

1 de julio de 2014

MONOGRAFÍA DE LICENCIATURA

Geometría Lorentziana y singularidades

Cecile Mezzera

Orientador: Miguel Paternain

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

El objetivo de esta monografía es estudiar un resultado de la Relatividad General: uno de los teoremas de Hawking y Penrose sobre la existencia de singularidades. Para ello estudiaremos variedades semi-Riemannianas y las características principales a ser utilizadas como geodésicas y curvatura. Luego, ya que el espacio-tiempo siempre será representado por una variedad de índice 1, discutiremos particularmente las variedades Lorentzianas. Analizaremos como interpretar la dimensión temporal y daremos entonces las propiedades causales de dichas variedades. Definiremos la hiperbolicidad global, condición que se le impondrá a las variedades Lorentzianas para que representen al espacio-tiempo. Detallaremos la ecuación de Einstein de la Relatividad General, junto con sus principales soluciones, y definiremos la condición fuerte de energía. Finalmente demostraremos el teorema de Hawking y Penrose desde un punto de vista matemático. El mismo demuestra la existencia de singularidades en espacio-tiempos que cumplan la condición fuerte de energía, la hiperbolicidad global, y que en alguna porción de tiempo tengan una tasa de expansión no nula.

Índice general

1. Antecedentes de la teoría de la relatividad general	6
1.1. Antecedentes a la Relatividad Especial	6
1.2. Principios de la Relatividad Especial	8
1.2.1. Diagrama de Minkowski	9
1.2.2. Simultaneidad, Contracción de la distancia y Dilatación del tiempo en el diagrama de Minkowski	10
1.2.3. Espacio de Minkowski y métrica del espacio-tiempo	13
1.3. Paradoja de los gemelos	14
1.4. Relatividad general	16
2. Variedades Semi Riemannianas	19
2.1. Tensores	19
2.1.1. Campos tensoriales	19
2.1.2. Tensores en un punto	20
2.1.3. Contracciones y derivaciones tensoriales	21
2.2. Métricas semi Riemannianas	22
2.3. Corchetes de Lie	24
2.4. Conexión de Levi-Civita y Diferencial Covariante	25
2.5. Transporte paralelo	27
2.6. Geodésicas	28
2.7. Mapa exponencial y referenciales geodésicos	29
2.8. Operaciones con tensores en variedades Semi Riemannianas	31
2.9. Algunos operadores diferenciales	33
3. Curvatura	36
3.1. Curvatura Riemanniana	36
3.2. Curvatura Seccional	39
3.3. Curvatura de Ricci y curvatura escalar	42
4. Subvariedades Semi Riemannianas	44
4.1. Conexión inducida	45
4.2. Hipersuperficies	47
4.3. Conexión normal	48
4.4. Mapas de dos parámetros	49

5. Geometría Riemanniana y Lorentziana	50
5.1. Lema de Gauss	50
5.2. Entornos convexos	51
5.3. Conos temporales en variedades Lorentzianas	53
5.4. Orientabilidad	55
5.5. Propiedades causales en variedades Lorentzianas	58
6. Campos de Jacobi y Cálculo de Variaciones	67
6.1. Campos de Jacobi	67
6.2. Primera y Segunda Variación	70
6.3. La forma de índice	72
6.4. Puntos conjugados	74
6.5. Campos P-Jacobi y puntos focales	77
7. Relatividad General y Ecuación de Einstein	83
7.1. El tensor energía impulso	83
7.2. La ecuación de Einstein	84
7.3. Algunas soluciones a la ecuación de Einstein	85
7.3.1. Espacio de Minkowski: año 1907	86
7.3.2. Solución de Schwarzschild: año 1916	86
7.3.3. Espacio de Sitter/ Anti de Sitter: año 1917	87
7.3.4. Modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker: año 1922	89
7.4. Condición fuerte de energía	92
8. Singularidades	94
8.1. Conceptos previos	94
8.2. El caso Riemanniano	96
8.3. El caso Lorentziano: El teorema de singularidades de Hawking-Penrose	96
8.4. Algunos ejemplos	107
Bibliografía	109

Introducción

Una variedad Riemanniana es una variedad diferenciable M con un tensor métrico definido positivo en todo $p \in M$. Si uno no exige que el tensor métrico g sea definido positivo, entonces para cada $p \in M$ pueden existir subespacios $W \subset T_pM$ donde $g|_W$ sea definido negativo. Por lo tanto, para cada $p \in M$ es natural definir el entero $\nu \geq 0$ de la siguiente forma:

$$\nu = \text{máx}\{i : \exists W \subset T_pM \text{ subespacio tal que } g|_W \text{ es definido negativo con } \dim(W) = i\}.$$

A dicho entero se le llama el índice de la métrica en el punto p . Una variedad semi Riemanniana es entonces una variedad diferenciable M con un tensor métrico indefinido, no degenerado, y con índice constante para todo $p \in M$. La geometría Riemanniana es el caso en el que $\nu = 0$. El caso en el que $\nu = 1$, llamado geometría Lorentziana, será el objeto de estudio de esta monografía.

La motivación para el estudio de esta geometría comenzó en el año 1905 cuando Einstein propuso su primer teoría de la relatividad, la Relatividad Especial. Al agregar el tiempo como una dimensión necesaria a considerar, veremos en el capítulo 1 que las métricas del espacio-tiempo necesariamente deben ser de índice 1. La geometría del espacio-tiempo de la Relatividad Especial fue propuesta por Minkowski en el año 1907. El espacio resultante fue llamado el espacio de Minkowski, y es una variedad de Lorentz plana, sin curvatura. En 1915, sin embargo, inconsistencias de la Relatividad Especial con la fuerza de la gravedad, hicieron que Einstein propusiera la teoría de la Relatividad General. En esta nueva teoría, el espacio-tiempo es una variedad de Lorentz genérica, en donde la presencia de materia curva el espacio-tiempo a través de una relación dada en la ecuación de Einstein, y los efectos de esta curvatura son los efectos usualmente atribuidos a la gravedad.

Dedicaremos el primer capítulo a estudiar estas motivaciones físicas de la geometría Lorentziana. Es útil e interesante tener dichos conceptos en mente en el momento de leer las definiciones matemáticas, ya que todas estas definiciones derivan de conceptos físicos.

Luego, como la monografía pretende ser autocontenida, se incluyen los capítulos 2, 3 y 4, donde estudiaremos conceptos básicos de geometría semi Riemanniana como campos tensoriales, conexiones afines, geodésicas, curvatura y subvariedades. Dichos conceptos son análogos a los conceptos equivalentes en geometría Riemanniana, pues solamente pequeñas modificaciones deben hacerse para generalizarlos al caso semi-Riemanniano. Se agregan los conceptos de vectores temporales, nulos o espaciales en cada espacio tangente, según si el tensor métrico evaluado en dicho vector sea negativo, nulo o positivo respectivamente. De manera similar, se dice que una curva en un punto es temporal, nula o espacial si su vector

tangente es temporal, nulo o espacial. Dichos conceptos son de fundamental importancia a la hora de interpretar el significado físico de una curva en el espacio-tiempo, pues las curvas que en todo punto son temporales representan una posible trayectoria de una partícula, pues veremos que su velocidad será siempre menor que la velocidad de la luz. A partir de ello, se podrá reconocer lo que es moverse en el tiempo y distinguirlo de lo que es simplemente una curva en el espacio. Estos conceptos serán expandidos en el capítulo 5.

En el capítulo 5 estudiaremos características de la geometría Lorentziana. En primer lugar, demostraremos la existencia de entornos geodésicamente convexos. Es decir, demostraremos que para cada punto existe un entorno tal que para cualquier par de puntos del entorno hay una única geodésica que los une, y dicha geodésica se encuentra totalmente contenida en el entorno. Distinguiremos el “futuro” del “pasado” y observaremos que no todas las variedades pueden poseer una noción universal del tiempo futuro y tiempo pasado. Este concepto se reconoce como la *orientabilidad temporal* de las variedades.

También definiremos lo que es el pasado cronológico y el futuro cronológico de un punto. El futuro cronológico indica los puntos del espacio-tiempo a donde es físicamente posible que una persona en el punto original se traslade. Similarmente, el pasado cronológico indica los puntos del espacio-tiempo desde donde una persona se pudo haber trasladado para llegar al punto en cuestión.

Luego demostraremos el teorema de la paradoja de los gemelos, que afirma que una geodésica temporal localmente maximiza la longitud de las curvas entre dos puntos. Finalmente, dentro de la última sección definiremos conceptos de la estructura global de ciertos espacio-tiempos que serán importantes para el estudio de las singularidades, como la hiperbolicidad global. Dicho concepto afirma que si uno conoce toda la información posible del universo en un cierto instante, uno puede determinar el pasado y el futuro de todos los rayos de luz y todas las partículas moviéndose sin aceleración en el espacio-tiempo. Veremos que si una variedad es globalmente hiperbólica, entonces se puede orientar temporalmente y además dicha variedad no puede ser compacta.

En el capítulo 6 definiremos campos de Jacobi y puntos conjugados y focales. Dichos conceptos serán fundamentales para demostrar la existencia de singularidades. Veremos que si una geodésica atraviesa un par de puntos conjugados, entonces dicha geodésica cesará de maximizar la longitud en el caso Lorentziano, y cesará de minimizarla en el caso Riemanniano.

En el capítulo 7 daremos la definición del tensor energía impulso T . Dicho tensor contiene la información de la densidad de energía (y como consecuencia, de la masa), la densidad de momento, y el impulso. La ecuación de Einstein es la encargada de vincular dicho tensor con el tensor curvatura de Ricci, y por lo tanto determina cómo la presencia de masa/energía/impulso afecta la curvatura del espacio-tiempo. La ecuación es la siguiente:

$$Ric - \frac{1}{2}Sg = T.$$

Lamentablemente la ecuación de Einstein en coordenadas locales se transforma en una serie de ecuaciones diferenciales de las cuales uno no puede conocer todas las soluciones. Sin

embargo, muchas soluciones fueron encontradas y estudiadas. Explicaremos las más ilustrativas al final de este capítulo.

Finalmente, en el capítulo 8, nos dedicaremos a estudiar la existencia de singularidades bajo ciertas hipótesis impuestas sobre el espacio-tiempo. Estas singularidades vienen dadas por la incompletitud geodésica para geodésicas temporales o nulas; es decir, geodésicas que pueden representar la trayectoria de una partícula o rayo de luz en el espacio-tiempo, que no puedan ser extendidas hacia el futuro o hacia el pasado. Si dicha singularidad es el “fin” de la geodésica, significará el fin del tiempo para la partícula en cuestión. Si la singularidad es el “comienzo” de la geodésica, significa el origen del tiempo para la partícula o rayo de luz en cuestión.

Entre 1965 y 1970, Hawking y Penrose escribieron una serie de teoremas estableciendo la existencia de singularidades bajo ciertas hipótesis. Estas hipótesis son de tres tipos: hipótesis sobre la energía del espacio-tiempo, hipótesis sobre la estructura global, e hipótesis que afirmen que la gravedad sea suficientemente fuerte como para atrapar una región. Si un teorema asume una condición débil para una categoría, asumirá una condición más fuerte para otra. El objetivo de esta monografía es estudiar uno de estos teoremas desde el punto de vista matemático, basándonos en [6], con hipótesis medias en todos los grupos. Para el lector familiarizado con estos conceptos se le anticipa que las condiciones impuestas serán la condición fuerte de energía, hiperbolicidad global, y tasa de expansión diferente de cero.

Capítulo 1

Antecedentes de la teoría de la relatividad general

Se incluye este capítulo para introducir al lector a las ideas físicas por las cuales fue construida la geometría semi Riemanniana. Comenzaremos introduciendo los conceptos previos a la relatividad especial y detallaremos dicha teoría junto con sus consecuencias geométricas más importantes. Definiremos el espacio de Minkowski y su métrica, que son los objetos matemáticos asociados a dicha teoría. Luego estudiaremos por qué surgió la relatividad general y sus principales afirmaciones.

Se le advierte al lector que este capítulo pretende ser simplemente una motivación y por lo tanto no contendrá demostraciones formales, sino más bien conceptos geométricos e ideas. Todos estos conceptos pueden ser encontrados y expandidos en [9] y [12].

1.1. Antecedentes a la Relatividad Especial

Empecemos definiendo lo que es un *evento*. Un evento es algo que sucede en un instante independientemente del sistema de referencia. Concretamente, podemos imaginarnos un evento como una lámpara encendiéndose. Dicho evento sucede en un cierto punto del espacio, y a un cierto tiempo. Entonces, dado un sistema de referencia (como por ejemplo, una persona parada cerca de la luz), se le atribuyen sus cuatro coordenadas x, y, z, t de espacio y tiempo medidas por esa persona. El mismo evento puede ser visto desde otro sistema de referencia, (por ejemplo, una bicicleta pasando cerca de la luz) y así tendría otras coordenadas de espacio y tiempo. De acuerdo a la Mecánica Clásica, las *transformaciones Galileanas* permiten obtener las nuevas coordenadas de un evento a partir de las viejas coordenadas y la velocidad del nuevo sistema respecto al anterior. Es decir, dar las coordenadas x', y', z', t' del encendido de la lámpara según el ciclista a partir de x, y, z, t y la velocidad del ciclista.

Trabajaremos con sistemas de referencia *inerciales*, es decir, sistemas de referencia no acelerados. Se considera entonces un sistema inercial S y un sistema S' que se mueve a velocidad constante u_x con respecto a S según el eje x . Las coordenadas que le atribuya S a un evento p no coincidirán con las que le atribuya S' , y la relación entre ambas mediciones es dada por las transformaciones Galileanas. Dichas transformaciones son fácilmente

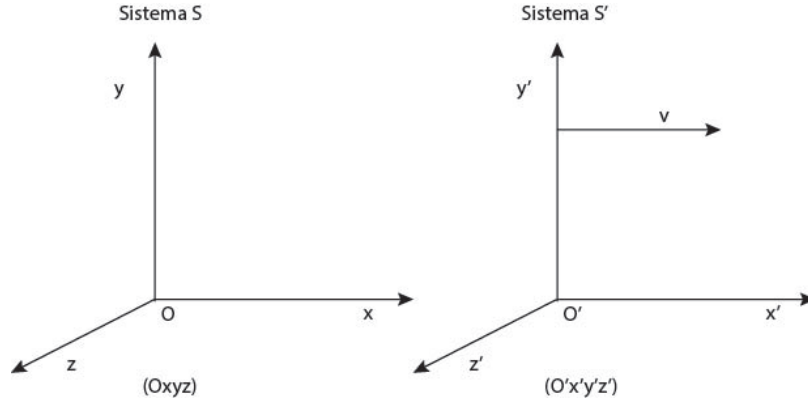


Figura 1.1: Sistema S estático y sistema S' a velocidad constante

calculables y son las siguientes:

$$\begin{aligned} t' &= t & x' &= x - u_x t \\ y' &= y & z' &= z. \end{aligned}$$

Es importante notar que a partir de las ecuaciones de las transformaciones Galileanas se deduce que el intervalo de tiempo y el intervalo de espacio que hay entre dos eventos p y q es el mismo para cada uno de los observadores.

Para comparar las mediciones de velocidad y aceleración de los objetos hechos por ambos observadores inerciales simplemente diferenciamos con respecto al tiempo las transformaciones galileanas y obtenemos:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - u_x & a'_x &= a_x \\ v'_y &= v_y & a'_y &= a_y \\ v'_z &= v_z & a'_z &= a_z. \end{aligned}$$

A partir de esto podemos sacar una conclusión muy importante: la aceleración de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales. Por otra parte, según la física clásica, la masa de una partícula es invariante. Por lo tanto, el producto $F = m \cdot a$, junto con las ecuaciones del movimiento de una partícula serán exactamente iguales en todos los sistemas inerciales. Como los principios de conservación de la energía, la cantidad de movimiento y el momento angular son todas consecuencias de dichas leyes, se puede deducir que **las leyes de la mecánica son exactamente iguales para todos los sistemas inerciales**. Esto significa que para la mecánica es exactamente lo mismo estar parado en el suelo, o arriba de un tren a velocidad constante, pues ningún experimento de tipo mecánico puede distinguir un sistema inercial de otro.

La pregunta clara ahora es si serán también las leyes del electromagnetismo las mismas para todos los sistemas inerciales. Es claro a partir de la fórmulas de transformación de velocidades que habrá un único sistema inercial en el cual la medición de la velocidad de la luz dará exactamente c . Recordemos que las ecuaciones de Maxwell contienen la constante c que representa la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío. Pero

aparentemente tal velocidad no será la misma para diferentes observadores inerciales, de manera que **las ecuaciones de Maxwell, y por lo tanto, las leyes del electromagnetismo, no serán las mismas para todos los sistemas de referencia.**

A partir de estas deducciones, se tuvieron que considerar las siguientes tres posibilidades:

1. Las leyes de la mecánica son iguales para todo sistema inercial, pero las del electromagnetismo no, existiendo entonces un sistema inercial preferente en donde la velocidad de la luz en el vacío sea exactamente c (el éter).
2. Tanto las leyes de la mecánica como las del electromagnetismo son iguales para todo sistema inercial, pero las leyes de Maxwell no son correctas.
3. Tanto las leyes de la mecánica como las del electromagnetismo son iguales para todo sistema inercial, pero las transformaciones Galileanas no son correctas. En este caso las leyes de Newton tampoco serían correctas, pues de éstas derivan las transformaciones de Galileo.

Luego de muchos intentos fallidos para localizar el sistema de referencia preferente, la primera opción fue descartada. Dichos intentos fallidos pueden ser estudiados en [9], capítulo 1, páginas 18-33. Intentos para modificar la electrodinámica también fallaron, y así la segunda opción también fue descartada. Estos intentos pueden ser estudiados en [9], capítulo 1, páginas 33-35. Así llegamos entonces a los comienzos de la teoría de la relatividad especial.

1.2. Principios de la Relatividad Especial

En 1905, Einstein propuso su teoría de la relatividad especial, donde asegura que la opción correcta de las anteriores es la tercera. Los postulados principales son los siguientes:

- Las leyes de la física son iguales en todos los sistemas inerciales.
- La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor c en todos los sistemas inerciales.
- Nada puede viajar a una velocidad mayor a la velocidad de la luz.

A partir de estos postulados, se crearon las transformaciones de Lorentz para reemplazar a las ya no válidas transformaciones de Galileo. Considerando entonces la misma situación que arriba, un sistema S y un sistema S' que se mueve a velocidad constante u_x con respecto a S en el eje x , las transformaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} \cdot (t - (u_x/c^2)x) \\x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} \cdot (x - u_x t) \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}$$

La deducción de dichas transformaciones puede ser encontrada en [9], capítulo 1, páginas 56-61.

Para cumplir con el sentido común, para velocidades pequeñas en comparación con c ($u_x/c \ll 1$), las transformaciones de Lorentz deben aproximarse a las Galileanas. Es fácil demostrar que esto se satisface. Entonces, cuando las velocidades son pequeñas, las leyes de Newton pueden considerarse válidas.

Entonces tenemos que para un evento cualquiera p , las coordenadas correspondientes x, y, z, t en el espacio-tiempo según un observador pueden diferir de las coordenadas x', y', z', t' realizadas por otro observador inercial. Sin embargo, la siguiente proposición muestra que existe un valor que no cambia según el sistema de referencia. Dicho resultado es importantísimo y servirá como motivación para definir la métrica del espacio-tiempo.

Proposición 1.1. *Dado un evento p , con coordenadas (x, y, z, t) para cierto sistema de referencia inercial S , el valor*

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

es independiente del sistema considerado.

Demostración. Consideramos un sistema S' que se mueve a velocidad u_x constante con respecto a S , por el eje x solamente. Entonces las transformaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - c\beta t) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned}$$

siendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}$ y $\beta = u_x/c$.

Entonces,

$$\begin{aligned} x'^2 - c^2t'^2 &= \gamma^2(x - c\beta t)^2 - \gamma^2(ct - \beta x)^2 \\ &= \gamma^2(x^2(1 - \beta^2) - c^2t^2(1 - \beta^2)) \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot (1 - \beta^2) \cdot (x^2 - c^2t^2) \\ &= x^2 - c^2t^2. \end{aligned}$$

quedando entonces demostrada la afirmación deseada. □

1.2.1. Diagrama de Minkowski

Aunque lo natural es observar el espacio-tiempo como de 4 dimensiones (t, x, y, z) , las consecuencias más importantes de las transformaciones de Lorentz y la relatividad especial se visualizan fácilmente a partir del diagrama de Minkowski. Dicho diagrama es una representación gráfica del espacio-tiempo que solo considera una dimensión espacial x y el tiempo t . Nuestra exposición puede ser ampliada en [9], anexo A.

Un evento será representado por un punto, y las coordenadas del mismo estarán dadas por x y t . Por conveniencia, en el eje del tiempo (vertical) consideraremos la variable $w = ct$.

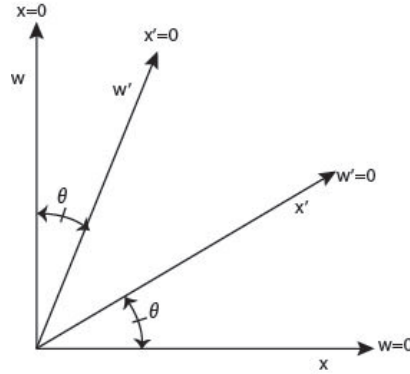


Figura 1.2: Ejes del sistema S' en función de los ejes del sistema S .

Entonces, las transformaciones de Lorentz para pasar de un sistema S considerado en reposo a un sistema S' con velocidad constante u_x con respecto a S , quedan así:

$$\begin{aligned} w' &= \gamma \cdot (w - \beta x) \\ x' &= \gamma \cdot (x - \beta w), \end{aligned}$$

con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}$ y $\beta = u_x/c$.

Para representar esta situación geoméricamente, empezamos por dibujar perpendiculares los ejes x y w del sistema S , como en la figura 1.2. Luego se dibujan los ejes x' y w' del sistema S' en función de los ejes recién dibujados. El eje w' se obtiene tomando $x' = 0$ en la ecuación $x' = \gamma \cdot (x - \beta w)$. Obtenemos entonces la recta $x = \beta w$ como eje w' . Lo mismo se hace tomando $w' = 0$ y consiguiendo el eje x' como $w = \beta x$. Se observa fácilmente que el ángulo θ entre los ejes espaciales es el mismo que el ángulo entre los ejes temporales.

Ya vimos que dado un evento p , con coordenadas (x, y, z, t) para cierto sistema de referencia inercial, el valor $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ es independiente del sistema considerado. Considerando solamente el eje x se deduce que el valor $-(ct)^2 + x^2$ es independiente al sistema. Por lo tanto, como se ve en la figura 1.3, se agregó al diagrama las hipérbolas $x^2 - c^2t^2 = 1$ llamadas curvas de calibración. Dicha hipérbola corta al eje ct en $ct = 1$ y cortará a cualquier eje ct' en $ct' = 1$. Lo mismo con los ejes x y x' . Esto proporciona entonces gráficamente el concepto de unidad temporal o espacial en cada sistema de referencia, es decir, nos indica la escala en cada eje del diagrama.

Si consideramos solamente el sistema S y queremos dibujar el movimiento de una partícula (o persona) en este sistema, tendríamos que dibujar una curva con tangente (v, c) donde v es la velocidad. Por lo tanto en todo punto estará inclinada menos que 45° con respecto al eje temporal, pues nada puede moverse a una velocidad mayor a la de la luz.

1.2.2. Simultaneidad, Contracción de la distancia y Dilatación del tiempo en el diagrama de Minkowski

A partir del diagrama de Minkowski, se pueden observar muchas consecuencias de la relatividad especial. Mostraremos los resultados solo gráficamente, aunque todos pueden

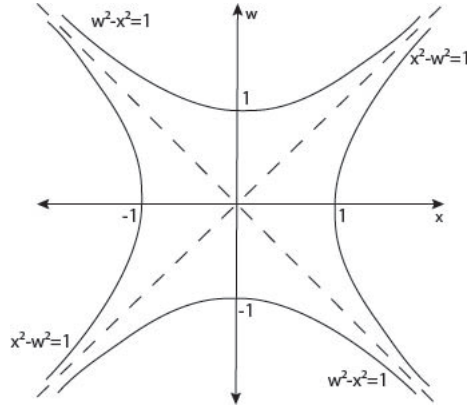


Figura 1.3: Curvas de calibración.

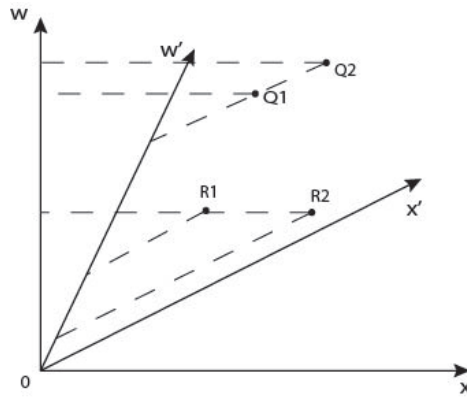


Figura 1.4: La simultaneidad como concepto relativo.

ser demostrados analíticamente a partir de las transformaciones de Lorentz (ver [9], sección 2.3 para estas demostraciones, o sección 2.4 para una interpretación física de los resultados).

La primera consecuencia que se visualiza en el diagrama es como eventos que son simultáneos para el sistema S no lo son necesariamente para el sistema S' . En la figura 1.4 se puede apreciar que los eventos R_1 y R_2 son simultáneos para S , pero no lo son para S' . A la vez, los eventos Q_1 y Q_2 son simultáneos para S' pero no lo son para S .

El hecho de que la simultaneidad de los eventos no sea un concepto universal trae consecuencias muy importantes. Éstas son conocidas como la contracción de la distancia y la dilatación del tiempo. Quiere decir que, si uno mide una distancia mientras se está moviendo con respecto a ella, dicha distancia será menor que la medida para alguien que no se está moviendo con respecto a ella. Similarmente, una persona en movimiento percibe el tiempo correspondiente a segundo para una persona quieta como un tiempo mayor a un segundo.

Para visualizar dichos conceptos gráficamente, consideramos una vara de un metro en reposo según S , como se puede ver en la figura 1.5. *Medir* dicha vara significa obtener las coordenadas de los extremos simultáneamente. Por lo tanto, para S , esto significa medir la

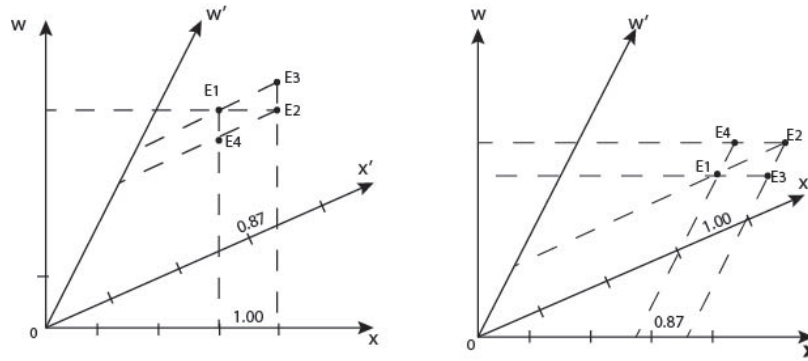


Figura 1.5: Contracción de la distancia

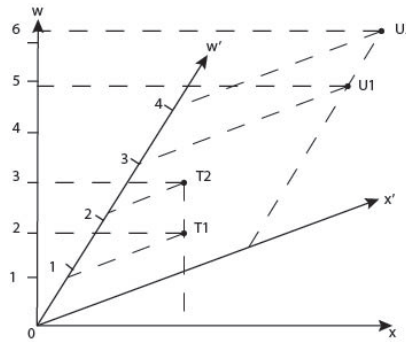


Figura 1.6: Dilatación del tiempo

distancia entre los eventos E_1 y E_2 , y se puede observar en la figura 1.5 parte (a) que el resultado es 1 metro. Sin embargo, para medir la vara según S' consideramos los eventos E_1 y E_3 (o los eventos E_4 y E_2) pues la medición de la posición de los extremos se debe realizar simultáneamente. Considerando la diferente escala, se observa que la separación entre dichos eventos es menor que un metro y por lo tanto el largo de la vara en movimiento es menor que la vara en reposo. Se le recuerda al lector que la noción de unidad espacial en el eje x' se puede obtener mediante las curvas de calibración que no se incluyen en todas las figuras por un motivo de practicidad. La situación simétrica es completamente análoga y se encuentra en la figura 1.5 parte (b).

Resta mostrar geoméricamente la dilatación del tiempo. Para ello consideremos la figura 1.6. Los eventos T_1 y T_2 representan dos ticks de un reloj en reposo para el sistema S , en los segundos 2 y 3 respectivamente. Se puede calcular que mientras que la separación temporal entre dichos eventos en S es 1, la separación temporal en S' es mayor a 1. Por lo tanto deducimos que el reloj en movimiento es más lento que el reloj en reposo. La situación análoga está representada en la misma figura. Se considera un reloj en reposo según S' , con dos clicks U_1 y U_2 . El mismo razonamiento muestra que ahora para el observador S pasó más tiempo que para S' . Pero ahora quien ve el reloj en movimiento es S , entonces una vez más deducimos que el reloj en movimiento es más lento que el reloj en reposo.

1.2.3. Espacio de Minkowski y métrica del espacio-tiempo

Ya vimos que dado un evento p , con coordenadas (t, x, y, z) para cierto sistema de referencia inercial, el valor $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ es independiente del sistema considerado. Esto sugiere entonces que definamos la métrica en el espacio-tiempo como

$$g = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

pues no depende del sistema de referencia. La norma de un evento se define como

$$|v| = |g(v, v)|^{1/2}.$$

El espacio de Minkowski es entonces \mathbb{R}^4 dotado con este producto interno. Lo denotaremos \mathbb{R}_1^4 . El subíndice 1 indica que si se considera la base canónica de \mathbb{R}^4 , entonces $g(v, v) < 0$ solo para uno de estos vectores.

Para la física, la norma de un evento es importantísima pues, al no depender del observador, es prácticamente la única magnitud que podría aparecer en una ley física. Se pensó que era la única magnitud permitida hasta que se demostró que otros dos aspectos de el espacio-tiempo pueden ser incluidos en leyes físicas: la orientación temporal y la orientación espacial del espacio-tiempo. Estos dos conceptos serán introducidos más adelante.

Observar que la métrica definida arriba no es una métrica Riemanniana, pues no es definida ni semidefinida positiva. Específicamente, si $v = (t, x, y, z)$ entonces $g(v, v) = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Entonces tenemos tres opciones:

- Si v es un vector tangente al recorrido de un rayo de luz, su velocidad será c , y por lo tanto $g(v, v) = 0$. Llamamos a v un *vector nulo o lumínico*.
- Si v es un vector tangente al recorrido de una persona con masa, tenemos $g(v, v) < 0$, pues la velocidad debe ser menor a c . Llamamos a v un *vector temporal*.
- Si v es un vector tangente a una curva que no puede corresponder al recorrido de una persona pues la velocidad sería mayor a c , tenemos que $g(v, v) > 0$. Llamamos a v un *vector espacial*.

Si considero un evento $p \in \mathbb{R}_1^4$, los eventos ubicados verticalmente hacia arriba se encuentran al futuro de p , mientras que los eventos ubicados verticalmente hacia abajo se encuentran al pasado de p . Pero una partícula situada en el punto p no tiene permitido moverse en cualquier dirección, pues no puede moverse a una velocidad mayor a la velocidad de la luz. Así se define entonces el **cono de luz futuro** de p como los puntos q tal que \vec{pq} es un vector temporal. Análogamente se define el **cono de luz pasado** como los puntos q tal que \vec{qp} es un vector temporal. Por lo tanto, ningún evento que ocurra fuera del cono de luz pasado de p puede afectar a p , y lo que ocurra en p no puede afectar a ningún punto fuera del cono de luz futuro de p .

Por lo tanto, las curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ que en todo punto tienen velocidades permitidas para cuerpos con masa (i.e. $g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) < 0$), representan posibles trayectorias de partículas en el espacio-tiempo. A partir de la métrica queda definida la longitud de una curva en el espacio de Minkowski. Pero entonces, ¿cuál es el significado físico de la longitud de una curva cualquiera?

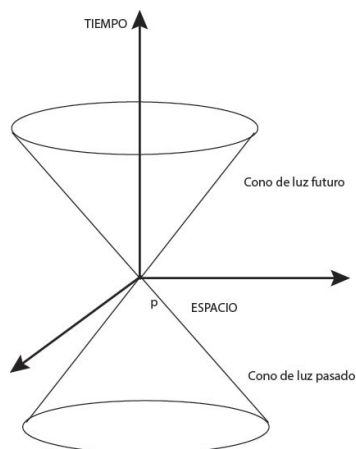


Figura 1.7: Diagrama en dos dimensiones espaciales que ilustra el cono de luz futuro y el cono de luz pasado de un evento p .

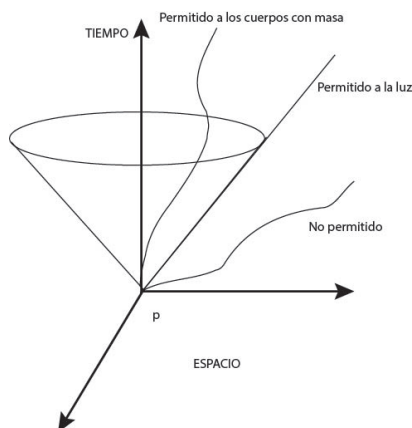


Figura 1.8: Diagrama en dos dimensiones espaciales de trayectorias permitidas y no permitidas para una partícula.

- Si la curva tiene velocidades permitidas, entonces la longitud de la curva es el tiempo transcurrido durante la trayectoria para el observador que la recorre (el tiempo propio).
- La curva tiene velocidad exactamente igual a $c \Leftrightarrow$ El largo de la curva es cero \Leftrightarrow el recorrido corresponde a un rayo de luz.
- Si la curva es un segmento pq con pendiente no permitida, entonces hay un marco inercial en el cual p y q son simultáneos, y $|\vec{pq}|$ representa la distancia espacial en dicho marco.

1.3. Paradoja de los gemelos

Previamente dijimos que los relojes en movimiento funcionan más lentamente que los relojes en reposo. ¿Pero qué significa esto? ¿Qué consecuencias geométricas trae? La muy

conocida paradoja de los gemelos es un buen ejemplo para representar muchos de estos conceptos, y puede ser ampliada en [9], anexo *B*.

La paradoja establece lo siguiente. Imaginemos que dos hermanos Pedro y Juan pasan año nuevo juntos y luego Pedro abandona a Juan, quedándose Juan en una nave espacial flotando en espacio. Pedro, en otra nave espacial arranca con una velocidad de $0,8c$ relativo a Juan y por su tiempo propio permanece en el espacio con esa misma dirección y velocidad por tres años. Luego de esos tres años va en el sentido opuesto y tarda otros tres años en regresar con su hermano.

En la figura 1.9 tenemos el diagrama de Minkowski representando la situación con un solo eje espacial. El eje ct representa la posición de Juan, fija en $x = 0$. La posición de Pedro es inicialmente una línea recta alejándose de Juan, correspondiente al eje $ct' = w'$ de un campo de referencia que se mueve a velocidad $0,8c$ con respecto a Juan. Luego cambia a una recta acercándose a Juan con velocidad $0,8c$, correspondiendo al eje $ct'' = w''$. Claramente en la vida real este cambio de velocidad es diferenciable, pero lo representamos no diferenciablemente para facilitar la interpretación gráfica. Marcamos con un punto cada año nuevo para Pedro y para Juan.

Notar que la dilatación de los intervalos anuales de Pedro comparados con los de Juan se deben a la dilatación del tiempo, y se visualiza fácilmente por las curvas de calibración. Simplemente observando la situación entonces notamos que hasta el momento del reencuentro, para Juan transcurrieron diez años, mientras que para Pedro transcurrieron solamente seis. Podemos entonces deducir que la paradoja de los gemelos es una consecuencia directa de la dilatación del tiempo, fácilmente visualizable a través de las curvas de calibración.

Como se vio anteriormente, el efecto de la dilatación temporal es simétrico. Sin embargo, la paradoja de los gemelos *no es simétrica*, pues no podemos considerar a Pedro como en reposo. Pedro tiene un cambio de velocidad que hace que su sistema de referencia no sea un sistema inercial como el de Juan. Esto explica por qué la situación no es simétrica y por qué termina siendo Pedro el hermano menor, sin depender de cómo se observe la situación. Por lo tanto podemos deducir que los postulados de Einstein no se extienden para marcos acelerados.

Interpretación matemática

Primeramente, recordemos que cuando las curvas pueden representar el movimiento de una persona (i.e. la velocidad es menor o igual a c), el largo de dicha curva representa el tiempo propio transcurrido para esa persona. Entonces, la primera idea que surge es que aquí tenemos una desigualdad triangular invertida, pues el segmento de recta de Juan es más largo que el recorrido de Pedro, que va hacia un punto lejano y vuelve. En la geometría que estudiaremos, geometría Lorentziana, efectivamente esto es cierto pues la desigualdad triangular, junto con la desigualdad de Cauchy-Schwartz estarán invertidas.

Pero adicionalmente consideremos lo siguiente. Consideraremos que el movimiento de una partícula (o gemelo) sin aceleración representa una geodésica en el espacio-tiempo. Por

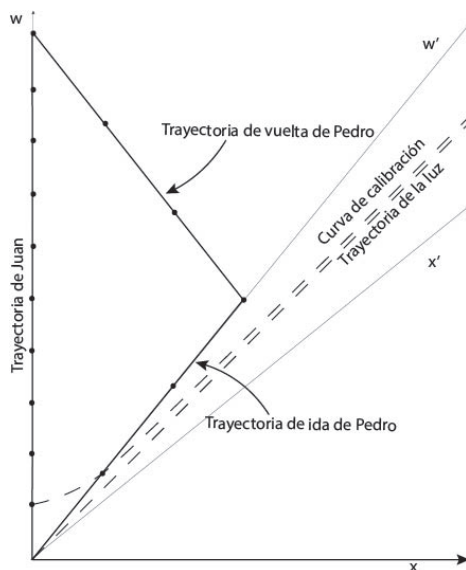


Figura 1.9: Paradoja de los gemelos

lo tanto, vemos que el recorrido de Juan es geodésico, mientras que el de Pedro no. Sin embargo ambos tienen el mismo punto de partida y llegada, y el largo de la curva de Juan es mayor que el largo de la curva de Pedro.

Esto va en contra de las propiedades minimizantes de las geodésicas en geometría Riemanniana, y es por que en Geometría Lorentziana, las geodésicas que pueden representar el movimiento de una partícula **maximizan** la distancia entre dos puntos en lugar de minimizarla. Esto es consistente con revertir la desigualdad triangular. De hecho el teorema que veremos en el capítulo 5, equivalente a las propiedades minimizantes de las geodésicas, es llamado Teorema de las propiedades maximizantes de las geodésicas temporales o Teorema de la paradoja de los gemelos.

1.4. Relatividad general

Como vimos, la teoría de relatividad especial resolvió la inconsistencia de las leyes de Maxwell con la física pre-relativista. Sin embargo, aún existía una inconsistencia: la teoría de la gravedad de Newton. En dicha teoría se afirma que un cuerpo ejerce una influencia instantánea sobre otro. Es decir, dicha influencia viaja a velocidad infinita, en particular, mayor que la velocidad de la luz. Puesto en otras palabras, la gravedad afirma que un evento exterior al cono de luz de un punto p puede afectar a p . Claramente esto es una gran inconsistencia con la teoría de la relatividad especial.

La teoría de relatividad general fue planteada por Einstein en 1915 y expresa, al igual que en la relatividad especial, que toda propiedad física independiente del sistema de referencia está regida por la métrica del espacio-tiempo. Dicha métrica, al igual que la considerada en relatividad especial, será no Riemanniana, pues la norma de ciertos vectores no nulos

podrá ser nula.

Sin embargo, difiere de la relatividad especial en el siguiente concepto: el espacio-tiempo no tiene necesariamente la forma plana que tenía en la teoría anterior. El espacio-tiempo es una variedad M dotada con una métrica no Riemanniana g , y la curvatura de la variedad es la culpable de los efectos físicos usualmente atribuidos al campo gravitatorio. La presencia de una gran masa de cuerpo causará que el espacio se curve en la región cercana a ella, transformándose el espacio en no-Euclídeo. La relación entre la curvatura y la presencia de materia se realiza a partir de la *curvatura de Ricci* del espacio y *el tensor energía-impulso* y está dada en la ecuación de Einstein, que desarrollaremos más adelante.

Las características principales de la relatividad general a tener en cuenta durante la monografía son las siguientes:

- **La relatividad especial es un caso particular de la relatividad general.** Después de estudiar la ecuación de Einstein se podrá observar que la relatividad especial (i.e. el espacio de Minkowski) es la solución de dicha ecuación en el vacío. Es decir, corresponde a la ausencia total de materia, y de gravedad. Por lo tanto, cualquier característica de la relatividad general puede ser probada en el espacio de Minkowski. Por esta razón, la definición de los eventos, vectores luminosos, espaciales o temporales, tiempo propio, observadores, etc. de la relatividad general coinciden con los mencionados anteriormente para la relatividad especial. Además, los conceptos mencionados anteriormente sobre la métrica de la relatividad especial también valdrán en la relatividad general.
- **La relatividad general es localmente análoga a la relatividad especial.** Si p es un evento en el espacio-tiempo M , entonces la relatividad especial tiene validez en $T_pM \approx \mathbb{R}_1^4$, y el mapa exponencial sirve como conexión entre M y T_pM . En entornos suficientemente chicos, T_pM sirve como aproximación geométrica de M .
- **La fuerza de la gravedad es la dominante a gran escala.** Entre las fuerzas nucleares, el electromagnetismo y la gravedad, sin dudas la más débil es la gravedad. Entonces, ¿por qué aparenta ser la más importante a la hora de desarrollar una teoría para grandes escalas? Las fuerzas nucleares son muy fuertes, pero su rango es tan pequeño que se las ignora (en principio) en teorías cuya intención es modelar el universo. La fuerza electromagnética es también mucho más poderosa que la gravedad, pero tiene una característica que la distingue: tiene signo. Dicha fuerza puede ser tanto atractiva como repulsiva. Por lo tanto, las fuerzas electromagnéticas suelen cancelarse a gran escala. Por el contrario, la fuerza de gravedad es solamente atractiva y no puede cancelarse, por lo tanto se acumula. Además tiene un rango muy grande. Estas razones son las que determinan la importancia de la fuerza de gravedad.
- **La fuerza de gravedad es una propiedad intrínseca del espacio-tiempo.** La gravedad es una fuerza que causa exactamente el mismo efecto en todos los objetos. Es decir, genera la misma aceleración en cualquier objeto, sin importar su masa. Es por esto que puede verse como una propiedad geométrica del espacio-tiempo.

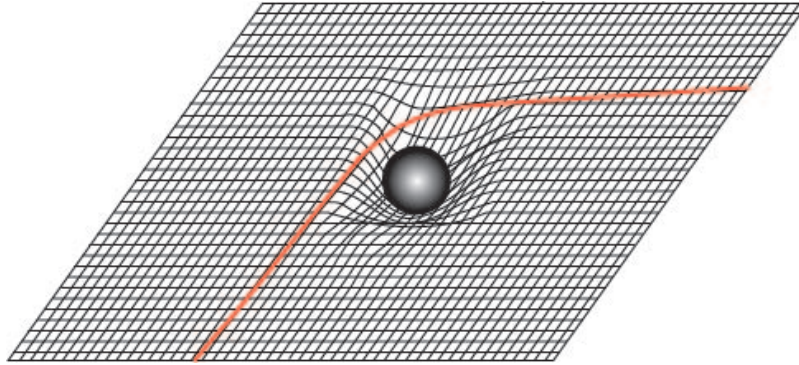


Figura 1.10: El espacio-tiempo curvado por la presencia de un planeta, y un haz de luz desviándose por los efectos de la curvatura.

- **La caída libre es geodésica y la materia curva el espacio-tiempo.** Caída libre significa movimiento solamente por la influencia de la gravedad. La física Newtoniana distingue dos casos: cuando hay aceleración y cuando no la hay. Por ejemplo, considerando dos naves espaciales idénticas, S_1 viajando en caída libre hacia una estrella y S_2 viajando en caída libre pero lejos de cualquier galaxia. Por lo tanto, según Newton, S_1 sufrirá una aceleración gracias a la gravedad de la estrella mientras que S_2 viajará a velocidad constante. Esto es, si dibujamos sus recorridos en el espacio-tiempo Newtoniano, S_1 estará representado por una curva, mientras que S_2 por una recta, es decir, por una geodésica del espacio en cuestión. Einstein cambió esta noción afirmando que toda caída libre es geodésica, y ante la presencia de gravedad, en lugar de curvarse el recorrido, se curvará el espacio-tiempo, como se muestra en la figura 1.10.

En los siguientes capítulos analizaremos entonces las métricas no Riemannianas, la geometría asociada a dichas métricas, y la ecuación de Einstein.

Capítulo 2

Variedades Semi Riemannianas

Este capítulo pretende introducir al lector las nociones básicas de geometría semi Riemanniana. Definiremos campos tensoriales y las principales operaciones a realizarse con tensores. Luego introduciremos la definición de métricas semi Riemannianas, y junto con ellas la definición de una variedad semi Riemanniana. Recordaremos los conceptos de los corchetes de Lie, la conexión de Levi Civita, transporte paralelo, geodésicas y el mapa exponencial. Dichos conceptos son los mismos que en geometría Riemanniana y por lo tanto no demostraremos los resultados. Estas demostraciones pueden ser encontradas en [2] y [7]. Daremos la definición de variedad geodésicamente completa, concepto fundamental para el estudio de las singularidades en el espacio-tiempo, que es el tema del último capítulo. Cerraremos este capítulo estudiando algunos operadores diferenciales que serán útiles más adelante.

2.1. Tensores

En este capítulo y en la totalidad de la monografía denotaremos M como una variedad diferenciable, T_pM como el espacio tangente a M en $p \in M$, $\mathfrak{F}(M)$ como las funciones reales y suaves en M y $\mathfrak{X}(M)$ como los campos vectoriales en M . Hay que recordar que $\mathfrak{X}(M)$ es un $\mathfrak{F}(M)$ -módulo.

Las próximas definiciones cubren los dos casos que usaremos más en la monografía: el $\mathfrak{F}(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$ y el \mathbb{R} -espacio vectorial T_pM . Todos los resultados y demostraciones de esta sección se pueden encontrar en [7], capítulo 2.

Definición 2.1. Si V es un K -módulo, y V^* son todas las funciones K -lineales de V a K , un tensor de tipo (r, s) sobre V es una función K -multilineal $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$, (donde r y s son naturales).

Llamamos $T_s^r(V)$ al conjunto de todos los tensores de tipo (r, s) sobre V . Un tensor de tipo $(0, 0)$ sobre V es simplemente un elemento de K .

2.1.1. Campos tensoriales

Definición 2.2. Un campo tensorial A en una variedad M es un tensor sobre el $\mathfrak{F}(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$. Es decir, si A tiene tipo (r, s) entonces es una función $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal

$$A : (\mathfrak{X}^*(M))^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M).$$

Notar que $T_s^r(M)$ es un $\mathfrak{F}(M)$ -módulo. La suma de tensores se realiza de manera natural entre tensores del mismo tipo, mientras que el producto de tensores se puede realizar siempre de la siguiente manera: Si $A \in T_s^r(M)$ y $B \in T_{s'}^{r'}(M)$, definimos

$$A \otimes B : (\mathfrak{X}^*(M))^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

como

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}). \end{aligned}$$

Observación 2.3. *Se pueden realizar las siguientes identificaciones:*

- Claramente $T_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.
- $T_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$, pues si tengo $V \in \mathfrak{X}(M)$, entonces puedo definir $V(\theta) = \theta(V)$ para todo $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Recíprocamente, es simple demostrar que todo $(1, 0)$ campo tensorial en M surge de esta forma para un campo vectorial único.
- Si $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal, definimos a su campo tensorial asociado como $\bar{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ como

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)).$$

Es claro que \bar{A} es un campo tensorial de tipo $(1, s)$ pues es $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal. Consideraremos entonces A como un campo tensorial, usando la fórmula de arriba solamente cuando sea necesario.

Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en una carta local $U \subset M$, entonces llamaremos $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ a la base de T_pM asociada a dicho sistema de coordenadas y $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ a su base dual.

Definición 2.4. Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en $U \subset M$, y $A \in T_s^r(M)$, los componentes de A relativos a ξ son las funciones reales

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}),$$

en U , donde todos los índices están entre 1 y $n = \dim M$.

Las posiciones correspondientes a $\mathfrak{X}^*(M)$ se denominan posiciones *contravariantes*, mientras que las posiciones correspondientes a $\mathfrak{X}(M)$ se denominan posiciones *covariantes* de A .

2.1.2. Tensores en un punto

El objetivo de esta sección es mostrar que cualquier campo tensorial A en M puede ser visto como un tensor en T_pM , considerando la función $p \mapsto A_p$ para cada $p \in M$. La idea es probar que el valor de $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$ en el punto p depende sólo de los valores de las 1-formas θ^i y los campos X_j en p . Dicha demostración puede ser encontrada en [7], capítulo 2, páginas 37 y 38.

Proposición 2.5. *Dados $p \in M$ y $A \in T_s^r(M)$. Sean $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r$ y $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formas tal que $\bar{\theta}^i|_p = \theta^i|_p \quad \forall 1 \leq i \leq r$; y sean $\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^r$ y X^1, \dots, X^r campos vectoriales tal que $\bar{X}_j|_p = X_j|_p \quad \forall 1 \leq j \leq s$. Entonces,*

$$A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p).$$

Usando el resultado anterior es inmediato demostrar que a partir de un campo tensorial A se puede definir A_p

$$A_p : (T_p M^*)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}$$

de la siguiente manera: Si $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in T_p M^*$ y $x_1, \dots, x_s \in T_p M$

$$A_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, x_1, \dots, x_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

con $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\theta^i(p) = \alpha^i$ y $X_j(p) = x_j$.

2.1.3. Contracciones y derivaciones tensoriales

Definición 2.6. Si $A \in T_s^r(M)$ entonces la contracción de A con respecto a los índices i contravariante y j covariante, es $C_j^i A \in T_{s-1}^{r-1}(M)$ con

$$(C_j^i A)(\theta_1, \dots, \theta_{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{p=1}^n A(\theta_1, \dots, dx^p, \dots, \theta_{r-1}, X_1, \dots, \partial_p, \dots, X_{s-1}),$$

con dx^p en la posición contravariante i y ∂_p en la posición covariante j .

Es importante mencionar que como la traza de una transformación lineal no depende de la base considerada, la contracción de un tensor está bien definida.

Definición 2.7. Una derivación tensorial \mathfrak{D} en una variedad M es un conjunto de funciones \mathbb{R} -lineales $\mathfrak{D} : T_s^r(M) \rightarrow T_s^r(M)$ que preservan el tipo de los tensores y que cumple que para cualquier par de tensores A y B :

1. $\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}A \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}B$,
2. $\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}A)$ para cualquier contracción C .

La siguiente proposición se puede encontrar en [7], capítulo 2, página 44.

Proposición 2.8. *Sea \mathfrak{D} es una derivación tensorial en M . Si $A \in T_s^r(M)$, entonces:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}[A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)] &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathfrak{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathfrak{D}X_j, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Esta regla del producto nos da una fórmula para la derivación de un tensor de cualquier tipo en términos de la derivación de funciones ((0, 0) campos tensoriales), campos vectoriales ((1, 0) campos tensoriales) y 1-formas ((0, 1) campos tensoriales).

A la vez, por esta proposición sabemos que si θ es una 1-forma y X un campo vectorial, tenemos que,

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta X) - \theta(\mathfrak{D}X).$$

Por lo tanto, deducimos que una derivación tensorial \mathfrak{D} queda únicamente definida a partir de su valor en las funciones $\mathfrak{F}(M)$ y en los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$.

2.2. Métricas semi Riemannianas

Los siguientes conceptos son necesarios para definir una métrica semi Riemanniana:

- Definición 2.9.**
- Un (0, 2) tensor g sobre V es simétrico si $g(v, w) = g(w, v)$, para todo $v, w \in V$.
 - Un (0, 2) tensor g sobre V es no degenerado si el tener $g(v, w) = 0$ para todo $v \in V$, implica $w = 0$.
 - El índice de un (0, 2) tensor simétrico g sobre V es la dimensión del mayor subespacio $W \subset V$ en donde $g|_W$ sea definida negativa.

Definición 2.10. Un tensor métrico g en una variedad M es un campo tensorial simétrico, no degenerado, de tipo (0, 2), con índice constante.

En otras palabras, g asigna suavemente a cada punto p de M , un producto escalar g_p en el espacio tangente T_pM , y el índice de g_p es constante $\forall p \in M$.

Definición 2.11. Una variedad semi Riemanniana es una variedad dotada con un tensor métrico g .

Aquí surge la gran diferencia con la métrica Riemanniana, dado que g no es definido positivo. Más explícitamente, tendremos siempre el espacio tangente dividido en dos subespacios W^+ y W^- tal que

$$T_pM = W^+ \oplus W^-,$$

con $g|_{W^+}$ definida positiva y $g|_{W^-}$ definida negativa.

El valor común ν del índice de g_p es llamado el índice de M , y $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Si $\nu = 0$, M es una variedad Riemanniana, pues g_p sería entonces un producto interno definido positivo en T_pM . Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es una *variedad Lorentziana*.

Usaremos la notación $\langle v, w \rangle$ para hacer referencia a $g(v, w) \in \mathbb{R}$ para v, w vectores en el espacio tangente, y la notación $\langle V, W \rangle$ para hacer referencia a $g(V, W) \in \mathfrak{F}(M)$ para V, W campos vectoriales.

Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en $U \subset M$, y $\partial_1, \dots, \partial_n$ es la base correspondiente en los espacios tangentes en los puntos de U , las componentes del tensor métrico g son:

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Entonces, para los campos vectoriales $V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i$ y $W = \sum_{j=1}^n W^j \partial_j$, tenemos:

$$g(V, W) = \sum_{i,j} g_{ij} V^i W^j.$$

Como g es no degenerada, para todo punto p del entorno $U \in M$, la matriz $((g_{ij}(p)))$ es invertible, y denotaremos su inversa como la matriz $((g^{ij}(p)))$. Es claro que las funciones g^{ij} son suaves en U .

En muchas situaciones resulta útil escribir g como

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Observación 2.12. Para el espacio \mathbb{R}^n y para cualquier valor de ν , con $0 \leq \nu \leq n$, podemos considerar el tensor métrico

$$\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^n v^j w^j,$$

que tiene índice ν . El espacio resultante es el Semi Euclídeo \mathbb{R}_ν^n . Si $\nu = 0$, el espacio que resulta es el espacio Euclídeo \mathbb{R}^n . Si $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n es llamado el espacio de Minkowski n dimensional. Notar que en el capítulo 1 trabajamos con el espacio de Minkowski de dimensión 4, para describir el espacio-tiempo en la relatividad especial.

Usaremos seguido la notación

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{para } 1 \leq i \leq \nu \\ 1 & \text{para } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Entonces el tensor métrico de \mathbb{R}_ν^n queda,

$$g = \sum \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definición 2.13. Un vector tangente v en $T_p M$ es

- *espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$,
- *nulo o lumínico* si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$,
- *temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$.

La categoría en la cual cae un vector es llamada su *carácter causal*. El conjunto de todos los vectores nulos en $T_p M$ es llamado el *cono nulo* en p , y el conjunto de todos los vectores temporales es llamado el *cono temporal* de p . Notar que el espacio tangente a M en p será isomorfo a \mathbb{R}_ν^n , y que los conceptos de vectores lumínicos, temporales y espaciales, junto con el del cono de luz, o cono temporal, también fueron discutidos en el capítulo 1, para dar una idea de su significado físico.

A partir de dicha métrica se define la *norma* del vector v como

$$|v| = |\langle v, v \rangle|^{1/2}.$$

Notar que, aunque el tensor métrico en v puede llegar a ser negativo, (i.e. $\langle v, v \rangle < 0$), la norma del vector nunca será negativa.

Definición 2.14. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva, el largo de α es

$$\tau(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Es fácil demostrar que dicho largo es invariante mediante reparametrizaciones.

A partir de el carácter causal de los vectores se define el carácter causal de las curvas de la siguiente manera:

Definición 2.15. Una curva α en M es

- *espacial* si $\alpha'(t)$ es espacial para todo $t \in [a, b]$,
- *nula o lumínica* si $\alpha'(t)$ es nula o lumínica para todo $t \in [a, b]$,
- *temporal* si $\alpha'(t)$ es temporal para todo $t \in [a, b]$.

La siguiente proposición será utilizada muy frecuentemente. Su prueba detallada se puede encontrar en [7], capítulo 3, página 60.

Proposición 2.16. Sea M una variedad semi Riemanniana. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la 1-forma V^* en M como

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces la función $V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo $\mathfrak{F}(M)$ -lineal de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}^*(M)$.

Es simple ver que la 1-forma dual a ∂_i es $\sum_m g_{im} dx^m$ pues,

$$\partial_i^*(\partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = g_{ij} = \sum_m g_{im} dx^m(\partial_j).$$

De forma similar, el campo métricamente equivalente a dx^i es $\sum g^{im} \partial_m$ pues,

$$\sum_m g^{im} \partial_m^*(\partial_j) = \sum_m g^{im} \langle \partial_m, \partial_j \rangle = \sum_m g^{im} g_{mj} = \delta_{ij} = dx^i(\partial_j).$$

2.3. Corchetes de Lie

A continuación recordaremos la definición y algunas propiedades que utilizaremos más adelante de los corchetes de Lie. Dichas propiedades se demuestran directamente a partir de la definición, y se pueden encontrar en [7].

Para definir los corchetes de Lie es necesario presentar anteriormente el siguiente concepto: si X es un campo vectorial en M , y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, definimos la función $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $X(f)(p) = X(p)(f) \in \mathbb{R}$.

Definición 2.17. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces se definen los corchetes de Lie entre X e Y como:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Observar que aunque $XY(f)$ y $YX(f)$ no representan campos vectoriales, $[X, Y]$ sí. Adicionalmente, los corchetes de Lie pueden ser vistos como una función de $\mathfrak{F}(M)$ en $\mathfrak{F}(M)$ que lleva cada función f en $X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Proposición 2.18. *Los corchetes de Lie en $\mathfrak{X}(M)$ cumplen las siguientes propiedades:*

- Son \mathbb{R} -bilineales,
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,
- $[X, Y] = -[Y, X]$,
- La identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,
- Si (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas en $U \subset M$, entonces la forma en coordenadas locales de los corchetes entre $X = \sum X^i \partial_i$ y $Y = \sum Y^j \partial_j$ es,

$$[X, Y] = \sum \left\{ X(Y^j) - Y(X^j) \right\} \partial_j.$$

2.4. Conexión de Levi-Civita y Diferencial Covariante

Repasaremos definiciones y teoremas principales de geometría Riemanniana. Las demostraciones para el caso de geometría semi-Riemanniana son exactamente iguales a las que se pueden encontrar en [2], capítulos 2 y 3, o en [7], capítulo 3.

Definición 2.19. Una conexión D en una variedad M es una función $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que:

- (1) $D_V W$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en V ,
- (2) $D_V W$ es \mathbb{R} -lineal en W ,
- (3) $D_V fW = (Vf)W + fD_V W \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M)$.

Notar que (1) asegura que $D_V W$ es un tensor con respecto a V , y (3) asegura que $D_V W$ no es un tensor con respecto a W .

Definición 2.20. Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva en M , definimos

$$\mathfrak{X}(\alpha) = \left\{ V : I \rightarrow TM/V(t) \in T_{\alpha(t)}M \right\}.$$

Definición 2.21. Una derivada covariante en una variedad M es una aplicación que a cada $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ le asigna el campo V' o $\frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que:

- (1) $\frac{D(f \circ \alpha)V}{dt} = (f \circ \alpha) \frac{DV}{dt} + \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)V$,
- (2) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{D(aV + bW)}{dt} = a \frac{DV}{dt} + b \frac{DW}{dt}$.

El siguiente teorema es fundamental para la teoría de la Geometría Semi Riemanniana:

Teorema 2.22 (Levi-Civita). *En una variedad semi-Riemanniana M , existe una única conexión D , llamada conexión de Levi-Civita, tal que:*

- (1) $[V, W] = D_V W - D_W V$, *i.e. D es simétrica.*

(2) $X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle$, i.e. D es compatible con la norma.

Definición 2.23. Dado un sistema de coordenadas en un abierto $U \subset M$ y $\partial_1, \dots, \partial_n$ las correspondientes bases de los espacios tangentes, los *símbolos de Christoffel* son las funciones reales Γ_{ij}^k en U tales que:

$$D_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Como siempre se cumple que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, para la conexión de Levi-Civita tenemos que $D_{\partial_i} \partial_j - D_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$, pues es simétrica. Entonces tenemos $D_{\partial_i} \partial_j = D_{\partial_j} \partial_i$, lo que lleva a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposición 2.24. Toda conexión tiene asociada una única derivada covariante de modo que si $V(t) = X(\alpha(t))$ donde X es un campo de vectores de M , entonces,

$$\frac{DV}{dt}(t) = D_{\dot{\alpha}(t)} X(\alpha(t)).$$

Le llamaremos *derivada covariante de Levi Civita* a la derivada covariante asociada a la conexión de Levi Civita.

Proposición 2.25. Para un todo sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) tenemos:

1. $D_{\partial_i} (\sum_j W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right\} \partial_k$,
2. $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}$,
3. Si $\alpha(t) = \varphi(x^1(t), \dots, x^n(t))$ donde φ es la parametrización, y $V(t) = \sum V^i(t) \partial_i(\alpha(t))$, entonces $\frac{DV}{dt}(t) = \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt}(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i(t) V^j(t) \right) \partial_k(\alpha(t))$.

Así como definimos la conexión y derivada covariante para campos, la definición de conexión se puede extender para abarcar campos tensoriales arbitrarios de la siguiente manera.

Definición 2.26. Sea V un campo vectorial en M . La derivada covariante de Levi Civita D_V es la única derivación tensorial en M tal que:

- $D_V f = Vf \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M)$,
- $D_V W$ es la conexión de Levi Civita ya definida, para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Notar que por lo visto en la sección 2.1.3, dicha derivación está únicamente definida, pues está definida en las funciones reales y en los campos vectoriales.

Esto nos permite definir:

Definición 2.27. El diferencial covariante de un (r, s) tensor A en M es el $(r, s + 1)$ tensor DA tal que:

$$(DA)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s),$$

para todo $V, X_j \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$.

En el caso $r = s = 0$ tenemos:

$$(Df)(V) = D_V f = Vf = df(V) \quad \forall V \in \mathfrak{X}(M).$$

Observar que D coincide con la derivada exterior para elementos de $\mathfrak{F}(M)$.

A partir de este concepto introduciremos una nueva notación para expresar los componentes de un tensor en coordenadas locales.

Definición 2.28. Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ es un sistema de coordenadas en $U \subset M$, y $A \in T_s^r(M)$, denotamos los componentes del diferencial covariante DA relativos a ξ de la siguiente forma:

$$A_{j_1, \dots, j_s; i_1, \dots, i_r}^{i_1, \dots, i_r} = DA(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}, \partial_{j_{s+1}}) = (D_{\partial_{j_{s+1}}} A)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}),$$

en U , donde todos los subíndices están entre 1 y $n = \dim M$.

2.5. Transporte paralelo

Proposición 2.29. Sea $\frac{D}{dt}$ la derivada covariante de Levi Civita de la métrica dada. Entonces vale:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle,$$

para todo par de campos V, W a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow M$.

En el caso en el que $Z = \alpha'$, a la derivada covariante $\frac{DZ}{dt} = Z' = \alpha''$ se le llama aceleración de la curva. Usaremos regularmente la notación Z' en lugar de $\frac{DZ}{dt}$ por una cuestión de simplicidad.

Definición 2.30. Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva en M , y $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Se dice que Z es paralelo si $Z' = 0$.

La expresión de la derivada covariante en coordenadas locales muestra que $Z' = 0$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Por ende, si agregamos las condiciones iniciales, el teorema de Piccard asegura entonces la existencia y unicidad de la solución de dicho sistema y asegura la siguiente proposición:

Proposición 2.31. Para una curva $\alpha : I \rightarrow M$, sea $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}M$. Entonces existe un único campo de vectores paralelo Z a lo largo de α tal que $Z(a) = z$.

Definición 2.32. Considerando las hipótesis anteriores, la función

$$P_a^b(\alpha) : T_pM \rightarrow T_qM,$$

donde $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$, que manda cada $z \in T_pM$ a $Z(b) \in T_qM$ es llamado el transporte paralelo sobre α .

Proposición 2.33. El transporte paralelo es una isometría lineal de la métrica g_p en T_pM a la métrica g_q en T_qM .

2.6. Geodésicas

Definición 2.34. Una geodésica es una curva $\gamma : I \rightarrow M$, cuyo campo de vectores γ' es paralelo.

Es decir, una curva γ es una geodésica si la misma no tiene aceleración.

La siguiente proposición es consecuencia de la expresión de la derivada covariante en coordenadas locales y la definición de una curva geodésica:

Proposición 2.35. Una curva γ es una geodésica en M si para todo entorno coordinado se cumple que

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad \text{para } 1 \leq k \leq n.$$

A partir de la proposición anterior, usando el teorema de Piccard, se demuestran automáticamente los siguientes resultados locales:

Lema 2.36. Si $p \in M$ y $v \in T_pM$, existe un intervalo I que incluye al 0 y una única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Proposición 2.37. Dado $p \in M$ y $v \in T_pM$, hay una única geodésica γ_v en M que inicia en p con velocidad inicial v (i.e. $\gamma'(0) = v$), y el dominio I_v es el mayor posible.

La siguiente definición es clave para el estudio de singularidades que se desarrolla en los últimos capítulos:

Definición 2.38. ■ La geodésica γ_v en la que el dominio es el mayor posible se dice que es *maximal*, o *inextendible*.

- Una variedad semi Riemanniana para la cual cada geodésica maximal está definida en toda la recta real es llamada *geodésicamente completa* o simplemente *completa*.

Notar que si una variedad M es completa, entonces $M - \{p\}$ no será completa, pues las geodésicas que originalmente pasaban por p ahora deben terminar en ese mismo punto.

Proposición 2.39. Para toda geodésica γ se cumple que $\langle \gamma', \gamma' \rangle$ es constante.

Demostración. Como sabemos que γ' es paralelo (i.e. $\gamma'' = 0$), entonces:

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle \gamma'', \gamma' \rangle + \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0.$$

□

A partir de esta proposición, podemos deducir que si α es geodésica, entonces el carácter causal de su vector tangente no cambiará, y por lo tanto, siempre caerá en una, y solo una de las tres clasificaciones causales. Las geodésicas son entonces temporales, nulas o espaciales.

Lema 2.40 (Lema de homogeneidad). *Sea γ_v una geodésica que en 0 pasa por $p \in M$ con una velocidad $v \in T_pM$, entonces*

$$\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

La siguiente proposición es clave para el trabajo con geodésicas en M , ya que demuestra que $\gamma_{(p,v)}(t)$ es diferenciable en sus tres variables, siempre que t y v sean chicos.

Proposición 2.41. *Dado $p \in M$, existe un abierto $V \subset M$ con $p \in V$, $\varepsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ donde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_qM, \|w\| < \varepsilon\}$, tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ es la única geodésica de M que en $t = 0$ pasa por q con velocidad w .*

Un comentario importante es que, como se anticipó en el capítulo 1, no se demostrará el teorema de las propiedades minimizantes de las geodésicas. Por el contrario, veremos en el capítulo 5 que en variedades de Lorentz, donde el tensor métrico tiene índice constante 1, las geodésicas temporales son las curvas que localmente tienen longitud máxima.

2.7. Mapa exponencial y referenciales geodésicos

Definición 2.42. Si $p \in M$, tomamos ε como en 2.41 y consideramos $B(0, \varepsilon) \subset T_pM$. Definimos $exp_p : B(0, \varepsilon) \rightarrow M$ como $exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

Notar que por el lema de homogeneidad, entonces $exp_p(tv) = \gamma_v(t)$.

Lema 2.43. *El mapa exponencial es localmente un difeomorfismo, pues $d_0exp_p = id_{T_pM}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} d_0exp_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{tv}(1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(t) = v. \end{aligned}$$

□

Definición 2.44. ■ Un *entorno normal* en $p \in M$ es de la forma $U \subset exp_p(B(0, r))$ de forma tal que $exp_p|_{\overline{B(0, r)}}$ es un difeomorfismo.

- Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de T_pM , es decir, una base que cumple $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$. El *sistema de coordenadas normales* $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ en U entorno normal, asigna a cada punto $q \in U$ las coordenadas relativas a e_1, \dots, e_n del punto

$$exp_p^{-1}(q) \in T_pM.$$

Es decir,

$$exp_p^{-1}(q) = \sum x^i(q)e_i.$$

Proposición 2.45. *Si x^1, \dots, x^n es un sistema de coordenadas normales en $p \in M$, entonces para todo i, j, k :*

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j$,

■ $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

Demostración. ■ Hay que probar que $\partial_j|_p = e_j$. A partir de esto tendríamos entonces que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, pues los e_j forman una base ortonormal.

Si $v = \sum a^i e_i \in T_p M$, por la definición de las coordenadas normales sabemos que

$$x^i(\gamma_v(t)) = x^i(\exp_p(tv)) = ta^i.$$

La expresión en coordenadas locales de la derivada de una curva α es

$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(t) \partial_i|_{\alpha(t)},$$

entonces

$$\gamma'_v(t) = \sum a^i \partial_i|_p.$$

Pero a la vez sabemos que $\gamma'_v(0) = v$, entonces, si para cada j tomamos $a^i = \delta_{ij}$, tenemos que,

$$e_j = v = \gamma'_v(0) = \partial_j|_p,$$

y entonces $g_{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j$.

- Como $x^i(\gamma_v(t)) = ta^i$, el primer término de las ecuaciones diferenciales de las coordenadas locales de la geodésica se anula, quedando entonces:

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) a^i a^j = 0 \quad \text{para todo } k.$$

Lo anterior es válido para todo $a = (a^1, \dots, a^n)$. Por lo tanto, para cada k , se elige a convenientemente para demostrar que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. □

Teniendo en cuenta la proposición anterior, si trabajamos con un sistema de coordenadas normales, y considerando los campos $V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i$ y $W = \sum_{j=1}^n W^j \partial_j$, tenemos que en p se cumple:

$$g(V, W) = \sum_i \varepsilon_i V^i W^i.$$

Trabajar con coordenadas normales es muy útil en el momento de realizar los cálculos, como veremos en la siguiente proposición:

Proposición 2.46. 1. En un sistema de coordenadas arbitrario, si X e Y son dos campos con coordenadas X^i y Y^j constantes, entonces $[X, Y] = 0$

2. En coordenadas normales, si Y es un campo con coordenadas Y^i constantes, entonces $D_X Y(p) = 0$ para todo campo X .

Demostración. 1. Usando la forma en coordenadas locales de los corchetes de Lie obtenemos:

$$[X, Y] = \sum_j \left\{ X(Y^j) - Y(X^j) \right\} \partial_j = 0.$$

2. Como estamos usando coordenadas normales, entonces $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. Entonces la forma en coordenadas locales de la conexión es

$$D_X Y(p) = \sum_k X(Y^k)(p) \partial_k(p).$$

Pero como a la vez sabemos que las coordenadas Y^k son constantes para todo k , entonces tenemos que $D_X Y(p) = 0$. □

Consideramos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_p M$, U un entorno normal y las coordenadas normales asociadas a dicha base. Entonces definimos los campos en U , $\{E_1, \dots, E_n\}$ tal que $E_i(p) = e_i$, extendiéndolos por transporte paralelo a través de geodésicas radiales desde p . Tenemos entonces que E_1, \dots, E_n son campos vectoriales unitarios y ortogonales dos a dos, y llamamos a los mismos *referenciales geodésicos*.

En particular si V es un campo en M , entonces

$$V = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i.$$

Y entonces

$$\langle V, W \rangle = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle.$$

Notar que $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$, mientras que $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = g_{ij}$. El inconveniente es que, mientras que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, por lo general, $[E_i, E_j] \neq 0$.

2.8. Operaciones con tensores en variedades Semi Riemannianas

Recordar que X^* es el dual de X según la métrica g , definido en 2.16. Dicha definición será utilizada en ambas operaciones a definir, y por lo tanto ambas dependerán de g .

Cambio de tipo

Sean $A \in T_s^r(M)$, y a, b naturales tales que $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s$. Entonces $\downarrow_b^a A \in T_{s+1}^{r-1}(M)$ está definido de la siguiente forma:

$$(\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \dots, X_b^*, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}),$$

donde X_b^* ahora está en la posición a contravariante.

Ejemplo 2.47. Por ejemplo, si $R \in T_3^1(M)$, entonces $\downarrow_1^1 R \in T_4^0(M)$. Como vimos luego de la proposición 2.16, $\partial_i^* = \sum g_{im} dx^m$ y entonces en coordenadas locales tenemos que:

$$\begin{aligned} (\downarrow_1^1 R)_{ijkl} &= (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= R\left(\sum_m g_{im} dx^m, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) = \sum_m g_{im} R_{ijkl}^m. \end{aligned}$$

Utilizando la notación en coordenadas locales, como los subíndices y supraíndices ya indican el tipo del tensor, a menudo omitiremos la flecha. Por ejemplo, en el caso recién discutido escribiremos simplemente R_{ijkl} en lugar de $(\downarrow_1^1 R)_{ijkl}$.

Análogamente se define $(\uparrow_b^a A) \in T_{s-1}^{r+1}(M)$. En este caso es útil recordar que el campo métricamente equivalente a dx^i es $\sum g^{im} \partial_m$.

Contracción métrica

En una variedad semi-Riemanniana, además de la contracción clásica vista en la sección 2.1.3, se puede contraer métricamente dos índices covariantes de la siguiente manera:

Si $A \in T_s^r(M)$, tenemos $C_{ab}(A) \in T_{s-2}^r(M)$, tal que:

$$(C_{ab}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_{s-2}) = \sum_{p,q} g^{pq} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \partial_p, \dots, \partial_q, \dots, X_{s-2}),$$

con ∂_p y ∂_q en las posiciones covariantes a y b .

Notar que por las ecuaciones vistas luego de la proposición 2.16, $(\sum_p g^{pq} \partial_p)^* = dx^q$, y entonces dicha definición coincide con cambiar de tipo A , obteniendo así un $(r+1, s-1)$ tensor, y luego contraer de la forma estándar una posición covariante y una posición contravariante, como en la sección 2.1.3. Por lo tanto, como el cambio de tipo no depende de las coordenadas, y ya vimos que la contracción usual tampoco, la contracción métrica es independiente de las coordenadas elegidas.

Se define análogamente para el caso de las posiciones contravariantes. En efecto, sea $A \in T_s^r(M)$, tenemos $C^{ab}(A) \in T_s^{r-2}(M)$ tal que:

$$(C^{ab}A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-2}, X_1, \dots, X_s) = \sum_{p,q} g_{pq} A(\theta^1, \dots, dx^p, \dots, dx^q, \dots, \theta^{r-2}, X_1, \dots, X_s),$$

con dx^p y dx^q en las posiciones contravariantes a y b .

Cuando no hay confusión de índices, por ejemplo cuando tratamos la contracción de un $(0, 2)$ tensor, escribimos simplemente C .

Trabajaremos seguido con referenciales geodésicos y coordenadas normales, por su sencillez a la hora de manipular operaciones, como veremos en las próximas notas.

Nota 2.48. Por ejemplo, en una contracción de un $(0, s)$ tensor A , como el tensor en un punto depende sólo del valor de los campos en el punto considerado, y $\partial_i(p) = e_i = E_i(p)$, tenemos que,

$$(C_{ab}A)(X_1, \dots, X_{s-2})(p) = \sum \varepsilon_m A(X_1, \dots, E_m, \dots, E_m, \dots, X_{s-2})(p),$$

con E_m en las posiciones a y b , pues al estar usando referenciales geodésicos, $g^{ij}(p) = g_{ij}(p) = g(E_i(p), E_j(p)) = \delta_{ij} \varepsilon_j$.

Pero además, dicha fórmula es válida en la totalidad del entorno normal U . En efecto, dado $q \in U$, tomo un sistema de coordenadas normales centrado en q que cumpla $\partial_i|_q = E_i(q)$. Esto puede ser hecho, como vimos en la definición 2.44, tomando el sistema de coordenadas que asigne a cada punto $r \in U$ las coordenadas relativas a $E_1(q), \dots, E_n(q)$ del punto $\exp_q^{-1}(r) \in T_q M$. Por la proposición 2.45 sabemos que $g_{ij}(q) = g^{ij}(q) = \delta_{ij} \varepsilon_j$, y el mismo argumento utilizado para p sirve para demostrar que la fórmula sirve para todo q en U .

Por lo tanto, para todo $q \in U$ tenemos que:

$$(C_{ab}A)(X_1, \dots, X_{s-2}) = \sum \varepsilon_m A(X_1, \dots, E_m, \dots, E_m, \dots, X_{s-2}).$$

Nota 2.49. Similarmente, un caso que usaremos muy seguido es $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, es decir, un $(1, s)$ tensor A . Para contraerlo, al estar usando coordenadas normales nuevamente tenemos que $g_{ij}(p) = g^{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j$. Entonces, usando las igualdades posteriores a la proposición 2.16 tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (C_b^1 A)(X_1, \dots, X_{s-1})(p) &= \sum_m A(dx^m, X_1, \dots, \partial_m, \dots, X_{s-1})(p) \\
 &= \sum_m dx^m (A(X_1, \dots, E_m, \dots, X_{s-1}))(p) \\
 &= \sum_m \left\langle \sum_i g^{mi} \partial_i, A(X_1, \dots, E_m, \dots, X_{s-1}) \right\rangle(p) \\
 &= \sum_m \langle \varepsilon_m \partial_m, A(X_1, \dots, E_m, \dots, X_{s-1}) \rangle(p) \\
 &= \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, A(X_1, \dots, E_m, \dots, X_{s-1}) \rangle(p),
 \end{aligned}$$

con E_m en la posición b .

Un argumento similar al realizado en el caso anterior demuestra que la misma fórmula es válida en todo el entorno U . Por lo tanto, para todo $q \in U$ tenemos que:

$$(C_b^1 A)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, A(X_1, \dots, E_m, \dots, X_{s-1}) \rangle.$$

2.9. Algunos operadores diferenciales

En geometría semi Riemanniana hay generalizaciones naturales para los operadores diferenciales *gradiente* y *divergencia*.

Definición 2.50. El *gradiente* $\text{grad}f$ de una función f es el único campo tal que:

$$\langle \text{grad}f, X \rangle = X(f) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposición 2.51. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave tal que $|\text{grad}f|$ es constante, entonces las curvas integrales de $\text{grad}f$ son geodésicas.

Demostración. Primero mostraremos que el mapa $X \rightarrow D_X \text{grad}f$ es autoadjunto:

$$\begin{aligned}
 \langle D_X \text{grad}f, Y \rangle &= X \langle \text{grad}f, Y \rangle - \langle \text{grad}f, D_X Y \rangle \\
 &= XYf - D_X Y(f).
 \end{aligned}$$

Como $XY - YX = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$, entonces $XY - D_X Y = YX - D_Y X$, y entonces,

$$\langle D_X \text{grad}f, Y \rangle = YXf - D_Y X(f) = \langle D_Y \text{grad}f, X \rangle.$$

Por lo tanto el operador mencionado es autoadjunto.

Para probar que las curvas integrales de $\text{grad}f$ son geodésicas, probaremos que $\text{grad}f$ es paralelo cuando es visto como un campo a lo largo de una de sus curvas integrales.

Probaremos esto viendo que $\langle D_{\text{grad}f} \text{grad}f, X \rangle = 0$ para todo campo X .

$$\begin{aligned} \langle D_{\text{grad}f} \text{grad}f, X \rangle &= \langle D_X \text{grad}f, \text{grad}f \rangle \\ &= \frac{1}{2} X \langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle = 0. \end{aligned}$$

Es igual a cero pues $|\text{grad}f|$ es constante. \square

Sólo definiremos la divergencia para dos casos particulares de tensores.

Definición 2.52. 1. Si V es un campo de vectores, es decir, $V \in T_0^1(M)$, definimos $\text{div}V = C(DV)$ donde D es el diferencial covariante y C la contracción usual.

Observar que DV es un $(1, 1)$ tensor y por lo tanto $C(DV) \in T_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Además, si E_1, \dots, E_n es un referencial geodésico, aplicando lo visto en 2.49, con $s = 1$, al $(1, 1)$ tensor DV , tenemos:

$$\text{div}V = C(DV) = \sum_i \varepsilon_i \langle E_i, DV(E_i) \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle D_{E_i} V, E_i \rangle.$$

Recordando la definición de las componentes del diferencial covariante introducida en 2.28, y recordando que como estamos usando la contracción usual, la métrica no está involucrada, tenemos que en coordenadas locales:

$$\text{div}V = C(DV) = \sum V_{;i}^i = \sum_i \left\{ \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i V^j \right\}.$$

2. Si A es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$, definimos $\text{div}A = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in T_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.

Notar que el diferencial covariante de A es un tensor de tipo $(0, 3)$ y cumple que $DA(X, Y, Z) = D_Z A(X, Y)$. En este caso, como A es simétrico, tenemos que $C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in T_1^0(M)$.

Por lo visto en 2.48, si E_1, \dots, E_n es un referencial geodésico tenemos:

$$(\text{div}A)(X) = C_{13}(DA)(X) = \sum \varepsilon_i (DA)(E_i, X, E_i) = \sum \varepsilon_i (D_{E_i} A)(E_i, X).$$

Recordando la definición de las componentes del diferencial covariante introducida en 2.28, y recordando que como estamos usando la contracción métrica, debemos realizar la sumatoria en dos índices r y s e involucrar a la métrica, tenemos que en coordenadas locales:

$$(\text{div}A)_i = C_{13}(DA)_i = \sum_{r,s} g^{rs} A_{ri;s} = \sum_s A_{i;s}^s.$$

Para afirmar la última igualdad recordamos que que al realizar la suma $\sum_r g^{rs} A_{ri;s}$ estamos cambiando el tipo del tensor como en el caso 2.47. Notar que aquí podemos visualizar una vez más que la contracción métrica consiste en un cambio de tipo y una contracción usual, pues $\sum_s A_{i;s}^s$ es una contracción usual del $(1, 2)$ tensor obtenido al cambiar de tipo el $(0, 3)$ tensor DA .

Del teorema de la divergencia de Gauss se interpreta la divergencia de un campo vectorial en un punto como el flujo por unidad de volumen. Si X es el campo de velocidad de un fluido, la divergencia nos da la *tasa de expansión* por unidad de volumen. Si la divergencia es positiva, el fluido se expande. Si la divergencia es negativa, el fluido se comprime. Si la divergencia es nula, el fluido es incompresible.

Definición 2.53. La *Hessiana* de una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ es su segundo diferencial covariante: $H(f) = D(Df)$.

Proposición 2.54. El Hessiano $H(f)$ de una función f es el $(0, 2)$ tensor simétrico tal que,

$$H(f)(X, Y) = XYf - (D_X Y)f = \langle D_X(\text{grad}f), Y \rangle.$$

Demostración. Es claro que es un $(0, 2)$ tensor pues f es un $(0, 0)$ tensor, Df es un $(0, 1)$ tensor y entonces $D(Df)$ es un $(0, 2)$ tensor.

$$\begin{aligned} H(f)(X, Y) &= D(Df)(X, Y) = D_Y(Df)(X) = D_Y(Df(X)) - Df(D_Y X) \\ &= D_Y(Xf) - (D_Y X)f = YXf - (D_Y X)f. \end{aligned}$$

Una vez más, como $XY - YX = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$, entonces $XY - D_X Y = YX - D_Y X$, y así llegamos al resultado deseado, probando además que el tensor $H(f)$ es simétrico.

Por otro lado, por lo demostrado recién,

$$\langle D_X(\text{grad}f), Y \rangle = X\langle \text{grad}f, Y \rangle - \langle \text{grad}f, D_X Y \rangle = XYf - (D_X Y)f = H(f)(X, Y).$$

□

Capítulo 3

Curvatura

Como ya adelantamos, la ecuación de Einstein vincula la existencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto es necesario estudiar el concepto de la curvatura en variedades semi Riemannianas. Al lector familiarizado con la curvatura de una variedad Riemanniana se le comenta que no deben realizarse cambios significativos para extender dichos conceptos a variedades semi Riemannianas.

Trabajaremos con varias nociones de curvatura. La más fundamental es la curvatura Riemanniana, que es un tensor calculado a partir de la métrica. De ésta derivan las nociones de curvatura seccional, de Ricci y escalar, que son las que aparecen en la mayoría de las aplicaciones (ej: la ecuación de Einstein). Cerraremos el capítulo demostrando un resultado fundamental para la motivación de la ecuación de Einstein. Todo el contenido de este capítulo puede ser encontrado en [7], capítulo 3.

3.1. Curvatura Riemanniana

Definición 3.1. La curvatura Riemanniana R de una variedad semi Riemanniana M es la función $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por:

$$R_{XY}Z = R(X, Y)Z = D_{[X, Y]}Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Notar que si aplicamos el conmutador de operadores a las derivaciones tensoriales D_X y D_Y tenemos que

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = [D_X, D_Y]Z.$$

Por lo tanto, considerando que el primer corchete es un corchete de Lie, y el segundo es el conmutador de operadores, podemos escribir:

$$R_{XY}Z = R(X, Y)Z = D_{[X, Y]}Z - [D_X, D_Y]Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Es importante mencionar que el conmutador de operadores, así como los corchetes de Lie, cumple la Identidad de Jacobi. Es decir, para operadores T , V y U , tenemos que

$$[T, [V, U]] + [U, [T, V]] + [V, [U, T]] = 0.$$

Observación 3.2. R es un campo tensorial de tipo $(1, 3)$.

Demostración. Por la tercera identificación comentada en la observación 2.3, basta probar que R es $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal. Como por 2.18 $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$, tenemos:

$$\begin{aligned} R_{X,fY}Z &= D_{[X,fY]}Z - [D_X, D_{fY}]Z = D_{X(f)Y}Z + D_{f[X,Y]}Z - D_X(D_{fY}Z) + D_{fY}(D_XZ) \\ &= X(f)D_YZ + fD_{[X,Y]}Z - D_X(fD_YZ) + fD_Y(D_XZ) \\ &= X(f)D_YZ + fD_{[X,Y]}Z - X(f)D_YZ - fD_X(D_YZ) + fD_Y(D_XZ) \\ &= X(f)D_YZ - X(f)D_YZ + fR_{XY}Z = fR_{XY}Z. \end{aligned}$$

En las otras coordenadas las cuentas son análogas. \square

Observamos entonces que aunque los corchetes de Lie no sean tensores, y la conexión tampoco, R es un campo tensorial en M .

Como vimos al estudiar los tensores en el capítulo anterior, R puede ser visto como una función \mathbb{R} -multilineal en cada espacio tangente T_pM . En particular, si $x, y \in T_pM$, tenemos el operador lineal

$$R_{xy} : T_pM \rightarrow T_pM,$$

mandando cada z a $R_{xy}z$.

Proposición 3.3. *Si $x, y, z, v, w \in T_pM$, entonces:*

1. $R_{xy} = -R_{yx}$,
2. $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$,
3. $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$, *Primera identidad de Bianchi*,
4. $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$.

Demostración. Como tanto la conexión como el corchete de Lie son operaciones locales, basta demostrarlo en un entorno $U \subset M$ de p .

Para probar todas las afirmaciones, extenderemos convenientemente los vectores x, y, z, v, w a campos vectoriales X, Y, Z, V, W , tales que en p tengan el valor adecuado. La elección de dichos campos no afecta el valor de las expresiones en 3.3, como ya se observó para campos tensoriales en general.

Consideraremos dichas extensiones tal que todos los campos resultantes tengan corchetes de Lie nulos (i.e. $[X, Y] = 0$). La existencia de tales campos se probó en 2.46. Entonces tenemos

$$R_{XY}Z = -[D_X, D_Y]Z = D_Y(D_XZ) - D_X(D_YZ).$$

1. Intercambiando X e Y en la ecuación anterior, se observa que $R_{XY} = -R_{YX}$. Entonces $R_{xy} = -R_{yx}$.
2. Primero probaremos que $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$. Esto se obtiene de la compatibilidad respecto a la métrica, como veremos a continuación:

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}V, V \rangle &= \langle D_Y(D_XV), V \rangle - \langle D_X(D_YV), V \rangle \\ &= Y\langle D_XV, V \rangle - \langle D_XV, D_YV \rangle - X\langle D_YV, V \rangle + \langle D_YV, D_XV \rangle \\ &= \frac{1}{2}YX\langle V, V \rangle - \frac{1}{2}XY\langle V, V \rangle \\ &= \frac{1}{2}[Y, X]\langle V, V \rangle = 0, \end{aligned}$$

pues $[X, Y] = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle R_{xy}v, w \rangle + \langle R_{xy}w, v \rangle &= \langle R_{xy}v, w \rangle + \langle R_{xy}v, v \rangle + \langle R_{xy}w, w \rangle + \langle R_{xy}w, v \rangle \\ &= \langle R_{xy}v, v + w \rangle + \langle R_{xy}w, v + w \rangle = \langle R_{xy}(v + w), v + w \rangle = 0. \end{aligned}$$

3. Si $F : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es una función \mathbb{R} -lineal, llamamos $\mathfrak{G}F(X, Y, Z)$ a la suma de todas las permutaciones cíclicas de X, Y, Z :

$$\mathfrak{G}F(X, Y, Z) = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y).$$

Una permutación cíclica de X, Y, Z no cambia el valor de $\mathfrak{G}F(X, Y, Z)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}R_{XY}Z &= \mathfrak{G}D_Y D_X Z - \mathfrak{G}D_X D_Y Z \\ &= \mathfrak{G}D_X D_Z Y - \mathfrak{G}D_X D_Y Z = \mathfrak{G}D_X[Z, Y] = 0. \end{aligned}$$

Para la penúltima igualdad usamos la simetría de la conexión de Levi-Civita, y para la última, usamos la definición estratégica de nuestros campos de vectores, donde los corchetes de Lie se anulan.

4. Por (3), $\langle \mathfrak{G}R_{YV}X, W \rangle = 0$. Sumando en las 4 permutaciones cíclicas de Y, V, X, W obtenemos:

$$\langle \mathfrak{G}R_{YV}X, W \rangle + \langle \mathfrak{G}R_{WY}V, X \rangle + \langle \mathfrak{G}R_{XW}Y, V \rangle + \langle \mathfrak{G}R_{VX}W, Y \rangle = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle R_{YV}X + R_{XY}V + R_{VX}Y, W \rangle + \langle R_{WY}V + R_{VW}Y + R_{YV}W, X \rangle \\ + \langle R_{XW}Y + R_{YX}W + R_{WY}X, V \rangle + \langle R_{VX}W + R_{WV}X + R_{XW}V, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Usando el punto (1) y (2), se cancelan 8 de los términos de arriba, quedando:

$$2\langle R_{XY}V, W \rangle + 2\langle R_{WV}X, Y \rangle = 0,$$

de donde se deduce (4). □

Proposición 3.4 (Segunda Identidad de Bianchi). *Si $x, y, z \in T_p M$, entonces:*

$$(D_z R)(x, y) + (D_y R)(z, x) + (D_x R)(y, z) = 0.$$

Demostración. Al igual que en el teorema anterior, debemos extender los vectores tangentes x, y, z a campos vectoriales convenientes X, Y, Z . Esta vez no tomaremos cualquier sistema de coordenadas en p , sino que tomaremos uno *normal* en p , y elegiremos X, Y, Z campos con componentes constantes en cada una de estas coordenadas. Como consecuencia, por lo visto en 2.46, los corchetes de Lie entre estos campos serán nulos, y también lo serán los símbolos de Christoffel en p . Por lo tanto, todas las 9 derivadas covariantes involucrando a X, Y, Z se anularán en p .

Por la regla del producto vista en 2.8, aplicando $(D_Z R)(X, Y)$ a un campo V nos queda:

$$(D_Z R)(X, Y)V = D_Z(R(X, Y)V) - R(D_Z X, Y)V - R(X, D_Z Y)V - R(X, Y)(D_Z V).$$

Como los dos términos del medio se anulan, resulta:

$$(D_Z R)(X, Y)V = D_Z(R(X, Y)V) - R(X, Y)(D_Z V) = [D_Z, R(X, Y)](V) = [D_Z, [D_Y, D_X]](V).$$

Como sabemos que el conmutador de operadores cumple la igualdad de Jacobi, podemos concluir que $\mathfrak{G}(D_Z R)(X, Y) = 0$ en p . \square

Proposición 3.5. *En un sistema de coordenadas locales,*

$$R_{\partial_k \partial_l \partial_j} = \sum_{i=1}^n R_{ijkl} \partial_i.$$

Donde las componentes de R son dadas por:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

Demostración. Como los corchetes de Lie entre los campos ∂_i se anulan, tenemos:

$$R_{\partial_k \partial_l \partial_j} = D_{\partial_l} D_{\partial_k} \partial_j - D_{\partial_k} D_{\partial_l} \partial_j.$$

El primer término queda, a partir de 2.25:

$$D_{\partial_l} \left(\sum_m \Gamma_{kj}^m \partial_m \right) = \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_m \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i \right\} \partial_i.$$

Análogamente, intercambiando l y k , se obtiene el segundo término, y se concluye:

$$R_{\partial_k \partial_l \partial_j} = \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_m \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i \right\} \partial_i - \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_m \Gamma_{lj}^m \Gamma_{km}^i \right\} \partial_i.$$

A partir de dicho resultado se concluye de forma inmediata el resultado final. \square

Observar que esta proposición, junto con 2.25, muestra la forma de calcular las componentes R_{ijkl}^i a partir de las componentes de la métrica g_{ij} .

3.2. Curvatura Seccional

Dado que el tensor de la curvatura Riemanniana es bastante complicado, ahora introduciremos una noción de curvatura más simple, que de todos modos determina completamente R .

Definición 3.6. Un subespacio Π de dimensión dos en $T_p M$ es llamado un *plano tangente* a M en p .

Definición 3.7. Para $v, w \in T_p M$, definimos

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2.$$

Notar que si v y w forman una base ortonormal de Π , entonces $Q(v, w)$ vale uno en el caso de que ambos vectores tengan la misma signatura, y -1 en el caso que tengan signatura contraria. Esto motiva el definir el área del paralelogramo v, w como $\sqrt{|Q(v, w)|}$.

Adicionalmente, se puede observar que $Q(v, w)$ es positivo si $g|_{\Pi}$ es definido, y es negativo si es indefinido. El plano Π es no degenerado si y solo si $Q(v, w) \neq 0$ para alguna base v, w de Π . Esto significa que el plano Π es no degenerado si y solo si $g|_{\Pi}$ es no degenerado.

Definición 3.8. Sea Π un plano tangente a M en p no degenerado. La *curvatura seccional* $K(p, \Pi)$ viene dada por:

$$K(p, \Pi) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)},$$

con v, w base de Π .

Hay que probar que la curvatura seccional está bien definida, es decir, que no depende de la elección de los vectores v y w .

Proposición 3.9. La *curvatura seccional* $K(p, \Pi)$ no depende de la elección de los vectores v y w .

Demostración. Supongamos que $\{x, y\}$ es otra base del plano Π . Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} v &= ax + by \\ w &= cx + dy, \end{aligned}$$

donde el determinante de los coeficientes $ad - bc$ no es nulo. Sustituyendo llegamos a,

$$\begin{aligned} \langle R_{vw}v, w \rangle &= (ad - bc)^2 \langle R_{xy}x, y \rangle \\ Q(v, w) &= (ad - bc)^2 Q(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto el cociente entre estos dos es independiente de la elección de la base. \square

Por la misma definición de la curvatura seccional K , sabemos que R la determina. Para demostrar que K determina R tenemos que asumir el siguiente lema de álgebra lineal:

Lema 3.10. *Dados dos vectores v y w en un espacio con producto escalar, existen vectores \bar{v} y \bar{w} arbitrariamente cercanos a v y w respectivamente, que generan un plano no degenerado.*

Proposición 3.11. *Si $K = 0$ en $p \in M$, entonces $R = 0$ en p . Es decir, si $K(p, \Pi) = 0$ para todo plano tangente en p no degenerado, entonces $R_{xy}z = 0 \quad \forall x, y, z \in T_p M$.*

Demostración. Probaremos la siguiente serie de afirmaciones, que culminarán en la tesis:

1. $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in T_p M$.

Si v y w generan un plano no degenerado, sabemos que $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$ pues $K(v, w) = 0$. Pero a la vez, por el lema anterior, sabemos que cualquier par de vectores son límite de pares de vectores que generan un plano no degenerado. Como $\langle R_{vw}x, y \rangle$ es multilineal, entonces es continua en $T_p M^4$ y entonces se cumple lo deseado.

2. $R_{vw}v = 0 \quad \forall v, w \in T_pM.$

Para un x arbitrario tenemos

$$\langle R_{v,w+x}v, w+x \rangle = \langle R_{vw}v, w \rangle + \langle R_{vx}v, w \rangle + \langle R_{vw}v, x \rangle + \langle R_{vx}v, x \rangle.$$

Tres de estos cinco términos se anulan por la parte (1). Los dos términos restantes son iguales por las simetrías vistas en 3.3. Entonces podemos afirmar que $\langle R_{vw}v, x \rangle = 0$ para todo x .

3. $R_{vw}x = R_{wx}v \quad \forall v, w, x \in T_pM.$

Polarizando, obtenemos

$$R_{v+x,w}(v+x) = R_{vw}(v) + R_{xw}(v) + R_{vw}(x) + R_{xw}(x).$$

Nuevamente, tres de estos términos se anulan por (2), y obtenemos $R_{vw}x = -R_{xw}(v) = R_{wx}v \quad \forall v, w, x \in T_pM.$

Según (3), $R_{vw}x$ permanece igual por una permutación cíclica de sus vectores. Entonces la identidad de Bianchi implica que $R_{vw}x = 0$ para cualquier $v, w, x \in T_pM$ y la proposición queda demostrada. \square

Una variedad M es *plana* si R es cero en todo punto $p \in M$. La proposición anterior asegura que M es plana si y solo si la curvatura seccional K es idénticamente nula. Por ejemplo, el espacio semi Euclideo \mathbb{R}_v^n es plano, pues todos sus símbolos de Christoffel son nulos y por ende $R = 0$.

Decimos que una función $F : T_pM^4 \rightarrow \mathbb{R}$ es una pseudo curvatura si cumple las propiedades de simetría vistas en la proposición 3.3. La misma demostración que la proposición anterior prueba que si $F(v, w, v, w) = 0$ para todo $v, w \in T_pM$, entonces $F = 0$.

Podemos ahora demostrar que K determina R :

Corolario 3.12. *Sea F una pseudo curvatura tal que*

$$K(p, \Pi) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

entonces

$$\langle R_{vw}x, y \rangle = F(v, w, x, y) \quad \forall v, w, x, y \in T_pM.$$

Demostración. Definimos $\Delta(v, w, x, y) = F(v, w, x, y) - \langle R_{vw}x, y \rangle$. Entonces Δ es una pseudo curvatura, y tenemos que $\Delta(v, w, v, w) = 0$ para todo $v, w \in T_pM$. La proposición anterior dice que $\Delta = 0$, y entonces $\langle R_{vw}x, y \rangle = F(v, w, x, y) \quad \forall v, w, x, y \in T_pM.$ \square

Corolario 3.13. *Si M tiene curvatura seccional constante C , entonces*

$$R_{xyz} = C\{\langle z, x \rangle y - \langle z, y \rangle x\}.$$

Demostración. Si definimos

$$F(x, y, v, w) = C[\langle v, x \rangle \langle y, w \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle],$$

es simple ver que F es una pseudo curvatura, y que $F(x, y, x, y) = CQ(x, y)$.

Entonces si x e y generan un plano no degenerado,

$$K(x, y) = C = \frac{F(x, y, x, y)}{Q(x, y)},$$

y el resultado sigue por el corolario anterior. \square

3.3. Curvatura de Ricci y curvatura escalar

Definición 3.14. La *curvatura de Ricci* es el tensor obtenido como $C_3^1(R) \in T_2^0$, donde R es la curvatura Riemanniana.

Es claro a partir de la definición que la curvatura de Ricci es un tensor simétrico, y en un sistema coordinado, como estamos contrayendo de la forma usual, una posición covariante y una contravariante, simplemente tenemos $Ric_{ij} = \sum R_{ijm}^m$.

Similarmente, por 2.49, si E_1, \dots, E_n es un referencial geodésico, la curvatura de Ricci está dada por:

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle,$$

donde $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

Dado un vector $u \in T_p M$, si tomo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal con $e_1 = u$ y aplico la definición 3.8, obtengo:

$$Ric(u, u) = \sum \varepsilon_m \langle R_{ue_m}(u), e_m \rangle = \langle u, u \rangle \sum K(u, e_m).$$

Escribiendo

$$Ric(u, v) = \frac{1}{2} (Ric(u + v, u + v) - Ric(u, u) - Ric(v, v)),$$

vemos que $Ric(u, v)$ se puede expresar en función de la curvatura seccional.

Definición 3.15. La curvatura escalar S de M es la contracción de la curvatura de Ricci. En coordenadas locales, como estamos contrayendo dos posiciones covariantes debemos multiplicar por g^{ij} , teniendo entonces,

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} Ric_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Adicionalmente, por lo visto en la nota 2.48, si E_1, \dots, E_n es un referencial geodésico tenemos:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i \varepsilon_i Ric(E_i, E_i) = \sum_{i,m} \varepsilon_i \varepsilon_m \langle R_{E_i, E_m} E_i, E_m \rangle \\ &= \sum_{i,m} K(E_i, E_m). \end{aligned}$$

El siguiente teorema se deriva de la segunda identidad de Bianchi y es el pilar de la ecuación de Einstein, que asocia la curvatura con el tensor energía impulso:

Teorema 3.16. $DS = 2div Ric$.

Demostración. Tomamos $\partial_i, \dots, \partial_n$ normales y escribimos:

$$(D_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l}(\partial_j)(p) = \sum R_{jkl;r}^i(p) \partial_i(p).$$

La segunda identidad de Bianchi demostrada en 3.4 afirma que:

$$R_{jkl;r}^i(p) + R_{jlr;k}^i(p) + R_{jrk;l}^i(p) = 0.$$

A partir de ahora omitiremos la notación de la evaluación en p , simplemente por una cuestión de simplicidad. Usando propiedades de simetría de R cambiamos los roles de r y k en el tercer término. Escribimos el caso particular $i = r$ y contraemos en r :

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + \sum_r R_{jlr;k}^r - \sum_r R_{jkr;l}^r = 0.$$

Como $\sum_r R_{jlr;k}^r = Ric_{jl;k}$, y $\sum_r R_{jkr;l}^r = Ric_{jk;l}$, queda:

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + Ric_{jl;k} - Ric_{jk;l} = 0.$$

Multiplicando por g^{jk} y contrayendo en j y k :

$$\sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r + \sum_{j,k} g^{jk} Ric_{jl;k} - S_{;l} = 0.$$

En el segundo término, realizando un cambio de tipo y sabiendo que $((g^{ij}))$ es una matriz simétrica y es la inversa de $((g_{ij}))$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} g^{jk} Ric_{jl;k} &= \sum_{j,k,m} g^{jk} g_{jm} Ric_{l;k}^m = \sum_{k,m} \left(\sum_j g^{kj} g_{jm} \right) Ric_{l;k}^m \\ &= \sum_{k,m} \delta_{km} Ric_{l;k}^m = \sum_m Ric_{l;m}^m. \end{aligned}$$

Similarmente, como por 3.3 sabemos que $R_{mjkl;r} = R_{jmlk;r}$, en el primer término obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r &= \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} R_{mjkl;r} = \sum_{r,j,k,m} g^{rm} g^{jk} R_{jmlk;r} \\ &= \sum_{r,k,m} g^{rm} R_{mlk;r}^k = \sum_{r,m} g^{rm} Ric_{ml;r} \\ &= \sum_r Ric_{l;r}^r = \sum_m Ric_{l;m}^m. \end{aligned}$$

Sumando entonces el primer y el segundo término obtenemos:

$$2 \sum Ric_{l;m}^m = S_{;l}.$$

Por 2.52 y por 2.28 sabemos que dicha igualdad es igual a:

$$2div Ric = DS.$$

□

Proposición 3.17. *Si M es una variedad de dimensión n y curvatura seccional C constante, entonces $Ric = (n - 1)Cg$ y $S = n(n - 1)C$.*

Demostración. Como vimos antes, y como la curvatura seccional es constante,

$$Ric(u, u) = \langle u, u \rangle \sum K(u, e_m) = (n - 1)C \langle u, u \rangle.$$

Entonces

$$Ric(u, v) = \frac{1}{2} (Ric(u + v, u + v) - Ric(u, u) - Ric(v, v)) = (n - 1)C \langle u, v \rangle.$$

Como S es la contracción de la curvatura de Ricci, es claro que $S = n(n - 1)C$. □

Capítulo 4

Subvariedades Semi Riemannianas

En este capítulo definiremos la noción de subvariedad semi Riemanniana. Estudiaremos la relación entre la geometría de una subvariedad y la de su variedad ambiente, que viene dada por la segunda forma fundamental. Esta es un tensor que se obtiene a partir de las conexiones de Levi-Civita de ambas variedades. También estudiaremos mapas a dos parámetros, cuyas propiedades se aplicarán con frecuencia en este trabajo. Dicho capítulo pretende ser solamente informativo, y por lo tanto muchas pruebas se omitirán. El contenido de este capítulo puede ser expandido en [7], capítulo 4.

Definición 4.1. Sea M una subvariedad de una variedad semi Riemanniana (\overline{M}, g) , y sea $j : M \rightarrow \overline{M}$ el mapa inclusión. Si el pullback $j^*(g)$ es un tensor métrico en M , entonces decimos que $(M, j^*(g))$ es una subvariedad semi Riemanniana.

A diferencia de lo que sucede en la geometría clásica, no toda subvariedad de una variedad semi Riemanniana posee un tensor métrico inducido.

Sea M es una subvariedad semi Riemanniana de \overline{M} . Definiremos $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ como el conjunto de los campos vectoriales suaves X definidos en M tal que $X(p) \in T_p\overline{M}$ para todo $p \in M$. En lo anterior, el campo X es suave si para toda $f \in \mathfrak{F}(\overline{M})$, tenemos $Xf \in \mathfrak{F}(M)$. Claramente, si $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, entonces su restricción a M estará en $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Nociones básicas de álgebra lineal nos dicen que para todo p , $T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$, y por lo tanto podemos definir las proyecciones ortogonales naturales:

$$\tan : T_p\overline{M} \rightarrow T_pM,$$

$$\text{nor} : T_p\overline{M} \rightarrow T_pM^\perp,$$

tal que $v = \tan v + \text{nor} v$ para todo $v \in T_p\overline{M}$. Dichas proyecciones son obviamente suaves.

Diremos que un campo $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ es normal a M si $Z(q) \perp M$ para todo $q \in M$. El conjunto $\mathfrak{X}(M)^\perp$ de dichos campos es un submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Si aplicamos \tan y nor en cada punto de un campo $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, obtenemos $\tan X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\text{nor} X \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Puede demostrarse que dichos campos vectoriales son suaves. Por lo tanto, tenemos las proyecciones ortogonales resultantes:

$$\tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

$$\text{nor} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp,$$

tal que $X = \tan X + \text{nor} X$. Dichas proyecciones son obviamente $\mathfrak{F}(M)$ -lineales.

4.1. Conexión inducida

La conexión de Levi Civita \bar{D} en \bar{M} dará lugar a una función $\mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$ llamada la *conexión inducida* en M .

Definición 4.2. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$, tomamos \bar{V} y \bar{X} extensiones suaves locales de V y X a un entorno U de p en \bar{M} , y definimos $\bar{D}_V X$ como la restricción de $\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}$ a $U \cap M$.

Veremos que el valor $\bar{D}_V X$ recién definido es independiente de las extensiones \bar{V} y \bar{X} elegidas, por lo que define una función $\mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$ llamada *conexión inducida* en M por \bar{D} . Como está tan relacionada con la conexión de Levi Civita \bar{D} de \bar{M} , usamos la misma notación, \bar{D} .

Lema 4.3. *La conexión inducida está bien definida.*

Demostración. Por ser la restricción del campo suave $\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X}$, la conexión inducida es suave. Resta probar que es independiente de la elección de las extensiones de V y X . Por la forma en coordenadas locales de una conexión afín, sabemos que la conexión depende del valor de V solamente en el punto considerado, mientras que depende del valor de X en un entorno del punto. Por lo tanto, como el punto considerado siempre será un punto de M , sabemos que el resultado será el mismo para cualquier extensión de V . Resta ver que no depende de la elección de la extensión de X .

Si escribimos $\bar{X} = \sum f^i \partial_i$ en un entorno U de un punto $q \in M$, entonces tenemos,

$$\bar{D}_{\bar{V}} \bar{X} = \sum \bar{V}(f^i) \partial_i + \sum f^i \bar{D}_{\bar{V}} \partial_i.$$

Pero como $q \in M$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\bar{V}(f^i)(q) = V_q(f^i) = V_q(f^i|_{U \cap M})$, y por lo tanto este término no depende de la extensión de las f^i . El segundo término tampoco depende de la extensión porque estamos evaluando $\bar{D}_{\bar{V}} \partial_i$ siempre en un punto de M . \square

Es inmediato demostrar que la conexión inducida \bar{D} cumple las mismas propiedades que la conexión de Levi Civita:

Proposición 4.4. *Si \bar{D} es la conexión inducida en $M \subset \bar{M}$, entonces se cumple que para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y $X, Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$,*

1. $\bar{D}_V X$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en V ,
2. $\bar{D}_V X$ es \mathbb{R} -lineal en X ,
3. $\bar{D}_V fX = (Vf)X + f\bar{D}_V X \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M)$,
4. $[V, W] = \bar{D}_V W - \bar{D}_W V$,
5. $V\langle X, Y \rangle = \langle \bar{D}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{D}_V Y \rangle$.

Proposición 4.5. *Si $M \subset \bar{M}$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y D es la conexión de Levi Civita para M , entonces,*

$$D_V W = \tan \bar{D}_V W.$$

Demostración. Por la fórmula de Koszul (ver [7], capítulo 3, página 61) sabemos que,

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{D_V} \overline{W}, \overline{X} \rangle &= \overline{V} \langle \overline{W}, \overline{X} \rangle + \overline{W} \langle \overline{X}, \overline{V} \rangle - \overline{X} \langle \overline{V}, \overline{W} \rangle \\ &\quad - \langle \overline{V}, [\overline{W}, \overline{X}] \rangle + \langle \overline{W}, [\overline{X}, \overline{V}] \rangle + \langle \overline{X}, [\overline{V}, \overline{W}] \rangle \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, a dicha expresión le llamaremos $F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})$.

Si restringimos a M , $\langle \overline{D_V} \overline{W}, \overline{X} \rangle = \langle \overline{D_V} W, X \rangle$.

Además, como $\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle|_M = \langle X, Y \rangle$ y $[\overline{X}, \overline{Y}]|_M = [X, Y]$, tenemos que $F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})|_M = F(V, W, X)$. Pero también sabemos que $F(V, W, X) = 2\langle D_V W, X \rangle$.

Por las dos afirmaciones tenemos entonces,

$$\langle \overline{D_V} W, X \rangle = \langle D_V W, X \rangle.$$

Como $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escribir $\tan \overline{D_V} W$ en lugar de $\overline{D_V} W$, y tenemos que,

$$\langle \tan \overline{D_V} W, X \rangle = \langle D_V W, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Por lo tanto, $\tan \overline{D_V} W = D_V W$. □

Definición 4.6. La *segunda forma fundamental* de M en \overline{M} es la función $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por,

$$II(V, W) = \text{nor} \overline{D_V} W.$$

Es directo demostrar que dicha función es $\mathfrak{F}(M)$ -bilineal y simétrica (usando 4.4).

Además, por la proposición anterior, se puede afirmar que si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ entonces,

$$\overline{D_V} W = \underbrace{D_V W}_{\text{tangente a } M} + \underbrace{II(V, W)}_{\text{normal a } M}.$$

El siguiente teorema muestra que se puede obtener la curvatura de M a partir de la curvatura de \overline{M} y de la segunda forma fundamental. La demostración se puede encontrar en [7], capítulo 4, páginas 100 y 101. Se le advierte al lector que dicho teorema, junto con la sección 4.2, será utilizada solamente en un ejemplo de solución de la ecuación de Einstein.

Teorema 4.7. *Sea M una subvariedad semi Riemanniana en \overline{M} , con R y \overline{R} las curvaturas Riemannianas, y II la segunda forma fundamental. Entonces para $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que,*

$$\begin{aligned} \langle R_{VW} X, Y \rangle &= \langle \overline{R}_{V,W} X, Y \rangle + \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle \\ &\quad - \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle. \end{aligned}$$

El siguiente corolario es inmediato a partir del teorema anterior.

Corolario 4.8. *Sean K y \overline{K} las curvaturas seccionales de M y \overline{M} . Si los vectores v y w forman un plano tangente a M no degenerado, entonces,*

$$K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w) \rangle - \langle II(v, w), II(v, w) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

4.2. Hipersuperficies

Ahora trabajaremos con hipersuperficies (i.e. subvariedades de codimensión 1).

Definición 4.9. El signo ε de una hipersuperficie semi Riemanniana M de \overline{M} es

- +1 si $\langle z, z \rangle > 0$ para todo vector normal $z \neq 0$,
- -1 si $\langle z, z \rangle < 0$ para todo vector normal $z \neq 0$.

Notar que en este caso no puede ocurrir que $\langle z, z \rangle = 0$, pues si ocurriera, tendríamos que dicho vector es perpendicular a todos los vectores en $T_p M$, y a si mismo. Entonces, como la subvariedad es de codimensión 1, tendríamos que es perpendicular a todos los vectores de $T_p \overline{M}$. Pero como g es no degenerada, significaría que $z = 0$.

Se puede observar que si $\varepsilon = +1$, el índice de M es igual al de \overline{M} . Sin embargo, si $\varepsilon = -1$, el índice de M es el índice de \overline{M} menos uno.

Definición 4.10. Sea U un campo normal unitario en $M \subset \overline{M}$. El $(1, 1)$ campo tensorial S en M tal que

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(M),$$

es llamado el *operador forma* de $M \subset \overline{M}$ derivado de U .

Notar que no siempre existe un campo normal que no se anule (el caso de las variedades no orientables). Pero como dichos campos siempre existen localmente, considero los campos locales normales para la definición de S . Además, es importante mencionar que S no depende de la elección de U , pues un cambio de signo en U conlleva a un cambio de signo en S . Por lo tanto, S es único a menos del signo. En aplicaciones posteriores, dicho signo se cancelará.

Lema 4.11. Si S es el operador forma derivado de U , entonces $S(V) = -\overline{D}_V(U)$.

Demostración. Como $\langle U, U \rangle$ es constante, entonces $\langle \overline{D}_V U, U \rangle = 0$. Por lo tanto, $\overline{D}_V U$ es tangente a M para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Si $W \in \mathfrak{X}(M)$, como $\langle U, W \rangle$ es constante, entonces $\langle \overline{D}_V W, U \rangle = -\langle \overline{D}_V U, W \rangle$ y tenemos:

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle = \langle \overline{D}_V W, U \rangle = -\langle \overline{D}_V U, W \rangle.$$

Por lo tanto, $S(V) = -\overline{D}_V U$. □

Teorema 4.12. Sea S el operador forma para una hipersuperficie semi Riemanniana $M \subset \overline{M}$. Si v y w generan un plano tangente a M no degenerado entonces

$$K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \varepsilon \frac{\langle Sv, v \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sv, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

donde ε es el signo de $M \subset \overline{M}$.

Demostración. La prueba es inmediata a partir del corolario 4.8, pues $II(v, w) = \varepsilon \langle Sv, w \rangle U$ y $\langle U, U \rangle = \varepsilon$. □

Vamos a presentar un ejemplo de hipersuperficies muy utilizado. Consideramos \mathbb{R}_ν^{n+1} y la función $q \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$ con $q(v) = \langle v, v \rangle$. Entonces,

$$q = \sum \varepsilon_i (u^i)^2 = - \sum_{i=1}^{\nu} (u^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (u^j)^2.$$

Definición 4.13. 1. La pseudo-esfera de radio r en \mathbb{R}_ν^{n+1} es

$$S_\nu^n(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : \langle p, p \rangle = r^2\}.$$

2. El espacio pseudo-hiperbólico de radio r en $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ es

$$H_\nu^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{p \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2\}.$$

Lema 4.14. Las subvariedades $Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$ tienen operador forma $S = -Id/r$ derivado de un vector unitario normal saliente.

IDEA DE LA PRUEBA:

Si considero el campo vectorial posición $P = \sum \varepsilon_i u^i \partial_i$, notamos que $\overline{D}_X P = X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(Q)$.

También se puede observar que P/r es un campo normal saliente en Q .

Por lo tanto, si $V \in \mathfrak{X}(Q)$, entonces $S(V) = -\overline{D}_V(P/r) = -V/r$.

Proposición 4.15. 1. La pseudo-esfera $S_\nu^n(r)$ es una variedad semi Riemanniana de curvatura constante $K = 1/r^2$.

2. El espacio pseudo-hiperbólico $H_\nu^n(r)$ es una variedad semi Riemanniana de curvatura constante $K = -1/r^2$.

Demostración. La prueba se realiza sustituyendo la información sobre el operador forma en el teorema 4.12. □

4.3. Conexión normal

Definiremos los análogos de la conexión inducida y la segunda forma para campos normales a $M \subset \overline{M}$. La prueba de que están bien definidas es igual que en dicho caso.

Definición 4.16. ■ La conexión normal de $M \subset \overline{M}$ es la función $D^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$D_V^\perp Z = \text{nor} \overline{D}_V Z, \quad \forall V \in \mathfrak{X}(M), \quad Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

■ El tensor \overline{II} de $M \subset \overline{M}$ se define como la función $\overline{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\overline{II}(V, Z) = \text{tan} \overline{D}_V Z \quad \forall V \in \mathfrak{X}(M), \quad Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

Es claro observar que si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, entonces,

$$\overline{D}_V Z = \underbrace{\overline{II}(V, Z)}_{\text{tangente a M}} + \underbrace{D_V^\perp Z}_{\text{normal a M}}.$$

4.4. Mapas de dos parámetros

Sea $f : A \rightarrow M$ una función suave con A es un abierto de \mathbb{R}^2 . Entonces tenemos dos familias de curvas:

- Las curvas con parámetro u y $v = v_0$ constante. Tienen velocidad $f_u = df(\partial_u)$, que es un campo de vectores a lo largo de cada curva de esta familia.
- Las curvas con parámetro v y $u = u_0$ constante. Tienen velocidad $f_v = df(\partial_v)$, que es un campo de vectores a lo largo de cada curva de esta familia.

Si f cae en un sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n , entonces

$$f_u = \sum \frac{\partial(x^i \circ f)}{\partial u} \partial_i, \quad f_v = \sum \frac{\partial(x^i \circ f)}{\partial v} \partial_i.$$

Sea Z_u la derivada covariante de Z sobre las curvas de la familia de parámetro u . Z_v es análoga para las curvas de parámetro v . Explícitamente, utilizando la forma de la derivada covariante en coordenadas locales tenemos:

$$Z_u = \sum_k \left\{ \frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Z^i \frac{\partial(x^i \circ f)}{\partial u} \right\} \partial_k.$$

Proposición 4.17. 1. Si f es un mapa de dos variables en una variedad semi Riemanniana M , entonces $f_{uv} = f_{vu}$.

2. Si Z es un campo vectorial a lo largo de f , entonces

$$Z_{uv} - Z_{vu} = R(f_u, f_v)Z.$$

Demostración. 1. Usando la forma en coordenadas locales de f_u vista anteriormente, y usando la forma de la derivada covariante en coordenadas locales obtenemos:

$$f_{uv} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2(x^k \circ f)}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial(x^i \circ f)}{\partial u} \frac{\partial(x^j \circ f)}{\partial v} \right\} \partial_k.$$

Como Γ_{ij} es simétrico en i y j , dicha fórmula es simétrica en u y v , y se obtiene el resultado deseado.

2. A partir de la forma en coordenadas locales de Z_u vista anteriormente, si se calcula en coordenadas locales $Z_{uv} - Z_{vu}$ se obtienen los componentes de la curvatura Riemanniana como en la proposición 3.5. □

Capítulo 5

Geometría Riemanniana y Lorentziana

En este capítulo dejaremos de lado las métricas con índice genérico y trabajaremos explícitamente con métricas de índice 0 o 1. Es decir, geometría Riemanniana o geometría Lorentziana respectivamente. Ya sabemos que el espacio tangente en un punto a una variedad Riemanniana es isométrico al espacio Euclídeo \mathbb{R}^n . Similarmente, el espacio tangente en un punto a una variedad Lorentziana es isométrico al espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^n , del que se habló en el capítulo 1 para describir el espacio-tiempo de la relatividad especial.

Comenzaremos estudiando el Lema de Gauss y los entornos convexos, herramientas clave para la geometría local. Luego definiremos los conceptos básicos para la relatividad general, como los conos temporales en los espacios tangentes, la orientación temporal de una variedad y conjuntos como el pasado y futuro cronológico de un evento. Continuaremos demostrando la conocida *paradoja de los gemelos* para variedades de Lorentz, es decir, el teorema de las propiedades maximizantes de las geodésicas temporales. Terminaremos definiendo condiciones que será interesante imponerle a nuestra variedad espacio-tiempo, como la hiperbolicidad global, e ilustraremos dichos conceptos.

5.1. Lema de Gauss

La clave para trabajar con la geometría local de las variedades semi Riemannianas cerca de un punto $p \in M$ es la comparación con el espacio semi Euclídeo $T_p M \approx \mathbb{R}_\nu^n$ dada por el mapa exponencial.

El siguiente lema implica que el mapa exponencial preserva la ortogonalidad a las direcciones radiales y la prueba se puede encontrar en [2], capítulo 3, página 60.

Lema 5.1. *Sea $p \in M$ y $v, w \in T_p M$. Entonces*

$$\langle d_v \exp_p(v), d_v \exp_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Es interesante mencionar que, en particular, dicho lema asegura que la norma y carácter causal de vectores radiales también son preservados.

5.2. Entornos convexos

Teorema 5.2. *Para cada $p \in M$ existe un entorno W de p y un número $\delta > 0$ tales que para cada $q \in W$, \exp_q es un difeomorfismo en $B(0, \delta) \subset T_qM$ y $W \subset \exp_q(B(0, \delta))$. Es decir, W es un entorno normal para cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, \mathcal{U} y V como en la proposición 2.41. Definimos $E : \mathcal{U} \rightarrow M \times M$ como $E(q, v) = (q, \exp_q v)$. Observamos que $\mathcal{U} \subset TU$ si U es el dominio del sistema de coordenadas ξ en p , con $V \subset U$.

Consideremos en $E(p, 0) = (p, p) \in M \times M$ el sistema de coordenadas (ξ, ξ) con dominio $U \times U$.

Tomamos $G(p, v) = \exp_p(v)$ y como sabemos que $d_0 \exp_p = Id$, entonces, si tomamos dos curvas convenientes $p(t)$ y $v(t)$ que cumplan que $p(0) = p \in M$, $v(0) = 0 \in T_pM$, $p'(0) = \eta \in T_pM$, $v'(0) = \zeta \in T_0T_pM$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{(p,0)}E(\eta, \zeta) &= d_{(p(0), v(0))}E(p'(0), v'(0)) = E(p(t), v(t))'(0) \\ &= \left(p(t), G(p(t), v(t)) \right)'(0) = \left(p'(0), \frac{\partial G}{\partial p}(p(0), v(0)) \cdot p'(0) + \frac{\partial G}{\partial v}(p(0), v(0)) \cdot v'(0) \right) \\ &= \left(\eta, \frac{\partial G}{\partial p}(p, 0) \cdot \eta + d_0 \exp_p \zeta \right) = \left(\eta, \frac{\partial G}{\partial p}(p, 0) \cdot \eta + \zeta \right). \end{aligned}$$

De esta forma, ver que dicho diferencial es inyectivo es automático. Es entonces un isomorfismo lineal, por ser la dimensión del espacio de salida la misma que la dimensión del espacio de llegada.

Por el teorema de la función inversa entonces E es un difeomorfismo de un entorno $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de $(p, 0)$ en TM sobre su imagen W' , con $(p, p) \in W'$.

Puedo tomar \mathcal{U}' de la forma:

$$\mathcal{U}' = \{(q, v) : q \in V', v \in T_qM, |v| < \delta\},$$

donde $V' \subset V$ es un entorno de p en M .

Elijo también un entorno $W \subset M$ de p , tal que $W \times W \subset W'$ y $W \subset V'$.

Afirmamos que W es un entorno normal para todos sus puntos. En efecto, sea $q \in W$ y $B(0, \delta) \subset T_qM$, entonces, como E es un difeomorfismo en \mathcal{U}' y $q \in W \subset V'$, se tiene que

$$q \times W \subset E(\{q\} \times B(0, \delta)),$$

y entonces por la definición de E , $W \subset \exp_q(B(0, \delta))$. □

Entonces, cada punto $p \in M$ tiene un entorno *totalmente normal* W , esto es, un entorno normal que también es entorno normal de todos sus puntos. Por lo tanto, dados dos puntos q_1 y q_2 en W , estos pueden ser unidos por una geodésica. Sin embargo, puede ocurrir que la geodésica no esté completamente incluida en el entorno W . De aquí se deriva la siguiente definición.

Definición 5.3. Un conjunto $S \subset M$ es convexo si para cualquier par de puntos $q_1, q_2 \in S$, existe una única geodésica γ uniendo ambos puntos, y cuyo interior está enteramente contenido en S .

La siguiente prueba se puede encontrar en [7], página 130.

Teorema 5.4. *Cada punto $p \in M$ tiene un entorno convexo.*

Demostración. La prueba es similar a la anterior, solamente que ahora tendremos más cuidado eligiendo el conjunto deseado.

Sea $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ un sistema normal de coordenadas en un entorno V de p . Sea $N = \sum (x^i)^2$. Entonces para δ suficientemente chico, $V(\delta) = \{q \in V : N(q) < \delta\}$ es un entorno de p difeomorfo mediante el sistema de coordenadas ξ a una bola abierta de \mathbb{R}^n .

Considero E, W como fueron definidos en la demostración anterior. Tomamos δ suficientemente pequeño para que, como en la demostración anterior, E sea un difeomorfismo desde un entorno \mathcal{L} de $(p, 0) \in TM$ a $V(\delta) \times V(\delta)$. Es decir, tomo δ tal que $V(\delta) \subset W$.

Por el teorema anterior, como W era un entorno totalmente normal, $V(\delta) \subset W$ también lo es. Resta probar que las geodésicas entre puntos de $V(\delta)$ definidas por el mapa exponencial están enteramente contenidas en $V(\delta)$.

Consideremos el tensor simétrico B de tipo $(0, 2)$ cuyos componentes son los siguientes, (considerando $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$):

$$B_{ij} = \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k.$$

Por estar trabajando en coordenadas normales, los símbolos de Christoffel se anulan en p y entonces B es definido positivo en p . Puedo entonces reducir nuevamente δ si es necesario para que B sea definida positiva en todo el entorno $V(\delta)$.

Dada $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica entre los puntos q_1 y q_2 en $V(\delta)$. Supongamos por absurdo que σ se escapa de $V(\delta)$. Como ambos $N(p), N(q) < \delta$, la función $N \circ \sigma$ posee entonces un máximo relativo en un punto t_0 con $0 < t_0 < 1$.

Calculando la segunda derivada de $N \circ \sigma$, y abreviando $x^i \circ \sigma$ como x^i tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(N \circ \sigma)}{dt} &= 2 \sum_i \left(x^i \frac{dx^i}{dt} \right) \\ \frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2} &= 2 \sum_i \left(x^i \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Por las ecuaciones que cumplen las geodésicas en coordenadas locales, podemos reescribir $\sum_k x^k \frac{d^2 x^k}{dt^2}$ como $-\sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$, y reescribir $\left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2$ como $\delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$. El resultado es el siguiente:

$$\frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2} = 2 \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Entonces, por la definición de B y como $\sigma' = \sum \frac{dx^i}{dt} \partial_i$ tenemos:

$$\frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2}(t_0) = 2B(\sigma'(t_0), \sigma'(t_0)) > 0.$$

Esto contradice el hecho de que t_0 fuera un máximo relativo, llegando al absurdo, y concluyendo que la geodésica en cuestión debe estar enteramente contenida en el entorno deseado. \square

5.3. Conos temporales en variedades Lorentzianas

El carácter causal para vectores en espacios de Lorentz tiene una generalización para subespacios: Sea W un subespacio de un espacio vectorial de Lorentz V , y sea g el producto escalar en V , entonces hay tres posibilidades mutuamente excluyentes para W :

1. $g|_W$ es definida positiva. Esto es, W es un espacio con producto interno. Aquí se dice que W es *espacial*.
2. $g|_W$ es no degenerado de índice 1. W es entonces *temporal*.
3. $g|_W$ es degenerado, y entonces W es *lumínico*.

La siguiente proposición es un simple resultado de álgebra lineal:

Proposición 5.5. *Si z es un vector temporal en un espacio vectorial de Lorentz, entonces el subespacio z^\perp es espacial y V es la suma directa $V = \mathbb{R}z \oplus z^\perp$.*

Definición 5.6. Sea \mathcal{T} el conjunto de todos los vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz V . Para $u \in \mathcal{T}$, el *cono temporal* de u es:

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}.$$

El *cono opuesto* es:

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Proposición 5.7. *Dos vectores temporales v y w están en el mismo cono temporal si y solo si $\langle v, w \rangle < 0$.*

Demostración. Mostramos que si $v \in C(u)$ y w es temporal, entonces $w \in C(u)$ si y solo si $\langle v, w \rangle < 0$. Como $C(u/|u|) = C(u)$, podemos asumir que u es un vector unitario temporal. Además, sabemos que u^\perp es espacial.

Escribimos $v = au + v'$ y $w = bu + w'$ donde $v', w' \in u^\perp$. Como v, w son vectores temporales, entonces $|a| > |v'|$, y $|b| > |w'|$. Además $\langle v, w \rangle = -ab + \langle v', w' \rangle$, y como u^\perp es espacial, podemos aplicar la desigualdad clásica de Cauchy Schwarz y tenemos entonces $|\langle v', w' \rangle| \leq |v'| |w'| < |ab|$.

Como $v \in C(u)$, $a > 0$. Entonces $\text{signo}\langle v, w \rangle = \text{signo}(-ab) = -\text{signo}(b)$, de donde se deduce el resultado deseado. \square

A partir de esto, sabemos que para vectores temporales,

$$u \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(u) \Leftrightarrow C(v) = C(u).$$

Además, es interesante mencionar que $\mathcal{T} - \{0\} = C(u) \cup C(-u)$ y que si $u, v \in \mathcal{T}$, entonces $C(u) = \pm C(v)$.

Proposición 5.8. *Cada cono temporal es convexo.*

Demostración. Sean v, w temporales en el mismo cono, y $a, b > 0$ entonces, usando la proposición 5.7,

$$\langle v, av + bw \rangle = a\langle v, v \rangle + b\langle v, w \rangle < 0,$$

y

$$\langle av + bw, av + bw \rangle < 0.$$

De la última desigualdad, $av + bw$ es temporal, y de la primera, cae en el mismo cono que v . \square

Muchas propiedades de los espacios con producto interno tienen su análogo en los espacios de Lorentz. En un espacio con producto interno, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite definir el ángulo entre dos vectores. La versión análoga es la siguiente. Es importante resaltar que dicha desigualdad se encuentra invertida para vectores temporales, formando una de las diferencias más grandes entre ambas geometrías.

Proposición 5.9. *Sean v y w dos vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces:*

1. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, con la igualdad si y solo si son colineales.
2. Si ambos están en un mismo cono temporal de V , entonces hay un único número $\varphi \geq 0$, llamado el ángulo hiperbólico entre v y w , tal que:

$$\langle v, w \rangle = -|v||w|\cosh\varphi.$$

Demostración. 1. Escribimos $w = av + w'$, con $w' \in v^\perp$. Como w es temporal,

$$\langle w, w \rangle = a^2\langle v, v \rangle + \langle w', w' \rangle < 0.$$

Entonces, sabiendo que $\langle w', w' \rangle \geq 0$ y $\langle v, v \rangle < 0$:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle^2 &= a^2\langle v, v \rangle^2 = (\langle w, w \rangle - \langle w', w' \rangle)\langle v, v \rangle \\ &\geq \langle w, w \rangle\langle v, v \rangle = |v|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Es claro que la igualdad se da si y solo si $\langle w', w' \rangle = 0$, lo que es equivalente a decir que $w' = 0$, y por lo tanto la igualdad se cumple si y solo si $w = av$.

2. Si v y w están en el mismo cono, entonces sabemos que $\langle v, w \rangle < 0$, por lo tanto,

$$\frac{-\langle v, w \rangle}{|v||w|} \geq 1.$$

Como el ángulo buscado es positivo, nos interesa la función $\cosh|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ que es biyectiva. Por lo tanto, existe un único ángulo que cumple con la propiedad deseada. \square

A partir de esta proposición se deduce la desigualdad triangular. Notar que esta desigualdad, al igual que la de Cauchy Schwarz, también se encuentra invertida para vectores temporales.

Corolario 5.10 (Desigualdad triangular). *Sean v y w dos vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces*

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

con igualdad si y solo si v y w son vectores colineales.

Demostración. Como $\langle v, w \rangle < 0$, la desigualdad de Cauchy Schwarz revertida, demostrada en la proposición anterior, dice que $-\langle v, w \rangle \geq |v||w|$. Por lo tanto

$$(|v| + |w|)^2 = |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 \leq -\langle v + w, v + w \rangle = |v + w|^2.$$

Y la desigualdad se transforma en igualdad cuando $|\langle v, w \rangle| = |v||w|$, y por lo tanto la proposición anterior nos dice que la igualdad se cumple si y solo si dichos vectores son colineales. \square

Este corolario resulta importantísimo para visualizar las grandes diferencias de la geometría Lorentziana con respecto a la Riemanniana. A partir de él deducimos que un segmento de recta ya no es la ruta más corta entre dos puntos. Además, el corolario es muy importante en cuanto a sus aplicaciones a la teoría de la relatividad. Recordamos que las longitudes de las curvas temporales brindan la información del tiempo propio del observador en cuestión. Entonces esta desigualdad nos dice que para el observador que se queda en caída libre pasa más tiempo que para el observador que va hasta un punto lejano y luego vuelve.

5.4. Orientabilidad

Definiremos la orientación temporal de una variedad. Una variedad será temporalmente orientable si puede imponerse una noción de “futuro” y “pasado” para todo punto del espacio-tiempo, que varíe continuamente. Veremos que dicho concepto no viene de la mano de la orientabilidad usual, pues hay variedades no orientables que pueden ser temporalmente orientables.

Definición 5.11. Dada M una variedad de Lorentz, y $p \in M$. Dos vectores temporales $v, w \in T_p M$ tienen la misma *orientación temporal* si $\langle v, w \rangle < 0$, es decir, si caen en el mismo cono temporal.

Observar que si v, w son vectores temporales, entonces $\langle v, w \rangle \neq 0$.

Definición 5.12. Una variedad de Lorentz M es *temporalmente orientable* si existe un campo $T \in \mathfrak{X}(M)$ de vectores temporales sin singularidades.

También puede definirse de la siguiente manera, que es equivalente: Sea τ una función en M que asigna a cada punto p un cono temporal τ_p en $T_p M$. Esta función es suave si para cada p hay un campo suave de vectores V definido en un entorno U de p tal que $V(q) \in \tau_q \quad \forall q \in U$. Al cono elegido se le llama *futuro*, y al otro se le llama *pasado*.

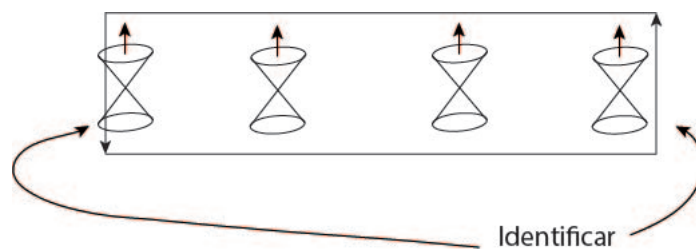


Figura 5.1: La banda de Möbius con la métrica g_1 no temporalmente orientable. Para visualizar que la posición de los conos es efectivamente la que indica el dibujo, se recomienda identificar dicha métrica con la métrica del espacio de Minkowski.

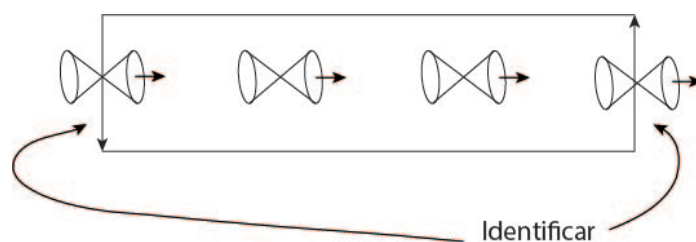


Figura 5.2: La banda de Möbius con la métrica g_2 temporalmente orientable. Para visualizar que la posición de los conos es efectivamente la que indica el dibujo, se recomienda identificar dicha métrica con la métrica del espacio de Minkowski invertida.

Dos campos de vectores temporales T y U sin singularidades, definen la misma orientación si y solo si $\langle T, U \rangle < 0$, pues demostramos que dos vectores están en el mismo cono temporal si el producto entre ellos es negativo.

Vectores con la misma orientación temporal que $T(p)$ se dice que *apuntan al futuro* según la orientación T , y vectores con la orientación temporal opuesta se dice que *apuntan al pasado* según la orientación T .

En la siguiente observación queda claro que el concepto de orientación temporal es totalmente independiente del concepto de orientación, pues sabemos que la banda de Möbius no es orientable.

Nota 5.13. En la banda de Möbius $\mathbb{R} \times [0, 1] / \langle T \rangle$ con $T(x, y) = (x + 1, -y + 1)$, existen métricas Lorentzianas temporalmente orientables y métricas Lorentzianas no temporalmente orientables.

La métrica

$$g_1 = -dt \otimes dt + dx \otimes dx,$$

no es temporalmente orientable, como se puede ver en la figura 5.1.

Sin embargo, la métrica

$$g_2 = dt \otimes dt - dx \otimes dx,$$

es temporalmente orientable, como se puede ver en la figura 5.2.

La siguiente proposición es importante a la hora de trabajar con una orientación temporal. La prueba se puede encontrar en [7], capítulo 7, página 194.

Proposición 5.14. *Toda variedad Lorentziana no temporalmente orientable M tiene un recubridor de dos hojas temporalmente orientable. Es decir, una variedad \overline{M} con una métrica Lorentziana \overline{g} , y una isometría local $k : \overline{M} \rightarrow M$, tal que todo punto en M tiene exactamente dos preimágenes por k .*

Lema 5.15. *Toda variedad admite un tensor métrico Riemanniano.*

Demostración. Sea $\{f_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de M por entornos coordenados. Para cada α , tomamos un sistema de coordenadas x^1, \dots, x^n cuyo dominio U incluya al soporte de f_α . Ahora definimos el tensor métrico en U como $g_\alpha = \sum dx^i \otimes dx^i$.

Como una combinación lineal de productos internos definidos positivos es también un producto interno definido positivo, $\sum f_\alpha g_\alpha$ es un tensor métrico Riemanniano en M y concluimos el resultado deseado. \square

Otra diferencia crucial entre geometría Lorentziana y Riemanniana es que, mientras que toda variedad admite un tensor métrico Riemanniano, no toda variedad admite un tensor métrico Lorentziano, como veremos a continuación.

Proposición 5.16. *Sea M una variedad. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una métrica de Lorentz.*
2. *Existe una métrica de Lorentz temporalmente orientable, (i.e. existe un campo de vectores temporales que no se anula).*
3. *M no es compacta o $\chi(M) = 0$.*

Demostración. (2 \Rightarrow 1) Trivial.

(2 \Rightarrow 3) Si existe g métrica de Lorentz temporalmente orientable, entonces existe un campo de vectores temporales que no se anula. Por el teorema de Poincaré-Hopf, M no es compacta o $\chi(M) = 0$.

(3 \Rightarrow 2) Por el lema anterior, existe un tensor métrico Riemanniano g en M . Por Poincaré Hopf, sabemos que M admite un campo de vectores que no se anula. Considero $U = T/|T|$ y entonces U es un campo de vectores unitario que no se anula. Consideramos

$$\overline{g} = g - 2U^* \otimes U^*$$

donde $U^*(X) = g(U, X)$.

Localmente existen campos vectoriales E_j tal que U, E_2, \dots, E_n cumplen $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, $g(U, E_j) = 0$, y $g(U, U) = 1$. Entonces, por la definición de \overline{g} :

$$\overline{g}(E_i, E_j) = g(E_i, E_j) = \delta_{ij},$$

$$\overline{g}(U, E_j) = g(U, E_j) = 0,$$

pero $\overline{g}(U, U) = -1$. Por lo tanto, \overline{g} es una métrica de Lorentz.

Además, el campo U es ahora un campo temporal pues $\overline{g}(U, U) = -1$ y podemos entonces afirmar que existe una métrica de Lorentz con un campo temporal que no se anula.

Por lo tanto, dicha métrica es temporalmente orientable.

(1 \Rightarrow 3) Sea g una métrica de Lorentz en M . Si (M, g) es temporalmente orientable, el resultado se obtiene de (2 \Rightarrow 3).

Si M no es temporalmente orientable, consideramos \overline{M} de su recubridor de dos hojas, y sabemos que dicha variedad es temporalmente orientable. Entonces, por (2 \Rightarrow 3), o \overline{M} no es compacta o $\chi(\overline{M}) = 0$. Como el mapa $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ manda dos puntos a uno en M , entonces M es compacto si y solo si \overline{M} lo es, y $\chi(M) = \chi(\overline{M})/2$. Entonces obtenemos que M es compacta o $\chi(M) = 0$. \square

5.5. Propiedades causales en variedades Lorentzianas

Recordemos que una curva temporal es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ que cumple que $\alpha'(t)$ es temporal para todo $t \in I$. Una curva causal es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ que cumple que $\alpha'(t)$ es temporal o nula (i.e. *causal*) para todo $t \in I$.

Definición 5.17. Sea (M, g) una variedad de Lorentz temporalmente orientable.

- una curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ está *dirigida hacia el futuro* si $c'(t)$ está dirigida hacia el futuro $\forall t \in I$.
- el *futuro cronológico* de p es el conjunto $I^+(p)$ de todos los puntos con los que se puede conectar p a través de una curva temporal dirigida hacia el futuro.
- el *futuro causal* de p es el conjunto $J^+(p)$ de todos los puntos con los que se puede conectar p a través de una curva causal dirigida hacia el futuro.

De forma análoga se definen el *pasado cronológico* y el *pasado causal* de un punto p .

Se puede interpretar $J^+(p)$ como el conjunto de todos los eventos que pueden ser influenciados por lo ocurrido en p . Similarmente, se puede interpretar $J^-(p)$ como el conjunto de todos los eventos que pueden influenciar a p .

La siguiente proposición es intuitiva, pero su demostración no es trivial. La misma se puede encontrar en [6]. Lo más interesante es la demostración de la parte (2), pues se manejan conceptos muy importantes. Por esta razón, dicha demostración será explicada en detalle, mientras que solo daremos una idea de las partes (3) y (4).

Proposición 5.18. Sea (M, g) una variedad Lorentziana temporalmente orientada. Cada punto $p_0 \in M$ tiene un entorno abierto $V \subset M$ tal que el espacio-tiempo (V, g) obtenido al restringir g a V cumple:

1. Si $p, q \in V$, entonces existe una única geodésica uniendo a p con q . (i.e. V es geodésicamente convexo).
2. $q \in I^+(p)$ si y solo si existe una geodésica temporal dirigida hacia el futuro que conecte a p con q .
3. $J^+(p) = \overline{I^+(p)}$.

4. $q \in J^+(p)$ si y solo si existe una geodésica nula o temporal (i.e. causal) dirigida hacia el futuro que conecte a p con q .

Demostración. 1. La existencia de entornos geodésicamente convexos está demostrada en la sección 5.2.

2. (\Leftarrow) Primero observamos que si existe una geodésica temporal dirigida hacia el futuro uniendo a p con q , entonces, por definición, $q \in I^+(p)$.

(\Rightarrow) Tenemos $q \in I^+(p)$. Entonces existe una curva temporal dirigida hacia el futuro $c: [0, 1] \rightarrow V$ tal que $c(0) = p$ y $c(1) = q$.

Tomamos las coordenadas normales (x^0, x^1, \dots, x^n) dadas por la parametrización:

$$\varphi(x^0, x^1, \dots, x^n) = \exp_p(x^0 E_0 + x^1 E_1 + \dots + x^n E_n),$$

donde $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ es una base ortonormal en $T_p M$ con E_0 vector temporal y dirigido hacia el futuro. Al ser V un entorno totalmente normal, estas coordenadas son coordenadas globales en V .

Defino la función “distancia” a p :

$$\begin{aligned} W_p(q) &= -(x^0(q))^2 + (x^1(q))^2 + \dots + (x^n(q))^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \eta_i x^i(q) x^i(q), \end{aligned}$$

con $\eta_i = -1$ si $i = 0$ y $\eta_i = 1$ si $i = 1, \dots, n$. Como p y q están en un entorno en el que el mapa exponencial es un difeomorfismo, si tenemos que $W_p(q) < 0$, entonces a partir del Lema de Gauss obtenemos una geodésica *temporal* que une p y q , pues el Lemma demuestra que el carácter causal de vectores radiales es preservado.

Llamemos $W_p(t) = W_p(c(t))$ y $x^i(t) = x^i(c(t))$. Sabemos que $x^i(p) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$, y que $W_p(0) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{W}_p(t) &= 2 \sum_{i=0}^n \eta_i x^i(t) \dot{x}^i(t) \\ \ddot{W}_p(t) &= 2 \sum_{i=0}^n \eta_i \dot{x}^i(t) \ddot{x}^i(t) + 2 \sum_{i=0}^n \eta_i \dot{x}^i(t) \dot{x}^i(t). \end{aligned}$$

Evaluando en 0:

$$\begin{aligned} \dot{W}_p(0) &= 0 \\ \ddot{W}_p(0) &= 2 \langle \dot{c}(0), \dot{c}(0) \rangle < 0. \end{aligned}$$

Como $W_p(0) = 0$, $\dot{W}_p(0) = 0$, y $\ddot{W}_p(0) < 0$, podemos afirmar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_p(t) < 0$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \text{grad}(-W_p)^{1/2} &= \text{grad}((x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}(-2)x^0 \partial_0 + \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}(-2)x^1 \partial_1 + \dots + \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}(-2)x^n \partial_n \\ &= \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}(-2x^0 \partial_0 - 2x^1 \partial_1 - \dots - 2x^n \partial_n). \end{aligned}$$

Entonces,

$$-grad(-W_p)^{1/2} = (-W_p)^{-1/2}(x^0\partial_0 + x^1\partial_1 + \dots + x^n\partial_n).$$

Calculamos la norma usando nuevamente el Lema de Gauss y obtenemos:

$$\langle -grad(-W_p)^{1/2}, -grad(-W_p)^{1/2} \rangle = -1 = cte.$$

Al tener una función suave definida en M cuyo gradiente tiene norma constante, entonces por la proposición 2.51 tenemos que las curvas integrales del campo $X = -grad(-W_p)^{1/2}$ son geodésicas. Como además, $\langle -grad(-W_p)^{1/2}, -grad(-W_p)^{1/2} \rangle = -1$, la geodésica es temporal.

Calculando $gradW_p$, se puede ver que:

$$\begin{aligned} X &= -grad(-W_p)^{1/2} = \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}(2x^0\partial_0 + 2x^1\partial_1 + \dots + 2x^n\partial_n) \\ &= \frac{1}{2}(-W_p)^{-1/2}gradW_p. \end{aligned}$$

Entonces, $gradW_p$ es un campo apuntando hacia el futuro, tangente a una geodésica temporal dirigida hacia el futuro, por p .

Además, por la definición del campo gradiente,

$$\dot{W}_p(t) = \dot{c}(t)(W_p(t)) = \langle (gradW_p)_{c(t)}, \dot{c}(t) \rangle.$$

Pero sabemos que tanto $gradW_p$ como $\dot{c}(t)$ están apuntando hacia el futuro, entonces están en el mismo cono temporal y tenemos que,

$$\dot{W}_p(t) = \langle (gradW_p)_{c(t)}, \dot{c}(t) \rangle < 0.$$

Como sabemos que $W_p(t) < 0$ para $t \in (0, \varepsilon)$, entonces concluimos que $W_p(t) < 0$ para $t \in (0, 1]$. En particular, $W_p(q) = W_p(1) < 0$ y queda entonces demostrado que existe una geodésica temporal conectando a p con q .

3. Como el mapa exponencial es un difeomorfismo en V , usando las coordenadas globales en V definidas anteriormente es simple demostrar que una curva causal puede ser aproximada por curvas temporales en el tangente, y así se obtiene entonces el resultado deseado, bajando dichas curvas por el mapa exponencial, ya que mantienen su carácter causal por el Lema de Gauss.
4. Para la sección (4) es necesario utilizar las partes (2) y (3) y recordar que exp_p es un difeomorfismo sobre V .

□

Es importante mencionar que los resultados vistos en la proposición anterior son válidos cuando se está considerando un entorno geodésicamente convexo. En la figura 5.3 se puede observar que el futuro causal del punto $(-1, 0)$ no es la clausura del futuro cronológico del mismo punto.

La proposición anterior brinda lo siguiente:

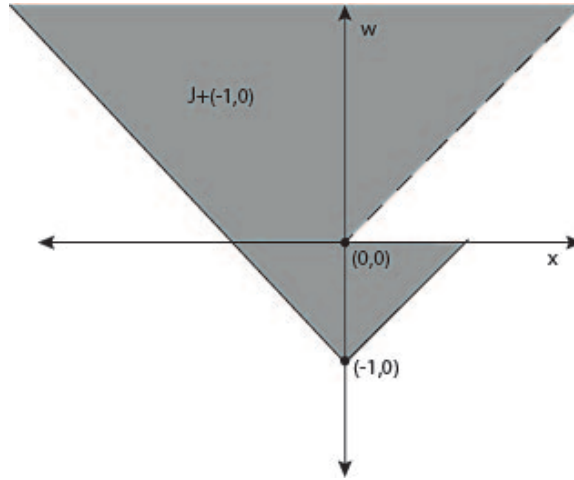


Figura 5.3: Futuro causal del punto $(-1, 0)$ en el espacio de Minkowski sin la semirecta Ox

Proposición 5.19. *Sea (M, g) una variedad Lorentziana orientada temporalmente, y $p \in M$. Entonces:*

1. Si $q \in I^+(p)$ y $r \in I^+(q)$, entonces $r \in I^+(p)$.
2. Si $q \in J^+(p)$ y $r \in J^+(q)$, entonces $r \in J^+(p)$.
3. $I^+(p)$ es abierto.

Como fue anticipado en el capítulo 1, en la geometría Lorentziana, dados dos puntos existen las curva de longitud máxima, y éstas son las geodésicas temporales. Esto se encuentra demostrado en el siguiente teorema, cuya demostración es una adaptación de la que se puede encontrar en Do Carmo para geometría Riemanniana.

Teorema 5.20 (Paradoja de los gemelos). *Sea (M, g) una variedad de Lorentz orientada temporalmente y sea $p_0 \in M$. Entonces existe un entorno V geodésicamente convexo tal que la variedad de Lorentz (V, g) obtenida al restringir g a V cumple la siguiente propiedad: Si $q \in I^+(p)$, sean c es la geodésica temporal que une a p con q , y γ una curva temporal cualquiera que conecta a p con q . Entonces*

$$\tau(\gamma) \leq \tau(c),$$

con la igualdad si y solo si γ es una reparametrización de c .

Demostración. Sea V un entorno geodésicamente convexo de p_0 . Al igual que en la prueba del Lema de Gauss (ver [2], capítulo 3, página 60), se puede escribir la curva γ de manera única como

$$\gamma(t) = \exp_p(r(t)v(t)),$$

con $r(t) > 0$, $r(0) = 0$ y esta vez con $\langle v(t), v(t) \rangle = -1$, pues la curva es temporal. Entonces, siguiendo los pasos en el Lema de Gauss, llamamos

$$f(r, t) = \exp_p(r \cdot v(t)).$$

Como $\langle v(t), v(t) \rangle = cte$, entonces $\langle \dot{v}(t), v(t) \rangle = 0$ y por el Lema de Gauss sabemos que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Calculando,

$$\dot{\gamma}(t) = (f(r(t), t))' = \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \cdot r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t).$$

Para simplificar la escritura, usaremos la notación $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. Notar que dicho número puede ser negativo. Para referirnos a la norma de un vector, tendremos entonces que usar el valor absoluto de dicho número: $\| \|v\| \|$.

Considerando que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \cdot r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \cdot r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \right\|^2 |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2. \end{aligned}$$

Pero $\left\| \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \right\|^2 = \langle v(t), v(t) \rangle = -1$, entonces:

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = -|r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \int_0^1 \| \dot{\gamma}(t) \| dt \\ &= \int_0^1 \left| -|r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2 \right|^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Como sabemos que γ es una curva temporal, tenemos que $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = -|r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2 < 0$. Entonces, calcularle el valor absoluto es multiplicar por -1 . La integral queda:

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \int_0^1 (r'(t)^2 - \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2)^{1/2} dt \\ &\leq \int_0^1 r'(t) dt = r(1). \end{aligned}$$

Para afirmar la última desigualdad hay que observar que $\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2 > 0$. Esto se puede afirmar por ser $\frac{\partial f}{\partial t}$ perpendicular a $\frac{\partial f}{\partial r}$, con $\frac{\partial f}{\partial r}$ temporal. Entonces $\frac{\partial f}{\partial t}$ es espacial, y su norma es positiva.

Por otro lado, podemos asegurar que $r(1) = \tau(c)$: Como $q = c(1) = \gamma(1) = \exp_p(r(1)v(1))$ y c es geodésica, entonces $c(t) = \exp_p(t \cdot r(1)v(1))$. En particular

$$\|\dot{c}(t)\| = \|r(1)v(1)\| = -r(1)$$

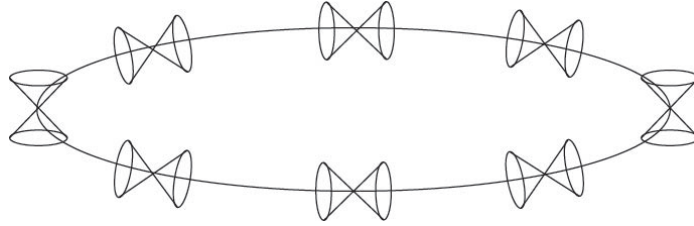


Figura 5.4: Ejemplo de una variedad que no cumple la condición de cronología

Entonces,

$$\tau(c) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt = r(1).$$

Entonces podemos concluir que,

$$\tau(\gamma) \leq r(1) = \tau(c).$$

Es claro que la igualdad se da si y solo si $\|\frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t)\| = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) = 0$ para todo t , pues, como ya se mencionó, el campo $\frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t)$ es espacial. Por lo tanto $v(t)$ es constante y entonces $\gamma(t) = \exp_p(r(t).v)$, es decir, γ es una reparametrización de una geodésica y el teorema queda entonces demostrado. \square

Para poder realizar aplicaciones físicas a partir de este modelo matemático, es importante pedir a la variedad Lorentziana que cumpla ciertas condiciones razonables. La primera que vamos a pedir elimina la posibilidad de viajar en el tiempo:

Definición 5.21. Una variedad de Lorentz cumple la *condición de cronología* si no contiene curvas temporales cerradas.

Esta condición no es cumplida por ninguna variedad compacta:

Proposición 5.22. Una variedad de Lorentz compacta contiene curvas temporales cerradas.

Demostración. Podemos asumir que la variedad es temporalmente orientable, pues, de lo contrario, trabajamos con el recubridor de dos hojas, que es temporalmente orientable.

Consideremos el cubrimiento por abiertos $\{I^+(p), p \in M\}$. Como M es compacta, existe un subcubrimiento finito $\{I^+(p_1), I^+(p_2), \dots, I^+(p_m)\}$.

Si ocurriera que $p_i \in I^+(p_j)$, entonces $I^+(p_i) \subseteq I^+(p_j)$, y podríamos eliminar el abierto $I^+(p_i)$ del subcubrimiento anterior. Por lo tanto, podemos suponer que si $i \neq j$, entonces $p_i \notin I^+(p_j)$

Entonces tenemos $p_i \in I^+(p_i)$, y entonces, por definición, existe una curva temporal de p_i a p_i . \square

La segunda condición que nos interesa es la siguiente:

Definición 5.23. Una variedad de Lorentz es *establemente causal* si existe una función global de tiempo. Esto es, una función suave $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{grad}t$ sea temporal.

- Si M es establemente causal defino una *porción de tiempo* $S_a = t^{-1}(a)$.

Proposición 5.24. *Una variedad establemente causal es temporalmente orientable y cumple la condición de cronología.*

Demostración. Para probar que es temporalmente orientable, tomamos el campo dado por $-\text{grad}t$. Dicho campo es temporal y no se anula por la definición de t . Por lo tanto la variedad es temporalmente orientable. Notar que consideramos el campo como el opuesto del gradiente por la simple razón de que el gradiente apunta hacia el sentido donde t decrece, y la intención es que el campo apunte hacia el “futuro”, es decir, hacia donde t crece.

Además es claro que cumple la condición de cronología: supongamos que existe una curva temporal α cerrada de p a p . Como dicha curva es temporal, al calcular $t(\alpha(h))$ para todo $h \in I$ tenemos una función creciente. Pero $\alpha(0) = \alpha(1)$ mientras que $t(\alpha(0)) \neq t(\alpha(1))$, pues la función es creciente. \square

A partir de este momento, si M es una variedad establemente causal, entonces consideraremos siempre la orientación dada por $-\text{grad}t$. Es decir, consideraremos el “futuro” hacia donde t aumenta y el “pasado” hacia donde t disminuye. Esto significa que si α es una curva temporal dirigida hacia el futuro, $t \circ \alpha$ será estrictamente creciente, y si está dirigida hacia el pasado, $t \circ \alpha$ será estrictamente decreciente.

Si S es una porción de tiempo, claramente tendremos $\text{grad}t$ perpendicular a S pues, como t es constante en S , si $v \in T_p S$, tenemos:

$$\langle \text{grad}t, v \rangle = v(t) = 0.$$

Además, como $\text{grad}t$ es temporal y estamos en variedades de índice 1, cualquier porción de tiempo será una hipersuperficie espacial, representando el universo en un cierto instante.

Definición 5.25. Sea (M, g) una variedad de Lorentz orientada temporalmente.

1. Una curva causal dirigida hacia el pasado $c : (a, b) \rightarrow M$ (con la posibilidad de que $a = \infty$ o $b = \infty$) es *inextendible hacia el pasado* si $\lim_{t \rightarrow b} c(t)$ no existe.
2. El *dominio de dependencia futura* de un conjunto $S \subset M$ es el conjunto $D^+(S)$ de todos los puntos $p \in M$ tal que cualquier curva causal inextendible hacia el pasado empezando en p tenga que cortar a S .
3. Una curva causal dirigida hacia el futuro $c : (a, b) \rightarrow M$ (con la posibilidad de que $a = \infty$ o $b = \infty$) es *inextendible hacia el futuro* si $\lim_{t \rightarrow b} c(t)$ no existe.
4. El *dominio de dependencia pasada* de un conjunto $S \subset M$ es el conjunto $D^-(S)$ de todos los puntos $p \in M$ tal que cualquier curva causal inextendible hacia el futuro empezando en p tenga que cortar a S .

El *dominio de dependencia* de un conjunto $S \subset M$ es $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

Definición 5.26. Una variedad es *globalmente hiperbólica* si es establemente causal tal que las porciones de tiempo cumplen $D(S_a) = M$.

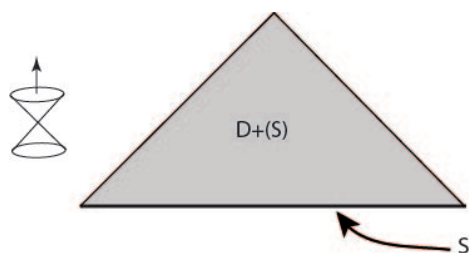


Figura 5.5: Ejemplo del dominio de dependencia futura de un conjunto S .

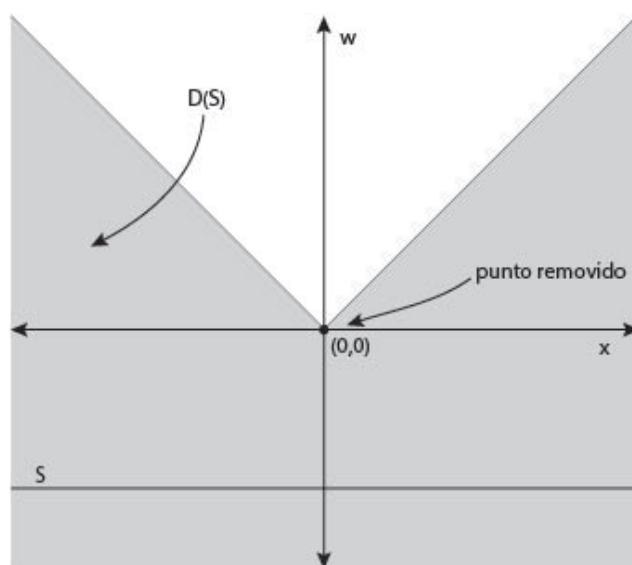


Figura 5.6: Ejemplo de una variedad no globalmente hiperbólica.

El dominio de dependencia futura de S se puede interpretar de la siguiente forma: si $p \in D^+(S)$, para que una partícula llegue a influenciar a p tiene que haber pasado por S . Análogamente, el dominio de dependencia pasada de S se puede interpretar como los puntos p al pasado de S tal que si una partícula influenció a p , pasará necesariamente por S . Por lo tanto, el dominio de dependencia de S es la porción del espacio-tiempo que puede ser “predicha” por la información en S .

Como una variedad globalmente hiperbólica es establemente causal, por lo visto en 5.24, es temporalmente orientable y cumple la condición de cronología. Además, por lo visto en 5.22, la variedad no puede ser compacta.

Aunque no haremos uso de ellas, es interesante observar que existen muchas definiciones diferentes para el concepto de hiperbolicidad global. Lógicamente todas son equivalentes. Se muestran a continuación solamente algunas de las posibles definiciones. La equivalencia de éstas puede encontrarse en [10], así como un estudio más profundo sobre la hiperbolicidad global.

- M admite una hipersuperficie $S \subset M$ tal que cada curva temporal la corte exactamente una vez.
- M es establemente causal y existe una porción de tiempo S que cumpla que $D(S) =$

M .

- M cumple que para todo punto existe un entorno tal que toda curva causal cuyos extremos estén en el entorno está completamente contenida en el mismo, y si $p, q \in M$ son tal que $p \in J^-(q)$, entonces $J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto. Dichas condiciones se resumen bajo los títulos de causalidad fuerte y ausencia de singularidades desnudas respectivamente.

Capítulo 6

Campos de Jacobi y Cálculo de Variaciones

En este capítulo nos dedicaremos a un problema importante en la geometría semi Riemanniana, que es medir el cambio en la longitud de arco de una curva bajo pequeñas variaciones de la misma. En el caso particular de curvas geodésicas, estas variaciones se expresan mediante los campos de Jacobi, que estudiaremos en la primer sección. Luego introduciremos las principales herramientas para tratar el problema antedicho de forma general: las fórmulas para la primera y segunda variación de la longitud de arco, y la forma del índice. Daremos una definición de puntos conjugados a una geodésica y demostraremos que si q es un punto conjugado para p , entonces una geodésica que se origine en p y pase por q no minimizará/maximizará la longitud. Todos los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [7], capítulos 8 y 10.

6.1. Campos de Jacobi

Una curva puede ser comparada con curvas cercanas a ella usando la siguiente idea:

Definición 6.1. Una *variación* de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ es una función

$$\mathbf{x} : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M,$$

tal que $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, 0)$ para todo $a \leq u \leq b$.

Las curvas $\mathbf{x}(u, \cdot)$ son llamadas longitudinales, y las curvas $\mathbf{x}(\cdot, v)$ transversales.

El campo vectorial V en α dado por $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$ es llamado el campo vectorial variación de \mathbf{x} . Cada $V(u)$ da la velocidad inicial de la curva transversal en u . Si todas las curvas longitudinales son geodésicas, entonces \mathbf{x} se llama *variación geodésica*.

Definición 6.2. Si γ es una geodésica, un campo vectorial Y a lo largo de γ es un campo de Jacobi si satisface la siguiente ecuación diferencial, llamada ecuación de Jacobi,

$$Y'' = R_{Y\gamma'}(\gamma').$$

Lema 6.3. *El campo vectorial variación de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

Demostración. Como cada curva longitudinal es una geodésica, entonces tenemos que $\mathbf{x}_{uu} = 0$.

Por la proposición 4.17 tenemos que $\mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_{uv}$, entonces,

$$\mathbf{x}_{vuu} = \mathbf{x}_{uvu}.$$

Usando la parte dos de la misma proposición tenemos que,

$$\mathbf{x}_{vuu} = \mathbf{x}_{uvu} = \mathbf{x}_{uvv} + R_{\mathbf{x}_v \mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u = R_{\mathbf{x}_v \mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u.$$

Entonces tenemos que \mathbf{x}_v satisface la ecuación de Jacobi evaluado en todas las curvas longitudinales. En particular se cumple para $Y(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$, y por lo tanto el campo vectorial variación es un campo de Jacobi. \square

Si pensamos en una variación geodésica \mathbf{x} de γ como una familia de partículas cayendo en caída libre, entonces el campo variación V mide la posición relativa a γ de estas partículas. A la vez, V' mide la velocidad relativa y V'' la aceleración relativa.

Entonces, si les asignamos a todas las partículas masa unitaria, podemos leer la ecuación de Jacobi como la segunda ley de Newton, donde el vector $R_{V\gamma'}\gamma'$ toma el rol de la fuerza. Esta es la clave para interpretar la curvatura como fuerza gravitatoria.

Lema 6.4. *Sea γ una geodésica con $\gamma(0) = p$, y sean $v, w \in T_pM$. Entonces existe un único campo de Jacobi Y a lo largo de γ tal que $Y(0) = v$ y $Y'(0) = w$.*

Demostración. Sean E_1, \dots, E_n los referenciales geodésicos a lo largo de γ , escribimos $Y = \sum y^i E_i$. Sean v^i y w^i las coordenadas de v y w relativas a $E_1(0), \dots, E_n(0)$.

Entonces

$$\begin{aligned} Y(0) = v &\Leftrightarrow y^i(0) = v^i \\ Y'(0) = w &\Leftrightarrow \frac{dy^i}{ds}(0) = w^i. \end{aligned}$$

Como γ' es paralelo entonces tenemos que $\gamma' = \sum a^i E_i$ con coeficientes constantes.

Queremos que el campo Y sea un campo de Jacobi. Es decir, queremos que se verifique la ecuación de Jacobi:

$$Y'' = R_{Y\gamma'}\gamma'.$$

Si separamos dicha ecuación coordenada a coordenada, teniendo en cuenta que los a^i son constantes, obtenemos:

$$\frac{d^2(y^m)}{ds^2} = \sum_{ijk} R_{ijk}^m a^i y^j a^k \quad \forall 1 \leq m \leq n.$$

Por lo tanto tenemos un sistema de ecuaciones con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y^m(0) &= v^m \\ \frac{dy^m}{ds}(0) &= w^m \\ \frac{d^2(y^m)}{ds^2} &= \sum_{ijk} R_{ijk}^m a^i y^j a^k. \end{aligned}$$

Dicho sistema tiene una única solución suave en el dominio de γ . \square

Como la ecuación de Jacobi es lineal, el conjunto de todos los campos de Jacobi a lo largo de γ forman un espacio vectorial real. El lema que acabamos de demostrar muestra entonces que la dimensión de dicho espacio es $2n$, pues v y w pueden ser elegidos arbitrariamente en T_pM .

Proposición 6.5. Sean $p \in M$ y $x \in T_pM$. Si $v \in T_x(T_pM) = T_pM$ entonces

$$d_x \exp_p(v) = V(1),$$

donde V es el único campo de Jacobi a lo largo de la geodésica $\gamma_x(t) = \exp_p(tx)$ tal que

$$V(0) = 0 \quad V'(0) = v \in T_pM.$$

Demostración. Como en la prueba del lema de Gauss, llamamos

$$f(t, s) = \exp_p(t(x + sv)) = \gamma_{x+sv}(t).$$

Dicho mapa es una variación geodésica de $\gamma_x|_{[0,1]}$. Entonces el campo vectorial variación

$$V(t) = f_s(t, 0) = d_x \exp_p(tv),$$

es un campo de Jacobi a lo largo de γ_x , y además $V(1) = d_x \exp_p(v_x)$. Resta calcular los valores iniciales de dicho campo.

La curva $f(0, s)$ es constante y toma el valor p . Por lo tanto $V(0) = 0$. Además,

$$V'(0) = f_{st}(0, 0) = f_{ts}(0, 0).$$

Sabemos que $f_t(t, s) = d_{t(x+sv)} \exp_p(x + sv)$, por lo tanto $f_t(0, s) = d_0 \exp_p(x + sv) = x + sv$ pues $d_0 \exp_p = Id$. Entonces tenemos $f_{ts}(0, s) = v$. En particular, $V'(0) = v$. \square

Un campo vectorial Y se dice perpendicular a la curva α si $\langle Y, \alpha' \rangle = 0$. Si $|\alpha'| > 0$, entonces cada espacio tangente se puede descomponer tal que $T_{\alpha(s)}M = \mathbb{R}\alpha' \oplus \alpha'^{\perp}$. Entonces cada campo vectorial Y definido a lo largo de α se puede descomponer como $Y = Y^T + Y^{\perp}$ donde Y^T es tangente a α y Y^{\perp} es perpendicular a α .

Además, si α es una geodésica, como $\frac{d}{dt} \langle Y, \alpha' \rangle = \langle Y', \alpha' \rangle$, entonces si Y es perpendicular a α , Y' también lo es. Similarmente se observa que si Y es tangente a α , entonces Y' también lo es.

Por lo tanto tenemos que $Y'^{\perp} = (Y^{\perp})'$ y $Y'^T = (Y^T)'$: Si $Y = Y^T + Y^{\perp}$, entonces $Y' = (Y^T)' + (Y^{\perp})'$. Como Y^T es tangente a la curva, entonces $(Y^T)'$ también lo será. Similarmente, como Y^{\perp} es perpendicular a la curva, $(Y^{\perp})'$ también lo será. Tenemos entonces que $Y'^{\perp} = (Y^{\perp})'$ y $Y'^T = (Y^T)'$.

Proposición 6.6. Si Y es un campo de Jacobi sobre la geodésica γ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $Y \perp \gamma$.
- Existen $a \neq b$ tal que $Y(a) \perp \gamma$ y $Y(b) \perp \gamma$.
- Existe a tal que $Y(a) \perp \gamma$ y $Y'(a) \perp \gamma$.

Demostración. Si calculamos la derivada segunda de $\langle Y, \gamma' \rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle Y, \gamma' \rangle &= \langle Y'', \gamma' \rangle + 2 \langle Y', \frac{D}{dt} \gamma' \rangle + \langle Y, \frac{D^2}{dt^2} \gamma' \rangle \\ &= \langle Y'', \gamma' \rangle, \end{aligned}$$

pues como γ es geodésica, su derivada covariante se anula.

Sustituyendo $Y'' = R_{Y\gamma'}\gamma'$ y recordando que $R_{XX} = 0$ para todo campo X , obtenemos que:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle Y, \gamma' \rangle = \langle R_{Y\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle = \langle R_{\gamma'\gamma'}Y, \gamma' \rangle = 0.$$

Como dicha derivada segunda se anula, tenemos entonces que $\langle Y(s), \gamma'(s) \rangle = A + sB$, y el resultado es inmediato. \square

6.2. Primera y Segunda Variación

Sea $\mathbf{x} : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ una variación de una curva α . Entonces para cada $t \in (-\delta, \delta)$, tenemos la longitud $L_{\mathbf{x}}(t)$ de la curva $u \rightarrow \mathbf{x}(u, t)$. En particular, $L_{\mathbf{x}}(0)$ será la longitud de α . Para simplificar la notación, cuando no haya ambigüedad escribiremos $L = L_{\mathbf{x}}$.

En esta sección estudiaremos formas de conseguir la *primera y segunda variación* de la longitud de arco en \mathbf{x} . Es decir, fórmulas para

$$L'(0) = \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{y} \quad L''(0) = \left. \frac{d^2L}{dt^2} \right|_{t=0}.$$

Lema 6.7. *Sea \mathbf{x} una variación de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ con $|\alpha'| > 0$. Entonces*

$$L'(0) = \varepsilon \int_a^b \left\langle \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V' \right\rangle du,$$

donde $\varepsilon = \text{sgn} \langle \alpha', \alpha' \rangle = \pm 1$ y V es el campo vector variación de \mathbf{x} .

Demostración. Sabemos que $L(v) = \int_a^b |\mathbf{x}_u(u, v)| du$. Tomando $(-\delta, \delta)$ lo suficientemente chico, aseguramos que $|\mathbf{x}_u(u, v)|$ sea estrictamente positivo. Por lo tanto,

$$L'(v) = \int_a^b \frac{d}{dv} |\mathbf{x}_u| du.$$

Además, $\text{signo} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \varepsilon$, entonces

$$|\mathbf{x}_u(u, v)| = \left(\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \right)^{1/2}.$$

Sabemos que para cualquier mapa de dos variables $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} |\mathbf{x}_u| &= \frac{d}{dv} \left(\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \right)^{-1/2} 2\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ &= \varepsilon \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle}{|\mathbf{x}_u|}. \end{aligned}$$

Tomando $v = 0$ se concluye el resultado pues $\mathbf{x}_u(u, 0) = \alpha'(u)$, $\mathbf{x}_v(u, 0) = V(u)$ y $\mathbf{x}_{vu}(u, 0) = V'(u)$. \square

En la siguiente proposición se trabaja con α curva suaves a trozos. Para dicha curva, si u_1, \dots, u_k son los puntos de quiebre, definimos

$$\Delta\alpha'(u_i) = \alpha'(u_i^+) - \alpha'(u_i^-) \in T_{\alpha(u_i)}M, \quad i = 1, \dots, k.$$

Dicho vector mide la discontinuidad en el quiebre u_i . Se considera además $u_0 = a$ y $u_{k+1} = b$.

Proposición 6.8. *Sea \mathbf{x} una variación de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ suave a trozos con $|\alpha'| = c > 0$ (donde está definida) y signo $\varepsilon = \text{sgn}\langle\alpha', \alpha'\rangle = \pm 1$. Entonces*

$$L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle\alpha'', V\rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle\Delta\alpha'(u_i), V(u_i)\rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle\alpha', V\rangle \Big|_a^b,$$

donde $u_1 < \dots < u_k$ son los puntos de los cortes de α y \mathbf{x} .

Demostración. Sabemos que:

$$\langle\alpha', V'\rangle = \frac{d}{du} \langle\alpha', V\rangle - \langle\alpha'', V\rangle,$$

y entonces integrando de ambos lados para cada intervalo $[u_i, u_{i+1}]$ se obtiene

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle\alpha', V'\rangle du = \langle\alpha', V\rangle \Big|_{u_i}^{u_{i+1}} - \int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle\alpha'', V\rangle du.$$

Sumando los términos correspondientes a cada intervalo multiplicados por ε/c , aplicando el lema 6.7 en cada trozo, se obtiene el resultado deseado. \square

Corolario 6.9. *Si \mathbf{x} es una variación de una geodésica γ con extremos fijos, entonces $L'(0) = 0$.*

Demostración. Claramente $\gamma'' = 0$ pues γ es una geodésica. Por lo tanto el primer término de la fórmula vista en 6.8 se anula. Como no tiene quiebres, el segundo término también se anula. El tercer término se anula pues para toda variación con puntos inicial y final fijos tenemos que $\mathbf{x}_v(a, 0) = V(a) = 0$ y $\mathbf{x}_v(b, 0) = V(b) = 0$. \square

Si \mathbf{x} es una variación de una geodésica γ , se llama la *aceleración transversal* a $A(u) = u_{vv}(u, 0)$. Por lo tanto $A'(u) = u_{vuv}(u, 0)$.

Proposición 6.10. *Sea \mathbf{x} una variación de una geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $|\gamma'| = c$ y signo $\varepsilon = \text{sgn}\langle\alpha', \alpha'\rangle = \pm 1$. Entonces,*

$$L''(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left\{ \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\gamma'} V, \gamma' \rangle \right\} du + \frac{\varepsilon}{c} \langle \gamma', A \rangle \Big|_a^b.$$

Demostración. Si $h = h(u, v) = |\mathbf{x}_u(u, v)|$, entonces $L(v) = \int_a^b h du$ y

$$L''(0) = \int_a^b \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} du.$$

Además, de la prueba del lema 6.7 se sabe que

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\varepsilon}{h} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} &= \frac{\varepsilon}{h} \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle \frac{\partial h}{\partial v} \\ &= \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uvv} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle^2 \right\}.\end{aligned}$$

Además se sabe que

$$\mathbf{x}_{uvv} = \mathbf{x}_{vuv} = \mathbf{x}_{vvu} + R_{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v.$$

Sustituyendo,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_{vu} \rangle + \langle \mathbf{x}_u, R_{\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vvu} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle^2 \right\}.$$

Cuando se evalúa en $v = 0$, se tiene que $h = c$, $\mathbf{x}_u = \gamma'$, $\mathbf{x}_v = V$, $\mathbf{x}_{vu} = V'$, $\mathbf{x}_{vv} = A$ y $\mathbf{x}_{vvu} = A'$. Sustituyendo estos términos queda:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle V', V' \rangle - \langle R_{V\gamma'} V, \gamma' \rangle + \langle \gamma', A' \rangle - \frac{\varepsilon}{c^2} \langle \gamma', V' \rangle^2 \right\}.$$

Dos simplificaciones pueden ser hechas a la ecuación de arriba:

- En primer lugar, como γ es geodésica, $\langle \gamma', A' \rangle = \frac{d}{du} \langle \gamma', A \rangle$.
- En segundo lugar, se puede descomponer el vector V' en función de $\frac{\gamma'}{c}$. Como $\frac{\gamma'}{c}$ es un vector unitario, la descomposición es:

$$V' = \frac{\varepsilon}{c^2} \langle V', \gamma' \rangle \gamma' + V'^{\perp}.$$

Por lo tanto

$$\langle V', V' \rangle = \frac{\varepsilon}{c^2} \langle V', \gamma' \rangle^2 + \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle.$$

Sustituyendo entonces en la ecuación, queda:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\gamma'} V, \gamma' \rangle + \frac{d}{du} \langle \gamma', A \rangle \right\}.$$

Integrando la ecuación de ambos lados se obtiene el resultado deseado. □

6.3. La forma de índice

Definición 6.11. Sea γ una geodésica entre los puntos p y q . Si V es un campo vectorial a lo largo de γ que se anula en p y q , entonces la *forma del índice* es la única forma bilineal simétrica tal que

$$I_{\gamma}(V, V) = L_{\mathbf{x}}''(0),$$

donde \mathbf{x} es una variación de γ con punto de inicio y de fin fijos, y con V como campo vectorial variación.

Dicha definición no depende de la variación elegida pues la fórmula de la segunda variación muestra que $L''(0)$ depende solamente del campo V .

Corolario 6.12. *Si γ es una geodésica entre p y q , con velocidad $c > 0$ y signo ε , entonces*

$$I_\gamma(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \left\{ \langle V'^\perp, W'^\perp \rangle - \langle R_{V\gamma'} W, \gamma' \rangle \right\} du,$$

para todo V, W campos vectoriales a lo largo de γ que se anulan en p y q .

Demostración. Por las propiedades de R , puede ser observado que dicha fórmula es bilineal y simétrica.

Además, cuando $V = W$, la fórmula para la segunda variación dice que la fórmula efectivamente es $L''(0)$, quedando demostrado el resultado deseado, pues si dos formas bilineales simétricas coinciden en los argumentos de la forma (v, v) entonces deben ser iguales. \square

Corolario 6.13. *Sea γ una geodésica a trozos entre p y q , y V un campo vectorial a lo largo de γ que se anula en p y q . Si γ y V tienen quiebres en $u_1 < \dots < u_k$, entonces*

$$I_\gamma(V, W) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle V''^\perp - R_{V\gamma'} \gamma', W \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta V'^\perp, W^\perp \rangle(u_i).$$

Demostración. En el corolario 6.12 se puede hacer la siguiente sustitución:

$$\langle V'^\perp, W'^\perp \rangle = \frac{d}{du} \langle V'^\perp, W^\perp \rangle - \langle V''^\perp, W^\perp \rangle = \frac{d}{du} \langle V'^\perp, W^\perp \rangle - \langle V''^\perp, W \rangle.$$

salvo en los quiebres, pues allí V'^\perp no está definido.

En cuanto a la curvatura, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\langle R_{V\gamma'} W, \gamma' \rangle = -\langle R_{V\gamma'} \gamma', W \rangle.$$

Realizando ambas sustituciones, tenemos

$$I_\gamma(V, W) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle V''^\perp - R_{V\gamma'} \gamma', W \rangle du + \frac{\varepsilon}{c} \sum \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{d}{du} \langle V'^\perp, W^\perp \rangle du.$$

El tercer término queda entonces, para cada i ,

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{d}{du} \langle V'^\perp, W^\perp \rangle du = \langle V'^\perp, W^\perp \rangle \Big|_{u_i}^{u_{i+1}}.$$

Como W vale cero en a y en b , para cada i con $1 \leq i \leq k$ finalmente obtenemos

$$\langle V'^\perp(u_i^-), W^\perp(u_i) \rangle - \langle V'^\perp(u_i^+), W^\perp(u_i) \rangle = -\langle \Delta V'^\perp, W^\perp \rangle(u_i).$$

con lo que queda demostrada la afirmación. \square

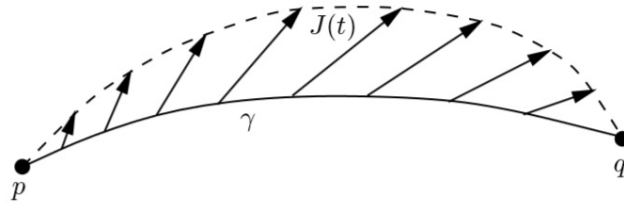


Figura 6.1: Puntos conjugados p y q para la geodésica γ

Nota 6.14. A partir del corolario 6.13 podemos ver que si V es el campo vectorial variación de una variación geodésica de γ , con puntos inicial y final fijos, entonces $I_\gamma(V, V) = L''(0) = 0$.

Esto se debe a que V es un campo de Jacobi que se anula en dos puntos. Por anularse en dos puntos, la proposición 6.6 muestra que $V \perp \gamma'$, o sea que $V = V^\perp$.

Como γ' es paralelo, tenemos también que $V'' = V''^\perp$. Esto permite sustituir la ecuación de Jacobi para V en la expresión del corolario 6.13, mostrando que la forma de índice se anula.

6.4. Puntos conjugados

Definición 6.15. Puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, con $a \neq b$ en una geodésica γ son *conjugados para γ* si existe un campo de Jacobi no nulo a lo largo de γ tal que,

$$J(a) = J(b) = 0.$$

Observación 6.16. La proposición 6.6 muestra que dicho campo de Jacobi siempre será perpendicular a la geodésica, pues se anula en dos puntos.

La siguiente proposición muestra la idea intuitiva de que dos puntos p y q sean conjugados: que haya dos geodésicas cercanas con origen en p y que “casi” se corten en q (ésta es una aproximación de orden uno). Esto traerá como consecuencia que el mapa exponencial en p tenga una singularidad, en el sentido en que deja de ser un difeomorfismo entre el espacio tangente y la variedad.

Proposición 6.17. Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ una geodésica empezando en un punto p . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\gamma(b)$ es un punto conjugado a $p = \gamma(0)$ según γ .
2. Existe una variación no trivial \mathbf{x} de γ , de geodésicas empezando en p , tal que $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$.
3. El mapa exponencial $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ es singular en $b\gamma'(0)$. Es decir, existe un vector no nulo w tangente a T_pM en $b\gamma'(0)$ tal que $d_{b\gamma'(0)}\exp_p(w) = 0$.

Demostración. (2) \Rightarrow (1) Como cada curva longitudinal de \mathbf{x} es una geodésica que comienza en p , entonces el campo vectorial variación V es un campo de Jacobi que además cumple que $V(b) = u_v(b, 0) = 0$.

(1) \Rightarrow (3) Se puede suponer que $b = 1$, pues se puede realizar una reparametrización. Sea J el campo de Jacobi que se desvanece en 0 y en 1. Sea w el vector tangente a $T_p M$ en $\gamma'(0)$ que corresponde a $J'(0)$ en $T_p M$. Por la proposición 6.5, $d_{\gamma'(0)} \exp_p(w) = J(1) = 0$. Además, como J es no trivial y $J(0) = 0$, tenemos que $J'(0) \neq 0$, y por lo tanto $w \neq 0$.

(3) \Rightarrow (2) Sea $w \in T_{b\gamma'(0)} T_p M = T_p M$ como en el punto (3) del enunciado. Si usamos la misma idea que en la prueba 6.5, tenemos $\mathbf{x}(u, v) = \exp_p(u(\sigma'(0) + vw))$ una variación que verifica lo que necesitamos. \square

Teorema 6.18. *Si hay un punto $\gamma(r)$ conjugado de p para γ con $0 \leq r \leq b$, entonces γ no minimiza la longitud entre $\gamma(0)$ y $\gamma(b)$ en el caso de la geometría Riemanniana, ni la maximiza en el caso de la geometría Lorentziana.*

Demostración. Probaremos que la forma de índice no es semidefinida. Es decir, encontraremos una dirección en la cual es positiva y una dirección en la cual es negativa. Si esto ocurre, entonces $L(0)$ no minimiza la longitud en el caso Riemanniano ni la maximiza en el caso Lorentziano.

Por hipótesis existe un campo de Jacobi J definido en $\gamma|_{[0,r]}$ que se anula en 0 y en r . Extendemos J a un campo vectorial Y a lo largo de γ definiendo $Y = 0$ en $\gamma|_{[r,b]}$. Entonces Y tendrá un solo punto de quiebre en r , y $Y'(r^-) = J'(r) \neq 0$ pues J es no nulo, mientras que $Y'(r^+) = 0$. Por lo tanto $\Delta Y'(r) = J'(r) \neq 0$. Por otro lado, por la proposición 6.6 sabemos que $J(r) \perp \gamma'(r)$, pues J es perpendicular a γ en dos puntos de dicha geodésica (0 y r). Por lo tanto, considerando que γ es una geodésica, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

y entonces podemos concluir que $J'(r) \perp \gamma'(r)$. Podemos elegir entonces un campo W perpendicular a γ , tal que $W(r) = \Delta Y'(r) = J'(r)$.

Sea ε el índice de la variedad. Primero vamos a encontrar un δ tal que $\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0$.

Tenemos

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \varepsilon \{ I_\gamma(Y, Y) + 2\delta I_\gamma(Y, W) + \delta^2 I_\gamma(W, W) \}.$$

Por el corolario 6.13 tenemos que $I_\gamma(Y, Y) = 0$ pues Y es un campo de Jacobi en $\gamma|_{[0,r]}$ y vale cero en el único quiebre. Por el mismo corolario, y ya que Y es Jacobi en la primera parte y nula en la segunda, tenemos que

$$\varepsilon I_\gamma(Y, W) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', W \rangle(r) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', \Delta Y' \rangle(r) < 0,$$

siendo la última igualdad por definición de W . La última desigualdad es clara en el caso Riemanniano. En el caso Lorentziano, como γ' es temporal y $\Delta Y'(r) \perp \gamma'(r)$, $\Delta Y'(r)$ es un vector espacial y el resultado es inmediato.

Por lo tanto,

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \underbrace{\varepsilon 2\delta I_\gamma(Y, W)}_{< 0} + \varepsilon \delta^2 I_\gamma(W, W).$$

Entonces tomando δ lo suficientemente chico obtenemos lo deseado, o sea:

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0.$$

Ahora probaremos que para cierto campo la forma del índice multiplicada por ε es positiva. Esta parte es la más intuitiva, pues uno pretende que una geodésica minimice (resp. maximice) la longitud, y por lo tanto que su derivada segunda sea positiva (resp. negativa), siendo entonces $\varepsilon I_\gamma > 0$ ambos casos. Para probar que existe una dirección en la que esto ocurre no es necesaria la existencia de puntos conjugados.

Tomo y cualquier vector normal perpendicular a $\gamma'(0)$ y lo extiendo a un campo vectorial Y a lo largo de γ por transporte paralelo. Sabemos que $\varepsilon \langle y, y \rangle = \varepsilon$. Tomo $\delta > 0$ tal que $\sin(u/\delta)$ valga cero en los dos extremos de la curva, es decir, δ es de la forma $b/k\pi$. Notar que es posible tomar δ arbitrariamente chico. Tomamos entonces el campo $V = \delta \sin(u/\delta)Y$. Dicho campo es perpendicular a γ , pues Y lo es.

Para calcular la forma de índice tomaremos $|\gamma'| = c = 1$ para simplificar cuentas. Además, escribiremos,

$$\begin{aligned} \langle R_{V\gamma'}V, \gamma' \rangle &= K(V, \gamma') \{ \langle V, V \rangle \langle \gamma', \gamma' \rangle - \langle V, \gamma' \rangle^2 \} \\ &= K(V, \gamma') \langle V, V \rangle \varepsilon. \end{aligned}$$

Notar que por la definición de V tenemos

$$\begin{aligned} V' &= \cos(u/\delta)Y \\ \langle V, V \rangle &= \delta^2 \sin^2(u/\delta) \langle Y, Y \rangle = \delta^2 \sin^2(u/\delta) \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \varepsilon I_\gamma(V, V) &= \int_a^b \left\{ \langle V', V' \rangle - K(V, \gamma') \langle V, V \rangle \varepsilon \right\} du \\ &= \int_a^b \left\{ \cos^2(u/\delta) \langle y, y \rangle - K(V, \gamma') \delta^2 \sin^2(u/\delta) \varepsilon \right\} du \\ &= \int_a^b \left\{ \cos^2(u/\delta) - K(V, \gamma') \delta^2 \sin^2(u/\delta) \varepsilon \right\} du. \end{aligned}$$

Pero como K está acotado en $[a, b]$, puedo encontrar δ lo suficientemente chico como para que $\varepsilon I_\gamma(V, V) > 0$. □

Una idea para demostrar el teorema anterior es la siguiente:

Un punto conjugado a p es un punto en el que casi se intersectan geodésicas vecinas con origen en p . Supongamos que se intersectan en $\gamma(r) = q$. Entonces tendremos otra geodésica σ cercana a $\gamma|_{[0,r]}$ con los mismos puntos de salida y de llegada, y el mismo largo.

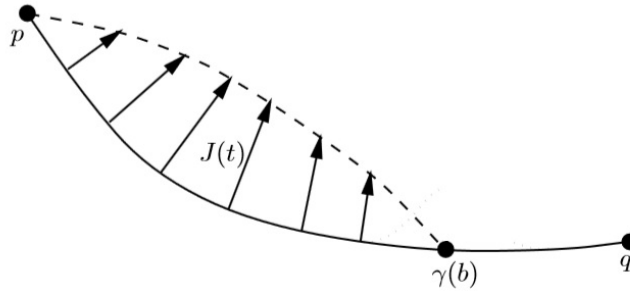


Figura 6.2: Construcción de una curva con longitud mayor que γ .

Pero entonces la curva σ seguida de $\gamma|_{[r,b]}$ tiene el mismo largo que γ , pero no es suave en $\gamma(r)$. Podemos fácilmente suavizar esta última curva en el punto $\gamma(r)$, pero, en geometría Riemanniana (resp. Lorentziana) esto implica acortar (resp. alargar) la longitud de curva, obteniendo una curva final más corta (resp. larga). Por lo tanto, la geoésica en cuestión no era una geodésica minimizante (resp. maximizante) de la longitud.

Este argumento, sin embargo, no es un argumento formal dado que uno no puede asegurar que las geodésicas vecinas efectivamente se corten en q y entonces necesitamos el argumento hecho en la prueba.

6.5. Campos P-Jacobi y puntos focales

El estudio del largo de las curvas que unen dos puntos de M puede ser generalizado, considerando el caso de las curvas que unen un punto con una subvariedad P de M . Este será el caso de mayor interés para esta monografía.

Definición 6.19. Sea $\Omega(P, q)$ el espacio de todas las curvas suaves $\alpha : [0, b] \rightarrow M$ que comienzan en P y terminan en q . Una (P, q) -variación \mathbf{x} de α es una variación suave a trozos cuyas curvas longitudinales están en $\Omega(P, q)$. Observar que los puntos de quiebre de \mathbf{x} deben ser los mismos que los de α .

Una P -variación es una variación de la curva donde cada curva longitudinal es normal a P , pero no tiene el requisito de acabar en el mismo punto.

Proposición 6.20. Sea $\alpha \in \Omega(P, q)$ una geodésica con $|\alpha'| = c > 0$. Entonces α es normal a P si y solo si $L'_{\mathbf{x}}(0) = 0$ para toda (P, q) -variación \mathbf{x} .

Demostración. (\Rightarrow) Sabemos que, por la fórmula de la primera variación vista en 6.8, si $\varepsilon = \text{sgn}\langle \alpha', \alpha' \rangle$ y $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$:

$$L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \alpha'(u_i), V(u_i) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle_a^b,$$

donde $u_1 < \dots < u_k$ son los puntos de los cortes de α y \mathbf{x} .

El primer término se anula pues al ser α geodésica, $\alpha'' = 0$. El segundo término se anula

pues la variación no tiene quiebres. El tercer término sería

$$\frac{\varepsilon}{c}\langle\alpha', V\rangle\Big|_a^b = \frac{\varepsilon}{c}\langle\alpha'(b), V(b)\rangle - \frac{\varepsilon}{c}\langle\alpha'(a), V(a)\rangle.$$

Dicho término se anula por las siguientes razones. Como todas las curvas longitudinales terminan en q , entonces $V(b) = 0$. Adicionalmente, al ser α normal a P , y $V(a)$ tangente a P , entonces $\alpha'(a) \perp V(a)$.

(\Leftarrow) Dado un vector $y \in T_{\alpha(0)}P$, sea V un campo en α con $V(0) = y$ y $V(b) = 0$. Sea \mathbf{x} una (P, q) -variación de α con $\mathbf{x}_v(u, 0) = V(u)$. Es fácil ver que una tal variación existe, considerando el mapa exponencial. Como sabemos que α es geodésica (sin quiebres) y que la primera variación es nula, entonces tenemos,

$$0 = L'_{\mathbf{x}}(0) = (\varepsilon/c)\langle\alpha', V\rangle\Big|_a^b = (\varepsilon/c)\langle\alpha'(a), y\rangle.$$

Por lo tanto podemos deducir que $\alpha'(a) \perp P$ y por lo tanto que α es normal a P . \square

La siguiente definición no es intuitiva, pero veremos en la proposición 6.24 una identificación más clara.

Definición 6.21. Sea V un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ normal a P (i.e. $\gamma(0) \in P$ y $\gamma'(0) \perp P$). Decimos que V es un campo P -Jacobi si cumple que

$$V(0) \in T_{\gamma(0)}P \quad \text{y} \quad \tan V'(0) = \overline{II}(V(0), \gamma'(0)) = \tan \overline{D}_{V(0)}\gamma'(0).$$

Nuevamente tenemos la forma de índice definida como $I_{\gamma}(V, V) = L''_{\mathbf{x}}$ para V , campo vectorial tal que $V(0)$ es tangente a P y $V(b) = 0$, donde \mathbf{x} es una P -variación con V como campo vectorial variación.

Se le puede hacer una modificación a la fórmula de la segunda variación para poder trabajar con ella en este caso:

Proposición 6.22. Sea γ una geodésica en $\Omega(P, q)$ normal a P con $|\gamma'| = c > 0$, y sea \mathbf{x} una (P, q) -variación de γ . Entonces, para V, W campos a lo largo de γ con $V(0), W(0) \in T_{\alpha(0)}P$, $V(b) = W(b) = 0$ y $V = \mathbf{x}_v$:

- $L''(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \left\{ \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\gamma'}V, \gamma' \rangle \right\} du - \frac{\varepsilon}{c} \langle \gamma'(0), II(V(0), V(0)) \rangle,$
- $I_{\gamma}(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \left\{ \langle V'^{\perp}, W'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\gamma'}W, \gamma' \rangle \right\} du - \frac{\varepsilon}{c} \langle \gamma'(0), II(V(0), W(0)) \rangle.$

Demostración. ▪ En la fórmula vista en 6.10, dejamos el primer y el segundo sumando sin cambiar.

Llamándole α a la primera curva transversal, tenemos $A(0) = \alpha''(0)$. Además $A(b) = 0$. Hacemos la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} \langle \gamma', A \rangle \Big|_0^b &= -\langle \gamma'(0), A(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= -\langle \gamma'(0), \tan \alpha''(0) + \text{nor} \alpha''(0) \rangle = -\langle \gamma'(0), \text{nor} \alpha''(0) \rangle \\ &= -\langle \gamma'(0), \text{nor} \overline{D}_{\alpha'} \alpha' \rangle = -\langle \gamma'(0), II(\alpha'(0), \alpha'(0)) \rangle \\ &= -\langle \gamma'(0), II(V(0), V(0)) \rangle. \end{aligned}$$

Llegándose así al resultado deseado.

- La segunda fórmula del enunciado constituye una forma bilineal simétrica que coincide con $L''_{\mathbf{x}}(0) = I_{\gamma}(V, V)$ evaluada en (V, V) . Por lo tanto, dicha forma bilineal es efectivamente la forma del índice. □

Proposición 6.23. *Sea γ una geodésica a trozos entre P y q , normal a P , y V, W campos vectoriales a lo largo de γ tales que en 0 sean tangentes a P y que se anulen en q . Si γ y V tienen quiebres en $u_1 < \dots < u_k$, entonces,*

$$I_{\gamma}(V, W) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle V''^{\perp} - R_{V\gamma'}\gamma', W \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle(u_i) + \frac{\varepsilon}{c} \langle V'(0) - \overline{II}(V(0), \gamma'(0)), W(0) \rangle.$$

Demostración. En la fórmula para $I_{\gamma}(V, W)$ vista en 6.22, podemos realizar tres sustituciones.

En la primera trabajamos con la curvatura:

$$\langle R_{V\gamma'}W, \gamma' \rangle = -\langle R_{V\gamma'}\gamma', W \rangle.$$

Como segunda sustitución haremos lo siguiente:

$$\langle V'^{\perp}, W'^{\perp} \rangle = \frac{d}{du} \langle V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle - \langle V''^{\perp}, W^{\perp} \rangle.$$

salvo en los quiebres, pues allí V'^{\perp} no está definido. Al integrar dicha expresión obtenemos:

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle V'^{\perp}, W'^{\perp} \rangle du = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{d}{du} \langle V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle du - \int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle V''^{\perp}, W^{\perp} \rangle du.$$

El primer término queda, para cada i ,

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{d}{du} \langle V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle du = \langle V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle \Big|_{u_i}^{u_{i+1}}.$$

Cuando realizamos la suma en i , como W vale cero en b , entonces el término en b se anula y para cada i con $1 \leq i \leq k$ finalmente obtenemos

$$\langle V'^{\perp}(u_i^-), W^{\perp}(u_i) \rangle - \langle V'^{\perp}(u_i^+), W^{\perp}(u_i) \rangle = -\langle \Delta V'^{\perp}, W^{\perp} \rangle(u_i).$$

El término en 0 no se anula, pues queda

$$-\langle V'^{\perp}(0), W^{\perp}(0) \rangle = -\langle V'^{\perp}(0), W(0) \rangle = -\langle V'(0), W(0) \rangle,$$

pues $W(0)$ es perpendicular a γ en cero, por ser tangente a P .

Como tercera sustitución trabajaremos con el último término de la fórmula vista en 6.22. Extendemos $V(0)$ y $W(0)$ a campos V y W tangentes a P en un entorno de $\gamma(0)$, y extendemos $\gamma'(0)$ a un campo X normal a P cerca de $\gamma(0)$. Como \overline{II} es un tensor, el resultado final no depende de la elección de dichas extensiones.

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{c} \langle \gamma'(0), \overline{II}(V(0), W(0)) \rangle &= -\frac{\varepsilon}{c} \langle \gamma'(0), \overline{D}_V W \rangle \\ &= -\frac{\varepsilon}{c} V \langle \gamma'(0), W(0) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \overline{D}_V \gamma'(0), W(0) \rangle = \frac{\varepsilon}{c} \langle \tan \overline{D}_V \gamma'(0), W(0) \rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{c} \langle \overline{II}(V(0), \gamma'(0)), W(0) \rangle. \end{aligned}$$

Queda entonces demostrada la fórmula para la forma de índice en este caso. □

La siguiente proposición brinda la idea geométrica de los campos P -Jacobi.

Proposición 6.24. *Sea V un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica γ normal a P . Entonces V es el campo vectorial variación de una P -variación \mathbf{x} de γ si y solo si V es un campo P -Jacobi.*

Demostración. (\Rightarrow) Como \mathbf{x} es una (P, q) variación, entonces la primera curva transversal α está en P , es decir, $\alpha'(v) \in T_{\alpha(v)}P$, por lo tanto $V(0) = \alpha'(0)$ es tangente a P y la primera condición de los campos P -Jacobi se cumple.

Además, el campo $Z(v) = \mathbf{x}_u(0, v)$ sobre α es normal para P pues las curvas longitudinales son geodésicas normales a P .

$$V'(0) = \mathbf{x}_{vu}(0, 0) = \mathbf{x}_{uv}(0, 0) = \overline{D}_{\alpha'(0)}Z(0).$$

Pero sabemos que $\tan \overline{D}_{\alpha'(0)}Z(0) = \overline{II}(\alpha'(0), Z(0))$ y además $Z(0) = \gamma'(0)$ así que la segunda condición de los campos P -Jacobi también se cumple.

(\Leftarrow) Sea α una curva en P tal que $\alpha'(0) = V(0)$. En primer lugar vamos a demostrar la siguiente afirmación:

Hay un campo vectorial Z a lo largo de α , normal a P , tal que $Z'(0) = V'(0)$.

Sean A y B los campos vectoriales sobre α normales a P obtenidos trasladando paralelamente los vectores $\gamma'(0)$ y $\text{nor}V'(0)$ respectivamente sobre α respecto a la conexión D^\perp definida en la sección 4.3. Por lo visto en la sección 4.3, tenemos que:

$$\overline{D}_{\alpha'(0)}\gamma'(0) = \underbrace{\overline{II}(\alpha'(0), \gamma'(0))}_{\text{tangente a } P} + \underbrace{D_{\alpha'(0)}^\perp \gamma'(0)}_{=0}.$$

Si $Z(v) = A(v) + vB(v)$ para todo v , entonces $Z(0) = \gamma'(0)$. Considerando que $\alpha'(0) = V(0)$,

$$Z'(0) = A'(0) + B(0) = \overline{D}_{\alpha'(0)}\gamma'(0) + \text{nor}V'(0) = \overline{II}(V(0), \gamma'(0)) + \text{nor}V'(0).$$

Por hipótesis, esto es igual a $V'(0)$ y la afirmación queda demostrada.

Tomando un campo Z como el recién construido, definimos ahora la variación \mathbf{x} . Primero consideramos el fibrado normal de P , NP , como la unión de todos los vectores normales a P , y el mapa $\pi : NP \rightarrow P$ que manda $v \in T_pP^\perp$ en $p \in P$. Entonces tenemos un mapa exponencial

$$\text{exp}^\perp : NP \rightarrow M,$$

tal que $\text{exp}^\perp(v) = \gamma_v(1)$ donde γ_v es la geodésica que inicia en $\pi(v)$ con velocidad inicial v .

Definimos ahora $\mathbf{x}(u, v) = \text{exp}^\perp(uZ(v))$. Tenemos $\mathbf{x}(u, 0) = \gamma(u)$. Además, las curvas longitudinales de \mathbf{x} son geodésicas con velocidad inicial $Z(v)$, y entonces serán normales a P . Por lo tanto, el mapa definido es efectivamente una variación de γ por geodésicas normales a P .

Si llamamos Y al campo vectorial variación de \mathbf{x} , entonces tenemos $Y(0) = \alpha'(0) = V(0)$ y como $\mathbf{x}_u(0, v) = Z(v)$, entonces

$$Y'(0) = \mathbf{x}_{vu}(0, 0) = \mathbf{x}_{uv}(0, 0) = Z'(0) = V'(0).$$

Obtenemos que el campo Y es un campo de Jacobi que cumple las mismas condiciones iniciales que V . Por unicidad de los mismos, $Y = V$ y tenemos que V es el campo vectorial variación de la variación \mathbf{x} . \square

Definición 6.25. Sea γ una geodésica en M normal a $P \subset M$. Entonces $\gamma(r)$ con $r \neq 0$ es un punto focal de P sobre γ si existe un campo P -Jacobi J no trivial a lo largo de γ tal que $J(r) = 0$.

Esta definición es muy similar a la de puntos conjugados. De hecho, si consideramos $P = \{p\}$, las definiciones coinciden.

La siguiente proposición es inmediata a partir de la construcción usada en la prueba de la proposición 6.24, y de la proposición 6.17.

Proposición 6.26. Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ una geodésica normal a P . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\gamma(r)$ es un punto focal de P sobre γ .
2. Hay una variación no trivial \mathbf{x} de γ por geodésicas P -normales, tal que $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$.
3. El mapa exponencial normal $\exp^\perp : NP \rightarrow M$ es singular en $b\gamma'(0)$.

Teorema 6.27. Si hay un punto $\gamma(r)$ focal de P para γ con $0 \leq r \leq b$, entonces γ no minimiza la longitud en el caso de la geometría Riemanniana, ni la maximiza en el caso de la geometría Lorentziana.

Demostración. Al igual que en la prueba para los puntos conjugados, encontraremos una dirección en la que εI sea positivo y otra en la que sea negativo.

Por hipótesis, existe un campo P -Jacobi J con $J(r) = 0$. Extendemos J a un campo Y sobre γ definiendo $Y = 0$ en $\gamma|_{[r, b]}$. Entonces Y tendrá un solo quiebre en r , con $Y'(r^-) = J'(r) \neq 0$ pues J es no nulo, mientras que $Y'(r^+) = 0$. Por lo tanto $\Delta Y'(r) = J'(r) \neq 0$. Por otro lado, por la proposición 6.6 sabemos que $J \perp \gamma'$, pues J es perpendicular a γ en dos puntos de la geodésica (0 y r). Por lo tanto, considerando que γ es una geodésica, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

y entonces podemos concluir que $J' \perp \gamma'$. Podemos elegir entonces un campo W perpendicular a γ , tal que $W(r) = \Delta Y'(r) = J'(r)$.

Vamos a encontrar un δ tal que $\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0$ con ε el índice de la variedad. Sabemos que

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \varepsilon \{I_\gamma(Y, Y) + 2\delta I_\gamma(Y, W) + \delta^2 I_\gamma(W, W)\}.$$

Por la definición de campos P -Jacobi, tenemos que si J es P -Jacobi entonces $J'(0) - \overline{II}(J(0), \gamma'(0)) = \text{nor} J'(0)$. Como además Y satisface la ecuación de Jacobi en $(0, r)$ y en (r, b) , y vale cero en su único quiebre r , 6.23 nos dice que:

$$I_\gamma(Y, Y) = \frac{\varepsilon}{c} \langle Y'(0) - \overline{II}(Y(0), \gamma'(0)), Y(0) \rangle = \frac{\varepsilon}{c} \langle \text{nor} Y'(0), Y(0) \rangle = 0.$$

También por 6.23:

$$\varepsilon I_\gamma(Y, W) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', W \rangle(r) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', \Delta Y' \rangle(r) < 0$$

siendo la última igualdad por definición de W . La última desigualdad es clara en el caso Riemanniano. En el caso Lorentziano, como γ' es temporal, y $\Delta Y'(r) \perp \gamma'(r)$, $\Delta Y'(r)$ es un vector espacial y se obtiene el resultado.

Entonces,

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \underbrace{\varepsilon 2\delta I_\gamma(Y, W)}_{<0} + \varepsilon \delta^2 I_\gamma(W, W).$$

Y entonces tomando δ lo suficientemente chico tenemos

$$\varepsilon I_\gamma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0.$$

La prueba de que existe cierto campo tal que la forma del índice multiplicada por ε sea positiva es idéntica a la segunda parte del teorema 6.18.

Así queda demostrado que la forma del índice no es semidefinida, y entonces la geodésica no minimiza la longitud en el caso Riemanniano ni la maximiza en el caso Lorentziano. \square

Capítulo 7

Relatividad General y Ecuación de Einstein

Una primera visión de la relatividad general, incluyendo sus antecedentes y principales ideas, fue vista en el capítulo 1. Sabemos que la ecuación de Einstein vincula la curvatura del espacio-tiempo con conceptos físicos como la densidad de energía, la densidad de momento lineal y la densidad de fuerza. Estudiamos el tensor curvatura en el capítulo 3. En este capítulo introduciremos la noción del tensor energía impulso, tensor que contiene toda la información física mencionada y es el utilizado en la ecuación de Einstein. Discutiremos formalmente la ecuación de Einstein, junto con algunas de sus soluciones más simples. También definiremos lo que es la *condición fuerte de energía*, condición clave para la existencia de singularidades estudiada en el capítulo 8. Estos resultados pueden encontrarse en [7], capítulo 12, y [12], capítulo 4. Adicionalmente, la información sobre algunos modelos del universo como el modelo FLRW se encuentra en [4], capítulo 3, y puede ser ampliada en su lectura.

7.1. El tensor energía impulso

La “materia” es un término indefinido que usamos intuitivamente para representar “algo” en el universo. En física Newtoniana el origen de la gravedad es la masa de la materia. En relatividad general, la gravedad es consecuencia del *tensor energía-impulso*, tensor que tiene en cuenta la masa, así como otros aspectos de la materia. Al no tener una definición formal de lo que es la materia, no hay una forma general de construir dicho tensor, pero hay ciertas reglas empíricas.

Se construirá entonces un campo tensorial simétrico T de tipo $(0, 2)$ llamado el tensor energía-impulso. Éste será el encargado de relacionar la materia con la curvatura de la variedad espacio-tiempo, por la información que contiene.

Si tomamos una base ortonormal (e_0, e_1, e_2, e_3) en $T_p M$:

- el término $T(e_0, e_0)$ indica la densidad de energía en ese punto para el observador que en ese instante tiene velocidad e_0 .
- El término $-T(e_0, e_i)$ para $i = 1, 2, 3$ indica la densidad de momento lineal para e_0

en la dirección e_i .

- El término $T(e_i, e_j)$ para $i, j = 1, 2, 3$ indica la densidad de fuerza en la dirección e_i sobre el plano de vector normal e_j .

Puesto que el tensor T es simétrico, el campo \bar{T} de endomorfismos asociado $T(v, w) = g(v, \bar{T}(w)) \quad \forall v, w \in T_p M$ es autoadjunto. En el caso Lorentziano, esto no implica necesariamente que \bar{T} admita una base ortonormal de vectores propios pues g no es definida positiva, aunque así ocurre para casi todas las formas de materia conocidas.

En el caso de que si exista una base ortonormal de vectores propios, siendo éstos $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, el valor propio $\rho = T(v_0, v_0)$ se llama densidad de energía (o masa) en reposo y cada valor propio $p_i = T(v_i, v_i)$ es llamado una presión principal.

7.2. La ecuación de Einstein

En la teoría de relatividad general, la materia es relevante solamente por aportar energía-impulso. Por lo tanto, trabajaremos con el tensor energía-impulso T .

Una vez propuesta la idea de que la materia curvaba el espacio-tiempo, Einstein se dedicó a buscar la relación entre la curvatura y T , es decir, cómo la energía-impulso afectaba la curvatura de la variedad en cuestión. Buscando la simpleza, como siempre, Einstein propuso la fórmula

$$G = kT,$$

con G alguna variante de la curvatura de Ricci y k una constante. Habiendo avanzado en la teoría, es fácil detectar el candidato ideal para G . A partir de la física se puede esperar que $\text{div}T = 0$, y si suponemos esto como cierto, precisamos entonces que $\text{div}G = 0$. Al tener el resultado

$$\text{div}Ric = \frac{1}{2}dS,$$

y siendo que queremos que G esté asociado con el tensor Ric , surge el primer candidato para el tensor G :

Definición 7.1. Si M es una variedad con tensor energía impulso T , el tensor gravitacional de Einstein de un espacio-tiempo es $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$, y por lo tanto la Ecuación de Einstein es

$$Ric - \frac{1}{2}Sg = T.$$

Lema 7.2. 1. G es un campo tensorial simétrico de tipo $(0, 2)$ con divergencia 0.

2. $Ric = G - \frac{1}{2}C(G)g$.

Demostración. 1. Como tanto Ric como g son campos tensoriales simétricos de tipo $(0, 2)$, entonces G también lo es.

Además, como $\text{div}(Sg) = DS = dS$, entonces

$$\text{div}G = \text{div}(Ric - \frac{1}{2}Sg) = \frac{1}{2}(dS - dS) = 0.$$

2. Como $C(g) = 4$, entonces $C(G) = C(Ric) - \frac{1}{2}SC(g) = -S$.
 Por la definición de G entonces

$$Ric = G + \frac{1}{2}Sg = G - \frac{1}{2}C(G)g.$$

□

Por la parte (2) del lema anterior, se puede deducir que G y Ric contienen exactamente la misma información. Además se puede ver una cierta simetría ya que $G = Ric - \frac{1}{2}C(Ric)g$ y $Ric = G - \frac{1}{2}C(G)g$.

Observación 7.3. Si trabajamos con un espacio-tiempo de dimensión $n + 1$, y contraemos la ecuación de Einstein, entonces como $C(g) = n + 1$, obtenemos:

$$S = -2\frac{C(T)}{n - 1}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Einstein queda:

$$Ric = T - \frac{C(T)}{n - 1}g.$$

7.3. Algunas soluciones a la ecuación de Einstein

Según la teoría de la relatividad, todos los modelos de espacio-tiempo permitidos son soluciones a la ecuación de Einstein. Lamentablemente, al escribirla en coordenadas locales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para el cual no es posible encontrar todas las soluciones. Sin embargo, muchas soluciones particulares fueron descubiertas y discutidas.

Las soluciones conocidas se pueden clasificar en los siguientes grupos:

1. **El vacío:** Es el caso en donde $T = 0$. Corresponde a la ausencia total de materia. Si $T = 0$, entonces por el lema 7.2 tenemos $Ric = G - \frac{1}{2}C(G)g = 0$, ya que por la ecuación de Einstein $G = T = 0$, y por ende $C(G) = 0$. Por lo tanto, dicho espacio no estará curvado.
2. **Constante cosmológica:** Corresponde a tomar $T = -\Lambda g$ para una constante $\Lambda \in \mathbb{R}$.
3. **Fluidos perfectos:** Teniendo
 - Un campo de vectores temporales dirigido hacia el futuro U , cuyas curvas integrales representarán el movimiento de las partículas del fluido,
 - Una función $\rho \in \mathfrak{F}(M)$ representando la densidad de energía,
 - Una función $P \in \mathfrak{F}(M)$ representando la presión del sistema,

el tensor energía-impulso es:

$$T = (\rho + P)U^* \otimes U^* + Pg.$$

A partir de esta definición del tensor energía impulso es directo ver que si X y Y son espaciales, perpendiculares a U :

$$\begin{aligned} T(U, U) &= \rho \\ T(X, U) &= T(U, X) = 0 \\ T(X, Y) &= P\langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Concordando entonces con la idea que se dio del tensor energía-impulso.

A continuación presentaremos algunas de las soluciones más importantes.

7.3.1. Espacio de Minkowski: año 1907

El espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^4 ya descrito anteriormente es una solución a la ecuación de Einstein, correspondiente a tomar $T = 0$. Dicha solución describe un espacio-tiempo con inexistencia total de masa y del campo gravitatorio. El espacio no se encuentra curvado, y coincide con el espacio de la relatividad especial.

7.3.2. Solución de Schwarzschild: año 1916

La solución de Schwarzschild es el modelo relativista más simple conteniendo una sola estrella. Está asumido que esta estrella es estática y esféricamente simétrica, y que es la única fuente de gravedad del espacio-tiempo. Por lo tanto, este modelo puede ser aplicado a regiones cercanas de un objeto astronómico donde se pueda desprestigiar los efectos gravitatorios de otro objeto.

Hablaremos de los puntos del espacio \mathbb{R}^3 (menos el origen) como $\mathbb{R}^+ \times S^2$ (tomamos coordenadas esféricas) y el espacio-tiempo será entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2$. La métrica será

$$ds^2 = A dt^2 + B d\rho^2 + C d\sigma^2,$$

donde $d\sigma^2$ es el elemento de la métrica en S^2 y A , B y C son funciones continuas en $(t, \rho, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2$.

Dicho modelo se construyó bajo ciertas hipótesis sobre el universo. La primera es que el universo debe ser esféricamente simétrico. Esto implica varias cosas. En primer lugar, implica que las funciones B y C definidas arriba deben depender solamente del radio ρ , y no del punto de la esfera considerado.

Adicionalmente, si tomo una transformación ϕ ortogonal de \mathbb{R}^3 , el mapa diferencial de $id \times \phi$ es una isometría. En particular lleva ∂_t en ∂_t . Entonces la función coeficiente $A(x)$ de dt^2 también depende solamente de ρ , pues no puede depender de t ni de σ .

Entonces, el elemento de la métrica en $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^2$ es

$$A(\rho) dt^2 + B(\rho) d\rho^2 + C(\rho) d\sigma^2.$$

Pero realizando un cambio de variables podemos conseguir que sea de la forma

$$E(r) dt^2 + G(r) dr^2 + r^2 d\sigma^2.$$

De esta forma, cuando t y r son constantes, tenemos el elemento de la métrica estándar de S^2 con curvatura constante $1/r^2$.

La segunda hipótesis para construir el modelo es que el espacio-tiempo en el infinito tenga curvatura Ricci 0 y sea un espacio de Minkowski. La justificación de dicha hipótesis es que en este modelo, la única fuente de gravedad es la estrella que se encuentra en el centro, y si nos alejamos infinitamente de ella dejarán de apreciarse los efectos de su gravedad.

Lema 7.4. *La variedad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2$ con la métrica discuida arriba tiene curvatura de Ricci cero en el infinito si y solo si $E = -h$ y $G = h^{-1}$ con $h(r) = 1 - (2M/r)$, con M una constante arbitraria.*

La constante M significará la masa de la estrella, y por lo tanto $M > 0$. Pero hay un problema con respecto a esta función h . La misma vale $-\infty$ en $r = 0$, 0 en $r = 2M$ y 1 en $r = \infty$. Pero entonces la métrica deseada no está definida en $r = 2M$, pues involucra a h^{-1} . Esta es la razón por la que separamos el espacio-tiempo en dos:

Definición 7.5. Para $M > 0$, sean P_I y P_{II} las regiones $r > 2M$ y $0 < r < 2M$ respectivamente en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. En ambas regiones consideramos la métrica $-h dt^2 + h^{-1} dr^2$ con la función h definida anteriormente. $N = P_I \times S^2$ es llamado el exterior de Schwarzschild y $B = P_{II} \times S^2$ es llamado el interior, o el agujero negro de Schwarzschild, ambos de masa M .

Por lo tanto, explícitamente, la métrica del espacio tiempo resultante es

$$ds^2 = -(1 - (2M/r))dt^2 + (1 - (2M/r))^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2.$$

Una estrella como una de este modelo está caracterizada por dos números, su masa M y su radio r^* . El espacio alrededor de la estrella es entonces el espacio donde el radio r es mayor que el radio de la estrella, es decir, los puntos donde $r > r^*$. En el caso usual, $r^* > 2M$, y la superficie de la estrella es exterior al radio de Schwarzschild y entonces está enteramente contenida en N . Sin embargo, en algunos casos $r^* \leq 2M$, y entonces se puede demostrar a partir de este modelo que r^* puede solamente valer 0, es decir, la estrella habrá desaparecido y en su lugar queda un agujero negro B .

Cuando r es lo suficientemente grande, la métrica es casi la métrica de Minkowski y entonces podemos interpretar t como el tiempo y r como el radio. Sin embargo, cuando r es menor que $2M$, h es negativo, y entonces ∂_r es temporal, mientras que ∂_t es espacial. Como consecuencia, tenemos que las líneas integrales de ∂_r son geodésicas temporales *incompletas*, pues no pueden ser extendidas más allá de la singularidad de la curvatura en $r = 0$. Tenemos entonces una variedad geodésicamente incompleta o *singular*.

7.3.3. Espacio de Sitter/ Anti de Sitter: año 1917

El espacio de Sitter $(n + 1)$ dimensional de radio α es el hiperboloide

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = \alpha^2,$$

en el espacio de Minkowski de dimensión $n + 2$ (\mathbb{R}_1^{n+2}), con la métrica inducida por dicho espacio. Por lo visto en 4.15 dicho espacio tiene curvatura seccional constante $1/\alpha^2$.

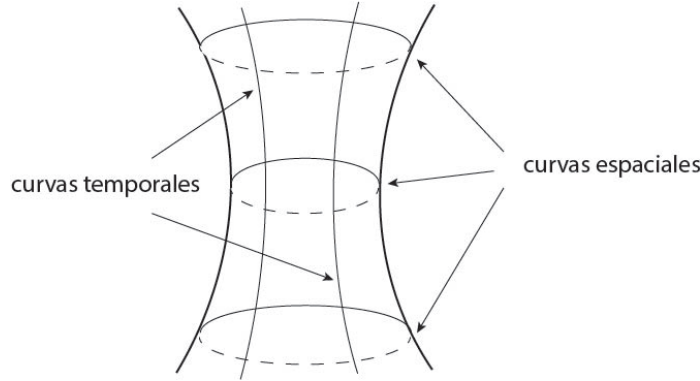


Figura 7.1: Espacio de Sitter.

Al ser un espacio de dimensión $n + 1$ con curvatura seccional constante $C = 1/\alpha^2$, sabemos por 3.17 que $Ric = nCg$ y $S = (n + 1)nC$, por lo tanto obtenemos:

$$Ric = \frac{n}{\alpha^2}g, \quad S = \frac{n(n + 1)}{\alpha^2}.$$

Si calculamos entonces G_{ab} para verificar que se cumpla la ecuación de Einstein, tenemos:

$$\begin{aligned} G = Ric - \frac{S}{2}g &= \frac{n}{\alpha^2}g - \frac{n(n + 1)}{2\alpha^2}g \\ &= \frac{n}{\alpha^2}g \left(1 - \frac{n + 1}{2}\right) = -\frac{n(n - 1)}{2\alpha^2}g. \end{aligned}$$

Por lo tanto dicho espacio es una solución a la ecuación de Einstein con *constante cosmológica*

$$\Lambda = \frac{n(n - 1)}{2\alpha^2}.$$

Uno puede interpretar el espacio de Sitter como un universo esférico que se contrae a un radio mínimo α y luego se expande a un ritmo exponencial.

El espacio Anti de Sitter $(n + 1)$ dimensional de radio α es el hiperboloide

$$(x^1)^2 + \dots - (x^{n+1})^2 - (x^{n+2})^2 = -\alpha^2,$$

en \mathbb{R}_2^{n+2} , con la métrica inducida por dicho espacio. Como este espacio tiene curvatura constante $-1/\alpha^2$, cuentas análogas a las de arriba muestran que este espacio es también una solución a la ecuación de Einstein con constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{n(n - 1)}{2\alpha^2}.$$

Concluimos que ambos modelos descritos recién corresponden a soluciones a la Ecuación de Einstein del tipo constante cosmológica. Dichas soluciones juegan un rol importante en la comprensión de la Relatividad General, porque, bajo la ausencia de masa, los espacios tienen una curvatura diferente de cero. La ausencia de masa simplemente asegura que dicha curvatura sea constante.

De hecho, todas las soluciones del tipo constante cosmológica poseen una curvatura inherente al espacio-tiempo, aún en la ausencia de materia. La solución del vacío puede considerarse una solución de tipo constante cosmológica con $\Lambda = 0$.

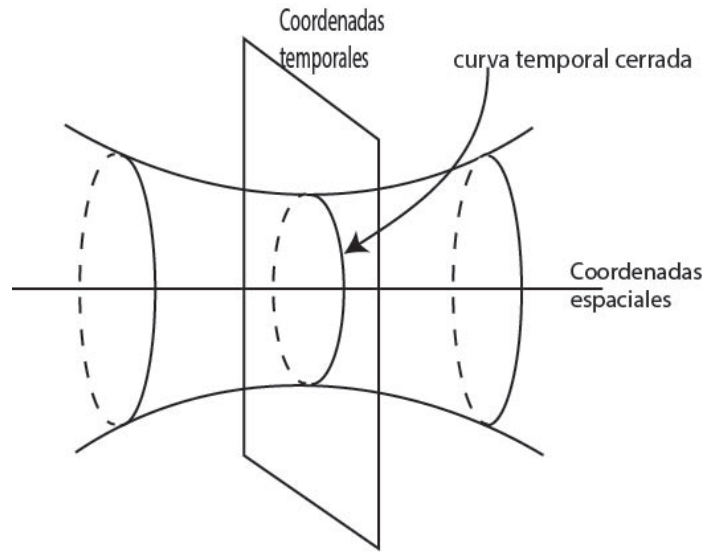


Figura 7.2: Espacio Anti de Sitter.

7.3.4. Modelo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker: año 1922

El modelo creado originalmente por el ruso Alexander Friedmann se basa en dos suposiciones simples acerca del universo. La primera suposición es que el universo visto desde nuestra galaxia aparenta ser exactamente igual en todas las direcciones. La segunda suposición es que lo mismo ocurre desde cualquier otra galaxia. A partir de estas dos suposiciones se sugiere que el universo, en forma promedio, sea un *fluido perfecto* cuyas “moléculas” son las galaxias. El mayor contribuyente a la densidad de energía de dicho fluido es la masa de las galaxias, con una pequeña presión dada principalmente por la radiación.

Dichas hipótesis fueron originalmente consideradas absurdas, pero un accidente mostró su validez. En 1965 dos físicos norteamericanos, Penzias y Wilson, se sorprendieron con la cantidad de ruido captado mientras probaban un detector de microondas. Dicho ruido parecía no venir de ninguna dirección en particular. Dedujeron que si el ruido venía del interior de nuestra atmósfera, debía disminuir al enfocar el receptor hacia arriba. Sin embargo, el ruido permanecía siempre igual, demostrando que el origen era exterior a la atmósfera. Adicionalmente, observaron que permanecía igual de día, de noche, todos los días del año y en cualquier dirección. Por lo tanto debía venir de más allá de nuestra galaxia. Finalmente se supo que dicha radiación viajó por la mayor parte del universo que observamos, y dado que la radiación es la misma en todas las direcciones, el universo debe ser igual en todas las direcciones. Así se mostró que la primera hipótesis de Friedmann era una afirmación bastante cierta sobre nuestro universo. Sin embargo, no existen evidencias astronómicas para apoyar la segunda hipótesis de Friedmann. Dicha afirmación parece razonable simplemente por un argumento de modestia, pues no tiene sentido que desde nuestra galaxia todas las direcciones sean iguales y que desde otros puntos no lo sean.

Aclaradas las hipótesis, se quiso tener una variedad similar a $I \times S$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} posiblemente infinito y S es una variedad conexa de dimensión tres. Las líneas $I \times p$ serían entonces las trayectorias del flujo galáctico y las parametrizamos como $\gamma_p(t)$. Si defino $U = \partial_t$ a partir de esta parametrización, U nos da entonces la velocidad de cada

galaxia γ_p . El tiempo t es el tiempo propio de cada galaxia. Además, para un cierto t fijo, tenemos la hipersuperficie

$$S(t) = t \times S.$$

Queremos que se cumplan tres condiciones. En primer lugar, que cada γ_p pueda ser una partícula con tiempo propio t , por lo que necesitamos $\langle U, U \rangle = -1$. En segundo lugar, que $U \perp S(t)$, pues consideramos que el movimiento relativo entre una galaxia y otra es despreciable a larga escala, entonces las consideramos en reposo. Esto quiere decir que el vector velocidad de la partícula p debe ser perpendicular $S(t)$. En tercer lugar, como consecuencia de la simetría del espacio, se pide que S tenga curvatura constante y que todos los mapas $j_t : S \rightarrow S(t)$ sean homotecias con un factor $f(t)$.

A partir de dichas condiciones se da la siguiente definición del espacio-tiempo:

Definición 7.6. Sea S una variedad Riemanniana conexa de dimensión 3, y de curvatura constante $k = -1, 0, 1$. Sea $f > 0$ una función suave de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}_1^+$. Entonces el espacio-tiempo de FLRW es el producto $M(k, f) = I \times S$ con

$$ds^2 = -dt^2 + f^2(t)d\sigma^2,$$

donde $d\sigma^2$ es el elemento de la métrica en S levantado a $I \times S$.

Se puede demostrar que los requisitos mencionados se cumplen. Adicionalmente, como S tiene curvatura constante, dados dos puntos p y q es posible construir una isometría entre entornos de p y q , estando confirmadas las condiciones propuestas por Friedmann.

Este modelo se puede separar en tres casos diferentes según las elecciones más importantes de S : H^3, \mathbb{R}^3, S^3 con curvaturas constante $-1, 0, 1$ respectivamente.

Se puede demostrar la siguiente proposición. La prueba se puede encontrar en [7], páginas 344 y 345.

Proposición 7.7. Para un espacio-tiempo FLRW $M(k, f)$, con campo vectorial $U = \partial_t$, y con $X, Y \perp U$, se cumple lo siguiente:

- $D_U U = 0$ y $D_X U = (f'/f)X$.
- La curvatura de Ricci está dada por:

$$\begin{aligned} Ric(U, U) &= -3f''/f, & Ric(U, X) &= 0, \\ Ric(X, Y) &= \left\{ 2(f'/f)^2 + 2k/f^2 + f''/f \right\} \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

- La curvatura escalar es

$$S = 6 \left\{ (f'/f)^2 + k/f^2 + f''/f \right\}.$$

Recordemos que la idea original de este modelo era crear un modelo cosmológico que tuviera la forma de un fluido perfecto, con las galaxias como moléculas. Para demostrar que

el modelo creado tiene dicha estructura, se iguala la forma del tensor energía impulso para fluidos perfectos con $Ric - Sg/2$ para obtener la siguiente densidad de energía ρ y presión P :

$$\begin{aligned}\rho/3 &= (f'/f)^2 + k/f^2, \\ -P &= 2f''/f + (f'/f)^2 + k/f^2.\end{aligned}$$

A partir de las dos ecuaciones de arriba llegamos a la relación

$$6f''/f = -(\rho + 3P). \quad (7.1)$$

Nota 7.8. Fue un descubrimiento de Hubble en 1929 que todas las galaxias se están alejando de nosotros a un ritmo proporcional a la distancia. Hizo además la estimación

$$H_0 = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = \frac{1}{18 \pm 2 \times 10^9},$$

con t_0 nuestro tiempo presente.

En particular, esto muestra que f tiene derivada positiva, y por lo tanto los espacios $S(t)$ se están expandiendo.

Proposición 7.9. *Sea $M(k, f) = I \times_f S$. Si $H_0 > 0$ para cierto t_0 , y $\rho + 3P > 0$, entonces I tiene un punto inicial t_* con $t_0 - H_0^{-1} < t_* < t_0$. Además, o $f' > 0$ o f tiene un punto máximo después de t_0 , siendo I un intervalo finito $I = (t_*, t^*)$.*

Demostración. Por la fórmula 7.1, si $\rho + 3P > 0$ entonces $f'' < 0$. Entonces la gráfica de f está, salvo en el punto t_0 , por debajo de la recta tangente por t_0 . Es decir, por debajo de la siguiente recta:

$$F(t) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0).$$

Como $H_0 > 0$, tenemos que la pendiente de F es positiva, y que F se anula en $t_0 - H_0^{-1} < t_0$. Por ser $f \leq F$, concluimos que existe $t_* \in [t_0 - H_0^{-1}, t_0]$ con $f(t_*) = 0$.

Como $f'' < 0$, entonces o f' es siempre positiva o f alcanza un máximo y luego comienza a decrecer. En este último caso, un argumento similar al anterior muestra que habrá otra singularidad en un tiempo $t^* > t_0$. \square

Se puede demostrar que en el caso $k = 1$, correspondiente a S^3 , el universo seguirá expandiéndose hasta alcanzar un máximo, luego del cual comenzará a contraerse, llegando entonces a la singularidad denominada “big crunch”. Sin embargo, en los casos $k = -1, 0$, correspondientes a H^3 y \mathbb{R}^3 la gravedad no será lo suficientemente grande como para frenar la expansión, y así el universo continuará expandiéndose. A la vez, todos los casos afirman la existencia de un origen del tiempo, denominado el “big bang”, en donde la densidad y la curvatura del espacio-tiempo fueron infinitas.

El modelo originalmente creado por Friedmann es el correspondiente a S^3 , en donde la gravedad es tan fuerte que hace que la variedad se curve cerrándose sobre sí misma. Dicha situación es interesante pues parece afirmar que si uno viaja en una dirección el

tiempo suficiente, puede llegar al mismo lugar del que partió. Sin embargo, esta afirmación no tiene validez pues uno tendría que viajar mucho más rápido que la velocidad de la luz para poder dar una vuelta al universo antes que, según dicho modelo, el tiempo se acabe.

Posteriormente a este modelo se trató de buscar información para determinar si el universo efectivamente se originaba en el Big Bang y si efectivamente volvería a colapsarse. Con respecto al Big Bang, aproximadamente al mismo tiempo que los físicos Penzias y Wilson descubrieron la radiación de microondas de fuera de nuestra galaxia, otros dos físicos norteamericanos Dicke y Peebles pensaban que originalmente el universo tiene que haber sido muy caliente y denso. Propusieron que ahora podríamos recibir la luz de ese momento en forma de radiación de microondas, pues la radiación emitida en lugares muy lejanos estaría recién llegando a nosotros ahora, pero con un corrimiento hacia el rojo. Antes de comenzar la búsqueda de esta radiación comprendieron que era la misma que habían descubierto Penzias y Wilson.

Para determinar si el universo se colapsará, se midió el ritmo actual de expansión a través de las velocidades a las cuales otras galaxias se alejan de la nuestra. Se consiguió la información de que el universo se expande entre 5 y 10 por ciento cada mil millones de años. Otro valor a calcular es la densidad promedio del universo. Si sumamos todas las masas de las estrellas conocidas, el total es menor al 1 % de la cantidad necesaria para detener la expansión del universo. Si sumamos la masa de la materia oscura en las galaxias e espacios intergalácticos, se obtiene el 10 % del valor necesario para detener la expansión. Por lo tanto, salvo que se esté omitiendo un tipo de materia no considerada, los datos sugieren que la expansión continuará eternamente.

7.4. Condición fuerte de energía

La ecuación de Einstein vincula la curvatura con el tensor energía-impulso. Sin embargo, uno puede pensar en condiciones que deba cumplir dicho tensor energía-impulso para que sea físicamente razonable. Estas condiciones son llamadas las *condiciones de energía*, y constituyen un tema muy debatido entre físicos, ya que se han estudiado muchas condiciones diferentes, pero siempre se suele encontrar un contraejemplo válido que no cumple la condición considerada. Estas condiciones, junto con la validez actual de las mismas, pueden estudiarse en detalle en [11].

En esta monografía trabajaremos con la condición fuerte de energía:

Definición 7.10. Una variedad Lorentziana (M, g) satisface la *condición fuerte de energía* si

$$\text{Ric}(V, V) \geq 0,$$

para todo campo temporal $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Por lo visto en la observación 7.3 tenemos:

$$\text{Ric} = T - \frac{C(T)}{n-1}g.$$

Entonces la condición fuerte de energía es equivalente, y de hecho, originalmente se define de la siguiente forma:

$$T(V, V) \geq \frac{C(T)}{n-1} \langle V, V \rangle,$$

para todo campo V temporal.

La explicación física de dicha condición es la siguiente:

Como la gravedad es una fuerza atractiva, entonces se pretende que trayectorias temporales (es decir, trayectorias para cuerpos *con masa*) se acerquen unas a otras por la atracción gravitatoria entre ellas. Este acercamiento se da por la curvatura de Ricci positiva en dicha trayectoria.

Ejemplo 7.11. Veamos que quiere decir la condición fuerte de energía en los ejemplos vistos anteriormente:

1. **Vacío:** La condición fuerte de energía se satisface trivialmente pues $T = Ric = 0$.
2. **Constante cosmológica:** En este caso $T = -\Lambda g$. Si V es un campo temporal, y considerando que entonces $g(V, V) < 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} T(V, V) \geq \frac{C(T)}{n-1} g(V, V) &\Leftrightarrow -\Lambda g(V, V) \geq -\frac{C(\Lambda g)}{n-1} g(V, V) \\ \Leftrightarrow \Lambda \geq \frac{\Lambda C(g)}{n-1} &\Leftrightarrow \Lambda \geq \frac{\Lambda(n+1)}{n-1} \\ \Leftrightarrow (n-1)\Lambda \geq (n+1)\Lambda &\Leftrightarrow \Lambda \leq 0. \end{aligned}$$

Es decir que la condición fuerte de energía es equivalente a que la constante cosmológica sea negativa. Esto se cumple para el espacio Anti de Sitter, mientras que no se cumple para el espacio de Sitter.

3. **Fluidos perfectos sin presión:** El tensor energía impulso en los fluidos perfectos es

$$T = (\rho + P)U^* \otimes U^* + Pg,$$

con ρ la densidad de energía y P la presión. Por lo tanto, en el caso sin presión, el tensor queda

$$T = \rho U^* \otimes U^*.$$

Si V es un campo temporal:

$$\begin{aligned} T(V, V) \geq \frac{C(T)}{n-1} \langle V, V \rangle &\Leftrightarrow \rho U^*(V) \cdot U^*(V) \geq \frac{C(\rho U^* \otimes U^*)}{n-1} \langle V, V \rangle \\ \Leftrightarrow \rho \langle U, V \rangle^2 \geq \rho \frac{C(U^* \otimes U^*)}{n-1} \langle V, V \rangle &\Leftrightarrow \rho \left\{ \langle U, V \rangle^2 - \frac{1}{n-1} \langle V, V \rangle \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Siendo que $C(U^* \otimes U^*) = 1$, pues si considero una base ortonormal que contiene a U , solo el término que corresponde a U de la contracción no se anula, y vale 1.

Como V es temporal, el término entre paréntesis es positivo y la condición a la que llegamos es equivalente a $\rho \geq 0$.

Capítulo 8

Singularidades

En el presente capítulo discutiremos las singularidades en los espacio-tiempos, así como su significado físico. En el caso Riemanniano, la existencia de singularidades está caracterizada por el teorema de Hopf-Rinow, que no tiene análogo para el caso Lorentziano. Finalmente demostraremos el teorema de singularidad de Hawking y Penrose que afirma que en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico que cumpla la condición fuerte de energía y con expansión lejos de cero en una porción de tiempo S , necesariamente existirá una singularidad.

8.1. Conceptos previos

Definición 8.1. Una variedad de Lorentz (M, g) es **singular** si no es geodésicamente completa.

Ya vimos varios ejemplos de espacio-tiempos con singularidades, como el espacio de Minkowski sin un punto, el espacio de Schwarzschild o el espacio FLRW. A continuación presentaremos un par de conceptos interesantes a tener en cuenta.

Singularidades desnudas

Una singularidad se dice *desnuda* si se puede evitar considerando un espacio-tiempo mayor. Formalmente, un espacio no tiene singularidades desnudas si $J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto para todo $p, q \in M$.

Dichas singularidades no son de relevancia para los físicos, pues asumen, como es mencionado en [3], (capítulo 1, página 21), la hipótesis llamada por Penrose “censura cósmica” que afirma que en la naturaleza no existen singularidades desnudas. Por esta razón, algunos autores definen un espacio singular como un espacio-tiempo geodésicamente incompleto que no puede ser inmerso en un espacio-tiempo mayor.

Un simple ejemplo de una singularidad desnuda sería el espacio de Minkowski sin un punto, o sin una semirrecta, como ya vimos en el capítulo 5. Claramente dicha variedad será geodésicamente incompleta, pues las geodésicas que pasaban por dichos puntos serán inextendibles.

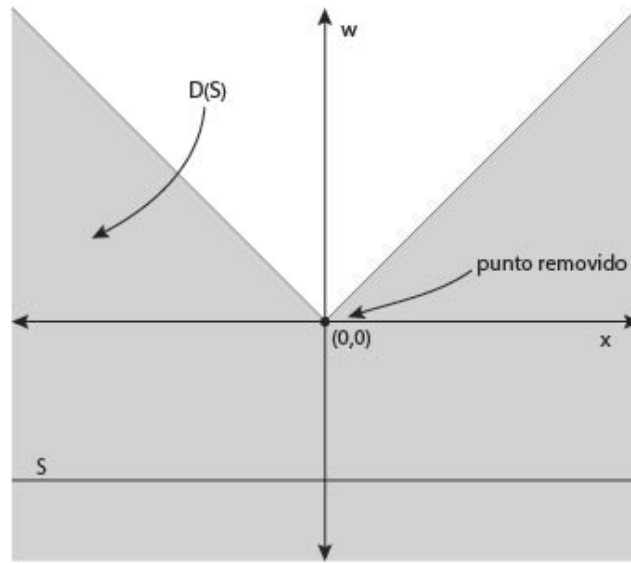


Figura 8.1: Espacio no globalmente hiperbólico con singularidades desnudas

Una razón más para que dichas singularidades sean de poca importancia es que si se le pide al espacio-tiempo que sea globalmente hiperbólico, como haremos en todo este capítulo, demostraremos en el teorema 8.10 que estas singularidades no pueden existir. Como ejemplo para visualizar esto, recordemos que el espacio de Minkowski sin el punto $(0, 0)$ no es globalmente hiperbólico, pues como se puede ver en la figura 8.1, para una porción de tiempo cualquiera S no se cumple que $M = D(S)$. Más información sobre las singularidades desnudas y la hiperbolicidad global puede ser encontrada en [10].

Singularidades no desnudas

En el fin del presente capítulo se demostrará la existencia de singularidades en variedades globalmente hiperbólicas. Por lo mencionado sobre las variedades desnudas, podemos afirmar que dichas singularidades serán singularidades no desnudas, y no afectarán la hiperbolicidad global.

Existen dos tipos de singularidades no desnudas. Cuando una geodésica temporal o nula no se puede extender a futuro, y cuando la geodésica no puede extenderse al pasado. Ambos tienen la misma estructura pero el concepto opuesto.

Para que una singularidad en el futuro no afecte la hiperbolicidad global de M , es necesario que cerca de la singularidad los conos se inclinen con el futuro hacia la singularidad, dejando ingresar a las geodésicas temporales dirigidas hacia el futuro. Sin embargo alejará de la singularidad a las geodésicas temporales dirigidas hacia el pasado.

Por lo tanto, dichas singularidades son el fin del tiempo para las partículas moviéndose en las geodésicas inextendibles hacia el futuro.

La situación en las singularidades hacia el pasado es inversa. En dichas singularidades los conos se inclinan con el pasado hacia la singularidad. Como resultado de esto, las geodésicas

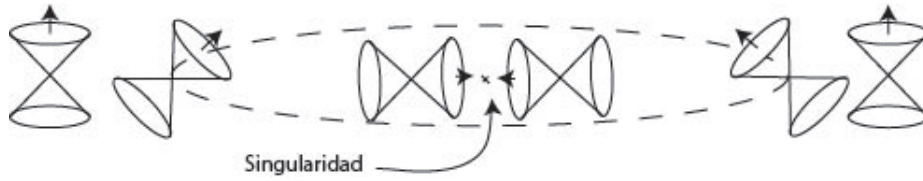


Figura 8.2: Conos inclinados en una singularidad no desnuda hacia el futuro.

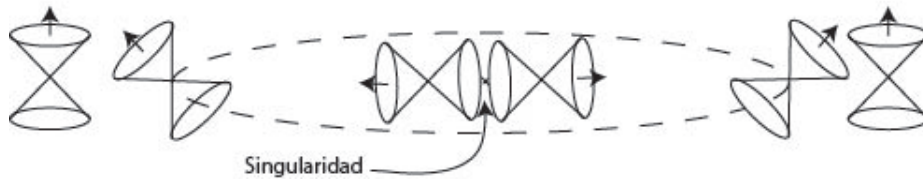


Figura 8.3: Conos inclinados en una singularidad hacia el pasado.

temporales dirigidas hacia el futuro podrán salir de la singularidad, pero no podrán entrar.

Por lo tanto, estas singularidades representan el comienzo del tiempo para las partículas moviéndose en las geodésicas inextendibles hacia el pasado.

8.2. El caso Riemanniano

El teorema de Hopf Rinow caracteriza la existencia de singularidades en el caso de la geometría Riemanniana. La demostración se puede encontrar en [2].

Teorema 8.2 (Hopf Rinow). *Dada M una variedad Riemanniana conexa, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- M es completo como un espacio métrico con la distancia Riemanniana.
- Existe un punto $p \in M$ desde el cual M es geodésicamente completa, es decir, \exp_p está definido sobre el espacio tangente entero $T_p M$.
- M es geodésicamente completa.
- Todo conjunto cerrado y acotado en M es compacto. (Condición de Heine-Borel)

A partir de este teorema es inmediata la siguiente proposición:

Corolario 8.3. *Una variedad Riemanniana compacta es geodésicamente completa.*

8.3. El caso Lorentziano: El teorema de singularidades de Hawking-Penrose

Los argumentos usados en el teorema de Hopf Rinow para geometría Riemanniana no valen en el caso de geometría Lorentziana, esencialmente porque uno no puede definir una función distancia a partir de la métrica. Para visualizar esto veremos un ejemplo de una variedad Lorentziana compacta que no es geodésicamente completa. Es decir, un contraejemplo del teorema de Hopf Rinow para variedades Lorentzianas.

Ejemplo 8.4 (Toro de Clifton Pohl). Sea $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ con la métrica Lorentziana:

$$g = \frac{dx \otimes dy + dy \otimes dx}{x^2 + y^2}.$$

Notar que la multiplicación por un escalar es una isometría de g . Sea $\lambda(x, y) = (2x, 2y)$, consideramos el grupo $\Omega = \{\lambda^n\}$ generado por λ . Dicho grupo actúa de forma propiamente discontinua sobre M por isometrías, y por lo tanto M/Ω una variedad diferenciable con una métrica Lorentziana.

Dicha variedad es topológicamente equivalente al toro, y por lo tanto es compacta. Sin embargo, no es geodésicamente completa. Para ver esto alcanza ver que M no es geodésicamente completa.

En primer lugar, calculando las componentes de la métrica, obtenemos

$$((g_{ij})) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x^2 + y^2} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando la matriz inversa obtenemos

$$((g^{ij})) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de estas componentes, usando 2.25 ítem 2, calculamos los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{-2x}{x^2 + y^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{-2y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

y los restantes son cero.

Verificaremos el carácter geodésico de la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right)$ definida para $t \in (-\infty, 1)$. Para ello, según 2.35, debemos verificar dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{1-t}\right) + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{1}{1-t}, 0\right) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t}\right)\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}(0) + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{1}{1-t}, 0\right) \left(\frac{d}{dt}(0)\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Realizando las cuentas correspondientes obtenemos que dichas ecuaciones son ciertas y por lo tanto α es una geodésica. Dicha geodésica es inextendible, ya que no está definida en 1. Considerando el cociente obtenemos que M/Ω es una variedad compacta y singular.

Procederemos a estudiar el problema de la existencia de singularidades en variedades de Lorentz. Este estudio puede encontrarse en [6]. En el resto del capítulo, (M, g) será una variedad de Lorentz globalmente hiperbólica y S será una porción de tiempo.

Dado $p \in S$, considero la geodésica c_p parametrizada por longitud de arco, con $c_p(0) = p \in S$ y c_p normal a S . Si dicha geodésica no tiene puntos focales entre p y $c_p(t_0)$ entonces

existe un entorno abierto V de $c_p([0, t_0])$ que puede ser foliado por imágenes de geodésicas ortogonales a S . Llamamos X al campo unitario tangente a dichas geodésicas, y sabemos que $X = -\text{grad}t$.

Recordemos que por la proposición 2.54, el Hessiano de la función t es un $(0, 2)$ tensor simétrico y además:

$$H(t)(Y, Z) = \langle D_Y(\text{grad}t), Z \rangle.$$

Consideraremos el $(0, 2)$ tensor simétrico $K = -H(t)$. Tenemos entonces que

$$K(Y, Z) = -\langle D_Y(\text{grad}t), Z \rangle = \langle D_Y X, Z \rangle.$$

Además sabemos que, al ser K simétrico, definimos de forma auxiliar el operador T que manda $Y \mapsto D_Y X$. Dicho operador es autoadjunto, pues $\langle T(Y), Z \rangle = K(Y, Z) = K(Z, Y) = \langle T(Z), Y \rangle$. Por lo tanto tenemos que

$$\langle T^2(Y), Z \rangle = \langle T(Y), T(Z) \rangle = \langle D_Y X, D_Z X \rangle.$$

Llamamos $K^2(Y, Z)$ a este tensor, es decir:

$$K^2(Y, Z) = \langle D_{D_Y X} X, Z \rangle = \langle D_Y X, D_Z X \rangle.$$

Definición 8.5. La *expansión* de la familia de geodésicas temporales en el entorno V es $\theta = \text{div}X$.

Notar que por 2.52 ítem 1, y por la definición de K , tenemos que $\theta = C(K)$. Usaremos la notación

$$R(W, X, Y, Z) = \langle R_{WX}Y, Z \rangle, \quad \forall W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [8], capítulo 3, página 48.

Lema 8.6. *Dados el tensor K y el campo X como arriba, se cumple*

$$(D_X K)(Y, Z) + K^2(Y, Z) + R(X, Y, X, Z) = 0,$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Aplicando la regla del producto vista en 2.8 a la derivación tensorial D_X se demuestra lo siguiente:

$$\begin{aligned} (D_X K)(Y, Z) &= D_X(K(Y, Z)) - K(D_X Y, Z) - K(Y, D_X Z) \\ &= X(\langle D_Y X, Z \rangle) - \langle D_{D_X Y} X, Z \rangle - \langle D_Y X, D_X Z \rangle \\ &= \langle D_X D_Y X, Z \rangle + \langle D_Y X, D_X Z \rangle - \langle D_{D_X Y} X, Z \rangle - \langle D_Y X, D_X Z \rangle \\ &= \langle D_X D_Y X, Z \rangle - \langle D_{D_X Y} X, Z \rangle. \end{aligned}$$

Como $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$, y teniendo en cuenta que como X es el campo vectorial de geodésicas, $D_X X = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} R_{YX}X &= D_{D_Y X - D_X Y} X - D_Y D_X X + D_X D_Y X \\ &= D_{D_Y X} X - D_{D_X Y} X - D_Y D_X X + D_X D_Y X \\ &= D_X D_Y X - D_{D_X Y} X + D_{D_Y X} X. \end{aligned}$$

Finalmente, retomando la cuenta anterior y recordando que $K^2(Y, Z) = \langle D_Y X, D_Z X \rangle$, tenemos que:

$$\begin{aligned} (D_X K)(Y, Z) &= \langle D_X D_Y X, Z \rangle - \langle D_{D_X Y} X, Z \rangle \\ &= R(Y, X, X, Z) - \langle D_{D_Y X} X, Z \rangle \\ &= -R(X, Y, X, Z) - \langle D_Y X, D_Z X \rangle \\ &= -R(X, Y, X, Z) - K^2(Y, Z). \end{aligned}$$

□

Lema 8.7. *Dados el tensor K y el campo X como arriba, se cumple*

$$X(\theta) + C(K^2) + Ric(X, X) = 0.$$

Demostración. Por el lema anterior sabemos que para todo i se cumple que

$$(D_X K)(E_i, E_i) + K^2(E_i, E_i) + R(X, E_i, X, E_i) = 0.$$

Entonces contraemos dicha igualdad y obtenemos

$$C(D_X K) + C(K^2) + Ric(X, X) = 0.$$

Pero D_X es una derivación tensorial, y una contracción conmuta con cualquier derivación tensorial por 2.7. Por lo tanto tenemos que:

$$X(C(K)) + C(K^2) + Ric(X, X) = 0.$$

Por último, como $C(K) = \theta$, obtenemos el resultado deseado. □

En la siguiente proposición veremos si la variedad cumple la condición fuerte de energía, siempre habrá puntos focales a las geodésicas. En variedades que cumplan dicha condición, la gravedad es una fuerza atractiva, y por lo tanto curva el espacio-tiempo de forma tal que las geodésicas cercanas se acercan hacia el futuro o hacia el pasado, generándose entonces los puntos conjugados o puntos focales.

Proposición 8.8. *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión n que cumpla la condición fuerte de energía, S una porción de tiempo, y $p \in S$ tal que $\theta(p) = \theta_0 < 0$. Si la geodésica c_p puede ser extendida a $t_0 = -\frac{n}{\theta_0} > 0$, entonces contiene al menos un punto focal de S .*

Demostración. Supongamos que no existe ningún punto focal a S en $c_p([0, t_0])$. Entonces existe un entorno abierto V de $c_p([0, t_0])$ foliado por geodésicas como el mencionado arriba. Sabemos que en este caso podemos definir X , K y θ como arriba. Por el lema anterior se cumple que:

$$X(\theta) + C(K^2) + Ric(X, X) = 0.$$

Por hipótesis sabemos que M satisface la condición fuerte de energía, y entonces $Ric(X, X) \geq 0$. Sustituyendo directamente en la ecuación anterior deducimos que

$$X(\theta) + C(K^2) \leq 0.$$

Si A es una matriz $n \times n$, tenemos que $(\text{tr}A)^2 \leq n \text{tr}(A^t A)$. Esto se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto interno usual a las matrices A y la identidad. Entonces tenemos

$$C(K^2) = \text{tr}(T^2) \geq \frac{1}{n} \text{tr}(T^2) = \frac{1}{n} C(K)^2 = \frac{1}{n} \theta^2.$$

Definiendo $\theta(t)$ como $\theta(t) = \theta(c_p(t))$, tenemos que $X(\theta) = \frac{d\theta}{dt}$, y entonces,

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n} \theta^2 \leq 0.$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\bar{\theta}^2} d\bar{\theta} &\leq -\frac{1}{n} \int_0^t d\bar{t} \\ -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta_0} &\leq -\frac{1}{n} t \\ \frac{1}{\theta} &\geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\theta_0 \leq 0$, y entonces $\frac{1}{\theta_0} \leq 0$. Además, la desigualdad nos dice que en tiempo $t = -\frac{n}{\theta_0}$, $\frac{1}{\theta} \geq 0$. Esto significa que en algún tiempo entre 0 y $-\frac{n}{\theta_0}$, θ es infinito.

Llegamos entonces a un absurdo, pues si no hay puntos focales, θ debe ser una función suave en V . \square

Observación 8.9. *Es análogo demostrar que si en lugar de tener el valor inicial $\theta(p) < 0$, tuvieramos $\theta(p) = \theta_0 > 0$, tendríamos que si la geodésica c_p puede ser extendida para el pasado hasta $t_0 = -\frac{n}{\theta_0} < 0$, entonces contiene al menos un punto focal de S .*

Demostración. Suponiendo que no existen puntos focales, de la misma forma que arriba llegamos a demostrar que

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n} \theta^2 \leq 0.$$

Separando variables y integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{1}{\bar{\theta}^2} d\bar{\theta} &\leq -\frac{1}{n} \int_t^0 d\bar{t} \\ \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_0} &\leq \frac{1}{n} t \\ \frac{1}{\theta} &\leq \frac{1}{\theta_0} + \frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\theta_0 \geq 0$, y entonces $\frac{1}{\theta_0} \geq 0$. Además, la desigualdad nos dice que en tiempo $t = -\frac{n}{\theta_0}$, $\frac{1}{\theta} \leq 0$. Esto significa que en algún tiempo entre $-\frac{n}{\theta_0}$ y 0, θ es infinito.

De forma análoga al razonamiento anterior, llegamos entonces a un absurdo. \square

Es consecuencia de la siguiente proposición que la hiperbolicidad global implique la ausencia de singularidades desnudas.

Proposición 8.10. *Sea (M, g) una variedad de Lorentz globalmente hiperbólica, S una porción de tiempo, y $p \in D^+(S)$. Entonces $A = D^+(S) \cap J^-(p)$ es compacto*

Demostración. Primero definimos un entorno simple $U \subset M$ como un conjunto abierto geodésicamente convexo con \bar{U} compacto tal que \bar{U} esté contenido en otro entorno geodésicamente convexo. Como se prueba en [7], página 131, para cualquier cubrimiento por abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ podemos considerar un refinamiento numerable por entornos simples $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que cumpla que la intersección entre ellos es geodésicamente convexa. Además, como el espacio es paracompacto, puedo considerar dicho refinamiento localmente finito. Es decir, para cada punto existirá un entorno que corte sólo a finitos U_k . Para más detalles ver [5], página 257. Considero dichos $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como base de la topología de M .

Si $p \in S = t^{-1}(0)$, tenemos que si $q \in J^-(p)$ entonces $q = p$ o $t(q) < 0$. Por otro lado, si $q \in D^+(S)$ entonces $q \in S$ o $t(q) > 0$. Como consecuencia tendríamos que $A = \{p\}$ y claramente sería compacto. Por lo tanto, podemos asumir que $p \notin S$. Sea $\{q_n\}$ una sucesión infinita en A , y consideramos α_n una curva causal (curva cuyo vector velocidad nunca es espacial) dirigida hacia el pasado conectando a p con q_n . Queremos demostrar que dicha sucesión acumula en un punto en A .

Si q_n acumula en p , ya no hay nada que hacer, pues conseguimos que la sucesión tenga una subsucesión convergente a un punto en A . Por lo tanto asumiremos que q_n no acumula en p .

Crearemos ahora una sucesión auxiliar $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Definimos $p_1 = p$. Como $p_1 \in A$, consideramos $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_1 \in U_{k_1}$ y infinitos α_n salgan de U_{k_1} . Dicho entorno existe pues q_n no acumula en p . Llamamos $r_{1,k}$ a la intersección de α_k con ∂U_{k_1} . Al tener infinitos puntos $r_{1,k}$ en ∂U_{k_1} , como ∂U_{k_1} es compacto, entonces los puntos $r_{1,k}$ acumularán en un punto $p_2 \in \partial U_{k_1}$.

Como cada $r_{1,k}$ está en $J^-(p_1)$, y \bar{U}_{k_1} está contenido en un entorno geodésicamente convexo, entonces por 5.18 parte (4), existe una única geodésica causal $\gamma_{1,k}$ uniendo a $r_{1,k}$ con p_1 , parametrizada por la función global de tiempo $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t^{-1}(0) = S$. Entonces la subsucesión de $\gamma_{1,k}$ que corresponde a una sucesión convergente de $r_{1,k}$ va a converger en la topología C^∞ a una geodésica causal γ_1 que conecte a p_2 con p_1 . Entonces, $p_2 \in J^-(p_1)$. Además, sabemos que $r_{1,k}$ está en α_k , curva causal dirigida hacia el pasado entre p y q_k . Como $q_k \in D^+(S)$, entonces $t(q_k) \geq 0$. Como $t \circ \alpha$ es decreciente (pues la curva es dirigida hacia el pasado), entonces necesariamente $t(r_{1,k}) \geq 0$. Como t es una función continua, podemos afirmar que $t(p_2) \geq 0$.

El siguiente paso de la iteración es similar al anterior. Como $p_2 \notin U_{k_1}$, entonces existe $k_2 \neq k_1$ tal que $p_2 \in U_{k_2}$ y infinitos α_n salgan de U_{k_2} . Si no existe un entorno tal que infinitas curvas salgan de él, entonces termina la iteración y se pasa al último párrafo de esta demostración. Si hay dos opciones para la elección del entorno simple, elijo la opción que haya sido usada menos veces en el pasado. Las curvas α_k que salen de este entorno intersectan a ∂U_{k_2} en $r_{2,k}$, y éstos puntos acumulan en $p_3 \in \partial U_{k_2}$. Un argumento análogo al anterior muestra que $p_3 \in J^-(p_2)$, y como $p_2 \in J^-(p_1) \subset J^-(p)$, tenemos entonces que $p_3 \in J^-(p)$. Además, por el mismo argumento realizado anteriormente, $t(p_3) \geq 0$.

Realizando este proceso recursivamente, encontramos una sucesión $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, o simplemente finitos de estos puntos, con $p_i \in U_{k_i}$, tal que p_i está conectado con p_{i+1} por una geodésica causal γ_i dirigida hacia el pasado. Como γ_i es causal dirigida hacia el pasado, t restringida a dicha curva debe ser decreciente. Por lo tanto, como t en los extremos es mayor

o igual que 0, entonces t no puede alcanzar un valor negativo a lo largo de γ_i . Como consecuencia, la curva no puede atravesar S .

Si la sucesión es infinita, probaremos que no es convergente. Supongo que $p_i \rightarrow q$. Entonces tomo $U \in \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $q \in U$. Tendremos infinitos p_i en dicho entorno, y solamente finitos de estos puntos afuera de él. Por lo tanto, hay finitos puntos en ∂U , y esto significa que U fue elegido finitas veces. Como a U lo cortan solamente finitos entornos de $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, entonces U_{k_i} para cierto i debe contener infinitos puntos de la sucesión. Esto viola la construcción de la sucesión, pues significa que U_{k_i} fue elegido infinitas veces, mientras que para esos puntos, U también era un candidato y había sido elegido menos veces. Llegamos a un absurdo y demostramos entonces que la sucesión no puede ser convergente.

Por lo tanto, si la sucesión es infinita, entonces concatenamos y suavizamos las geodésicas para formar una curva causal dirigida hacia el pasado empezando en $p = p_1$. Al igual que argumentamos para cada γ_i , esta curva no puede intersectar S . Sin embargo, por lo recién demostrado, la curva no puede converger y terminar en un punto. Entonces, la curva es inextensible hacia el pasado, y como $p_1 \in D^+(S)$, por definición del dominio de dependencia futura, debe cortar a S . Así llegamos a un absurdo.

Si la sucesión es finita, suponemos que existe hasta la iteración j -ésima. Esto querría decir que solamente finitas curvas α_n salen de U_{k_j} . Por lo tanto existe una subsucesión $\{q_m\}$ incluida en U_{k_j} tal que $q_m \rightarrow q$. Pero como estamos dentro de un entorno geodésicamente convexo, entonces por 5.18 parte (3) sabemos que en U_{k_j} se cumple que $J^-(p) = \overline{I^-(p)}$, y entonces $q \in J^-(p)$. Resta probar que $q \in D^+(S)$. Como $q \in J^-(p)$, considero la curva causal γ de p a q . Por el mismo argumento hecho anteriormente, dicha curva no puede tener un extremo a cada lado de S . Por lo tanto, o $t(q) \geq 0$ y por lo tanto $q \in D^+(S)$, y la prueba queda finalizada, pues tomamos una sucesión en A y demostramos que tiene una subsucesión convergente en A . \square

Teorema 8.11. *Sea (M, g) una variedad de Lorentz globalmente hiperbólica, S una porción de tiempo, y $p \in D^+(S)$. Entonces existe una curva con longitud máxima entre todas las curvas temporales conectando p a S . Esta curva es una geodésica temporal ortogonal a S .*

Demostración. Consideremos el conjunto $T(S, p)$ de todas las curvas temporales que conecten S a p . Al ser M una variedad globalmente hiperbólica, se tiene la función global de tiempo $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ con $S = t^{-1}(0)$. Por lo tanto, podemos reparametrizar todas las curvas tal que $t(\gamma(t)) = t$ para toda curva en $T(S, p)$, quedando las mismas identificadas solamente por su imagen. Dichas imágenes son subconjuntos compactos en el espacio compacto $A = D^+(S) \cap J^-(p)$.

Consideramos el espacio $C(A)$ formado por todos los subconjuntos compactos de A con la métrica de Hausdorff d_H . Es decir, si $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica asociada a la topología de M y $U_\varepsilon(K)$ es un ε -entorno de K según d , entonces:

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 : K \subset U_\varepsilon(L), L \subset U_\varepsilon(K)\}.$$

La clausura $\overline{T(S, p)} = C(S, p)$ es el conjunto de las curvas causales de S a p , y es un subconjunto compacto de $C(A)$.

Sea $\tau : T(S, p) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que indica el largo de la curva para curvas temporales. Es decir, como sabemos que $t(c(t)) = t$ para toda curva c , tenemos que:

$$\tau(c) = \int_0^{t(p)} |\dot{c}(t)| dt.$$

Recordemos que $|v| = |g(v, v)|^{1/2}$, con g la métrica de Lorentz del espacio-tiempo. Demostraremos que dicha función es superiormente semicontinua respecto a d_H .

Dada una curva $c \in T(S, p)$, se folia un entorno $U_\varepsilon(c)$, por hipersuperficies π espaciales perpendiculares a \dot{c} . Entonces defino en $U_\varepsilon(c)$ una función \mathcal{T} de la siguiente manera. Si $\pi \cap c = \{r\}$, $\mathcal{T}|_\pi = \tau(c|_{[0, t(r)]}) = cte$. De esta forma, \mathcal{T} indica es la distancia a lo largo de c y sus hipersuperficies de nivel son perpendiculares a c . Esto quiere decir que $-\text{grad}\mathcal{T} = \dot{c}$ en c .

Ahora, si otra curva $\gamma \in T(S, p)$ está en $B_\varepsilon(c) \subset C(A)$ según la métrica de Hausdorff, la reparametrizamos con la función

$$\sigma(t) = \mathcal{T}(\gamma(t)),$$

y consideramos entonces la curva reparametrizada $\alpha(s) = \alpha(\sigma(t)) = \gamma(t)$.

Para dicha reparametrización tenemos que

$$\dot{\sigma}(t) = d_{\gamma(t)}\mathcal{T}(\dot{\gamma}(t)) = \langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}\mathcal{T}(\gamma(t)) \rangle.$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}(\sigma(t)), \text{grad}\mathcal{T}(\alpha(\sigma(t))) \rangle &= \left\langle \frac{\dot{\gamma}(t)}{\dot{\sigma}(t)}, \text{grad}\mathcal{T}(\gamma(t)) \right\rangle \\ &= \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}\mathcal{T}(\gamma(t)) \rangle}{\dot{\sigma}(t)} = 1. \end{aligned}$$

Podemos descomponer $\dot{\alpha}(s)$ de la siguiente forma, con Z un campo espacial y ortogonal a $\text{grad}\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\langle \dot{\alpha}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle}{\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle} \text{grad}\mathcal{T} + Z \\ &= \frac{1}{\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle} \text{grad}\mathcal{T} + Z. \end{aligned}$$

Por lo tanto, calculando la norma obtenemos

$$\begin{aligned} |\dot{\alpha}| &= \left| \frac{1}{\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle^2} \langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle + \langle Z, Z \rangle \right|^{1/2} \\ &= \left| \frac{1}{\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle} + \langle Z, Z \rangle \right|^{1/2}. \end{aligned}$$

Además, como sabemos que en c se cumple que $\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = -1$, dado un $\delta > 0$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente chico tal que en $U_\varepsilon(c)$ se cumpla que,

$$-\frac{1}{\langle \text{grad}\mathcal{T}, \text{grad}\mathcal{T} \rangle} < \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)}\right)^2.$$

Entonces, realizando el cambio de variable $s = \sigma(t)$ tenemos,

$$\tau(\gamma) = \int_0^{t(p)} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t(p))} |\dot{\alpha}(s)| ds = \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} |\dot{\alpha}(s)| ds,$$

donde $\sigma(t(p)) = \mathcal{T}(\gamma(t(p))) = \mathcal{T}(p) = \tau(c)$ pues $p \in c \cap \gamma$.

Como sabemos que α es temporal, entonces:

$$|\dot{\alpha}(s)| = \left(-\frac{1}{\langle \text{grad} \mathcal{T}, \text{grad} \mathcal{T} \rangle} - \langle Z, Z \rangle \right)^{1/2}.$$

Además, como Z es espacial, $-\langle Z, Z \rangle \leq 0$. Por estas dos razones tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} |\dot{\alpha}(s)| ds = \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} \left(-\frac{1}{\langle \text{grad} \mathcal{T}, \text{grad} \mathcal{T} \rangle} - \langle Z, Z \rangle \right)^{1/2} ds \\ &< \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)} \right) ds = \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)} \right) (\tau(c) - \mathcal{T}(\gamma \cap S)). \end{aligned}$$

En $S \cap c$ tenemos $\mathcal{T} = 0$. Por lo tanto elegimos ε suficientemente chico como para que en $S \cap U_\varepsilon(c)$ valga:

$$|\mathcal{T}| < \left(\frac{1}{\tau(c)} + \frac{2}{\delta} \right)^{-1}.$$

Por lo tanto tenemos,

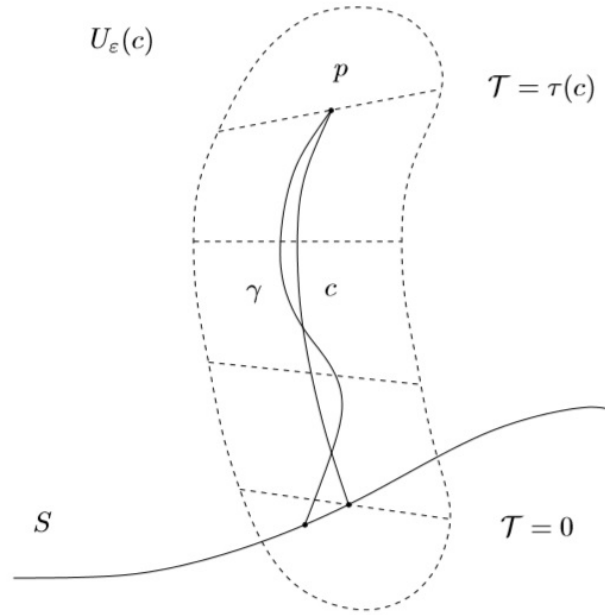
$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &< \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)} \right) \left(\tau(c) + \left(\frac{1}{\tau(c)} + \frac{2}{\delta} \right)^{-1} \right) \\ &= \tau(c) + \frac{\delta}{2} + \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)} \right) \left(\frac{2\delta + 4\tau(c)}{2\delta\tau(c)} \right)^{-1} \\ &= \tau(c) + \frac{\delta}{2} + \left(\frac{2\delta\tau(c) + \delta^2}{2\delta\tau(c)} \right) \left(\frac{2\delta\tau(c)}{2\delta + 4\tau(c)} \right) \\ &= \tau(c) + \frac{\delta}{2} + \left(\frac{2\delta\tau(c) + \delta^2}{2\delta + 4\tau(c)} \right) \\ &= \tau(c) + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{2\tau(c) + \delta}{\delta + 2\tau(c)} \right) \\ &= \tau(c) + \delta, \end{aligned}$$

quedando entonces demostrada la semi continuidad superior. Notar que la definición de la semi continuidad superior implica que el límite de $\tau(\gamma)$ mientras γ se acerca a c , es menor o igual que $\tau(c)$.

La función τ puede ser extendida a $C(S, p) = \overline{T(S, p)}$ de la siguiente forma:

$$\bar{\tau}(c) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \tau(\gamma) : \gamma \in B_\varepsilon(c) \cap T(S, p) \}.$$

Probaremos que está bien definida, es decir, que $\bar{\tau}$ es finita:


 Figura 8.4: Extensión de la función \mathcal{T} en un entorno de c .

Para toda curva $\gamma \in T(S, p)$, como sabemos que $t(\gamma(t)) = t$, entonces

$$\langle \dot{\gamma}(t), \text{grad}t(\gamma(t)) \rangle = d_{\gamma(t)}t(\dot{\gamma}(t)) = 1.$$

Por lo tanto, podemos descomponer $\dot{\gamma}(t)$ de la siguiente forma, con Z un campo espacial y ortogonal a $\text{grad}t$:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\langle \text{grad}t, \text{grad}t \rangle} \text{grad}t + Z.$$

Calculando la norma y considerando que es una curva temporal, obtenemos

$$|\dot{\gamma}| = \left(-\frac{1}{\langle \text{grad}t, \text{grad}t \rangle} - \langle Z, Z \rangle \right)^{1/2}.$$

Como $A = D^+(S) \cap J^-(p)$ es compacto, considero una cota uniforme K para la siguiente función en A :

$$-\frac{1}{\langle \text{grad}t, \text{grad}t \rangle} \leq K.$$

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \int_0^{t(p)} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{t(p)} \left(-\frac{1}{\langle \text{grad}t, \text{grad}t \rangle} - \langle Z, Z \rangle \right)^{1/2} ds \\ &\leq \int_0^{t(p)} K ds = K \cdot t(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una cota uniforme para esta función, y entonces $\bar{\tau}$ es finito y está bien definido.

Además, ambas definiciones coinciden en $T(S, p)$: pues si $c, c_n \in T(S, p)$ tal que $c_n \rightarrow c$, entonces por la semi continuidad superior, $\lim_n \tau(c_n) \leq \tau(c)$.

La nueva función $\bar{\tau}$ también es superiormente semicontinua como demostraremos a continuación. Dada $c \in C(S, p)$ y $\delta > 0$, por la definición de $\bar{\tau}$, podemos tomar ε' tal que $\tau(\gamma) < \bar{\tau}(c) + \delta/2$ para toda $\gamma \in B_{\varepsilon'}(c) \cap T(S, p)$. Además, si $c' \in B_{\varepsilon}(c)$, la misma herramienta implica que dada c' existe ε'' tal que

$$\bar{\tau}(c') - \delta/2 < \tau(\gamma) < \bar{\tau}(c') + \delta/2, \quad \forall \gamma \in B_{\varepsilon''}(c) \cap T(S, p).$$

Por lo tanto, tomando ε suficientemente chico tenemos que,

$$\bar{\tau}(c') < \tau(\gamma) + \delta/2 < \bar{\tau}(c) + \delta.$$

Queda así demostrada la semi continuidad superior de $\bar{\tau}$.

Como $\bar{\tau}$ es superiormente semi continua y $C(S, p)$ es compacto, sabemos que alcanza un máximo en $c \in C(S, p)$. Resta observar es que dicho máximo también es alcanzado en una curva de $T(S, p)$.

Como la imagen de c es compacta, cubrimos c con finitos entornos geodésicamente convexos U_i con $i = 1, \dots, m-1$. Luego tomamos la serie de puntos $\{p_i\}$ en c con $i = 1, \dots, m$ tal que $p_1 \in S$, $p_m = p$ y $p_i \in U_{i-1} \cap U_i$ para todo $i = 2, \dots, m-1$. Una vez más, por la definición de $\bar{\tau}$ y por propiedades de este límite, podemos encontrar una sucesión $c_k \in T(S, p)$ tal que $c_k \rightarrow c$ y $\bar{\tau}(c_k) = \tau(c_k) \rightarrow \bar{\tau}(c)$.

Llamamos $p_{i,k} = c_k \cap t^{-1}(t(p_i))$. A partir de cierto k , $p_{i-1,k}$ y $p_{i,k}$ estarán en el mismo entorno geodésicamente convexo U_{i-1} . Entonces consideramos las geodésicas entre $p_{i-1,k}$ y $p_{i,k}$ para todo i y llamamos γ_k a la geodésica temporal a trozos obtenida uniendo dichas geodésicas. Tenemos que, al ser γ_k geodésica a trozos, $\bar{\tau}(c_k) \leq \bar{\tau}(\gamma_k)$. Por otro lado tenemos que, al ser c máximo, $\bar{\tau}(\gamma_k) \leq \bar{\tau}(c)$ y por lo tanto $\bar{\tau}(\gamma_k) \rightarrow \bar{\tau}(c)$.

Sea γ la geodésica a trozos tal que $\gamma_k \rightarrow \gamma$. Al tener que $p_{i,k} \rightarrow p_i$, sabemos que γ pasa por los puntos p_i . Por la semi continuidad superior de $\bar{\tau}$, $\lim_k \bar{\tau}(\gamma_k) \leq \bar{\tau}(\gamma)$. Pero sabemos que $\lim_k \bar{\tau}(\gamma_k) = \bar{\tau}(c)$. Entonces $\bar{\tau}(c) \leq \bar{\tau}(\gamma)$. Pero como sabemos que $\bar{\tau}(c)$ es máximo, entonces $\bar{\tau}(c) = \bar{\tau}(\gamma)$. Por lo tanto, γ maximiza $\bar{\tau}$, y debe ser una curva suave, pues de lo contrario, suavizando los puntos p_i se obtendría una curva más larga. Al ser γ suave y maximizar la longitud, tenemos que debe ser una geodésica temporal.

Como estamos considerando el espacio de todas las curvas que comienzan en S y terminan en p (i.e. $\Omega(S, p)$), y γ es una geodésica temporal en $\Omega(S, p)$ con primera variación nula para cualquier (S, p) variación, por el corolario 6.20 sabemos que la misma debe ser normal a S y el teorema queda demostrado. \square

Tenemos ahora todo lo necesario para demostrar de forma directa el teorema de singularidades.

Teorema 8.12. *Sea (M, g) una variedad de Lorentz globalmente hiperbólica que cumpla la condición fuerte de energía, y que su expansión cumpla $\theta \leq \theta_0 < 0$ en una porción de tiempo S . Entonces (M, g) tiene una singularidad.*

Demostración. Llamaremos $\tau_0 = -\frac{n}{\theta_0}$. Por el absurdo, supongamos que existe una geodésica temporal, dirigida hacia el futuro y ortogonal a S , $\gamma : [0, \tau_0 + \varepsilon] \rightarrow M$ parametrizada por longitud de arco. Sea $p = \gamma(\tau_0 + \varepsilon)$.

Por el teorema 8.11 sabemos que existe una geodésica temporal c normal a S que de largo máximo entre S y p . Como γ también es una geodésica entre S y p , tenemos que

$\tau_0 + \varepsilon = \tau(\gamma) \leq \tau(c)$. Por el teorema 8.8 sabemos que c posee un punto focal, y el teorema 6.27 afirma que no puede maximizar la longitud entre S y p .

De esta forma llegamos a un absurdo, demostrando entonces que ninguna geodésica temporal dirigida hacia el futuro, ortogonal a S puede extenderse a su tiempo propio mayor que $\tau_0 = -\frac{n}{\theta_0}$ para el futuro de S . □

Observación 8.13. *Al igual que en la observación 8.9, si en el teorema anterior tuviéramos expansión positiva, la demostración sería análoga, probando que ninguna geodésica temporal dirigida hacia el pasado, ortogonal a S puede extenderse a su tiempo propio mayor que $\tau_0 = \frac{n}{\theta_0}$ para el pasado de S .*

8.4. Algunos ejemplos

Espacio de Minkowski

El espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^4 tiene la función de tiempo $\mathcal{T} : \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{T}(t, x, y, z) = t$. Por lo tanto,

$$\text{grad}\mathcal{T} = (-1, 0, 0, 0),$$

pues en este caso el diferencial de \mathcal{T} coincide con la misma función y entonces

$$g((-1, 0, 0, 0), (t, x, y, z)) = t = \mathcal{T}(t, x, y, z).$$

Verificaremos si estamos en las hipótesis del teorema.

Dicho espacio es claramente globalmente hiperbólico, pues el dominio de dependencia de las porciones de tiempo es toda la variedad. Además, como fue visto en 7.11, cumple la condición fuerte de energía ya que el tensor de Ricci es idénticamente nulo, y por lo tanto es mayor o igual que cero.

Para calcular la expansión en un punto, consideramos como referenciales geodésicos E_i a la base canónica. Dichos campos serán constantes en toda la variedad.

El campo $X = -\text{grad}\mathcal{T} = (1, 0, 0, 0) = E_1$ es constante en todos los puntos. Para calcular la expansión, recordamos que $\theta = \text{div}X$ y por lo visto en 2.52 ítem 1, tenemos que:

$$\theta = \sum_i \varepsilon_i \langle D_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Pero $D_{E_i} X = 0$ para todo i , pues los símbolos de Christoffel se anulan en todo punto y los campos tienen coordenadas constantes. Entonces concluimos que

$$\theta(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}_1^4.$$

Por lo tanto, no se puede encontrar una porción de tiempo con expansión diferente de cero, y no estamos en las hipótesis del teorema.

Espacio de Sitter/ Anti de Sitter

Como fue visto en 7.11, el espacio de Sitter no cumple la condición fuerte de energía, y por lo tanto no está en las hipótesis del teorema.

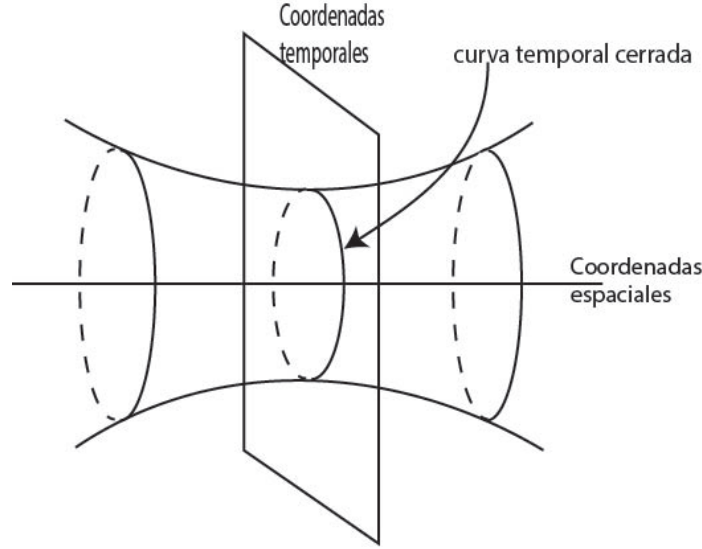


Figura 8.5: Espacio Anti de Sitter.

En la misma sección verificamos que el espacio Anti de Sitter cumple la condición fuerte de energía. Sin embargo, rápidamente podemos observar que dicho espacio no es globalmente hiperbólico, pues como se observa en la figura 8.5, contiene curvas temporales cerradas, y un espacio globalmente hiperbólico es establemente causal y por lo tanto cumple la condición de cronología.

Como vemos, ninguno de estos modelos cumple las hipótesis del teorema de singularidades.

Modelo FLRW

Asumamos las mismas hipótesis que se consideraron en 7.9, es decir, $H_0 = f'/f > 0$ y $\rho + 3P > 0$. Entonces, por 7.1 sabemos que $f'' < 0$. Por lo visto en 7.7, $Ric(U, U) = -f''/f > 0$, y por lo tanto M cumple la condición fuerte de energía.

Además, como es coherente, se puede demostrar que dicha variedad es globalmente hiperbólica si y solo si S es completa. La demostración se puede encontrar en [1], teorema 2.1. Por lo tanto, este modelo es globalmente hiperbólico.

Resta verificar la condición sobre la expansión. Si U, E_1, E_2, E_3 son los referenciales geodésicos, para calcular la expansión, por lo visto en 7.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \theta &= -\langle D_U U, U \rangle + \langle D_{E_1} U, E_1 \rangle + \langle D_{E_2} U, E_2 \rangle + \langle D_{E_3} U, E_3 \rangle \\ &= \langle (f'/f) E_1, E_1 \rangle + \langle (f'/f) E_2, E_2 \rangle + \langle (f'/f) E_3, E_3 \rangle \\ &= 3(f'/f) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso el espacio-tiempo cumple todas las hipótesis del teorema de singularidades, y el mismo afirma que, como la expansión es positiva, habrá una singularidad hacia el pasado. Dicha singularidad se refiere al “big bang”, que ya demostramos que existía en la proposición 7.9 bajo estas mismas hipótesis.

Bibliografía

- [1] Cotsakis, Spiros, *Global Hyperbolicity of Sliced Spaces*. arXiv:gr-qc/0309048, 2003.
- [2] Do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 3rd Edition, 1979.
- [3] Hawking, Stephen and Penrose, Roger, *The Nature of Space and Time*. Princeton University Press, 1996.
- [4] Hawking, Stephen, *A Brief History of Time*. Bantam; 10th anniversary edition, 1998.
- [5] Munkres, James R., *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [6] Natário, José, *Relativity and Singularities - a short introduction for mathematicians*. arXiv:math/0603190, 2011.
- [7] O'Neill, Barret, *Semi Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [8] Petersen, Peter, *Riemannian Geometry*. Springer Science +Business Media, 2006.
- [9] Resnick, Robert, *Introduction to Special Relativity*. John Wiley and Sons, 1968.
- [10] Sánchez, Miguel, *Recent progress on the notion of global hyperbolicity*. Advances in Lorentzian Geometry vol. 2, arXiv:0712.1933 [gr-qc], 2010.
- [11] Visser, Matt and Barceló, Carlos, *Energy conditions and their cosmological implications*. arXiv:gr-qc/0001099v1, 2000.
- [12] Wald, Robert M., *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.