Gamma$ el morfismo antes definido. Definimos $G(\Gamma, x) := \{g : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B$ morfismo de carcajes con traslación $/ \pi g = \pi\}$.

Teorema 4.2.13. *$G(\Gamma, x)$ es un grupo de automorfismos t-admisible de $\mathbb{Z}B$ y π induce un isomorfismo $\mathbb{Z}B / G(\Gamma, x) \cong \Gamma$.*
Si B' es un árbol dirigido y G' un grupo de automorfismos t-admisible de $\mathbb{Z}B'$ tales que $\mathbb{Z}B'/G' \cong \Gamma$, entonces $B_c = B'_c$ y $G' = fG(\Gamma, x)f^{-1}$, con $f \in Aut(\mathbb{Z}B)$.

Demostración: Veamos primero que todos los elementos de $G(\Gamma, x)$ son automorfismos. Sea $g \in G$, $p \in (\mathbb{Z}B)_0$, $g(q) = p$. Por el punto (3) de 4.2.12, existe $h : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B$ tal que $h(p) = q$ y $\pi h = \pi$. Entonces $\pi hg = \pi$ y $hg(q) = q$, así que por la unicidad de la misma proposición $hg = id$. De igual forma, $gh = id$.

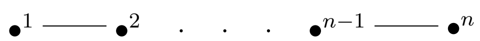
Si existiera $g \in G$, $y \in (\mathbb{Z}B)_0$ tal que $gy \in y^+$, entonces $\pi y = \pi g y \in (\pi y)^+$, contradiciendo que en Γ no hay lazos. Si hubiera $g \in G$, $z, y \in w^+$ con $gz = y$, entonces $\pi z = \pi g z = \pi y$, lo que contradice que π es t-cubrimiento. Así que G es t-admisible.
Es claro que $\pi : \mathbb{Z}B \to \Gamma$ pasa al cociente $\hat{\pi} : \frac{\mathbb{Z}B}{G(\Gamma,x)} \to \Gamma$. Por ser t-cubrimiento, π es sobreyectiva, por lo tanto $\hat{\pi}$ es también sobreyectiva.
Sean $x, y \in \mathbb{Z}B$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$. Por el punto (3) de 4.2.12 deducimos que existe $g \in G(\Gamma, x)$ tal que $gx = y$. De esta forma mostramos que $\hat{\pi}$ es inyectiva.
Supongamos $g : \mathbb{Z}B'/G' \to \mathbb{Z}B/G(\Gamma, x)$ isomorfismo de carcajes con traslación. Llamaremos $p' : \mathbb{Z}B' \to \mathbb{Z}B'/G'$ a la proyección canónica. Fijemos $a \in \mathbb{Z}B'$, $b \in \mathbb{Z}B$ tales que $gp'(a) = \pi(b)$. El morfismo gp' es t-cubrimiento y π es morfismo de carcajes con traslación, entonces existe $f : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B'$ tal que $gp'f = \pi$ y $f(b) = a$. La función $g^{-1}\pi$ es t-cubrimiento, p' es morfismo de carcajes con traslación y $g^{-1}\pi(b) = p'(a)$, entonces , usando la parte (2) de 4.2.12, existe $h : \mathbb{Z}B' \to \mathbb{Z}B$ tal que $g^{-1}\pi h = p'$ con $h(a) = b$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}B' \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "p'"] & \mathbb{Z}B \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{Z}B'/G' \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathbb{Z}B/G(\Gamma, x) \arrow[l, shift right, "g^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

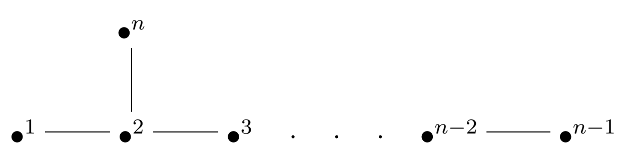
El morfismo $hf : \mathbb{Z}B \to \mathbb{Z}B$ verifica $\pi h f = \pi$ con $hf(b) = b$ y π es un cubrimiento, por la unicidad en la parte (3) de la proposición anterior, se tiene $hf = id$. De igual forma, $fh = id$. Por lo tanto, $\mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}B'$, que implica $B_c = B_c'$.
Es sencillo verificar que $G' = \{\phi \in Aut(\mathbb{Z}B)/p'\phi = p'\}$. Por el diagrama de arriba, sabemos que $p' = g^{-1}\pi f^{-1}$, así que $\phi \in G'$ si y sólo si $g^{-1}\pi f^{-1}\phi = g^{-1}\pi f^{-1}$ si y sólo si $\pi f^{-1}\phi f = \pi$, o sea si y sólo si $f^{-1}\phi f \in G$. De aquí concluimos que $G' = fG(\Gamma, x)f^{-1}$. •

Se le llama diagramas de Dynkin a los siguientes grafos:

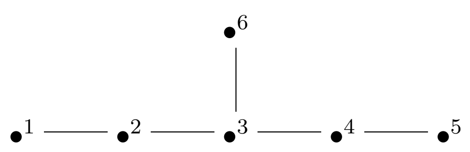
$A_n (n \geq 1)$:



$D_n (n \geq 4)$:



E_6 :



E_7 :

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet^{7} \arrow[d, dash] & & & \\
\bullet^{1} \arrow[r, dash] & \bullet^{2} \arrow[r, dash] & \bullet^{3} \arrow[r, dash] & \bullet^{4} \arrow[r, dash] & \bullet^{5} \arrow[r, dash] & \bullet^{6}
\end{tikzcd}$$

E_8 :

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet^{8} \arrow[d, dash] & & & & \\
\bullet^{1} \arrow[r, dash] & \bullet^{2} \arrow[r, dash] & \bullet^{3} \arrow[r, dash] & \bullet^{4} \arrow[r, dash] & \bullet^{5} \arrow[r, dash] & \bullet^{6} \arrow[r, dash] & \bullet^{7}
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado aparece en [2] y lo usaremos en la próxima sección:

Teorema 4.2.14. *Sea Γ una componente conexa de la parte estable del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra localmente de representación finita. Entonces $\Gamma \cong \mathbb{Z}B/G$, con G un grupo de automorfismos t-admisible de $\mathbb{Z}B$ y B un árbol dirigido tal que B_c es Dinkin.*

4.3. El teorema

De aquí en adelante supondremos que $(\bar{Q}, \bar{I})$ es localmente de representación finita, mientras que $\mathbb{K}$ será algebraicamente cerrado con $car(\mathbb{K}) = 0$. Nuestro primer objetivo es probar que los estabilizadores de las representaciones indescomponibles de $(\bar{Q}, \bar{I})$ son cíclicos, para poder usar los resultados de la primera sección de este capítulo.

Lema 4.3.1. *Una sucesión de Auslander-Reiten en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ tiene a los sumo cuatro sumandos en el término intermedio y en ese caso uno de ellos es proyectivo-inyectivo y ninguno de los otros es inyectivo o proyectivo.*

Demostración: Sea $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible no proyectivo. Sean $W_1, ...$ $, W_n$ representantes de las clases de isomorfía de los inescindibles en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ con $Hom(W_i, V) \neq 0$ (son finitos porque todos ellos tienen $W_i(x) \neq 0$ para algún $x \in sop(V)$, que es finito, y $(\bar{Q}, \bar{I})$ es localmente de representación finita). Sean $Z_1, ..., Z_m$ los indescomponibles de $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ que verifican $Hom(Z_i, W_j) \neq 0$ ó $Hom(W_j, Z_i) \neq 0$ para algún j.
Sea A el subcarcaj pleno con vértices $sop(V) \bigcup (\cup sop(W_i)) \bigcup (\cup sop(Z_j))$, que es finito. Sea $\hat{I}$ el siguiente ideal: si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \bar{I}$, con $u_1, ..., u_m$ caminos en A y el resto no, entonces $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in \hat{I}$.
Sea C la subcategoría plena de $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ tal que $X \in Ob(C)$ si $sop(X) \subset A_0$. Dado $Y \in mod(A, \hat{I})$, definimos $Y^{\bar{Q}}$ representación de $\bar{Q}$ que verifica $Y^{\bar{Q}}(x) = Y(x)$ si $x \in A_0$, $Y(x) = 0$ en otro caso; de igual manera lo definimos en las flechas.
Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \bar{I}$, con $u_1, ..., u_m$ caminos en A y $u_{m+1}, ..., u_n \notin A$. Por definición, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in \hat{I}$, así que $Y^{\bar{Q}}(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i) = Y(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i) = 0$; si $j > m$, u_j pasa por un vértice fuera de A y por lo tanto $Y^{\bar{Q}}(u_j) = 0$. En conclusión $Y^{\bar{Q}}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = 0$ y por lo tanto $Y^{\bar{Q}} \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$.
Tenemos entonces el mapa $h : mod(A, \hat{I}) \to C$ tal que $h(Y) = Y^{\bar{Q}}$ y definido en los

morfismos como la extensión natural (ya que fuera de A_0 los espacios vectoriales son 0). Este mapa es de forma clara una equivalencia entre ambas categorías. Por ser $(\bar{Q}, \bar{I})$ localmente de representación finita, $(A, \hat{I})$ es de tipo de representación finita.

Observemos primero que si $M \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ es tal que $sop(M) \subset A_0$, entonces M es indescomponible en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ si y solo si lo es en $mod(A, \hat{I})$.
Utilizando 1.2.18 probamos que V es proyectivo en $mod(A, \hat{I})$ si y sólo si lo es en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$. Supongamos que V es proyectivo en $mod(A, \hat{I})$. Si $f : X \to V$ es morfismo sobreyectivo, con $X \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$, podemos suponer que X es suma directa de algunos W_i (si X tiene otros sumandos, entonces f restringido a ellos es el morfismo 0), por lo tanto f es también morfismo en $mod(A, \hat{I})$, ya que $\cup sop(W_i) \subset A_0$. Entonces sabemos que existe $g : V \to X$ tal que $fg = id_V$, concluyendo que V es proyectivo en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$.
De igual manera (utilizando que $\cup sop(Z_i) \subset A_0$) se muestra que cada W_j es proyectivo o inyectivo en $mod(A, \hat{I})$ si y solo si lo es en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$.
La sucesión de Auslander-Reiten que termina en V en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$, también lo es en $mod(A, \hat{I})$, ya que en ella sólo pueden aparecer los W_i y los Z_j. Un teorema de Liu que aparece en [8] dice que, dado que $(A, \hat{I})$ es de tipo de representación finito, el término del medio de la sucesión de Auslander-Reiten no puede tener más de cuatro sumandos, y en el caso que sean cuatro uno de ellos es inyectivo-proyectivo. Pero ya vimos que ese proyectivo-inyectivo en $(A, \hat{I})$ también lo es en $(\bar{Q}, \bar{I})$. •

Corolario 4.3.2. *Sea U estable en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ con G_U trivial. Si $f : V \to U$ es irreducible, entonces $|G_V| \leq 3$.*

Demostración: Si $G_V = \{g_1, \ldots, g_n\}$, entonces $f^{g_i} : V \to U^{g_i}$ son irreducibles con $U^{g_i} \ncong U^{g_j}$ si $g_i \neq g_j$. Por el lema anterior, tenemos $n \leq 4$, pero si $n = 4$ habría $g_i \in G_V$ con U^{g_i} proyectivo, y esto implicaría (por 4.0.2) que U es proyectivo, contradiciendo la estabilidad de U. •

El siguiente es un resultado clásico que aparece en [6]:

Proposición 4.3.3. *Sea (Q, I) un carcaj con relaiones. Si V es una representación de (Q, I) y P_i es el proyectivo indescomponible asociado al punto i, entonces $V(i)$ es isomorfo (como espacio vectorial) a $Hom(P_i, V)$.*

Observación 4.3.4. En particular, este resultado nos dice que $Hom(P_i, P_j) \cong P_j(i)$, que es el espacio vectorial generado por todos los caminos de j a i. En conclusión, la dimensión de $Hom(P_i, P_j)$ es igual a la dimensión de $\mathbb{K}(Q, I)(j, i)$.
Por cada camino u de j hasta i hay un morfismo evidente $\phi_u : P_i \to P_j$, que está dado por multiplicar por u. Además, si tengo $u_1, \ldots, u_n$ caminos linealmente independientes en (Q, I), los morfismos $\phi_{u_1}, \ldots, \phi_{u_n}$ también son l.i.
Sumando estos dos hechos, se concluye que si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de $\mathbb{K}(Q, I)(j, i)$ entonces $\{\phi_{v_1}, \ldots, \phi_{v_r}\}$ es base de $Hom(P_i, P_j)$.

Lema 4.3.5. *Sea $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible con $|G_V| > 1$. Si $U \in V^+ \cup V^-$, entonces U es estable.*

Demostración: Supongamos $\tau^n U$ es proyectivo, como $G_{\tau^n V} = G_V$ podemos asumir que U es proyectivo. Entonces, usando 4.1.3 y 4.1.7, G_U es trivial. Si $g \in G$, $f : V \to U$ es irreducible, entonces $f^g : V^g \to U^g$ también es irreducible. Tenemos entonces para cada $h \in G_V$ un morfismo irreducible $f^h : V \to U^h$. Al ser U proyectivo, cada U^h también lo es; esto implica que $|G_V| \leq 3$ porque 4.3.1 nos dice que en caso de que aparecieran 4 sumandos en el término del medio de una sucesión de Auslander-Reiten, sólo uno podía ser proyectivo. En particular, G_V es cíclico y por lo tanto $T^{-1}\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ para $n = 2$ ó $n = 3$.
V es estable (de no serlo, por el punto (3) en 4.1.7, G_V sería trivial). Entonces, si tenemos $U \xrightarrow{f} V$ irreducible, existe $\tau V \xrightarrow{f} U$ irreducible, y $G_{\tau V} = G_V$. De esta manera, podemos suponer $V \xrightarrow{f} U$ irreducible. Aplicando $T^{-1}\Sigma$ a este morfismo, obtenemos $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i = T^{-1}\Sigma V \xrightarrow{T^{-1}\Sigma f} T^{-1}\Sigma U$ en el carcaj de Auslander-Reiten de $mod(Q, I)$. $T^{-1}\Sigma U$ es proyectivo, así que $T^{-1}\Sigma f$ es la inclusión del radical.
Tomemos S un simple que sea sumando directo de $V_1/radV_1$ (recordemos que es lo mismo que $V_2/radV_2$). Sea P el proyectivo indescomponible que cubre a S. Tenemos así $P \to S \xrightarrow{(\iota_1,\iota_2)} V_1/rad(V_1) \oplus V_2/rad(V_2) \hookrightarrow rad(T^{-1}\Sigma U)/rad^2(T^{-1}\Sigma U)$. Sabiendo que la primera flecha es un epimorfismo y las última es un monomorfismo, se concluye que tenemos dos mapas f_1 y f_2 entre P y $radT^{-1}\Sigma U/rad^2(T^{-1}\Sigma U)$ que son l.i.
La proyección $p : radT^{-1}\Sigma U \to radT^{-1}\Sigma U/rad^2(T^{-1}\Sigma U)$ es un epimorfismo y P es proyectivo, por lo tanto conseguimos $g_1, g_2 : P \to T^{-1}\Sigma U$ tales que $pg_i = f_i$ para $i = 1, 2$.
Si P es el proyectivo asociado al vértice b y $T^{-1}\Sigma U$ es el proyectivo asociado al vértice a, tomemos $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{K}(Q, I)(a, b)$. Tenemos por la observación anterior que $g_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_{u_j}$ y $g_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \phi_{u_j}$. Como $Im(g_i) \subset radT^{-1}\Sigma U$, resulta que todos los u_j deben estar en el ideal F (si τ_a es el camino trivial, $\phi_{\tau_a} = Id_P$ y por lo tanto su imagen no está incluida en el radical). Por otro lado, si u es un camino de largo mayor o igual que 2, $p\phi_u = 0$. Por lo tanto, pg_1 y pg_2 es suma de morfismos de la forma $p\phi_{\eta_j}$, con η_j flechas desde a hasta b. Al ser $\{pg_1, pg_2\}$ l.i., deben existir al menos dos flechas distintas desde a hasta b, contradiciendo la no existencia de flechas dobles. •

Corolario 4.3.6. *Sea* Γ *componente conexa de la parte estable del carcaj de Auslander-Reiten de* $(\bar{Q}, \bar{I})$*. Entonces existe* $U \in \Gamma$ *tal que* G_U *es trivial.*

Demostración: Al ser $(\bar{Q}, \bar{I})$ localmente de representación finita, tenemos probado en 4.0.4 que su carcaj de Auslander-Reiten es conexo. Por tanto, hay algún $U \in \Gamma$ y X transyectivo con $X \to U$ o $U \to X$ irreducible. Si $|G_U| > 1$, X sería estable. •

Proposición 4.3.7. *Si* $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ *es indescomponible, entonces* $|G_V| \leq 3$.

Demostración: Por 4.1.3 y 4.1.7, es suficiente probar el resultado para los elementos de la parte estable del carcaj de Auslander-Reiten de $(\bar{Q}, \bar{I})$. Lo probaremos para cada una de las componentes conexas Γ de la parte estable. Sabemos (por

4.2.14) que en este caso Γ tiene una cubierta de la forma $\mathbb{Z}B$, con B Dynkin.
Si no todos los estabilizadores fueran triviales en Γ (en cuyo caso el resultado ya sería cierto), tendríamos $V \to U$ irreducible con $|G_U| = 1$ y $|G_V| > 1$ (corolario anterior). Por 4.3.2, se tiene $|G_V| \leq 3$.
Sea $X \in V^+$, probaremos que $G_X \subset G_V$. Razonemos por el absurdo, tomemos entonces h, g distintos de 1 tales que $h \in G_X \setminus G_V$, $g \in G_V$. $X \ncong U^g$, si lo fuera, $G_X = G_{U^g} = \{1\}$. Tanto U, V como X son estables, por lo tanto en Γ aparece el siguiente subcarcaj:

$$\begin{tikzcd}
 & U & & \\
V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & U^g & & \\
 & X \arrow[dr] & & \\
V^h \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & U^h \arrow[r] & \tau^{-1}V^h \arrow[r] \arrow[dr] & \tau^{-1}U^h \\
 & U^{gh} \arrow[ur] & & \tau^{-1}U^{gh}
\end{tikzcd}$$

Si miramos el subcarcaj quitándole V^h, U^{gh} y U^h, no aparecen subcaminos de la forma $Y \to Z \to \tau^{-1}Y$:
▲ si $V \to X \to \tau^{-1}V^h$ lo fuera, entonces $V^h \cong V$, que contadice la elección de h;
▲ si $X \to \tau^{-1}V^h \to \tau^{-1}U^t$ lo fuera, entonces $X = U^t$, por lo que G_X sería trivial.
Por lo tanto el subcarcaj de arriba sin V^h, U^{gh} y U^h debería aparecer en B, contradiciendo que es Dynkin. Así concluimos que $G_X \subset G_V$ en caso que $X \in V^+$.

Si $X_1 \in X_0^+$, $X_0 \in V^+$ de forma que $X_1 \ncong \tau^{-1}V$, $X_0 \ncong U^t$ con $t \in G_V$, mostraremos que $G_{X_1} \subset G_V$.
De nuevo por absurdo, tomemos $h \in G_{X_1} \setminus G_V (\subset G_{X_1} \setminus G_{X_0})$, $1 \neq g \in G_V$. En Γ aparecerá el siguiente subcarcaj:

$$
\begin{tikzcd}
 & U & & & & \\
V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & U^g & & & & \\
 & X_0 \arrow[dr] & & & & \\
V^h \arrow[r] & X_0^h \arrow[r] \arrow[dr] & X_1 \arrow[r] & \tau^{-1}X_0^h \arrow[r] & \tau^{-2}V^h \arrow[r] \arrow[dr] & \tau^{-2}U^h \\
 & & \tau^{-1}V^h \arrow[ur] & & & \tau^{-2}U^{gh}
\end{tikzcd}
$$

Recortémosle al subcarcaj de arriba V^h, X_0^h y $\tau^{-1}V^h$ y no hay ningún subcamino de la forma $Y \to Z \to \tau^{-1}Y$:
▲ Si $X_0 \to X_1 \to \tau^{-1}X_0^h$ fuera de esa forma, $X_0 \cong X_0^h$, cuando sabíamos que $h \notin G_{X_0}$.
▲ Si $X_1 \to \tau^{-1}X_0^h \to \tau^{-2}V^h$ es de esa forma, $\tau^{-1}V^h \cong X_1 \cong X_1^h$ y por lo tanto $\tau^{-1}V \cong X_1$, contra lo supuesto.
▲ Si $\tau^{-1}X_0^h \to \tau^{-2}V^h \to \tau^{-2}U^h$ lo fuera, $\tau^{-1}U^h \cong \tau^{-1}X_0^h$, por lo que $U^h \cong X_0^h$ y finalmente $U \cong X_0$, contra lo supuesto.
▲ Si $\tau^{-1}X_0^h \to \tau^{-2}V^h \to \tau^{-2}U^{gh}$ es de esa forma, de igual manera llegamos a $U^g \cong X_0$, contradiciendo lo que habíamos supuesto.
Entonces tendríamos en B un subcarcaj que no es Dynkin.
Con el mismo argumento, se demuestra que si $X_i \in X_{i-1}^+$ para $i = 1, ..., n$, $X_0 \in V^+$ tal que $X_1 \ncong \tau^{-1}V$, $\tau X_i \ncong X_{i-2}$, entonces $G_{X_i} \subset G_V$ para todo i siempre que $X_0 \ncong U^t$ con $t \in G_V$.

Veamos ahora que ocurre si $X_0 = U^t$. Tomemos $V \to U^t \to X_1 \to X_2 \to X_3 ... \to X_n$ sin subcaminos de la forma $Z \to W \to \tau^{-1}Z$, queremos probar $|G_{X_i}| \leq 3$ para $i = 1, ..., n$. Lo mostraremos por inducción.
$n = 1$: $|G_{X_1}| \leq 3$ por una proposición anterior (es sucesor de un estable con estabilizador trivial).
$n > 1$: Como $X_2 \ncong \tau^{-1}U^t$, del caso anterior se sigue que $G_{X_n} \subset G_{X_1}$, y por lo tanto $|G_{X_n}| \leq 3$.
Si construimos el árbol dirigido B a partir de V, tenemos que todos los elementos de B tienen estabilizador con orden menor o igual que 3. Cualquier elemento de Γ es de la forma $\tau^n X$, con $X \in B$, como $G_X = G_{\tau^n X}$, obtenemos el resultado. •

Corolario 4.3.8. *Si $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible, $T^{-1}\Sigma V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ con $n = 1, 2$ ó 3 y V_i indescomponibles.*

Demostración: El teorema anterior nos dice que $|G_V| \leq 3$, así que en particular G_V es cíclico. Por lo tanto, usando 4.1.3, llegamos al resultado. •

Podemos ahora probar el resultado para el que hemos venido trabajando:

Teorema 4.3.9. *Sea $\pi : (\bar{Q}, \bar{I}) \to (Q, I)$ morfismo cubriente. Supongamos que $\bar{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$, $car\mathbb{K} = 0$ y Q finito.*
Si $(\bar{Q}, \bar{I})$ es localmente de representación finita, entonces (Q, I) es de tipo de representación finita.

Demostración: Llamemos $\mathcal{F}$ al conjunto de representaciones indescomponibles que son sumandos de $T^{-1}\Sigma V$ para algún $V \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible. Probaremos primero que $\mathcal{F}$ contiene a una componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten de (Q, I).
Sea $W \in mod(Q, I)$ indescomponible con W sumando de $T^{-1}\Sigma\bar{W}$ para algún $\bar{W} \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible. Sea $V \xrightarrow{h} W$ flecha en el carcaj de Auslander-Reiten de (Q, I). Como W no es un proyectivo simple (en dicho caso no existe h), utilizando 4.1.7 deducimos que $\bar{W}$ tampoco lo es.
Si $\bar{W}$ no es proyectivo, existe una sucesión de Auslander-Reiten en $mod(\bar{Q}, \bar{I})$ que termina en $\bar{W}$, llamémosla X: $0 \to \bar{U} \xrightarrow{\bar{f}} \bar{V} \xrightarrow{\bar{g}} \bar{W} \to 0$. La Proposición 4.1.6 nos indica que, al ser $G_{\bar{W}}$ cíclico, $T^{-1}\Sigma(X)$ se escribe como la suma directa de las sucesiones de Auslander-Reiten que terminan en los sumandos directos de $T^{-1}\Sigma\bar{W}$, en particular V es sumando de $T^{-1}\Sigma\bar{V}$. Descomponiendo $\bar{V}$ como suma de inescindibles y utilizando que $T^{-1}\Sigma$ es aditivo, podemos concluir que V es sumando de algún factor indescomponible de $T^{-1}\Sigma\bar{V}$ y por lo tanto $V \in \mathcal{F}$.
Si $\bar{W}$ es proyectivo, al no ser simple, podemos usar el mismo argumento. En lugar de utilizar la sucesión de Auslander-Reiten, usamos la inclusión del radical.
Tomemos en $\bar{Q}_0$ un conjunto A de manera tal que $\sharp A = \sharp Q_0$ y $\pi A = Q_0$. Por ser $(\bar{Q}, \bar{I})$ localmente de representación finita, existen finitos $\bar{V}_1, ..., \bar{V}_k \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponibles no isomorfos con $sop(\bar{V}_i) \cap A \neq \emptyset$. Llamemos $U_1, ..., U_m$ a todos los indescomponibles en $mod(Q, I)$ que son sumandos de algún $T^{-1}\Sigma\bar{V}_i$ (son finitos porque $T^{-1}\Sigma\bar{V}_i$ tiene como máximo 3 sumandos indescomponibles).
Sea $V \in \mathcal{F}$, entonces V es sumando de $T^{-1}\Sigma\bar{V}$, con $\bar{V} \in mod(\bar{Q}, \bar{I})$ indescomponible. Existe $g \in G$ tal que $sop(\bar{V}^g) \cap A$ es no vacío (tomemos $\bar{x} \in sop(\bar{V})$, existe $\bar{y} \in A$ tal que $\pi\bar{y} = \pi\bar{x}$ y por tanto hay algún $g \in G$ tal que $g\bar{x} = \bar{y}$). De esta manera, $\bar{V}^g \cong \bar{V}_i$. Por lo tanto V es sumando de $T^{-1}\Sigma\bar{V} \cong T^{-1}\Sigma\bar{V}^g \cong T^{-1}\Sigma\bar{V}_i$, así que $V \cong U_j$. En conclusión, $\mathcal{F}$ es finito.
Hemos probado que dentro de $\mathcal{F}$ existe una componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten, que evidentemente será finita. Pero si tenemos una componente conexa finita C dentro del carcaj de Auslander-Reiten, C es todo (ver por ejemplo [3]) y por lo tanto (Q, I) es de tipo de representación finita. •

Veamos cómo utilizar el principal resultado que probamos en un ejemplo.
Sea Q el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[r, "\alpha"] & b \arrow[dr, "\beta"] & \\ f \arrow[ur, "\eta"] & & & c \arrow[dl, "\gamma"] \\ & e \arrow[ul, "\epsilon"] & d \arrow[l, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

I algún ideal admisible.
En este caso el cubrimiento universal de (Q, I) es $(\hat{Q}, \hat{I})$, con $\hat{Q}$:

$$. \quad . \quad . \quad f_{-1} \xrightarrow{\eta_{-1}} a_0 \xrightarrow{\alpha_0} b_0 \xrightarrow{\beta_0} c_0 \xrightarrow{\gamma_0} d_0 \xrightarrow{\delta_0} e_0 \xrightarrow{\epsilon_0} f_0 \xrightarrow{\eta_0} a_1 \xrightarrow{\alpha_1} b_1 \quad . \quad . \quad .$$

Para estudiar el tipo de representación de (Q, I), estudiaremos a $(\hat{Q}, \hat{I})$.
Sea $x \in \hat{Q}_0$, por ser $\hat{I}$ admisible sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los caminos que empiezan o terminan en x de largo mayor o igual que n están en $\hat{I}$. Sea $V \in mod(\hat{Q}, \hat{I})$ tal que $V(x) = V_0 \neq 0$. Llamaremos $x_1, ..., x_n, ...$ a los sucesores de $x = x_0$ y $x_{-1}, ..., x_{-n}...$ los predecesores de x.
Tomemos una representación de $(\hat{Q}, \hat{I})$:

$$. \quad . \quad . \quad V_{-1} \xrightarrow{T_{-1}} V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \quad . \quad . \quad . \quad V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} V_n \xrightarrow{T_n} V_{n+1} \quad . \quad . \quad .$$

Definimos K subrepresentación de V de la siguiente manera: $K(x_i) = V(x_i)$ para todo $i \leq 0$, $K(x_1) = Ker(T_{n-1}...T_1)$, $K(x_2) = Ker(T_{n-1}...T_2)$, ..., $K(x_{n-1}) = Ker(T_{n-1})$, $K(x_j) = 0$ para todo $j \geq n$. Como $T_n...T_1 = 0$ (porque V es representación de $(\hat{Q}, \hat{I})$), definiendo las transformaciones lineales como las restricciones de las T_i obtenemos que K es subrepresentación de V.
Sea W_1 subespacio de V_1 tal que $W_1 \oplus K(x_1) = V_1$. Si $v \in T_1(W_1) \cap K(x_2) = \{0\}$, entonces existe $w \in W_1$ tal que $v = T_1(w)$ y a su vez $T_{n-1}...T_2(v) = 0$, o sea que $w \in Ker(T_{n-1}...T_1)$, concluyendo que $w = 0$ y por tanto $v = 0$, de esta manera, hemos probado que $T_1(W_1) \cap K(x_2) = \{0\}$. Podemos entonces tomar W_2 subespacio de V_2 de forma que $T_1(W_1) \subset W_2$ y $W_2 \oplus K(x_2) = V_2$. De igual forma, para cada $i = 3, ..., n-1$ podemos encontrar W_i subespacio de V_i tal que $T_{i-1}(W_{i-1}) \subset W_i$ y $W_i \oplus K(x_i) = V_i$. Definimos W subrepresentación de V de la siguiente manera: $W(x_i) = 0$ para $i \leq 0$, $W(x_i) = W_i$ para $i = 1, ..., n-1$ y $W(x_i) = V_i$ para todo $i \geq n$; las transformaciones lineales las definimos como restricciones de las T_i a W_i. Por la manera en que se construyó, es claro que $V = K \oplus W$.
En conclusión, si $V \in mod(\hat{Q}, \hat{I})$ es indescomponible con $V(x) \neq 0$, entonces $V(x_i) = 0$ para todo $i \geq n$. De igual manera (realizando la construcción a partir de x_{-n} en lugar de x_0) se prueba que $V(x_i) = 0$ para todo $i \leq -n$.
Así toda representación indescomponible V de $(\hat{Q}, \hat{I})$ con $V(x) \neq 0$ puede verse como una representación del carcaj lineal con $2n - 1$ vértices, que sabemos es de tipo de representación finita. Por lo tanto sólo hay finitos $V \in mod(\hat{Q}, \hat{I})$ con $x \in sop(V)$. O sea que $(\hat{Q}, \hat{I})$ es localmente de representación finita y por lo tanto (Q, I) es de tipo de representación finito.

Capítulo 5

Cubiertas universales sin ciclos dirigidos

En esta sección estudiaremos las cubiertas sin ciclos dirigidos, primero algunas propiedades y luego la "unicidad"de la cubierta universal en ese caso.

Definición 5.0.10. Un módulo se dice **uniserial** si dados N_1 y N_2 dos submódulos de M, se tiene $N_1 \subset N_2$ o $N_2 \subset N_1$.

Definición 5.0.11. Sea $M \neq 0$ un módulo. Una cadena de $n+1$ submódulos $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$ es una **serie de composición** de largo n si M_i/M_{i-1} es simple para todo $i = 1, ..., n$.

La existencia de las series de composición está dada por el siguiente resultado (para la prueba, ver [5]):

Proposición 5.0.12. *Un módulo M tiene serie de composición si y solo si es a la vez noetheriano y artiniano.*

En particular, si estamos trabajando con un módulo sobre una $\mathbb{K}$-álgebra todo módulo de dimensión finita tiene serie de composición.

Estamos en condiciones de enunciar (sin demostrar, para ello se puede ver [5]) el siguiente resultado:

Proposición 5.0.13. *Sea M un A-módulo. M es uniserial si y solo si $M \supset rad(A)M \supset \ldots \supset rad^k(A)M = 0$ es una serie de composición.*

5.1. Propiedades de (Q, I)

Definición 5.1.1. Un carcaj con relaciones (Q, I) se dice **schurian** si dados $x, y \in Q_0$, $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(Q, I)(x, y) \leq 1$.

Lema 5.1.2. *(Q, I) carcaj con relaciones localmente de representación finita, Q sin ciclos dirigidos, entonces (Q, I) es schurian.*

Demostración: Dado $x \in Q_0$, $\mathbb{K}Q(x, x)$ tiene como base a τ_x, no existen otros caminos de x a x por no tener Q ciclos dirigidos. Así tenemos que el radical de $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$ es $R_x = 0$.
Sean $x, y \in Q_0$. Al ser (Q, I) localmente de representación finita, se muestra en [7] que $\mathbb{K}(Q, I)(x, y)$ es $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$- módulo uniserial o $\mathbb{K}(Q, I)(y, y)$- módulo uniserial. Supongamos que ocurre lo primero, entonces la serie del radical de $\mathbb{K}(Q, I)(x, y)$ es de composición. Como $R_x = 0$, si $\mathbb{K}(Q, I)(x, y) \neq 0$, debe ser $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$-módulo simple. Pero $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$ tiene dimensión 1, así que los $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$-módulos simples tienen dimensión 1. $\bullet$

A lo largo del capítulo (Q, I) representará un carcaj con relaciones localmente de representación finita y $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \to (Q, I)$ su cubierta universal.

Lema 5.1.3. *Si $\tilde{Q}$ no tiene ciclos dirigidos, se verifica:*
(A) *Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in I$ es relación mínima, dados $i, j \in \{1, ..., n\}$ distintos, se tiene $c \in \mathbb{K}^*$ tal que $u_i + cu_j \in I$.*
(B) *Si tengo un camino u de x a y, dos caminos v, w de y a z tales que $vu, wu \notin I$, se tiene para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$ que $vu + \lambda wu \in I$ si y sólo si $v + \lambda w \in I$.*

Demostración: **(A)** Sea $\bar{x} \in \tilde{Q}_0$ con $\pi\bar{x} = x$. Tomamos para cada $i \in \{1, ..., n\}$ $\tilde{u}_i$ el levantamiento de u_i que comienza en $\bar{x}$. Ya hemos probado (en 2.2.7) que $e(\tilde{u}_i) = e(\tilde{u}_j)$, llamemos $\bar{y}$ a ese punto, luego $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in \tilde{I}(\bar{x}, \bar{y})$ es también una relación mínima.
Por 3.3.1, $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ es localmente de representación finita y, por el lema anterior, schurian. Si tomamos $i, j \in \{1, ..., n\}$, tenemos $\tilde{u}_i, \tilde{u}_j \in \tilde{I}(\bar{x}, \bar{y})$ y por lo tanto existe $c \in \mathbb{K}^*$ tal que $\tilde{u}_i + c\tilde{u}_j \in \tilde{I}$. Pasando al cociente tenemos $u_i + cu_j \in I$.
(B) Supongamos que $vu + \lambda wu \in I$. Como además $vu, wu \notin I$, es una relación mínima, por lo tanto $vu \sim wu$, y cancelando obtenemos $v \sim w$. Sean $\tilde{v}, \tilde{w}$ levantamientos de v, w que empiezan en $\bar{x}$, entonces $e(\tilde{v}) = e(\tilde{w})$, y por ser $(\tilde{Q}, \tilde{I})$ schurian debe pasar que $\tilde{v} + c\tilde{w} \in \tilde{I}$ y $v + cw \in I$. Entonces $vu + cwu \in I$, sabiendo además que $vu \notin I$ y $vu + \lambda wu \in I$ llegamos a $c = \lambda$. $\bullet$

Lema 5.1.4. *Si el ideal I está generado por una familia de relaciones cero y mínimas con dos sumandos, entonces (Q, I) satisface la propiedad **(A)**.*

Demostración: Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ relación mínima. Tenemos que $\rho = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \rho_j$, con $\rho_j = v_j + c_j w_j \in I$ porque por hipótesis I está generado por relaciones con dos sumandos y relaciones cero, pero al ser ρ mínima no pueden aparecer las cero en la suma.
Haremos inducción en m.
Si $m = 1$, tenemos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \mu_1 \rho_1 = \mu_1 v_1 + \mu_1 c_1 w_1$, por lo tanto $n = 2$, $u_1 = v_1$, $u_2 = w_1$ y entonces tenemos $u_1 + c_1 u_2 \in I$.
Sea $m > 1$.

Supongamos primero que w_m no aparece en la expresión de ρ, o sea $w_m \neq u_i$ para $1 \leq i \leq n$. Supongamos que w_m no aparece en los primeros $t-1$ ρ_i pero sí lo hace en los últimos $m-t+1$, o sea $\rho_i = v_i + c_i w_m$ para $i \geq t$. El coeficiente de w_m es $\sum_{i=t}^{m} \mu_i c_i$ y debe ser 0.
Definimos ρ_i' como $\rho_i = \rho_i'$ si $1 \leq i < t$, y $\rho_i' = v_i - \frac{c_i}{c_m} v_m$ si $t \leq i \leq m-1$.
Es evidente que $\sum_{i=1}^{t-1} \mu_i \rho_i' = \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i \rho_i$.
Por otro lado:

$$\sum_{i=t}^{m-1} \mu_i \rho_i' = \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i (v_i - \frac{c_i}{c_m} v_m) = \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i v_i - \frac{1}{c_m} (\sum_{i=t}^{m-1} \mu_i c_i) v_m = \sum_{i=t}^{m-1} \mu_i v_i + \frac{1}{c_m} (\mu_m c_m) v_m$$

$$= \sum_{i=t}^{m} \mu_i v_i = \sum_{i=t}^{m} \mu_i (v_i + c_i w_i)$$ (la última igualdad se da porque $\sum_{i=t}^{m} \mu_i c_i = 0$).
Además $\rho_i' = v_i - \frac{c_i}{c_m} v_m = v_i + c_i w_m - \frac{c_i}{c_m}(v_m + c_m w_m) = \rho_i - \frac{c_i}{c_m} \rho_m \in I$ y es relación mínima ($v_j \notin I$ porque ρ_j son relaciones mínimas).
Tenemos entonces que $\rho = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \rho_i'$, con ρ_i' relación mínima. Por hipótesis de inducción concluimos que dados $i, j \in \{1, ..., n\}$ existe $c \in \mathbb{K}^*$ tal que $u_i + c u_j \in I$.

Supongamos ahora que todo v_i, w_i aparece en ρ. Pongamos $v_m = u_{n-1}, w_m = u_n$, $n \geq 3$ (si $n = 2$, tenemos $\rho = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ y ya estaría probado).
Definimos $\rho' = \rho - \frac{\lambda_n}{c_m} \rho_m \in I$. $\rho' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i - \frac{\lambda_n}{c_m}(u_{n-1} + c_m u_n) = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i u_i + (\lambda_{n-1} - \frac{\lambda_n}{c_m}) u_{n-1}$. Si $\lambda_{n-1} - \frac{\lambda_n}{c_m} = 0$, tendría $\lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n u_n \in I$, lo que contradice que ρ sea relación mínima. Notaremos ahora $\lambda_i' = \lambda_i$ para $i = 1, ..., n-2$, $\lambda_{n-1}' = \lambda_{n-1} - \frac{\lambda_n}{c_m}$.
La relación $\rho' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' u_i$ es mínima:
Si $\emptyset \neq K \subsetneq \{1, ..., n-1\}$, $\sum_{i \in K} \lambda_i' u_i \in I$; como ρ es mínima $n-1 \in K$, o sea $K \setminus \{n-1\} \subsetneq \{1, ..., n-2\}$. Tenemos entonces $\sum_{i \in K \setminus \{n-1\}} \lambda_i u_i + (\lambda_{n-1} - \frac{\lambda_n}{c_m}) u_{n-1} \in I$, $\frac{\lambda_n}{c_m}(u_{n-1} + c_m u_n) \in I$, sumando obtenemos $\sum_{i \in K \setminus \{n-1\}} \lambda_i u_i + \lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n u_n \in I$, que contradice que ρ es mínima.
Tenemos entonces que ρ' es relación mínima, es combinación lineal de $\rho_1, ..., \rho_m$, pero en ella no aparece $u_n = w_m$. Por lo hecho anteriormente, se verifica que ρ' es combinación lineal de $\rho_1, ..., \rho_{m-1}$. Por hipótesis inductiva deducimos que $u_i + c u_j \in I$ si $i, j \in \{1, ..., n-1\}$. Teníamos además que $u_{n-1} + c_m u_n \in I$, lo que concluye la prueba.●

Proposición 5.1.5. *Supongamos que (Q, I) satisface **(A)**. Sean $x, y \in Q_0$ tales que $\mathbb{K}(Q, I)(x, y)$ es uniserial como $\mathbb{K}(Q, I)(x, x)$ módulo. Entonces existe un camino u de x a y, w un ciclo dirigido en x de forma que dado un camino v de x a y, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*, n \in \mathbb{N}$ tal que $v + \lambda u w^n \in I$.*

Demostración: Notaremos $\Lambda_x = \mathbb{K}(Q, I)(x, x)$, $R_x = rad(\Lambda_x)$.
Mostremos primero que Λ_x puede ser representada como un cociente de un álgebra de caminos. Al ser I un ideal admisible, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los caminos que comienzan en x de largo mayor o igual que n están en el ideal. La cantidad de

caminos de largo a lo sumo n que empiezan y terminan en x son una cantidad finita por ser Q localmente finito. Definimos el carcaj C con $C_0 = \{x\}$ y colocando una flecha α_u (de x en x) por cada camino u en Q de largo menor o igual a n que empieza y termina en n. Tenemos un morfismo $\phi : \mathbb{K}C \to \Lambda_x$, definido por $\phi(\alpha_u) = u$ para todo $u \in C_1$. Este morfismo es claramente sobreyectivo, por lo que Λ_x es un cociente de $\mathbb{K}C$.

Sea $f \in \mathbb{K}(Q,I)(x,y) \setminus rad_{\Lambda_x}\mathbb{K}(Q,I)(x,y)$. Podemos escribir $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{u}_i$, con u_i camino de x a y, entonces tenemos un camino u de x a y con $\bar{u} \notin rad_{\Lambda_x}\mathbb{K}(Q,I)(x,y)$. Si $R_x = 0$, se mostró en 5.1.2 que $\mathbb{K}(Q,I)(x,y)$ tiene dimensión 1 y por lo tanto ya tenemos el resultado.

La serie del radical es de composición por ser Λ_x uniserial. Por lo tanto, si $R_x^n \neq 0$ entonces R_x^n/R_x^{n+1} es simple y, por ser Λ_x un cociente de un álgebra de caminos, tiene dimensión 1. Si tenemos $R_x \neq 0$, tomamos w ciclo dirigido en x con $\bar{w} \notin R_x^2$ y $\bar{w}^2 \in R_x^2$. Veamos que $\bar{w}^2 \notin R_x^3$. Si no fuera así, tomamos $y \in R_x^2 \setminus R_x^3$, $y = \sum_{i=1}^{m} r_1^i r_2^i$ con $r_1^i, r_2^i \in R_x$. Hay algún j tal que $r_1^j r_2^j \notin R_x^3$ y por tanto $r_1^j, r_2^j \notin R_x^2$. Se tiene $[0] \neq [r_1^j] \in R_x/R_x^2 \cong \mathbb{K}$ (porque la serie del radical es de composición) y entonces existe $c_1 \in \mathbb{K}^*, t_1 \in R_x^2$ tal que $r_1^j = c_1\bar{w} + t_1$, y de igual manera $r_2^j = c_2\bar{w} + t_2$. Tenemos entonces que $r_1^j r_2^j = c_1c_2\bar{w}^2 + c_1\bar{w}t_2 + c_2t_1\bar{w} + t_1t_2 \in R_x^3$, llegando a un absurdo. De esta misma manera obtenemos que para todo h tal que $R_x^h \neq 0$ se tiene $\bar{w}^h \in R_x^h \setminus R_x^{h+1}$ y $[\bar{w}^h]$ es base de R_x^h/R_x^{h+1}. Concluimos entonces que $\Lambda_x = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbb{K}\bar{w}^i$, donde m es el mínimo que verifica $R_x^{m+1} = 0$.

Sea v camino de x a y. Como $\mathbb{K}(Q,I)(x,y)$ es Λ_x-módulo uniserial, se tiene $\bar{u}\Lambda_x \subset \bar{v}\Lambda_x$ ó $\bar{v}\Lambda_x \subset \bar{u}\Lambda_x$.
Supongamos primero $\bar{u}\Lambda_x \subset \bar{v}\Lambda_x$. En este caso tendríamos $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ tal que $\bar{u} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \bar{v}\bar{w}^i$, o sea que $u - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v w^i \in I(x,y)$. Como $u \notin I$, tenemos $K \subset \{0, ..., m\}$ y una relación mínima $u - \sum_{i\in K} \lambda_i v w^i \in I(x,y)$. Por la propiedad **(A)**, existen $c \in \mathbb{K}^*$, $n \in K$ tales que $u + cvw^n \in I(x,y)$. Pero entonces $\bar{u} = -c\bar{v}\bar{w}^n \notin rad_{\Lambda_x}\mathbb{K}(Q,I)(x,y) = \mathbb{K}(Q,I)(x,y)R_x$. Dado que $\bar{w} \in R_x$, $n = 0$ y tenemos entonces $v + \frac{1}{c}u \in I(x,y)$.
Si $\bar{v}\Lambda_x \subset \bar{u}\Lambda_x$, tenemos $\bar{v} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \bar{u}\bar{w}^i$. Tomando relación mínima y usando la propiedad **(A)**, llego a que $v + cuw^n \in I(x,y)$. •

Proposición 5.1.6. *Sea (Q,I) que satisface **(A)** y **(B)**. Sean $x_i \xrightarrow{\alpha_i} x_{i+1}$, $\mu = \alpha_n...\alpha_1$, $\mu' = \rho_{n+1}\alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1$, con ρ_i ciclo dirigido en x_i. Si $\bar{\mu}' = c\bar{\mu}$ en $\mathbb{K}(Q,I)$ para algún $c \in \mathbb{K}^*$, entonces todos los ρ_i son triviales.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{K}(Q,I)(x_1, x_{n+1})$ es $\mathbb{K}(Q,I)(x_1,x_1)$-módulo uniserial. Definimos $\mu'' = \alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1$. Como $\mu'' \notin I(x_1, x_{n+1})$, $\overline{\mu''}\Lambda_{x_1} \subset \bar{\mu}\Lambda_{x_1}$ ó $\bar{\mu}\Lambda_{x_1} \subset \overline{\mu''}\Lambda_{x_1}$. Vamos a probar que ocurre lo primero.
Supongamos que $\bar{\mu}\Lambda_{x_1} \subset \bar{\mu}''\Lambda_{x_1}$. Tenemos w un ciclo en x_1 tal que $\{\bar{w}^i : i = 0, 1, ..., d\}$ genera a Λ_{x_1}. Tendríamos que $\mu + \lambda\mu'' w^m \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Haremos inducción en n. Si $n = 1$, tengo $\alpha_1 + \lambda\alpha_1\rho_1 w^m \in I$, pero al ser I admisible, ρ_1 es trivial, $m = 0$ y $\lambda = -1$. O sea, $\mu'' - \mu \in I$.
Sea $n > 1$. Tenemos $\alpha_n...\alpha_1 + \lambda\alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1 w^m \in I$, $\alpha_n...\alpha_1 \notin I$. Por propiedad **(B)**, esto implica $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + \lambda\rho_n\alpha_{n-1}...\rho_2\alpha_1\rho_1 w^m \in I$.
Si $\mathbb{K}(Q, I)(x_1, x_n)$ es Λ_{x_1}- módulo uniserial, por hipótesis de inducción $\alpha_{n-1}\rho_{n-1}...\alpha_1\rho_1 + a\alpha_{n-1}...\alpha_1 w^t \in I$ para algún $t \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{K}^*$. Multiplicando esta última relación por ρ_n a izquierda y por w^m a derecha, llegamos a $\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^m$ $+a\rho_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 w^{t+m} \in I$, y utilizando la relación que aparece en el final del párrafo anterior, $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + k_1\rho_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 w^{t+m} \in I$ con $k_1 \in \mathbb{K}^*$. Multiplicando esto por w^{m+t} a derecha y por $-k_1\rho_n$ a izquierda y sumándole la relación anterior, llegamos a $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + k_2\rho_n^2\alpha_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^{2(m+t)} \in I$, con $k_2 \in \mathbb{K}^*$. De igual manera podemos llegar, para todo $r \in \mathbb{N}$, a que $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + k_r\rho_n^r\alpha_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^{r(m+t)} \in I$, con $k_r \in \mathbb{K}$. Pero al ser I admisible, si $m + t > 0$, existe r_0 tal que $w^{r_0(m+t)} \in I$, y por lo tanto $\alpha_{n-1}...\alpha_1 \in I$, lo que significaría que $\mu \in I$, contradiciendo la hipótesis. Entonces $m = t = 0$ y, también usando que I es admisible, ρ_n es trivial. O sea que $\mu'' + \frac{1}{\lambda}\mu \in I$.
En el caso que $\mathbb{K}(Q, I)(x_1, x_n)$ sea Λ_{x_n}-módulo uniserial, por hipótesis de inducción tenemos $\lambda' \in \mathbb{K}^*, t \in \mathbb{N}$ con $\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}...\rho_2\alpha_1 + \lambda' w^t\alpha_{n-1}...\alpha_1 \in I$. Multiplicando se obtiene $\rho_n\alpha_{n-1}\rho_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^m + a w^t\alpha_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^m \in I$, y operando igual que antes llegamos a $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + k_1 w^t\alpha_{n-1}...\alpha_1\rho_1 w^m \in I$. Iterando este procedimiento, obtenemos que para todo $r \in \mathbb{N}$ $\alpha_{n-1}...\alpha_1 + k_r w^{rt}\alpha_{n-1}...\alpha_1(\rho_1 w^m)^r \in I$. Esto implica que $m = t = 0$ y que ρ_1 es trivial. O sea $\mu'' + \frac{1}{\lambda}\mu \in I$.
En conclusión, hemos probado que $\overline{\mu''}\Lambda_{x_1} \subset \bar{\mu}\Lambda_{x_1}$, o sea que $\mu'' + \lambda\mu w^m \in I$ para algunos $\lambda \in \mathbb{K}^*, m \in \mathbb{N}$.
Probemos el teorema por inducción. Si $n = 1$, tenemos $\rho_2\alpha_1\rho_1 + c\alpha_1 \in I$. Al ser I admisible, ρ_1, ρ_2 son triviales.
Sea $n > 1$. Tenemos $\rho_{n+1}\alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1 + c\alpha_n...\alpha_1 \in I$ (por hipótesis) y $\alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1 + \lambda\alpha_n...\alpha_1 w^m \in I$ (lo probado antes). Multiplicando por ρ_{n+1} la segunda relación y restándole la primera, obtenemos $\alpha_n...\alpha_1 + \lambda'\rho_{n+1}\alpha_n...\alpha_1 w^m \in I$, con $\lambda' \in \mathbb{K}^*$. Operando como antes (multiplicando muchas veces por ρ_{n+1} y por w^m), llegamos a que $m = 0$ y ρ_{n+1} es trivial. Nos queda entonces $\alpha_n\rho_n...\rho_2\alpha_1\rho_1 + c\alpha_n...\alpha_1 \in I$ y por **(B)**, $\rho_n\alpha_{n-1}...\rho_2\alpha_1\rho_1 + c\alpha_{n-1}...\alpha_1 \in I$. Utilizamos la hipótesis de inducción y termina la demostración. •

5.2. Unicidad de la cubierta universal

Teorema 5.2.1. *Sean (Q, I_1), (Q, I_2) carcajes con relaciones localmente de representación finita que verifican **(A)** y **(B)**, tales que $\mathbb{K}(Q, I_1) \cong \mathbb{K}(Q, I_2)$. Sean $\pi_1 : (\tilde{Q}, \tilde{I}_1) \longrightarrow (Q, I_1)$, $\pi_2 : (\Delta, \tilde{I}_2) \longrightarrow (Q, I_2)$ sus cubiertas universales. Entonces $\tilde{Q} = \Delta$ y $\Pi_1(Q, I_1) = \Pi_1(Q, I_2)$*

Demostración: Tenemos $0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \mathbb{K}Q \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \mathbb{K}Q \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ exactas. Dada $\alpha \in Q_1$, existe $f(\alpha) \in \mathbb{K}Q$ con $\psi(f(\alpha)) = \varphi(\alpha)$. Puedo extender f a $\mathbb{K}Q$ como morfismo de álgebras. De manera análoga defino g. Si

$\rho = \sum_i \lambda_i v_i \in I_1$, tenemos $\varphi(\rho) = 0 = \psi(f(\rho))$ y por lo tanto $f(\rho) \in I_2$. Obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f|_{I_1}"] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "g|_{I_2}"] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\varphi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $\mu \in I_1$ camino. Escribimos $\mu = \alpha_n ... \alpha_1$ con $\alpha_i : x_{i-1} \to x_i$ flecha. Se tiene que $f(\alpha_k) = \sum_i \lambda_i \mu_i^{(k)}$ es suma de caminos de x_{k-1} a x_k. Como $\varphi(g(f(\alpha_k))) = \varphi(\alpha_k)$, ocurre que $gf(\alpha_k) - \alpha_k \in I_1 \subset F^2$, así que $gf(\alpha_k) \notin F^2$.
Por el lema anterior, tengo u_k camino de x_{k-1} a x_k, w_k ciclo en x_{k-1} (o ciclo en x_k) tal que $\mu_i^{(k)} + a_i^{(k)} u_k w_k^{n_i^{(k)}} \in I_2$ para algún $n_i^{(k)} \in \mathbb{N}$ (ó $\mu_i^{(k)} + a_i^{(k)} w_k^{n_i^{(k)}} u_k \in I_2$). O sea que tenemos $f(\alpha_k) + \lambda_k u_k + \sum_{i=1}^{n_k} x_{i,k} u_k w_k^i \in I_2$ (ó $f(\alpha_k) + \lambda_k u_k + \sum_{i=1}^{n_k} x_{i,k} w_k^i u_k \in I_2$). Si le aplicamos g a esta expresión obtenemos $gf(\alpha_k) + \lambda_k g(u_k) + \sum_{i=1}^{n_k} x_{i,k} g(u_k) g(w_k^i) \in I_1$. Como $gf(\alpha_k) \notin F^2$, debe ocurrir que $g(u_k) \notin F^2$ y $\lambda_k \neq 0$ ($\sum_{i=1}^{n_k} x_{i,k} g(u_k) g(w_k^i) \in F^2$ por ser imagen por g de elementos de F^2) y por lo tanto u_k debe ser una flecha, y al no existir flechas dobles debe ser $u_k = \alpha_k$.
Tenemos entonces $f(\mu) + \lambda\mu + \sum_{\mu_t ... \mu_1 = \mu, t>1} x_{\mu_1 ... \mu_t} \rho_{t+1} \mu_t \rho_t ... \mu_2 \rho_2 \mu_1 \rho_1 \in I_2$, con $\lambda \neq 0$ y ρ_i ciclos no triviales. Veamos que esto implica que $\mu \in I_2$.
Si $\mu \notin I_2$, como $f(\mu) \in I_2$, existe alguna relación mínima con μ y alguno de los otros sumandos de arriba, y por propiedad **(A)**, tendríamos $\mu + c\rho_{t+1}\mu_t ... \rho_2 \mu_1 \rho_1 \in I_2$ con $c \in \mathbb{K}^*$, lo que contradice la proposición anterior.
Si $\mu \sim \nu$ por formar parte de una relación mínima en I_1, por la propiedad **(A)** existe $c \in \mathbb{K}^*$ con $c\mu + \nu \in I_1$.
Tengo $f(c\mu + \nu) + \lambda\mu + \lambda'\nu + \sum_{\mu_t ... \mu_1 = \mu, t>1} x_{\mu_1 ... \mu_t} \rho_{t+1} \mu_t \rho_t ... \mu_2 \rho_2 \mu_1 \rho_1$
$+ \sum_{\nu_s ... \nu_1 = \nu, s>1} x_{\nu_1 ... \nu_s} \rho'_{s+1} \nu_s \rho'_s ... \nu_2 \rho'_2 \nu_1 \rho'_1 \in I_2$ con ρ_i, ρ'_i ciclos no triviales, $\lambda, \lambda' \neq 0$.
$\mu \notin I_2$ (ya probamos que esto implica que $\mu \in I_1$, que no ocurre porque μ es sumando en una relación mínima). Entonces μ forma relación mínima en I_2 con alguno de los sumandos de arriba. Si no es con ν, debe ser con algún $\rho'_{s+1}\nu_s ... \nu_1 \rho'_1$ (por la proposición anterior). En ese caso, tendríamos $\mu + x\rho'_{s+1}\nu_s \rho'_s ... \nu_1 \rho'_1 \in I_2$ relación mínima.
Haciendo un razonamiento análogo al que hicimos antes, obtenemos
$g(\mu + x\rho'_{s+1}\nu_s\rho'_s ... \nu_1\rho'_1) + d\mu + \sum_{\mu'_t ... \mu'_1 = \mu, t>1} c_{\mu'_1 ... \mu'_t} \delta_{t+1} \mu'_t \delta_t ... \mu'_1 \delta_1$
$+ \sum_{\nu'_s ... \nu'_1 = \nu, s>1} c_{\nu'_1 ... \nu'_s} \delta'_{s+1} \nu'_s \delta'_s ... \nu'_1 \delta'_1 \in I_1$ con δ_i, δ'_i ciclos no triviales, $d \in \mathbb{K}^*$ (porque las particiones de ν_i dan particiones de ν).
Como $g(\mu + x\rho'_{s+1}\nu_s\rho'_s ... \nu_1\rho'_1) \in I_1$, μ está en una relación mínima con alguno de los otros sumandos de arriba, no puede ser con una partición de μ porque contradice la proposición anterior, as í que tenemos $\mu + a\delta'_{s+1}\nu'_s ... \nu'_1 \delta'_1 \in I_1$. Pero teníamos que $c\mu + \nu \in I_1$, luego $\nu + b\delta'_{s+1}\nu'_s ... \nu'_1\delta'_1 \in I_1$, lo que lleva a una contradicción con la

proposición anterior.
Hemos probado que si hay una relación mínima en I_1 con μ y ν como sumandos, entonces $\mu + c'\nu \in I_2$ para algún $c' \in \mathbb{K}^*$. Es claro que la prueba sirve si intercambiamos I_1 por I_2, o sea que las homotopías en (Q, I_1) y en (Q, I_2) coinciden, lo que demuestra el teorema. •

Observación 5.2.2. Vale observar que, respetando las hipótesis y la notación del teorema, $\lambda\mu + \lambda'\nu \in I_2$.
En el teorema habíamos llegado a que $\lambda\mu+\lambda'\nu+\sum_{\mu_t\ldots\mu_1=\mu, t>1} x_{\mu_1\ldots\mu_t}\rho_{t+1}\mu_t\rho_t\ldots\mu_2\rho_2\mu_1\rho_1$ $+ \sum_{\nu_s\ldots\nu_1=\nu, s>1} x_{\nu_1\ldots\nu_s}\rho'_{s+1}\nu_s\rho'_s\ldots\nu_2\rho'_2\nu_1\rho'_1 \in I_2$. Esta debe ser suma de relaciones mínimas y cero. Como $\mu \notin I_2$, $\lambda\mu$ forma parte de una de las relaciones mínimas de la descomposición, pero mostramos que sólo ν puede aparecer como sumando de μ en una relación mínima. Por lo tanto $\lambda\mu + \lambda'\nu \in I_2$ es relación mínima.

Teorema 5.2.3. *Sean (Q, I_1), (Q, I_2) carcajes con relaciones localmente de representación finita que verifican **(A)** y **(B)**, tales que $\mathbb{K}(Q, I_1) \cong \mathbb{K}(Q, I_2)$. Sean $\pi_1 : (\tilde{Q}, \tilde{I}_1) \longrightarrow (Q, I_1)$, $\pi_2 : (\Delta, \tilde{I}_2) \longrightarrow (Q, I_2)$ sus cubiertas universales.*
Entonces, existen isomorfismos $h : \mathbb{K}(Q, I_1) \to \mathbb{K}(Q, I_2)$, $\tilde{h} : \mathbb{K}(\tilde{Q}, \tilde{I}_1) \to \mathbb{K}(\Delta, \tilde{I}_2)$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(\tilde{Q}, \tilde{I}_1) \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\mathbb{K}(\pi_1)"] & \mathbb{K}(\Delta, \tilde{I}_2) \arrow[d, "\mathbb{K}(\pi_2)"] \\
\mathbb{K}(Q, I_1) \arrow[r, "h"] & \mathbb{K}(Q, I_2)
\end{tikzcd} .$$

Demostración: Como en el teorema anterior, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f|_{I_1}"] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "g|_{I_2}"] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & \mathbb{K}Q \arrow[r, "\varphi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $\alpha : x \to y$ flecha, $f(\alpha) + \lambda_\alpha\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha w^i \in I_2(x, y)$. Definimos $\hat{h}(\alpha) = \lambda_\alpha\alpha$.
Es claro que $\hat{h} : \mathbb{K}Q \longrightarrow \mathbb{K}Q$ es isomorfismo. Por el teorema y la observación anteriores, sabemos además que lleva relaciones cero y mínimas de I_1 en relaciones cero y mínimas de I_2, así que $\hat{h}(I_1) \subset I_2$ y por lo tanto induce un morfismo $h : \mathbb{K}(Q, I_1) \longrightarrow \mathbb{K}(Q, I_2)$. Para ver que h es un isomorfismo alcanza con ver que $\hat{h}^{-1}(I_2) \subset I_1$, es decir que la inversa de $\hat{h}$ también preserva relaciones.
Para $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q, podemos escribir $f(\alpha) = \lambda_\alpha\alpha + r_\alpha$, $g(\alpha) = \lambda'_\alpha\alpha + r'_\alpha$, con

$r_\alpha, r'_\alpha \in F^2$. Entonces $gf(\alpha) = \lambda_\alpha \lambda'_\alpha \alpha + r''_\alpha$, con $r''_\alpha \in F^2$.
$\varphi(gf(\alpha)) = \varphi(\alpha) \Rightarrow gf(\alpha) - \alpha \in I_1 \Rightarrow (\lambda'_\alpha \lambda_\alpha - 1)\alpha + r''_\alpha \in I_1$. Esto implica que $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = 1$ (porque $I_1 \subset F^2$).
Por lo tanto, definiendo $\chi(\alpha) = \lambda'_\alpha \alpha$, $\chi : \mathbb{K}Q \longrightarrow \mathbb{K}Q$ es la inversa de $\hat{h}$ y $\chi(I_2) \subset I_1$ (por el mismo argumento que $\hat{h}(I_1) \subset I_2$). Así concluimos que $h : \mathbb{K}(Q, I_1) \longrightarrow \mathbb{K}(Q, I_2)$ es isomorfismo.
Por el teorema anterior, sabemos que $\tilde{Q} = \Delta$. Por lo tanto $\pi_1 = \pi_2$ como morfismos de carcajes.
Definimos $\tilde{g} : \mathbb{K}\tilde{Q}_1 \longrightarrow \mathbb{K}\tilde{Q}_2$ como la identidad en vértices y como $\tilde{g}(\beta) = \lambda_{\pi_1(\beta)}\beta$ para toda flecha β. Razonando como antes, para ver que $\tilde{g}$ induce un isomorfismo $\tilde{h} : \mathbb{K}(\tilde{Q}, \tilde{I}_1) \to \mathbb{K}(\Delta, \tilde{I}_2)$ basta ver que $\tilde{g}(\tilde{I}_1) \subset \tilde{I}_2$.
Dada β flecha en $\tilde{Q}$, $\tilde{g}(\pi_1(\beta)) = \lambda_{\pi_1(\beta)}\pi_1(\beta) = \lambda_{\pi_1(\beta)}\pi_2(\beta)$ y $\pi_2(\tilde{g}(\beta)) = \lambda_{\pi_1(\beta)}\pi_2(\beta)$, así que $\tilde{g}(\beta)$ es el único levantamiento por π_2 de $h(\pi_1(\beta))$ que empieza en $s(\beta)$.
Si $v \in \tilde{I}_1$ es relación mínima o cero, entonces $\pi_1(v) \in I_1$ también lo es y por lo tanto $h(\pi_1(v)) \in I_2$ es mínima o cero. Razonando como arriba, tenemos entonces que si $v \in \tilde{I}_1$ es relación mínima o cero, $\tilde{g}(v)$ es el único levantamieno por π_2 de $h(\pi_1(v))$ empezando en $s(v)$, y por lo tanto $\tilde{g}(v) \in \tilde{I}_2$. Como $\tilde{I}_1$ está generado por relaciones mínimas y cero, concluimos que $\tilde{g}(\tilde{I}_1) \subset \tilde{I}_2$.
Ya mostramos antes que $\pi_2(\tilde{g}(\beta)) = h(\pi_1(\beta))$ para toda flecha β de $\tilde{Q}$, así que se verifica $\mathbb{K}(\pi_2)\tilde{h} = h\mathbb{K}(\pi_1)$. •

Usando 5.1.3, podemos concluir que estos dos últimos teoremas son válidos siempre que las cubiertas no tengan ciclos dirigidos. En [1], se muestra que esto ocurre en particular cuando el álgebra $\mathbb{K}(Q, I)$ es estándar, esto significa cuando todos los morfismos entre indescomponibles en $mod(Q, I)$ son sumas de composiciones de morfismos irreducibles.

Bibliografía

[1] José Antonio de la Peña, *La cubierta universal de un carcaj con relaciones*, Tesis de maestría, U.N.A.M. (1982).

[2] C. Riedtmann, *Algebren, Darstellunsköcher, Uebarlagerungen and Zurück*, Comm. Math. Helv. 55 (1980), 199-224.

[3] M. Barot, *Representations of quivers*, Notas de un curso en ICTP, Italia (2006).

[4] Flavio Ulhoa Coelho, *Uma introdução à teoria de representações de álgebras*, Notas de un curso en XII Escola de Álgebra, Diamantina, Brasil (1992).

[5] F.W.Anderson, K.R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, Nueva York (1992).

[6] I. Assem, *Algebres et modules*, Quebec (1992).

[7] James P. Jans, *On the indecomposable representations of algebras*, Annals of Mathematics, vol. 66, no. 3 (1957), 418-429.

[8] S.Liu, *Almost split sequences for non-regular modules*, Fund. Math. 143, (1993), 183-190.

[9] Peter Freyd, *Abelian Categories*, Harper's Series in Modern Mathematics, Nueva York (1964).