Integrales y semisimplicidad de un álgebra de Hopf.

Ana Karina González

Orientador: Andrés Abella

julio de 2003

Trabajo Monográfico
Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.

Índice general

Introducción

Este trabajo monográfico tiene tres objetivos principales, primero estudiar la relación entre la existencia de integrales y la semisimplicidad de un álgebra de Hopf, segundo estudiar la relación entre la existencia de cointegrales y la cosemisimplicidad de un álgebra de Hopf y tercero probar la unicidad de las cointegrales y probar que en el caso en que un álgebra de Hopf tenga una cointegral no nula, entonces su antípoda es biyectiva. Dicho trabajo está basado en [DNR01].

En el capítulo primero se dan las definiciones de *coálgebras* y *comódulos* y se estudia la *cosemisimplicidad* de una coálgebra y la *reducibilidad* de un comódulo. En este capítulo no se encontrarán demostraciones.

El capítulo segundo se divide en cuatro secciones. En la primera se define una topología sobre V^*, siendo V un espacio vectorial, llamada *topología finita* y se estudia la densidad de los subespacios de V^*. En las restantes se definen las *álgebras de Hopf* y los *módulos racionales*, también se define la parte racional de un módulo. Se prueba que las categorías de módulos racionales y de comódulos son isomorfas. También se definen los *módulos de Hopf* y se prueba el *teorema fundamental de módulos de Hopf*.

El capítulo tercero contiene las herramientas utilizadas para probar los teoremas 5.3.2 y 6.0.8 que son dos de los objetivos de este trabajo. Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera se definen los comódulos *libres* y los comódulos *inyectivos* y se dan algunas de sus propiedades. En la segunda se define la *envolvente inyectiva* de un comódulo, se prueba que todo comódulo tiene una envolvente inyectiva y que es única a menos de isomorfismos. En la tercera sección se dan algunas propiedades de las envolventes inyectivas y en la cuarta se estudia en que condiciones se puede afirmar que la parte racional de C^*, siendo C una coálgebra, es densa en C^*.

En el capítulo cuarto se definen las *integrales* de un álgebra de Hopf y se prueba que un álgebra de Hopf H es semisimple si y solo si dicha álgebra tiene una integral t tal que $\varepsilon(t) \neq 0$.

En el capítulo quinto se definen las *cointegrales* de una biálgebra y se prueba que es equivalente que un álgebra de Hopf sea cosemisimple a que tenga una cointegral Υ tal que $\Upsilon(1_H) \neq 0$.

En el sexto capítulo se prueba la unicidad de las cointegrales y se prueba que si un álgebra de Hopf tiene una cointegral no nula, entonces su antípoda es biyectiva.

Capítulo 1

Coálgebras y comódulos

En la primer sección se definen las *coálgebras* y los *comódulos* y se enuncian algunas de sus propiedades. También se introducen notaciones que serán utilizadas en los capítulos siguientes. En la segunda sección se dan los conceptos básicos de *cosemisimplicidad* de una coálgebra y *reducibilidad* de un comódulo. También se dan condiciones necesarias y suficientes para que una coálgebra sea cosemisimple y un comódulo sea completamente reducible. En este capítulo no se presentan las demostraciones de los resultados mencionados. Una presentación más detallada de alguno de estos temas se puede encontrar en [DNR01] o [Swee69].

1.1. Coálgebras

Definición 1.1.1. Una *k-coálgebra* es una terna (C, Δ, ε), donde C es un k-espacio vectorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to k$ son morfismos de k-espacios vectoriales tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[dr, "\approx"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ k \otimes C & & C \otimes k \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Los mapas Δ y ε se llaman *comultiplicación y counidad* respectivamente. La conmutatividad del primer diagrama se abrevia diciendo que "Δ es coasociativa".

Notación de Sweedler. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Para todo elemento $x \in C$ notamos

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sum x_1 \otimes x_2, \\ \Delta^{(2)}(x) &= (\Delta \otimes id)\Delta(x) = (id \otimes \Delta)\Delta(x) = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes x_3, \\ \Delta^{(n)}(x) &= (\Delta \otimes id)\Delta^{(n-1)}(x) = (id \otimes \Delta)\Delta^{(n-1)}(x) = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}. \end{aligned}$$

Definición 1.1.2. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Un k-subespacio D de C es una *subcoálgebra* si $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Proposición 1.1.1. *Consideremos* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *y* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *dos coálebras y sean* $\Delta_{C\otimes D} \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$ *y* $\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \to k$ *definidos por:*

$$\Delta_{C\otimes D}(x \otimes y) = \sum (x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2),$$
$$\varepsilon_{C\otimes D}(x \otimes y) = \varepsilon_C(x)\varepsilon_D(y).$$

Entonces $(C \otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \varepsilon_{C\otimes D})$ *es una coálgebra.*

$\blacklozenge$

Proposición 1.1.2. *Sea* (C, Δ, ε) *una coálgebra. Entonces* $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ *es una coálgebra donde* $\Delta^{cop} : C \to C \otimes C$, $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$, *con* $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ *definido por* $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, *para todo* $x, y \in C$. *Esta coágebra se llama* ***coálgebra opuesta*** *de* C *y se denota como* C^{cop}.

$\blacklozenge$

Observación 1.1.1. *El concepto de coálgebra opuesta es dual al de álgebra opuesta. Si tenemos* (A, m, u) *un álgebra, entonces la multiplicación* $m \circ \tau : A \otimes A \to A$ *y la unidad* u *definen una estructura de álgebra sobre* A, *llamada* ***álgebra opuesta*** *de* A, *la cual se denota como* A^{op}.

Proposición 1.1.3. *Sea* (C, Δ, ε) *una coálgebra. Entonces* (C^*, m, ε) *es un álgebra (**álgebra dual**), donde* $m : C^* \otimes C^* \to C^*$ *está definida por* $m(\alpha \otimes \beta) = \alpha * \beta$, $(\alpha * \beta)(x) = \sum \alpha(x_1)\beta(x_2)$, *para todo* $x \in C$ *y* ε *es la unidad de* C^*.

$\blacklozenge$

Proposición 1.1.4. *Sea* C *una coálgebra. Entonces las álgebras* $(C^{cop})^*$ *y* $(C^*)^{op}$ *son iguales.*

$\blacklozenge$

Definición 1.1.3. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra e I un subespacio de C.

1. I es un *coideal a izquierda de* C si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$.

2. I es un *coideal a derecha de* C si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.

3. I es un *coideal de* C si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$ y $\varepsilon(I) = 0$.

Definición 1.1.4. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos coálgebras. Un mapa k-lineal $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Si lo escribimos con la notación de Sweedler, para todo $x \in H$ tenemos que

$$\sum f(x)_1 \otimes f(x)_2 = \sum f(x_1) \otimes f(x_2)$$
$$\varepsilon_C(x) = \varepsilon_D(f(x)).$$

Definición 1.1.5. Sea C una coálgebra.1) Un *C-comódulo a derecha* es un par (M,ρ), donde M es un k-espacio vectorial y $\rho : M \to M \otimes C$ es un morfismo de k-espacios vectoriales tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\approx"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

2) Un *C-comódulo a izquierda* es un par (M,ρ), donde M es un k-espacio vectorial y $\rho : M \to C \otimes M$ es un morfismo de k-espacios vectoriales tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id\otimes\rho"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\approx"'] & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"] \\ & k \otimes M \end{tikzcd}$$

A un mapa ρ en las condiciones anteriores se lo llama una *coacción* de C en M.

Notación de Sweedler. Sea (M,ρ) un C-comódulo a derecha. Para todo $m \in M$ tenemos que

$$\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 \quad \text{con } m_0 \in M \text{ y } m_1 \in C.$$

Si (M,ρ) es un C-comódulo a izquierda, tenemos que para todo $m \in M$

$$\rho(m) = \sum m_{-1} \otimes m_0 \quad \text{con } m_0 \in M \text{ y } m_{-1} \in C.$$

Definición 1.1.6. 1) Sea (M,ρ) un C-comódulo a derecha y N un subespacio de M. Decimos que N es un *C-subcomódulo a derecha de M* si $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.
2) Si (M,ρ) es un C-comódulo a izquierda. Decimos que N es un *C-subcomódulo a izquierda de M* si $\rho(N) \subseteq C \otimes N$.
Notación $N < M$.

Definición 1.1.7. 1) Dados (M,ρ_M) y (N,ρ_N) dos C-comódulos a derecha, un mapa k-lineal $f : M \to N$ es un *morfismo de C-comódulos a derecha* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f\otimes id"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

2) Dados (M,ρ_M) y (N,ρ_N) dos C-comódulos a izquierda, un mapa k-lineal $g : M \to N$ es un *morfismo de C-comódulos a izquierda* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id\otimes g"'] & C \otimes N \end{tikzcd}$$

Definición 1.1.8. Finalmente podemos definir $\mathcal{M}^C$ la *categoría de los comódulos a derecha* y ${}^C\mathcal{M}$ la *categoría de los comódulos a izquierda*, donde los objetos de $\mathcal{M}^C$ son los comódulos a derecha y las flechas son los morfismos de comódulos a derecha y los objetos de ${}^C\mathcal{M}$ son los comódulos a izquierda y las flechas son los morfismos de comódulos a izquierda.

Definición 1.1.9. Dados M y N en $\mathcal{M}^C$, definimos

$$Hom^C(M,N) = \{f : M \to N \text{ tal que } f \text{ es un morfismo de } C\text{-comódulos a derecha}\}.$$

Teorema 1.1.5. *Sea C una coálgebra. El functor $\mathcal{F} : {}^C\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{C^{cop}}$ definido por $\mathcal{F}(M,\rho) = (M,\rho')$ y $\mathcal{F}(f) = f$, donde $\rho'(m) = \sum m_0 \otimes m_{-1}$ si $\rho(m) = \sum m_{-1} \otimes m_0$ para todo $m \in M$ es un isomorfismo de categorías. Es claro que si $f : M \to N$ es un morfismo de C-comódulos a izquierda, entonces f es un morfismo de C^{cop}-comódulos a derecha.*

1.2. Cosemisimplicidad

Definición 1.2.1. Una coálgebra C es *simple* si $C \neq 0$ y no tiene subcoálgebras propias. Una coálgebra C es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

Proposición 1.2.1. *1) Si C es una coálgebra, entonces toda subcoálgebra de C generada por un conjunto finito es de dimensión finita.*
2) Toda coálgebra simple es de dimensión finita.
3) Toda coálgebra es suma de subcoálgebras de dimensión finita.
4) Toda coálgebra no nula contiene una subcoálgebra simple.
5) Sea C una coálgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) C es cosemisimple.

b) C es suma de subcoálgebras simples.

c) Si D es una subcoálgebra de C, entonces existe una subcoálgebra E de C tal que $C = D \oplus E$.

d) Toda subcoálgebra de C es cosemisimple.

e) Toda subcoálgebra de C de dimensión finita es cosemisimple.

◆

Observar que cualquier coálgebra C es un C-comódulo a izquierda y derecha vía la comultiplicación Δ, esta es la *correpresentación regular*. Los subcomódulos a derecha (izquierda) de C son los coideales a derecha (izquierda) de C.

Definición 1.2.2. Un C-comódulo M es *simple* si $M \neq 0$ y no tiene subcomódulos propios y es *completamente reducible* si es suma directa de subcomódulos simples.

Proposición 1.2.2. *1) Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces todo $m \in M$ está contenido en un subcomódulo de dimensión finita.*
2) Sea $0 \neq M \in \mathcal{M}^C$. Entonces M contiene un subcomódulo simple.
3) Si M es un C-comódulo, entonces todo subcomódulo de M generado por un conjunto finito es de dimensión finita.
4) Todo comódulo simple es de dimensión finita.
5) Todo comódulo es suma de subcomódulos de dimensión finita.
6) Sea M un comódulo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es completamente reducible.

b) M es suma de subcomódulos simples.

c) Si N es un subcomódulo de M, entonces existe un subcomódulo U de M tal que $M = N \oplus U$.

d) Todo subcomódulo de M es completamente reducible.

e) Todo subcomódulo de M de dimensión finita es completamente reducible.

7) Si M es un comódulo completamente reducible, N es un subcomódulo de M y $\phi : M \to U$ es un morfismo de comódulos. Entonces M/N e $Im(\phi)$ son comódulos completamente reducibles.

◆

Teorema 1.2.3. *Para una coálgebra C las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) C es cosemisimple.

2) C es completamente reducible vía la correpresentación regular.

3) Todo C-comódulo es completamente reducible.

◆

Capítulo 2

Módulos racionales y módulos de Hopf

En la primera sección se define una topología sobre V^*, siendo V un espacio vectorial, la cual recibe el nombre de *topología finita* y se da una condición necesaria y sufiniente para que un subespacio de V^* sea denso en él. En esta sección no se realizan demostraciones. Este tema se puede encontrar desarrollado con mayor profundidad en [DNR01]. En la segunda sección se dará la definición de *álgebras de Hopf* y una serie de acciones que se utilizarán en los capítulos siguientes. Este tema puede encontrarse desarrollado con mayor profundidad en [Per01] o [Swee69]. En las siguientes secciones se definen los *módulos racionales* y los *módulos de Hopf* y se dan algunas de sus propiedades y se prueba el *teorema fundamental de módulos deHopf*. Una referencia para este capítulo es [DNR01]. En todo el capítulo C es una coálgebra, C^* es su álgebra dual y H es un álgebra de Hopf.

2.1. Topología finita

Sean X, Y conjuntos no vacíos y consideremos el conjunto

$$Y^X = \{f : X \to Y : \ f \text{ función}\} = \prod_{x \in X} Y_x, \ Y_x = Y \ \text{ para todo } x \in X.$$

Le damos a Y estructura de espacio topológico mediante la topología discreta y a Y^X mediante la topología producto.

Una base de la topología de Y^X es

$$\beta = \{\{f : X \to Y : \ f(x_i) = y_i, \ \forall\, i = 1, \cdots, n\} : \ x_i \in X, \ y_i \in Y, \ i = 1, \cdots, n, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dada $f \in Y^X$ fija, una base de entornos de f es

$$\beta_f = \left\{\left\{g \in Y^X : g(x_i) = f(x_i), \ \forall\, i = 1, \cdots, n\right\} : x_i \in X, \ i = 1, \cdots, n, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sean X, Y k-espacios vectoriales. Como $\mathrm{Hom}_k(X, Y) \subset Y^X$, le damos a $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ estructura de espacio topológico mediante la topología relativa, a esta topología se la llama *topología finita*.

Para cada $f \in \mathrm{Hom}_k(X, Y)$, una base de entornos de f es:

$$\{\vartheta(f, x_1, \cdots, x_n) : \ x_1, \cdots, x_n \ \in X, \ n \in \mathbb{N}\}, \text{ donde}$$

$$\vartheta(f, x_1, \cdots, x_n) = \{g \in Hom_k(X,Y) : \ g(x_i) = f(x_i) \ \forall \ i = 1, \cdots, n\}.$$

Aplicaremos esta construcción en el caso particular $\mathrm{Hom}(V,k) = V^*$, donde V es un k- espacio vectorial.

Definición 2.1.1. Si S es un subconjunto de V^*

$$S^{\perp} = \{x \in V : \alpha(x) = 0, \ \forall \ \alpha \in S\} = \bigcap_{\alpha \in S} \ker(\alpha).$$

Si S es un subconjunto de V

$$S^{\perp} = \{\alpha \in V^* : \alpha(S) = 0\} = \{\alpha \in V^* : S \subset \ker(\alpha)\}.$$

Observemos que X es denso en V^* si y solo si para todo $\alpha \in V^*$, $x_1, \cdots, x_n \in V$, existe $\gamma \in X$ tal que $\gamma(x_i) = \alpha(x_i)$ para todo $i = 1, \cdots, n$ es decir $\vartheta(\alpha, x_1, \cdots, x_n) \cap X \neq \phi$.

Proposición 2.1.1. *Sea S un subconjunto de V^* o de V. Entonces $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$, donde $\langle S \rangle$ es el subespacio generado por S, en particular $S^{\perp}$ es un subespacio de V o de V^* respectivamente. Además $S^{\perp} = ((S^{\perp})^{\perp})^{\perp}$ para todo subconjunto S de V^* o de V.*

◆

Teorema 2.1.2. *i) Si S es un subespacio de V. Entonces $(S^{\perp})^{\perp} = S$.*
ii) Si S es un subespacio de V^*. Entonces $(S^{\perp})^{\perp} = \overline{S}$, donde $\overline{S}$ es la clausura de S con la topología finita.

◆

Corolario 2.1.3. *Si $S \subseteq V^*$ es un subespacio. Entonces S es denso en V^* si y solo si $S^{\perp} = \{0\}$.*

◆

Proposición 2.1.4. *Existe una correspondencia biyectiva entre los subespacios de dimensión finita de V^* y los subespacios de V de codimensión finita, dada por $X \mapsto X^{\perp}$. Además para todo subespacio X de dimensión finita de V^* tenemos que $dim_k(X) = codim_k(X^{\perp})$.*

◆

2.2. Álgebras de Hopf

Definición 2.2.1. Una *biálgebra* es un k-espacio vectorial D, con estructura de álgebra (D, m, u) y con estructura de coálgebra (D, Δ, ε) tal que m y u son morfismos de coálgebras o equivalentemente que Δ y ε son morfismos de álgebras.

Sea (C, Δ, ε) una coálgebra y (A, m, u) un álgebra. Entonces $(\mathrm{Hom}(C, A), *, u \circ \varepsilon)$ es un álgebra donde $(f * g)(x) = \sum f(x_1) \, g(x_2)$, para todo $x \in C$ y $u \circ \varepsilon$ es la unidad. La multiplicación $*$ se llama *producto de convolución*.

Definición 2.2.2. Un *álgebra de Hopf* es una biálgebra H en la cual el mapa identidad $id : H \to H$ es invertible respecto al producto de convolución en $Hom_k(H, H)$. A la inversa de la identidad la denotamos como $S : H \to H$ y la llamamos la *antípoda* de H.

Definición 2.2.3. Sea H un álgebra de Hopf e I un k-subespacio de H. Decimos que I es un *ideal de Hopf* si I es un ideal y un coideal de H y $S(I) \subseteq I$.

A continuación veremos una serie de acciones que utilizaremos en los siguientes capítulos.

Acciones de H en H^*

$$\begin{array}{lcll} H \otimes H^* & \xrightarrow{\rightharpoonup} & H^* & (x \rightharpoonup \alpha)(y) = \alpha(y\, x). \\ H^* \otimes H & \xrightarrow{\leftharpoonup} & H^* & (\alpha \leftharpoonup x)(y) = \alpha(x\, y). \\ H \otimes H^* & \xrightarrow{\rightharpoondown} & H^* & (x \rightharpoondown \alpha)(y) = \alpha(S(x)\, y). \\ H^* \otimes H & \xrightarrow{\leftharpoondown} & H^* & (\alpha \leftharpoondown x)(y) = \alpha(y\, S(x)). \end{array}$$

Observar que $x \rightharpoondown \alpha = \alpha \leftharpoonup S(x)$ y $\alpha \leftharpoondown x = S(x) \rightharpoonup \alpha$ para todo $x \in H$ y $\alpha \in H^*$.

Acciones de H^* en H

$$\begin{array}{lcll} H^* \otimes H & \xrightarrow{\rightharpoonup} & H & \alpha \rightharpoonup x = \sum x_1 \alpha(x_2). \\ H \otimes H^* & \xrightarrow{\leftharpoonup} & H & x \leftharpoonup \alpha = \sum \alpha(x_1) x_2. \\ H^* \otimes H & \xrightarrow{\rightharpoondown} & H & \alpha \rightharpoondown x = \sum \alpha(S(x_1)) x_2. \\ H \otimes H^* & \xrightarrow{\leftharpoondown} & H & \alpha \leftharpoondown x = \sum x_1 \alpha(S(x_2)). \end{array}$$

Observar que $\alpha \rightharpoondown x = x \leftharpoonup S^*(\alpha)$ y $x \leftharpoondown \alpha = S^*(\alpha) \rightharpoonup x$ para todo $\alpha \in H^*$ y $x \in H$. Donde $S^* : H^* \to H^*$, $S^*(\alpha)(x) = \alpha(S(x))$ para todo $x \in H$.

2.3. Módulos racionales

Proposición 2.3.1. *Sea $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$. Entonces $(M, \cdot_\rho) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, donde $\alpha \cdot_\rho m = \sum \alpha(m_1) m_0$ para todo $\alpha \in C^*$ y $m \in M$, si $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$.*

Demostración. Primero veamos que $(\alpha\beta) \cdot_\rho m = \alpha \cdot_\rho (\beta \cdot_\rho m)$ para todo $\alpha, \beta \in C^*$ y $m \in M$.

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \cdot_\rho m &= \sum (\alpha\beta)(m_1)\, m_0 = \sum \alpha((m_1)_1)\beta((m_1)_2)\, m_0 = \sum \alpha((m_0)_1)\beta(m_1)\, ((m_0)_0) \\ &= \alpha \cdot_\rho (\sum \beta(m_1)\, m_0) = \alpha \cdot_\rho (\beta \cdot_\rho m). \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\varepsilon \cdot_\rho m = m$ para todo $m \in M$: $\varepsilon \cdot_\rho m = \sum \varepsilon(m_1)\, m_0 = m$.

◆

Definición 2.3.1. Sea $M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, decimos que M es *racional* si para todo $m \in M$, existen dos familias finitas de elementos $\{m_1, \cdots, m_n\} \subset M$ y $\{c_1, \cdots, c_n\} \subset C$, tales que $\alpha \cdot m = \sum_{i=1}^n \alpha(c_i)\, m_i$ para todo $\alpha \in C^*$.

Definición 2.3.2. Sea $M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, definimos

$$M_l^{rat} := \{m \in M : \exists\, n \in \mathbb{N},\ m_i \in M, c_i \in C,\ i = 1, \cdots, n \text{ tales que } \alpha \cdot m = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha(c_i)\, m_i,\ \forall \alpha \in C^*\}.$$

Lema 2.3.2. *Sea $M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Si $x, y \in M \otimes C$ verifican que $(id \otimes \alpha)(x) = (id \otimes \alpha)(y)$ para todo $\alpha \in C^*$. Entonces $x = y$.*

Demostración. Observar que basta probar que si $(id \otimes \alpha)(x) = 0$ para todo $\alpha \in C^*$ entonces $x = 0$. Porque $(id \otimes \alpha)(x) = (id \otimes \alpha)(y)$ si y solo si $(id \otimes \alpha)(x - y) = 0$.
Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de C, entonces $x = \sum m_i \otimes e_i$. Luego $(id \otimes \alpha)(x) = \sum \alpha(e_i) m_i$.
Para cada $i \in I$, consideremos $\alpha_i \in C^*$ tal que $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ para todo $j \in I$.
Entonces $0 = (id \otimes \alpha_j)(x) = \sum \alpha_j(e_i) m_i = \sum \delta_{ij} m_i = m_j$. Por lo tanto $m_j = 0$ para todo $j \in I$. Entonces $x = 0$.

◆

Proposición 2.3.3. *M_l^{rat} es el mayor C^*-submódulo de M tal que existe $\rho : M_l^{rat} \to M_l^{rat} \otimes C$ coacción tal que $\alpha \cdot m = \sum \alpha(m_1) m_0$ para todo $\alpha \in C^*$ y $m \in M_l^{rat}$.*

Demostración. Es claro que si N es un C^*-submódulo de M tal que existe una coacción $\rho : N \to N \otimes C$, $\rho(n) = \sum n_0 \otimes n_1$, que verifica que $\alpha \cdot n = \sum \alpha(n_1) n_0$ para todo $\alpha \in C^*$ y $n \in N$, entonces $N \subset M_l^{rat}$. Luego lo que resta por probar es que M_l^{rat} verifica esta condición.
Definimos $\rho : M_l^{rat} \to M_l^{rat} \otimes C$ por $\rho(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i$, siendo $\{m_i\}_{i=1}^n$ y $\{c_i\}_{i=1}^n$ que verifican $\alpha \cdot m = \sum_{i=1}^n m_i \alpha(c_i)$ para todo $\alpha \in C^*$.

Supongamos que tenemos otro par de familias finitas $\{m'_j\}_{j=1}^l$ y $\{c'_j\}_{j=1}^l$ tales que $\alpha \cdot m = \sum_{j=1}^l \alpha(c'_j) m'_j$. Veamos que $\sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i = \sum_{j=1}^l m'_j \otimes c'_j$. Como $\sum_{i=1}^n \alpha(c_i) m_i = \sum_{j=1}^l \alpha(c'_j) m'_j$, es $(id \otimes \alpha)(\sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i) = (id \otimes \alpha)(\sum_{j=1}^l m'_j \otimes c'_j)$. Entonces aplicando el Lema 2.3.2 tenemos que $\sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i = \sum_{j=1}^l m'_j \otimes c'_j$. Luego ρ está bién definido.

Veamos ahora que $\rho(M_l^{rat}) \subseteq M_l^{rat} \otimes C$. Sea $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 = \sum_{i=1}^n m_i \otimes c_i$ donde podemos suponer que los c_i son l.i..
Como $M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ se cumple que $\sum_j \beta(c_j)(\alpha \cdot m_j) = \alpha \cdot (\beta \cdot m) = (\alpha\beta) \cdot m = \sum_i \alpha\beta(c_i) m_i = \sum_{i,l} \alpha(x_l^i) \beta(y_l^i)\, m_i$ para todo $\alpha, \beta \in C^*$ siendo $\Delta(c_i) = \sum_l x_l^i \otimes y_l^i$.
Tomamos $\beta_i \in C^*$ tal que $\beta_i(c_j) = \delta_{ij}$. Entonces $\alpha \cdot m_k = \sum_j \beta_k(c_j)\ (\alpha \cdot m_j) = \sum_{i,l} \alpha(x_l^i)\ \beta_k(y_l^i)\ m_i$ para todo $\alpha \in C^*$. Por lo tanto $m_i \in M_l^{rat}$ para todo $i = 1, \cdots, n$ y $\rho(m_k) = \sum_i m_i \otimes (\sum_l \beta_k(y_l^i)\ x_l^i)$, donde $\sum_l \beta_k(y_l^i)\ x_l^i \in C$.

Como $(\alpha\beta) \cdot m = \alpha \cdot (\beta \cdot m)$, tenemos que $\sum \alpha((m_1)_1)\ \beta((m_1)_2)\ m_0 = \sum \beta(m_1)\ \alpha((m_0)_1)\ (m_0)_0$ para todo $\alpha, \beta \in C^*$. De forma similar a como se probó el Lema 2.3.2 se puede probar que si $\sum \alpha((m_1)_1)\ \beta((m_1)_2)\ m_0 = \sum \beta(m_1)\ \alpha((m_0)_1)\ (m_0)_0$ para todo $\alpha, \beta \in C^*$, entonces $\sum (m_0)_0 \otimes (m_0)_1 \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes (m_1)_1 \otimes (m_1)_2$ luego es $(\rho \otimes id) \circ \rho = (id \otimes \Delta) \circ \rho$.
De la relación $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ si y solo si $\alpha \cdot m = \sum \alpha(m_1) m_0$ para todo $\alpha \in C^*$, obtenemos en particular que $\varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_1) m_0$. Pero ε es la unidad de C^*, entonces $\varepsilon \cdot m = m$. Luego $m = \sum \varepsilon(m_1) m_0$. Entonces ρ es una coacción.

Para ver que M_l^{rat} es un C^*-submódulo de M, hay que ver que $\alpha \cdot m \in M_l^{rat}$ para todo $m \in M_l^{rat}$. Sea $m \in M_l^{rat}$, entonces $\alpha \cdot m = \sum_{i=1}^n \alpha(c_i) m_i$ donde los $m_i \in M_l^{rat}$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Luego $\alpha \cdot m \in M_l^{rat}$.

◆

Corolario 2.3.4. *Si $M \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Entonces $M_l^{rat} \in \mathcal{M}^C$.*

◆

Definición 2.3.3. Sea $\mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ la subcategoría plena de ${}_{C^*}\mathcal{M}$ cuyos objetos son los C^*-módulos a izquierda racionales.

Definición 2.3.4. Sea C una coálgebra, definimos el functor $\mathcal{R}at : {}_{C^*}\mathcal{M} \to \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ por $\mathcal{R}at(M, \cdot) = (M_l^{rat}, \cdot)$ y $\mathcal{R}at(f) = f|_{M_l^{rat}} : M_l^{rat} \to N_l^{rat}$, siendo $f : M \to N$ morfismo en ${}_{C^*}\mathcal{M}$.

Veamos que esta definición tiene sentido.
Sea $f : M \to N$ morfismo de C^*-módulos a izquierda, entonces $\mathcal{R}at(f) : M_l^{rat} \to N_l^{rat}$. Sea $m \in M_l^{rat}$, entonces existen $m_i \in M$ y $c_i \in C$, $i = 1, \cdots, n$ tales que $\alpha \cdot m = \sum_{i=1}^n \alpha(c_i)m_i$ para todo $\alpha \in C^*$. Como f es un morfismo de C^*- módulos, tenemos que $\alpha \cdot f(m) = f(\alpha \cdot m) = \sum_{i=1}^n \alpha(c_i)f(m_i)$ para todo $\alpha \in C^*$. Entonces $f(m) \in N_l^{rat}$.

Es claro que $\mathcal{R}at$ es un functor porque $\mathcal{R}at(id) = id$ y $\mathcal{R}at(g \circ f) = \mathcal{R}at(g) \circ \mathcal{R}at(f)$.

Lema 2.3.5. *Sea C una coálgebra y consideremos los siguientes functores $\mathcal{R}at : {}_{C^*}\mathcal{M} \to \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ e $\mathcal{I}nc : \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M}) \to {}_{C^*}\mathcal{M}$ el functor inclusión. Entonces $\mathcal{I}nc \dashv \mathcal{R}at$, es decir el functor inclusión es adjunto a izquierda del functor $\mathcal{R}at$.*

Demostración. Sean $M \in \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ y $N \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Definimos $\eta_{MN} : Hom_{C^*}(\mathcal{I}nc(M), N) \to Hom_{C^*}(M, N_l^{rat})$ por $\eta_{MN}(f) = \mathcal{R}at(f)$.
Dado que $M \in \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ es $M = \widetilde{M}_l^{rat}$, luego $M_l^{rat} = (\widetilde{M}_l^{rat})_l^{rat} = \widetilde{M}_l^{rat} = M$. Entonces $M = M_l^{rat}$. Por lo tanto $\mathcal{R}at(f) : M \to N_l^{rat}$.
Sea $f : M \to N_l^{rat}$ con $M \in \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$. Definimos $\hat{f} : M \xrightarrow{f} N_l^{rat} \hookrightarrow N$. Entonces $\mathcal{R}at(\hat{f}) = f$. Luego tenemos que η_{MN} es una biyección.
Consideremos $M, M' \in \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$, $N, N' \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, $f : M' \to M$ y $g : N \to N'$ morfismos. Entonces es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{C^*}(\mathcal{I}nc(M), N) \arrow[r, "\eta_{MN}"] \arrow[d, "g\circ - \circ \mathcal{I}nc(f)"'] & Hom_{C^*}(M, N_l^{rat}) \arrow[d, "\mathcal{R}at(g)\circ - \circ f"] \\
Hom_{C^*}(\mathcal{I}nc(M'), N') \arrow[r, "\eta_{M'N'}"'] & Hom_{C^*}(M', N_l'^{rat}).
\end{tikzcd}$$

Esto termina de probar que $\mathcal{I}nc \dashv \mathcal{R}at$.

◆

Teorema 2.3.6. *Las categorías $\mathcal{M}^C$ y $\mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ son isomorfas.*

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{M}^C \to \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ definido por $\widetilde{\mathcal{F}}(M, \rho) = (M, \cdot_\rho)$ donde $\cdot_\rho$ es la acción definida en la Proposición 2.3.1 y $\widetilde{\mathcal{F}}(f) = f$ para $f : (M, \rho) \to (M', \rho')$ un morfismo en $\mathcal{M}^C$. Por la Proposición 2.3.1 sabemos que $(M, \cdot_\rho) \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ y es claro que $(M, \cdot_\rho)$ es racional.
Ahora veamos que f es un morfismo de C^*-módulos: $f(\alpha \cdot_\rho m) = f(\sum \alpha(m_1)m_0) = \sum \alpha(m_1)f(m_0) = \sum \alpha(f(m)_1)f(m)_0$ porque f es un morfismo de C-comódulos. Entonces $f(\alpha \cdot_\rho m) = \alpha \cdot_{\rho'} f(m)$.
Es claro que $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un functor de $\mathcal{M}^C$ en $\mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$.

Sea $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C$ definido por $\widetilde{\mathcal{G}}(M, \cdot) = (M, \rho)$ donde ρ es la coacción definida en la Proposición 2.3.3 y $\widetilde{\mathcal{G}}(f) = f$. Por el Corolario 2.3.4 tenemos que $\widetilde{\mathcal{G}}(M, \cdot) \in \mathcal{M}^C$. Veamos que f es un morfismo de C-comódulos. Sea $m \in M$, por ser f morfismo de C^*-módulos tenemos que $\rho(f(m)) = \sum f(m_i) \otimes c_i$. Entonces $\rho(f(m)) = (f \otimes id)(\sum m_i \otimes c_i) = (f \otimes id)(\rho(m))$. Por lo tanto $\rho \circ f = (f \otimes id) \circ \rho$. Luego es fácil ver que $\widetilde{\mathcal{G}}$ es un functor.

Por último es claro que $\widetilde{\mathcal{G}} \circ \widetilde{\mathcal{F}} = id$ y $\widetilde{\mathcal{F}} \circ \widetilde{\mathcal{G}} = id$, luego $\mathcal{M}^C$ y $\mathcal{R}at({}_{C^*}\mathcal{M})$ son isomorfas.

◆

Corolario 2.3.7. *Sean los functores $\mathcal{F} : \mathcal{M}^C \to {}_{C^*}\mathcal{M}$ y $\mathcal{G} : {}_{C^*}\mathcal{M} \to \mathcal{M}^C$, definidos por $\mathcal{F} = \mathcal{I}nc \circ \widetilde{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{R}at$. Entonces $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.*

Demostración. Sean $M \in \mathcal{M}^C$ y $N \in {}_{C^*}\mathcal{M}$. Definimos $\varphi_{MN} : Hom_{C^*}(\mathcal{F}(M), N) \to Hom^C(M, \mathcal{G}(N))$ por $\varphi_{MN} = \widetilde{\mathcal{G}} \circ \eta_{\widetilde{\mathcal{F}}(M)N}$. Es claro que φ_{MN} es una biyección, porque $\eta_{\widetilde{\mathcal{F}}(M)N}$ y $\widetilde{\mathcal{G}}$ son biyecciones.
Aplicando que $\mathcal{I}nc \dashv \mathcal{R}at$ y que $\widetilde{\mathcal{G}}$ es un functor tenemos que para todo $M, M' \in \mathcal{M}^C$, $N, N' \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, $f : M' \to M$ morfismo de C-comódulos y $g : N \to N'$ morfismo de C^*-módulos el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{C^*}(\mathcal{F}(M), N) \arrow[r, "\varphi_{MN}"] \arrow[d, "g\circ - \circ \mathcal{F}(f)"'] & Hom^C(M, \mathcal{G}(N)) \arrow[d, "\mathcal{G}(g)\circ - \circ f"] \\
Hom_{C^*}(\mathcal{F}(M'), N') \arrow[r, "\varphi_{M'N'}"'] & Hom^C(M', \mathcal{G}(N')).
\end{tikzcd}$$

Esto termina de probar que $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

◆

Proposición 2.3.8. *Si $M \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Entonces $M^* \in {}^C\mathcal{M}_{fin}$.*

Demostración. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base de M y $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la base dual de M^*.
Sea $\rho : M \to M \otimes C$ la coacción, entonces $\rho(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j \otimes t_{ji}$. Luego definimos $\mu : M^* \to C \otimes M^*$ por $\mu(e_i^*) = \sum_j t_{ij} \otimes e_j^*$.
Por ser ρ una coacción tenemos que $\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj}$ y $\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes id) \circ \mu)(e_i^*) &= (\varepsilon \otimes id)(\sum_{j_1}^n t_{ij} \otimes e_j^*) = \sum_{j=1}^n \varepsilon(t_{ij}) \otimes e_j^* \\
&= \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \otimes e_j^* = 1 \otimes e_i^* \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes id) \circ \mu)(e_i^*) &= (\Delta \otimes id)(\sum_{j=1}^n t_{ij} \otimes e_j^*) = \sum_{j=1}^n \Delta(t_{ij}) \otimes e_j^* = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj}) \otimes e_j^* \\
&= \sum_{j,k} t_{ik} \otimes t_{kj} \otimes e_j^* = \sum_{k,j} t_{ij} \otimes t_{jk} \otimes e_k^* = \sum_{j=1}^n t_{ij} \otimes (\sum_{k=1}^n t_{jk} \otimes e_k^*) \\
&= (id \otimes \mu)(\sum_{j=1}^n t_{ij} \otimes e_j^*) = ((id \otimes \mu) \circ \mu)(e_i^*) \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Entonces μ es una coacción. Luego $M^* \in {}^C\mathcal{M}_{fin}$.

◆

Observación 2.3.1. *Sea $M \in {}^C\mathcal{M}$, observemos que $M^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ vía la acción $(\alpha \cdot f)(m) = \sum \alpha(c_i)f(m_i)$ para todo $\alpha \in C^*$, $f \in M^*$ y $m \in M$, donde la coacción de M es $\rho : M \to C \otimes M$, $\rho(m) = \sum c_i \otimes m_i$.*
Es fácil probar que la correspondencia $M \mapsto M^*$ define un functor contravariante de ${}^C\mathcal{M}$ en ${}_{C^*}\mathcal{M}$.
En el caso de ${}^C\mathcal{M}_{fin}$, este functor es la composición ${}^C\mathcal{M}_{fin} \to \mathcal{M}^C_{fin} \to Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$, siendo el primero definido en la Proposición 2.3.8 y el segundo en el Teorema 2.3.6.

Proposición 2.3.9. *Sea C una coálgebra y $M \in {}^C\mathcal{M}$. Entonces los siguientes conjuntos coinciden:*
i)M_l^{*rat}.
ii) El conjunto de los elementos $\alpha \in M^*$ tal que $\ker(\alpha)$ *contiene un C-subcomódulo de M de codimensión finita.*

Demostración. Como $M \in {}^C\mathcal{M}$, por la observación anterior es $M^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$.

$$M_l^{*rat} = \left\{ \beta \in M^* : \exists\, n \in \mathbb{N}, \beta_i \in M^*, x_i \in C, i = 1, \cdots, n \text{ tal que } \alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\, \beta_i \quad \forall \alpha \in C^* \right\}.$$

$$\Gamma = \{\beta \in M^* : \ker(\beta) \text{contiene un C-subcomódulo de M de codimensión finita}\}.$$

Sea $\gamma \in M_l^{*rat}$ y consideremos el C^*-submódulo generado por γ, $X =< \gamma >= \{\alpha \cdot \gamma : \alpha \in C^*\} = \{\sum_{i=1}^n \alpha(x_i)\gamma_i : \alpha \in C^*\}$, entonces $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ genera a X, luego X es un C^*-submódulo de M^* de dimensión finita.

Consideremos ahora $X^\perp \subset M$, $X^\perp = \{m \in M : \alpha(m) = 0,\ \forall\, \alpha \in X\}$.
Veamos que $X^\perp$ es un subcomódulo de M, es decir $\rho(X^\perp) \subseteq C \otimes X^\perp$. Sea $\{c_i\}_{i\in I}$ una base de C. Para cada $j \in I$ definimos $\beta_j \in C^*$ tal que $\beta_j(c_i) = \delta_{ij}$.
Como X es un C^*-submódulo de M^* tenemos $\beta_j \cdot \alpha \in X$ para todo $\alpha \in X$ y $j \in I$. Si $m \in X^\perp$ y $\rho(m) = \sum_{i\in I} c_i \otimes m_i$, tenemos $0 = \beta_j \cdot \alpha(m) = \sum_{i\in I} \beta_j(c_i)\alpha(m_i) = \sum_{i\in I} \delta_{ij}\alpha(m_i) = \alpha(m_j)$, por lo tanto $\alpha(m_j) = 0$ para todo $\alpha \in X$. Entonces $m_i \in X$ para todo $i \in I$ y $\rho(m) \in C \otimes X^\perp$ para todo $m \in X^\perp$.

Como $\gamma \in X$ tenemos que $\gamma(X^\perp) = 0$, por lo tanto $X^\perp \subseteq \ker(\gamma)$ y además $\mathrm{codim}_k X^\perp = \dim_k X < \infty$. Entonces $\gamma \in \Gamma$.

Sea $\beta \in \Gamma$ e $Y \subseteq \ker(\beta)$ subcomódulo de M de codimensión finita. Como $Y \subseteq \ker(\beta)$ podemos tomar $\widetilde{\beta} : M/Y \to k$ mapa inducido en el cociente.
Como $M \in {}^C\mathcal{M}$ y $\dim_k(M/Y) = \mathrm{codim}_k Y < \infty$, tenemos que $M/Y \in {}^C\mathcal{M}_{fin}$, donde la coacción está dada por $\overline{\rho}(\overline{m}) = \sum c_i \otimes \overline{m_i}$, si $\rho(m) = \sum c_i \otimes m_i$ para todo $\overline{m} \in M/Y$. Luego tenemos que $(M/Y)^* \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Entonces alplicando el Teorema 2.3.6 tenemos que $(M/Y)^* \in \mathrm{Rat}({}_{C^*}\mathcal{M})$. Por lo tanto dado que $\widetilde{\beta} \in (M/Y)^*$ existen $\widetilde{\beta}_i \in (M/Y)^*$, $x_i \in C$, $i = 1, \cdots, n$ tales que $\alpha \cdot \widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i)\widetilde{\beta}_i$ para todo $\alpha \in C^*$.

Para cada $i = 1, \cdots, n$ definimos $\beta_i : M \to k$ por $\beta_i = \widetilde{\beta}_i \circ \pi$ donde $\pi : M \to M/Y$ es la proyección canónica.
Veamos ahora que $\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i)\beta_i$ para todo $\alpha \in C^*$. Primero veamos que $(\alpha \cdot \beta)(m) = (\alpha \cdot \widetilde{\beta})(\overline{m})$ para todo $m \in M$.

$$\begin{aligned}
(\alpha \cdot \widetilde{\beta})(\overline{m}) &= \sum \alpha(c_i)\widetilde{\beta}(\overline{m_i}) && [\text{definición de } \overline{\rho}] \\
&= \sum \alpha(c_i)\beta(m_i) && [\beta = \widetilde{\beta} \circ \pi] \\
&= (\alpha \cdot \beta)(m) && [\text{definición de la acción de } C^* \text{en } M^*]
\end{aligned}$$

Finalmente veamos que $\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta_i$ para todo $\alpha \in C^*$.

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta)(m) &= (\alpha \cdot \widetilde{\beta})(\overline{m}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\widetilde{\beta}_i(\overline{m}) \qquad [\alpha \cdot \widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\widetilde{\beta}_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta_i(m) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta_i)(m) \quad \text{para todo } m \in M.\end{aligned}$$

Entonces $\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)\beta_i$ para todo $\alpha \in C^*$. Por lo tanto $\beta \in M_l^{*rat}$.

◆

2.4. Módulos de Hopf

Definición 2.4.1. Un k-espacio vectorial M es un *H-módulo de Hopf a derecha* si M tiene estructura de H-módulo a derecha y H-comódulo a derecha, dada por el mapa $\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, tal que para todo $m \in M$ y $x \in H$ se cumpe

$$\rho(m \cdot x) = \sum m_0 \cdot x_1 \otimes m_1 x_2.$$

Observar que la condición que cumple ρ es equivalente a pedir que ρ sea un morfismo en $\mathcal{M}_H$, con $M \otimes H \in \mathcal{M}_H$ vía $(m \otimes x) \cdot y = \sum m \cdot y_1 \otimes xy_2$ para todo $m \in M$, $x, y \in H$, y también es equivalente a pedir que el mapa $\phi : M \otimes H \to M$, dado por la estructura de H-módulo de M, sea un morfismo en $\mathcal{M}^H$ donde $M \otimes H \in \mathcal{M}^H$ vía $m \otimes x \mapsto \sum m_0 \otimes x_1 \otimes m_1 x_2$, para todo $m \in M$ y $x \in H$.

Definición 2.4.2. Un *morfismo de módulos de Hopf a derecha* es un mapa k-lineal que además es un morfismo de H-módulos a derecha y un morfismo de H-comódulos a derecha.

Ejemplo 2.4.1. Sea V un k-espacio vectorial. Entonces definimos en $V \otimes H$ una estructura de H-módulo a derecha dada por $(v \otimes x) \cdot y = v \otimes xy$, para todo $v \in V$ y para todo $x, y \in H$ y una estructura de H-comódulo a derecha, dada por el mapa $\rho : V \otimes H \to V \otimes H \otimes H$, $\rho(v \otimes x) = \sum v \otimes x_1 \otimes x_2$, para todo $v \in V$ y para todo $x \in H$. Probaremos que el espacio $V \otimes H$ con estas estructuras resulta un H-módulo de Hopf.

Veamos primero que $V \otimes H$ es un H-módulo. Para ello veamos que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} V \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "id \otimes m"] \arrow[d, "\cdot \otimes id"'] & V \otimes H \otimes H \arrow[d, "\cdot"] \\ V \otimes H \otimes H \arrow[r, "\cdot"'] & V \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes H \otimes k \arrow[r, "id \otimes u"] \arrow[dr, "\approx"'] & V \otimes H \otimes H \arrow[d, "\cdot"] \\ & V \otimes H \end{tikzcd}$$

$(v \otimes x) \cdot yz = v \otimes xyz = (v \otimes xy) \cdot z = ((v \otimes x) \cdot y) \cdot z$ para todo $v \otimes x \in V \otimes H, y, z \in H$.

$(v \otimes x) \cdot u(1) = (v \otimes x) \cdot 1_H = v \otimes x$ para todo $v \otimes x \in V \otimes H$.

Ahora veamos que $V \otimes H$ es un H-comódulo a derecha

$$\begin{aligned}((id \otimes \Delta) \circ \rho)(v \otimes x) &= (id \otimes \Delta)(\sum v \otimes x_1 \otimes x_2) = \sum v \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \\ &= (\rho \otimes id)(\sum v \otimes x_1 \otimes x_2) = ((\rho \otimes id) \circ \rho)(v \otimes x) \quad \text{para todo } v \in V, x \in H. \\ ((id \otimes \varepsilon) \circ \rho)(v \otimes x) &= (id \otimes \varepsilon)(\sum v \otimes x_1 \otimes x_2) = \sum v \otimes x_1 \varepsilon(x_2) \otimes 1_H \\ &= v \otimes x \otimes 1_H \quad \text{para todo } v \in V, x \in H.\end{aligned}$$

Por último veamos que $\rho((v \otimes x)\ y) = \sum (v \otimes x)_0\ y_1 \otimes (v \otimes x)_1\ y_2$.

$$\begin{aligned}\rho((v \otimes x)\ y) = \rho(v \otimes xy) &= \sum v \otimes (xy)_1 \otimes (xy)_2 = \sum v \otimes x_1 y_1 \otimes x_2 y_2 \\ &= \sum ((v \otimes x_1)\ y_1) \otimes x_2 y_2 = \sum (v \otimes x)_0\ y_1 \otimes (v \otimes x)_1\ y_2.\end{aligned}$$

Entonces $V \otimes H$ es un módulo de Hopf.

Proposición 2.4.1. *Si $M \in \mathcal{M}^H$. Entonces $M \otimes H$ es un H-módulo de Hopf a derecha, donde $(m \otimes x)\cdot y = m \otimes xy$, para todo $m \in M$ y $x, y \in H$ y $\rho : M \otimes H \to M \otimes H \otimes H$, esta dado por $\rho(m \otimes x) = \sum m_0 \otimes x_1 \otimes m_1 x_2$, para todo $m \in M$ y $x \in H$.*

Demostración. . Definimos en $M \otimes H$ una estructura de H-módulo a derecha dada por $(m \otimes x)\cdot y = m \otimes xy$ y por la observación realizada al definir módulos de Hopf, $M \otimes H$ es un H-comódulo a derecha.
Veamos ahora que $\rho((m \otimes x)\cdot y) = \sum (m \otimes x)_0 \cdot y_1 \otimes (m \otimes x)_1\ y_2$ para todo $m \in M, x, y \in H$.

$$\begin{aligned}\rho((m \otimes x)\cdot y) = \rho(m \otimes xy) &= \sum m_0 \otimes (xy)_1 \otimes m_1 (xy)_2 \\ &= \sum m_0 \otimes x_1 y_1 \otimes m_1 x_2 y_2 = \sum (m \otimes x)_0 \cdot y_1 \otimes (m \otimes x)_1\ y_2.\end{aligned}$$

◆

Definición 2.4.3. Sea M un H-comódulo a derecha, con la estructura de comódulo dada por el mapa $\rho : M \to M \otimes H$. El conjunto

$$M^{coH} := \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\}$$

es un subespacio de M, llamado *subespacio de coinvariantes* de M.

Ejemplo 2.4.2. Consideremos H con la estructura de comódulo inducida por $\Delta : H \to H \otimes H$. Veamos que en este caso es $H^{coH} = k1_H$.
Si $x \in H^{coH}$, entonces $\Delta(x) = \sum x_1 \otimes x_2 = x \otimes 1_H$. Aplicando ε obtenemos $\varepsilon(x)1_H = \sum \varepsilon(x_1)x_2 = x$. Entonces $H^{coH} \subseteq k1_H$. Si $x = a1_H$, $a \in k$, entonces $\Delta(x) = a1_H \otimes 1_H = x \otimes 1_H$, luego $k1_H \subseteq H^{coH}$.

Teorema 2.4.2. ***Teorema fundamental de los módulos de Hopf**.*
Sea M un H-módulo de Hopf a derecha. Entonces el mapa $f : M^{coH} \otimes H \to M$, definido por $f(m \otimes x) = m \cdot x$, para todo $m \in M^{coH}$ y $x \in H$, es un isomorfismo de módulos de Hopf (en $M^{coH} \otimes H$ consideramos la estructura de H-módulo de Hopf definida en el Ejemplo 2.4.1).

Demostración. Sea $\rho : M \to M \otimes H$, $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ la coacción de M. Consideremos el mapa $g : M \to M$, definido por $g(m) = \sum m_0 \cdot S(m_1)$, para todo $m \in M$. Si $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(g(m)) &= \rho(\sum m_0 \cdot S(m_1)) \\ &= \sum (m_0)_0 \cdot (S(m_1))_1 \otimes (m_0)_1\ (S(m_1))_2 \quad \text{[definición de módulos de Hopf]} \\ &= \sum (m_0)_0 \cdot S((m_1)_2) \otimes (m_0)_1\ S((m_1)_1) \quad [S \text{ antimorfismo de coálgebras}] \\ &= \sum m_0 \cdot S(m_3) \otimes m_1\ S(m_2) \\ &= \sum m_0 \cdot S(m_2) \otimes \varepsilon(m_1)1 \quad [\varepsilon(x)1 = \sum x_1 S(x_2)] \\ &= \sum m_0 \cdot S(m_2 \varepsilon(m_1)) \otimes 1 \\ &= \sum m_0 \cdot S(m_1) \otimes 1 \quad [x = \sum \varepsilon(x_1)x_2] \\ &= g(m) \otimes 1,\end{aligned}$$

entonces $g(m) \in M^{coH}$, para todo $m \in M$.
Definimos el mapa $F : M \to M^{coH} \otimes H$ por $F(m) = \sum g(m_0) \otimes m_1$, para todo $m \in M$. Veamos que F es la inversa de f. Si $m \in M^{coH}$ y $x \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(F \circ f)(m \otimes x) &= F(m \cdot x) \\
&= \sum g((m \cdot x)_0) \otimes (m \cdot x)_1 \\
&= \sum g(m_0 \cdot x_1) \otimes m_1 x_2 && \text{[definición de módulos de Hopf]} \\
&= \sum g(m \cdot x_1) \otimes x_2 && [m \in M^{coH}] \\
&= \sum (m \cdot x_1)_0 \cdot S((m \cdot x_1)_1) \otimes x_2 \\
&= \sum (m_0 \cdot (x_1)_1) \cdot S(m_1 (x_1)_2) \otimes x_2 && \text{[definición de módulos de Hopf]} \\
&= \sum (m_0 \cdot x_1) \cdot S(m_1 x_2) \otimes x_3 \\
&= \sum (m \cdot x_1) \cdot S(x_2) \otimes x_3 && [m \in M^{coH}] \\
&= \sum m \cdot (x_1 S(x_2)) \otimes x_3 \\
&= \sum m \cdot \varepsilon(x_1) 1 \otimes x_2 && [\varepsilon(x)1 = \sum x_1 S(x_2)] \\
&= m \otimes x,
\end{aligned}$$

entonces $F \circ f = id$. Reciprocamente, si $m \in M$, tenemos

$$(f \circ F)(m) = f\left(\sum m_0 \cdot S(m_1) \otimes m_2\right) = \sum (m_0 \cdot S(m_1)) \cdot m_2 = \sum m_0 \cdot S(m_1) m_2 = \sum m_0 \cdot \varepsilon(m_1) 1 = m,$$

luego $f \circ F = id$. Falta ver que f es un morfismo de H-módulos de Hopf a derecha.
Primero veamos que f es un morfismo de H-módulos:

$$f((m \otimes x) \cdot y) = f(m \otimes xy) = m \cdot (xy) = (m \cdot x) \cdot y = f(m \otimes x) \cdot y, \ \forall m \in M^{coH}, x, y \in H.$$

Ahora veremos que f es un morfismo de H-comódulos:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ f)(m \otimes x) &= \rho(m \cdot x) \\
&= \sum m_0 \cdot x_1 \otimes m_1 x_2 \\
&= \sum m \cdot x_1 \otimes x_2 && [m \in M^{coH}] \\
&= \sum (f \otimes id)(m \otimes x_1 \otimes x_2) \\
&= ((f \otimes id) \circ (id \otimes \Delta))(m \otimes x) \quad \text{para todo } m \in M^{*coH}, x \in H.
\end{aligned}$$

Entonces $\rho \circ f = (f \otimes id) \circ (id \otimes \Delta)$.

Luego f es un morfismo de módulos de Hopf, lo cual termina la demostración.

◆

Capítulo 3

Comódulos simples y comódulos inyectivos

En la primera sección se definen los *comódulos libres* y los *comódulos inyectivos*. Se dan algunas propiedades de estos y se prueba que un comódulo es inyectivo si y solo si es sumando directo de un comódulo libre. En toda esta sección C es una coálgebra.
En la segunda sección se define la *envolvente inyectiva* y el *zócalo* de un comódulo. Además se prueban algunas propiedades del zócalo. Este tema se puede encontrar desarrollado con mayor profundidad en [Kas82]. También se prueba que todo comódulo tiene una envolvente inyectiva y que esta es única a menos de isomorfismos. Una referencia para esta sección es [Rot79].
En la tercera sección se prueba que una coálgebra C es cosemisimple si y solo si todo C-comódulo es inyectivo. Se estudian condiciones para que la envolvente de un comódulo simple sea de dimensión finita y se estudian algunas propiedades de las envolventes inyectivas.
En la última sección se estudian condiciones para que C^{*rat} sea denso en C^*.
En las secciones uno, dos y tres trabajaremos solo con comódulos a derecha. Los resultados también valen para comódulos a izquierda.

3.1. Comódulos inyectivos

Definición 3.1.1. Un C-comódulo se llama *libre* si es isomorfo a un comódulo de la forma $V \otimes C$, con estructura de comódulo dada por el mapa $id \otimes \Delta : V \otimes C \to V \otimes C \otimes C$, donde V es un espacio vectorial.

Proposición 3.1.1. *Si $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base de V. Entonces el comódulo $V \otimes C$ es isomorfo a $\bigoplus_{i\in I} C_i$ donde $C_i = C$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Observemos que $\bigoplus_{i\in I} C_i \in \mathcal{M}^C$, definiendo $\rho : \bigoplus_{i\in I} C_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i \otimes C$ por $\rho(\sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} \Delta(x_i)$ para todo $\sum_{i\in I} x_i \in \bigoplus_{i\in I} C_i$. (Esta definición tiene sentido porque los x_i son todos cero salvo para un conjunto finito de subíndices).

Para cada $j \in I$ consideremos el morfismo de C-comódulos $\iota_j : C_j \to \bigoplus_{i\in I} C_i$, definido por $\iota_j(x) = x$ es decir ι_j es la inclusión de C_j en $\bigoplus_{i\in I} C_i$.

Definimos $f : V \otimes C \to \bigoplus_{i\in I} C_i$ tal que $f(e_i \otimes x) = \iota_i(x)$ para todo $x \in C$. El mapa f es un morfismo de C-comódulos:

$$((f \otimes id) \circ (id \otimes \Delta))(e_i \otimes x) = (f \otimes id)(\sum e_i \otimes x_1 \otimes x_2) = \sum x_1 \otimes x_2 = (\rho \circ f)(e_i \otimes x),$$

para todo $x \in C$ y e_i de la base de V. Entonces $(f \otimes id) \circ (id \otimes \Delta) = \rho \circ f$.

Veamos a continuación que f es un isomorfismo y esto completará la prueba de $V \otimes C \cong \bigoplus_{i \in I} C_i$.

Sea $\eta \in V \otimes C$, entonces $\eta = \sum_{i \in I} e_i \otimes x_i$. Luego $f(\eta) = \sum_{i \in I} f(e_i \otimes x_i) = \sum_{i \in I} \iota_i(x_i)$. Si $f(\eta) = 0$ entonces $\sum_{i \in I} \iota_i(x_i) = 0$. Luego $x_i = 0$ para todo $i \in I$, por lo tanto $\eta = 0$. Lo cual prueba que f es inyectivo.

Sea $\sum_{i \in I} x_i \in \bigoplus_{i \in I} C_i$. Consideremos $\sum_{i \in I} (e_i \otimes x_i) \in V \otimes C$. Es $f(\sum_{i \in I} (e_i \otimes x_i)) = \sum_{i \in I} f(e_i \otimes x_i) = \sum_{i \in I} \iota_i(x_i) = \sum_{i \in I} x_i$. Luego f es sobreyectiva.

◆

Teorema 3.1.2. *Todo C-comódulo es isomorfo a un subcomódulo de un C-comódulo libre.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces $M \otimes C \in \mathcal{M}^C$ vía el mapa $id \otimes \Delta : M \otimes C \to M \otimes C \otimes C$.
Sea $\rho : M \to M \otimes C$ la coacción de M. Veamos que ρ es inyectivo: sea $m \in M$ tal que $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1 = 0$. Como ρ es una coacción es $m = \sum m_0\, \varepsilon(m_1) = 0$.
Entonces M es isomorfo a $\mathrm{Im}(\rho)$ subcomódulo del módulo libre $M \otimes C$. Finalmente $\rho : M \hookrightarrow M \otimes C \cong \bigoplus_{i \in I} C \in \mathcal{M}^C$.

◆

Definición 3.1.2. Un C-comódulo M es *inyectivo* si para todo morfismo inyectivo $\iota : X \to Y$ de C-comódulos, y para todo morfismo $f : X \to M$ de C-comódulos existe un morfismo de C-comódulos $g : Y \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & Y \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Lema 3.1.3. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces $M^* \cong Hom^C(M, C)$ en $\mathcal{V}ec_k$, donde $Hom^C(M, C)$ son los morfismos de C-comódulos a derecha de M en C.*

Demostración. $\varphi \in \mathrm{Hom}^C(M, C)$ si y solo si $\varphi : M \to C$ es lineal y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\varphi \otimes id"'] & C \otimes C \end{tikzcd}$$

Sea $\Psi : \mathrm{Hom}^C(M, C) \to M^*$, definida por $\Psi(\varphi) = \varphi^*(\varepsilon)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}^C(M, C)$, donde $\varphi^* : C^* \to M^*$, $\varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi$ para todo $\alpha \in C^*$.

Sea $\Phi : M^* \to \mathrm{Hom}^C(M, C)$, definida por $\Phi(\psi)(m) = \sum \psi(m_0)\, m_1$ para todo $m \in M$ y $\psi \in M^*$. Veamos que $\Phi(\psi) \in \mathrm{Hom}^C(M, C)$:

$$\begin{aligned} (\Delta \circ \Phi(\psi))(m) &= \Delta(\sum \psi(m_0) m_1) = \sum \psi(m_0)\ (m_1)_1 \otimes (m_1)_2 \\ &= \sum \psi((m_0)_0)\ (m_0)_1 \otimes m_1 = (\Phi(\psi) \otimes id)(\sum m_0 \otimes m_1) \\ &= ((\Phi(\psi) \otimes id) \circ \rho)(m), \quad \text{para todo } m \in M. \end{aligned}$$

Por último veamos que $\Phi \circ \Psi = id_{\mathrm{Hom}^C(M,C)}$ y que $\Psi \circ \Phi = id_{M^*}$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)(\varphi)(m) &= \sum (\Psi(\varphi))(m_0)\ m_1 = \sum (\varepsilon \circ \varphi)(m_0)\ m_1 \\
&= \sum \varepsilon(\varphi(m_0))m_1 = \sum \varepsilon(\varphi(m)_1)\varphi(m)_2 \\
&= \varphi(m), \quad \text{ para todo } m \in M \text{ y } \varphi \in \mathrm{Hom}^C(M,C). \\
(\Psi \circ \Phi)(\psi)(m) &= (\varepsilon \circ \Phi(\psi))(m) = \varepsilon(\sum \psi(m_0)m_1) \\
&= \sum \psi(m_0)\varepsilon(m_1) = \psi(\sum m_0\varepsilon(m_1)) \\
&= \psi(m), \quad \text{para todo } m \in M \text{ y } \psi \in M^*.
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathrm{Hom}^C(M,C) \cong M^*$.

◆

Proposición 3.1.4. *Todo C-comódulo libre es inyectivo. En particular C es un C-comódulo inyectivo.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^C$ libre. Entonces por la Proposición 3.1.1 es $M \cong \bigoplus_{i\in I} C_i$ donde $C_i = C$ para todo $i \in I$. Hay que ver que M es inyectivo, es decir que para todo morfismo inyectivo $u : X \to Y$ de C-comódulos y para todo morfismo $f : X \to \bigoplus_{i\in I} C_i$ de C-comódulos, existe $g : Y \to \bigoplus_{i\in I} C_i$ morfismo de C-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i\in I} C_i & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Consideremos los siguientes morfismos de C-comódulos:
$\iota_j : C_j \to \bigoplus_{i\in I} C_i$, definido por $\iota_j(c) = c$ para todo $c \in C_j$ y $p_j : \bigoplus_{i\in I} C_i \to C_j$, definido por $p_j(\sum_{i\in I} c_i) = c_j$ para todo $\sum_{i\in I} c_i \in \bigoplus_{i\in I} C_i$.
Estos mapas cumplen las siguientes propiedades:

i) $p_i \circ \iota_j = \delta_{ij} id_{C_i}$, para todo $i, j \in I$.

ii) $\sum_{i\in I} \iota_i \circ p_i = id_{\bigoplus_{i\in I} C_i}$.

Sea $f_j : X \to C_j \in \mathrm{Hom}^C(X, C_j)$ definida por $f_j = p_j \circ f$.

Como $0 \to X \xrightarrow{u} Y$, existe $Z \subset Y$ subespacio tal que $Y = u(X) \oplus Z$. Por el Lema 3.1.3 es $Y^* \cong \mathrm{Hom}^C(Y,C)$. Definimos $\eta_i \in Y^*$ tal que $\eta_i|_{u(X)} = \varepsilon \circ f_i \circ u^{-1}$, es decir $\eta_i(u(x)) = \varepsilon(f_i(x))$ para todo $x \in X$ y $\eta_i|_Z = 0$, entonces $\eta_i(y) = \eta_i(u(x) + z) = \eta_i(u(x)) + \eta_i(z) = \eta_i(u(x)) = f_i^*(\varepsilon)(u(x)) = (\varepsilon \circ f_i \circ u)(x)$.
Definimos $g_i \in \mathrm{Hom}^C(Y,C)$ por $g_i(y) = \sum \eta_i(y_0)y_1$. Finalmente definimos $g : Y \to \bigoplus_{i\in I} C_i$, por $g(y) = \sum_{i\in I}(\iota_i \circ g_i)(y)$ para todo $y \in Y$.

Veamos que $g \in \mathrm{Hom}^C(Y, \bigoplus_{i\in I} C_i)$:
Como ι_i y g_i son morfismos en $\mathcal{M}^C$ es $\iota_i \circ g_i$ morfismo en $\mathcal{M}^C$. Entonces $g = \sum_{i\in I} \iota_i \circ g_i \in \mathrm{Hom}^C(Y, \bigoplus_{i\in I} C_i)$.

Por último veamos que $g \circ u = f$: sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} g(u(x)) &= \sum (\iota_i \circ g_i)(u(x)) \\ &= \sum \iota_i(\eta_i(u(x)_0)u(x)_1) \\ &= \sum \iota_i(((\eta_i \circ u)(x_0))x_1) \quad \text{[u morfismo de C-comódulos]} \\ &= \sum \iota_i((\varepsilon \circ f_i)(x_0)x_1) \quad [f_i \in \mathrm{Hom}^C(X, C_i)] \\ &= \sum \iota_i((\varepsilon(f_i(x)_1))f_i(x)_2) \\ &= \sum (\iota_i \circ f_i)(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

◆

Corolario 3.1.5. *Todo comódulo es un subcomódulo de un comódulo inyectivo.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^C$, por el Teorema 3.1.2 es M un subcomódulo de un C-comódulo libre y aplicando la Proposición 3.1.4 tenemos que M es un subcomódulo de un comódulo inyectivo.

◆

Teorema 3.1.6. *Sea M un C-comódulo. Entonces M es inyectivo si y solo si M es sumando directo de un C-comódulo libre.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea F libre tal que $F = M \oplus N$.
Veamos que M es inyectivo: sea $u : X \to Y$ morfismo inyectivo de C-comódulos y $f : X \to M$ morfismo de C-comódulos, hay que ver que existe $h : Y \to M$ morfismo de C-comódulos tal que $h \circ u = f$.
Por la Proposición 3.1.4 F es inyectivo, entonces existe $g : Y \to F$ morfismo de C-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & F = M \oplus N & \\ & M \arrow[u, "\iota"] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & Y. \arrow[uul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Sea $p : F \to M$ la proyección sobre M. Entonces $p \circ g \circ u = p \circ \iota \circ f = f$ porque $p \circ \iota = id_M$. Sea $h : Y \to M$ definida por $h = p \circ g$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & Y. \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Lo cual prueba que M es inyectivo.

($\Rightarrow$) Consideremos $\rho : M \to M \otimes C$ la coación de M, donde ρ es un morfismo inyectivo de C-comódulos.

Por ser M inyectivo existe $\eta : M \otimes C \to M$ morfismo de C-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\rho"'] & M \otimes C. \arrow[ul, dashed, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que esto prueba que $M \otimes C = \mathrm{Im}(\rho) \oplus \ker(\eta) \cong M \oplus \ker(\eta)$.
Sea $x \in M \otimes C$, $x = x - (\rho \circ \eta)(x) + (\rho \circ \eta)(x)$, donde $x - (\rho \circ \eta)(x) \in \ker(\eta)$ y $(\rho \circ \eta)(x) \in \mathrm{Im}(\rho)$. Si $x \in \ker(\eta) \cap \mathrm{Im}(\rho)$, entonces $\eta(x) = 0$ y $x = \rho(m)$. Luego $\eta(\rho(x)) = 0$ y como $\eta \circ \rho = id_M$ tenemos que $m = 0$, entonces $x = 0$. Por lo tanto $M \otimes C \cong M \oplus \ker(\eta)$.

◆

Proposición 3.1.7. *Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de C-comódulos inyectivos. Entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es inyectivo en $\mathcal{M}^C$.*

Demostración. M_i es inyectivo, entonces existe F_i libre tal que $F_i = M_i \oplus P_i$ en $\mathcal{M}^C$. Entonces $\bigoplus_{i \in I} F_i = \bigoplus_{i \in I}(M_i \oplus P_i) \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \oplus \bigoplus_{i \in I} P_i$. Luego $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es sumando directo de un C-comódulo libre y por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es inyectivo.

◆

Teorema 3.1.8. *Sea A una $k-$álgebra y $M \in \mathcal{M}_A$. Entonces si M es proyectivo tenemos que $M^* = Hom_k(M, k) \in {}_A\mathcal{M}$ es inyectivo.*

Demostración. Primero veamos que podemos darle a M^* estructura de módulo a izquierda.
Definimos $\rho : A \otimes M^* \to M^*$ por $\rho(a \otimes f)(m) = f(m \cdot a)$ para todo $a \in A$, $f \in M^*$ y $m \in M$. Es fácil ver que ρ es una acción de A en M^*.

Veamos que M^* es inyectivo. Sea $u : N \to P$ morfismo inyectivo de A-módulos a izquierda y $f : N \to M^*$ morfismo de A-módulos a izquierda.

Consideremos $u^* : P^* \to N^*$, dada por $u^*(g) = g \circ u$.
Primero veamos que u^* es un morfismo de A-módulos a derecha: $(u^*(f \cdot a))(n) = ((f \cdot a) \circ u)(n) = (f \cdot a)(u(n)) = f(a \cdot u(n)) = f(u(a \cdot n)) = (f \circ u)(a \cdot n) = ((f \circ u) \cdot a)(n) = (u^*(f) \cdot a)(n)$ para todo $n \in N$.
Ahora veamos que u^* es sobreyectivo: como u es inyectivo podemos tomar un complemento (como espacio vectorial) de $u(N)$ en P, $P = u(N) \oplus N'$. Entonces dado $g \in N^*$ definimos $f \in P^*$ como $f(u(n)) = g(n)$ y $f(n') = 0$ para todo $n \in N$ y $n' \in N'$. Por lo tanto $u^*(f) = g$. Finalmente tenemos que u^* es un morfismo sobreyectivo de A-módulos a derecha.

Sea $\alpha_M : M \to M^{**}$ la inclusión natural, $\alpha_M(m)(f) = f(m)$ para todo $m \in M$ y $f \in M^*$. Si sobre M^{**} consideramos la acción $M^{**} \otimes A \to M^{**}$ dada por $(\alpha \cdot a)(f) = \alpha(a \cdot f)$, para todo $\alpha \in M^{**}$, $a \in A$ y $f \in M^*$, tenemos que $M^{**} \in \mathcal{M}_A$ y α_M es un morfismo de A-módulos a izquierda.
Como $M \in \mathcal{M}_A$ es proyectivo, existe $g : M \to P^*$ morfismo de A-módulos a derecha tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f^* \circ \alpha_M"] & \\ P^* \arrow[r, "u^*"'] & N^* \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sean $\alpha_N : N \to N^{**}$ y $\alpha_P : P \to P^{**}$ las inclusiones naturales. Consideremos $g^* \circ \alpha_P : P \to M^*$, veamos que $(g^* \circ \alpha_P) \circ u = f$.

Como $u^{**} \circ \alpha_N = \alpha_P \circ u$, tenemos que $g^* \circ \alpha_P \circ u = g^* \circ u^{**} \circ \alpha_N = (u^* \circ g)^* \circ \alpha_N = (f^* \circ \alpha_M)^* \circ \alpha_N = \alpha_M^* \circ f^{**} \circ \alpha_N = \alpha_M^* \circ \alpha_{M^*} \circ f$. Entonces $g^* \circ \alpha_P \circ u = \alpha_M^* \circ \alpha_{M^*} \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\alpha_N"] & P \arrow[d, "\alpha_P"] \\
M^* \arrow[dr, "\alpha_{M^*}"'] & N^{**} \arrow[r, "u^{**}"] \arrow[d, "f^{**}"] & P^{**} \arrow[d, "g^*"] \\
 & M^{***} \arrow[r, "\alpha_M^*"'] & M^*.
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha \in M^*$ y $m \in M$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_M^*(\alpha_{M^*}(\alpha))(m) &= \alpha_{M^*}(\alpha)(\alpha_M(m)) && [\alpha_M^*(\beta)(m) = \beta(\alpha_M(m))] \\
&= \alpha_M(m)(\alpha) && [\alpha_{M^*}(\gamma)(\beta) = \beta \circ \gamma] \\
&= \alpha(m) \quad \text{para todo } \alpha \in M^*.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $\alpha_M^* \circ \alpha_{M^*} = id_{M^*}$. Luego $(g^* \circ \alpha_P) \circ u = f$.

◆

Lema 3.1.9. *Sea $N \in \mathcal{M}^C_{fin}$ inyectivo. Entonces $N \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ inyectivo.*

Demostración. Como $N \in \mathcal{M}^C_{fin}$ inyectivo, existe $n > 0$ y $P \in \mathcal{M}^C$ tal que $C^n \cong N \oplus P$. aplicando el functor $Hom_k(-, k)$ tenemos que $C^{*n} \cong N^* \oplus P^* \in \mathcal{M}_{C^*}$. Como C^{*n} es libre tenemos que N^* y P^* son proyectivos en $\mathcal{M}_{C^*}$. Luego aplicando el Teorema 3.1.8 es $N^{**} \cong N \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ inyectivo.

◆

3.2. Envolvente inyectiva

Definición 3.2.1. Dado $M \in \mathcal{M}^C$, una *extensión esencial* de M es un comódulo $E \in \mathcal{M}^C$ tal que $M < E$ y si $0 \neq S < E$ entonces $S \cap M \neq 0$. Si además $M \subsetneq E$ decimos que E es una *extensión esencial propia* de M.

Definición 3.2.2. Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Definimos el *zócalo* de M como

$$s(M) := \sum_{N < M, N \text{simple}} N \quad \text{en } \mathcal{M}^C.$$

Observación 3.2.1. *El comódulo s(M) es completamente reducible, en particular es suma directa de subcomódulos simples.*

Proposición 3.2.1. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces $s(M)$ es el mayor subcomódulo semisimple de M.*

Demostración. Por ser $s(M)$ suma directa de subcomódulos simples es semisimple. Sea N un subcomódulo semisimple de M. Entonces N es suma de subcomódulos simples. Por lo tanto $N \subset s(M)$.

◆

Lema 3.2.2. *Sean M y $N \in \mathcal{M}^C$ y $\varphi : M \to N$ un morfismo en $\mathcal{M}^C$. Entonces $\varphi(s(M)) \subset s(N)$.*

Demostración. Consideremos S un subcomódulo simple de M y $\psi = \varphi|_S : S \to N$.
Como $\ker(\psi) = \ker(\varphi) \cap S$ es un subcomódulo de S y S es simple tenemos que $\ker(\psi) = 0$ o $\ker(\psi) = S$. Si $\ker(\psi) = 0$ es $\varphi(S) \cong S$ simple y si $\ker(\psi) = S$ es $\varphi(S) = 0$. Luego $\varphi(s(M))$ es un subcomódulo semisimple. Entonces, aplicando la Proposición 3.2.1, es $\varphi(s(M)) \subset s(N)$.

◆

Lema 3.2.3. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$ y P un subcomódulo de M. Entonces $s(P) \subset s(N)$.*

Demostración. Consideremos $\iota : P \hookrightarrow M$ la inclusión. Entonces, aplicando el Lema 3.2.2, es $s(P) = \iota(s(P)) \subset s(M)$.

◆

Proposición 3.2.4. *Si $M = \bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{M}^C$. Entonces $s(M) = \bigoplus_{i\in I} s(M_i)$.*

Demostración. Para cada $i \in I$ es $M_i \subset M$. Entonces por el Lema 3.2.3 es $s(M_i) \subset s(M)$. Además $\sum_{i\in I} s(M_i) = \bigoplus_{i\in I} s(M_i)$ porque $s(M_i) \subset M_i$ y $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} s(M_i) \subset s(M)$.

Sea $m \in s(M)$, entonces $m = \sum_{i\in I} m_i$, donde $m_i \in M_i$ para todo $i \in I$.
Consideremos $\pi_i : M \to M_i$ la proyección sobre M_i, entonces por el Lema 3.2.2 es $\pi_i(m) = m_i \in s(M_i)$ para todo $i \in I$. Luego $m = \sum_{i\in I} \pi_i(m) \in \bigoplus_{i\in I} s(M_i)$. Entonces $s(M) \subset \bigoplus_{i\in I} s(M_i)$.

◆

Proposición 3.2.5. *i) Si $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces M es una extensión esencial de $s(M)$.*
ii) Si $M < E_1 < E_2$, E_1 esencial sobre M y E_2 esencial sobre E_1. Entonces E_2 esencial sobre M.
iii) Si $M < E_1 < E_2$ y E_2 esencial sobre M. Entonces E_2 esencial sobre E_1 y E_1 esencial sobre M.
iv) Sea $M < E$ y $\{E_i\}_{i\in I}$ tal que E_i es una extensión esencial de M y $E_i < E$ para todo $i \in I$, con $E_i < E_j$ o $E_j < E_i$ para todo $i, j \in I$. Entonces $\bigcup_{i\in I} E_i$ es esencial sobre M.
v) Si E es esencial sobre M y $\varphi : E \to N$ morfismo tal que $\varphi|_M$ es mónico. Entonces φ es mónico.

Demostración. i) Claramente $s(M) < M$. Hay que ver que si $0 \neq S < M$ entonces $S \cap s(M) \neq 0$.
Si $0 \neq S < M$, entonces aplicando la Proposición 1.2.2 existe $P < S$ tal que P es simple. Luego por la definición de $s(M)$ es $0 \neq P < S \cap s(M)$. En particular $S \cap s(M) \neq 0$.

ii) Como $M < E_1 < E_2$ es $M < E_2$. Sea $0 \neq S < E_2$, por ser E_2 esencial sobre E_1 es $0 \neq S \cap E_1 < E_1$. Entonces aplicando que $M < E_1$ esencial tenemos que $0 \neq (S \cap E_1) \cap M = S \cap M$.

iii) Sea $0 \neq S < E_2$. Entonces por ser $M < E_1 < E_2$ es $0 \neq S \cap M < S \cap E_1$. En particular $0 \neq S \cap E_1$. Entonces $E_1 < E_2$ es esencial.
Sea $0 \neq S < E_1 < E_2$, entonces $0 \neq S < E_2$. Por ser E_2 extensión esencial de M es $0 \neq S \cap M$. Luego $M < E_1$ es esencial.

iv) Sea $M < E$ y $\{E_i\}_{i\in I}$ tal que $M < E_i < E$, $M < E_i$ extensión esencial y $E_i < E_j$ o $E_j < E_i$ para todo $i, j \in I$. Esta última condición implica que $\bigcup_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} E_i$. Luego $M < \bigcup_{i\in I} E_i < E$.
Sea $0 \neq S < \bigcup_{i\in I} E_i$. Entonces $0 \neq S = S \cap (\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcup_{i\in I}(S \cap E_i)$. Luego existe $i \in I$ tal que $0 \neq S \cap E_i < E_i$ y por ser $M < E_i$ esencial tenemos que $0 \neq (S \cap E_i) \cap M = S \cap M$. Entonces $S \cap M \neq 0$.

v) Sea $M < E$ esencial y $\varphi : E \to N$ tal que $\varphi|_M$ es mónico.
Como $\ker(\varphi) \cap M = \ker(\varphi|_M) = 0$ y $\ker(\varphi) < E$ entonces, por ser $M < E$ extensión esencial, es $\ker(\varphi) = 0$. Luego φ es un morfismo mónico.

◆

Teorema 3.2.6. *Un comódulo M es inyectivo si y solo si M no tiene extensiones esenciales propias.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea E tal que $M \lneq E$. Como M es inyectivo, existe $\psi : E \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "id"] \arrow[r] & E. \arrow[ul, dashed, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Es fácil probar que $E = M \oplus \ker(\psi)$, notamos por P a $\ker(\psi)$. Como $M \lneq E$ tenemos que $P \neq 0$. Luego $0 \neq P < E$ y $P \cap M = 0$. Entonces $M < E$ no es esencial.

($\Leftarrow$) Supongamos que M no tiene extensiones esenciales propias.
Sea E inyectivo tal que $M < E$ y sea $\Omega = \{X < E : X \cap M = 0\}$. Es $0 \in \Omega$, entonces $\Omega \neq \emptyset$.
Consideremos un conjunto $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \Omega$ tal que $X_\alpha < X_\beta$ o $X_\beta < X_\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$. Sea $X_\infty = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha < E$. Es $X_\infty \cap M = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \cap M) = 0$. Luego $X \in \Omega$. Entonces aplicando el Lema de Zorm existe $N < E$ maximal (respecto a $N \cap M$ =0).
Sea $\iota : M \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} E/N$, $\ker(\iota) = \ker(\pi) \cap M = N \cap M = 0$. Entonces ι es mónico.

Veamos que la maximalidad de N implica que $\iota(M) < E/N$ es esencial:
Sea $N < Q < E$ tal que $\overline{0} \neq Q/N < E/N$. Entonces $N \lneq Q < E$.
Si $Q \cap (M + N) = N$ entonces $Q \cap M < Q \cap (M + N) = N$. Como $Q \cap M < M$ es $Q \cap M < M \cap N = 0$. Entonces $Q \cap M = 0$. Además $N \lneq Q$. Esto contradice la maximalidad de N. Entonces $Q \cap (M + N) \gneq N$. Luego $Q/N \cap (M + N)/N \neq \overline{0}$. Esto implica que $\iota(M) = (M + N)/N < E/N$ es esencial.

El mapa $\iota : M \to \iota(M)$ es un isomorfismo y M no tiene extensiones esenciales propias. Entonces $\iota(M)$ no tiene extensiones esenciales propias. Por lo tanto $\iota(M) = E/M$. Entonces $\iota : M \hookrightarrow E \longrightarrow E/N$, es un isomorfismo. Esto implica que $E = M + N$: sea $e \in E$, entonces existe $m \in M$ tal que $e + N = m + N$, luego $e - m \in N$, entonces $e = m + (e - m) \in M + N$.
Como $M \cap N = 0$, es $E = M \oplus N$. Aplicando que E es inyectivo tenemos que M es inyectivo.

◆

Teorema 3.2.7. *Dado $M < E$ en $\mathcal{M}^C$, las siguientes condiciones son equivalentes:*
i) $M < E$ es una extensión esencial maximal, es decir ninguna extensión propia de E es una extensión esencial de M.
ii) $M < E$ es esencial y E es inyectivo.
iii) E es inyectivo y no existe ningún inyectivo E' tal que $M < E' \lneq E$.

Demostración. i)$\Rightarrow$ ii) $M < E$ es una extensión esencial maximal, si $E < L$ es un extensión esencial, entonces $M < L$ es una extensión esencial. Luego $E = L$. Entonces E no tiene extensiones esenciales propias y aplicando el Teorema 3.2.6 es E inyectivo.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea E' inyectivo con $M < E' < E$.
Dado que E' es inyectivo entonces existe $E'' < E$ tal que $E = E' \oplus E''$. Como $E' > M$ es $E'' \cap M = 0$. Entonces aplicando que $M < E$ es esencial es $E'' = 0$. Luego $E = E'$.

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $\mathcal{A} = \{X : \ M < X < E \text{ y } M < X \text{ extensión esencial}\}$.
Como $M \in \mathcal{A}$, es $\mathcal{A} \neq \emptyset$. La Proposición 3.2.5 (iv) implica que podemos aplicar el Lema de Zorm y luego existe $E' \in \mathcal{A}$ maximal, es decir $M < E' < E$ y E' extensión esencial maximal de M dentro de E.

Veamos que E' es un extensión esencial maximal de M:
Sea N extensión esencial de M tal que $M < E' < N$. Como E es inyectivo existe $\varphi : N \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[u, hook] \arrow[r] & N, \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

entonces $\varphi(e) = e$, para todo $e \in E'$. Como $M \subset E'$ es $\varphi(m) = m$ para todo $m \in M$.
Luego tenemos $M < N$ extensión esencial, $\varphi : N \to E$ morfismo tal que $\varphi|_M$ es mónico. Entonces por la Proposición 3.2.5 (v) es φ mónico.

Como
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\approx"] & \varphi(N) \\ M \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] \end{tikzcd}$$
y $M < N$ esencial. Entonces $M < \varphi(N)$ esencial (si $0 \neq S < \varphi(N)$, entonces $0 \neq \varphi^{-1}(S) < N$. Como $M < N$ esencial es $0 \neq \varphi^{-1}(S) \cap M$. Entonces, aplicando que φ es un isomorfismo y $\varphi|_M = id$ es $0 \neq S \cap M$).
Luego $M < E' < \varphi(N) < E$ con $M < \varphi(N)$ esencial. Como E' es maximal es $E' = \varphi(N)$.
Si $\varphi(n) = e' \in E'$, como $\varphi|_{E'} = id$, es $\varphi(n) = \varphi(e')$. Entonces, aplicando que φ es mónico, es $n = e'$. Luego $N < E'$ y como $E' < N$ es $N = E'$. Por lo tanto E' es una extensión maximal de M.

Como E' es una extensión maximal de M, no tiene extensiones esenciales propias, entonces aplicando el Teorema 3.2.6 es E' inyectivo. Como $M < E' < E$, con E inyectivo es $E' = E$. Luego E es una extensión esencial maximal de M.

◆

Corolario 3.2.8. *Dado $M \in \mathcal{M}^C$, existe $E \in \mathcal{M}^C$ tal que $M < E$ y E verifica las condiciones del Teorema 3.2.7*

Demostración. Dado $M \in \mathcal{M}^C$, sea L inyectivo tal que $M < L$ y tomamos $E < L$ como el E' de la demostración de iii) $\Rightarrow$ i) del Teorema 3.2.7.

◆

Definición 3.2.3. Dado $M \in \mathcal{M}^C$. Un par (ι, E) donde $\iota : M \rightarrowtail E$ y $\iota(M) < E$ verifica el Teorema 3.2.7 se llama una *envolvente inyectiva* de M. El Corolario 3.2.8 prueba que todo $M \in \mathcal{M}^C$ tiene una envolvente inyectiva.

Teorema 3.2.9. *Sea E una envolvente inyectiva de M.*
i) Dado $\iota : M \rightarrowtail D$ con D inyectivo, existe $\varphi : E \to D$ morfismo inyectivo tal que $\varphi|_M = \iota$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D \\ M \arrow[u, tail, "\iota"] \arrow[r, hook] & E. \arrow[ul, dashed, tail, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

ii) Dos envolventes inyectivas de M son isomorfas mediante un isomorfismo que deja fijos a los puntos de M.

Demostración. i) D es inyectivo, entonces existe $\varphi : E \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & D \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\iota"] \arrow[r] & E \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$\varphi|_M = \iota$ es mónico y $M < E$ es esencial .Entonces aplicando la Proposición 3.2.5 (v) es φ es mónico.

ii) Supongamos que D es otra envolvente inyectiva de M.
Usando i) existe $\varphi : E \to D$ mónico tal que el siguiente digrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & D \\ & M \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}.$$

Entonces $\varphi(E) < D$. Como E inyectivo y φ es mónico, es $\varphi(E)$ inyectivo. Luego existe $F < D$ tal que $D = \varphi(E) \oplus F$. Como $M < \varphi(E)$ es $F \cap M = 0$. Además por ser $M < D$ estensión esencial, es $F = 0$. Luego $\varphi(E) = D$. Por lo tanto $\varphi : E \to D$ es un isomorfismo.

◆

Proposición 3.2.10. *Dado $M < E$ donde E es inyectivo, es E una envolvente inyectiva de M si y solo si para todo $\alpha : M \hookrightarrow D$ con D inyectivo, existe $\beta : E \hookrightarrow D$ tal que $\beta|_M = \alpha$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es el Teorema 3.2.9 i).

($\Leftarrow$) Sea D una envolvente inyectiva de M. Entonces existe $\beta : E \to D$ mónico tal que $\beta\,|_M = \iota_M$ donde $\iota_M : M \to D$ es la inclusión de M en D.
Entonces $M < \beta(E) < D$ y $\beta(E)$ inyectivo. Luego $\beta(E) = D$. Por lo tanto $\beta : E \to D$ isomorfismo. Entonces E es una envolvente inyectiva de M.

◆

3.3. Propiedades de las envolventes inyectivas

Teorema 3.3.1. *Sea C una coálgebra. Entonces C es cosemisimple si y solo si todo C-comódulo es inyectivo.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Para ver que C es cosemisimple, aplicando el Teorema 1.2.3, basta ver que todo C-comódulo es completamente reducible.
Sea $M \in \mathcal{M}^C$, veamos que es completamente reducible, por la Proposición 1.2.2 alcanza con ver que si N es subcomódulo de M entonces existe U subcomódulo de M tal que $M = N \oplus U$.
Sea N un subcomódulo de M, entonces $N \in \mathcal{M}^C$ y por hipótesis N es inyectivo. Entonces existe $f : M \to N$ morfismo de C-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & N & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "id_N"] \arrow[r, "\iota"'] & M, \arrow[ul, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

donde $\iota : N \to M$ es la inclusión. Entonces $M = \iota(N) \oplus \ker(f) = N \oplus \ker(f)$.
Como $f : M \to N$ morfismo en $\mathcal{M}^C$, es $\ker(f) < M$.

($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathcal{M}^C$, existe $E \in \mathcal{M}^C$ libre tal que $M < E$. Por ser C cosemisimple, existe $N < E$ tal que $M \oplus N = E$. Entonces, por el Teorema 3.1.6, es M inyectivo.

◆

Observación 3.3.1. *Sea H un álgebra de Hopf. Entonces $k \in \mathcal{M}^H$ vía $\lambda \mapsto \lambda \otimes 1_H$.*

Teorema 3.3.2. *Sea H un álgebra de Hopf. H es cosemisimple si y solo si k es inyectivo como H-comódulo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) H es cosemisimple, entonces por el Teorema 3.3.1 todo H-comódulo es inyectivo. En particular k es un H-comódulo, entonces k es inyectivo.

($\Leftarrow$) Aplicando el Teorema 3.3.1, basta probar que todo H-comódulo es inyectivo.
Sea $M \in \mathcal{M}^H$, aplicando la Proposición 2.4.1 es $M \otimes H \in \mathcal{M}^H_H$. Entonces por el teorema fundamental de módulos de Hopf tenemos que $M \otimes H \cong (M \otimes H)^{coH} \otimes H$ como módulos de Hopf, en particular como H-comódulos. Además por la Proposición 3.1.1 es $(M \otimes H)^{coH} \otimes H \cong \bigoplus_{i \in I} H_i$, donde $H_i = H$ para todo $i \in I$. Entonces $M \otimes H \cong \bigoplus_{i \in I} H_i$, luego $M \otimes H$ es libre en $\mathcal{M}^H$.
Como $k \in \mathcal{M}^H$ con la coacción $\rho : k \to k \otimes H$, $\rho(a) = a \otimes 1_H$ para todo $a \in k$, existe $t : H \to k$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & k & \\ 0 \arrow[r] & k \arrow[u, "id"] \arrow[r, "u"'] & H. \arrow[ul, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

Entonces aplicando que $t \circ u = id_k$ se puede ver que $H = k1_H \oplus \ker(t)$. Si llamamos A al $\ker(t)$, entonces $M \otimes H = M \otimes (k1_H \oplus A) \cong (M \otimes k) \oplus (M \otimes A) \cong M \oplus (M \otimes A)$. Luego M es sumando directo de un H-comódulo libre. Entonces aplicando el Teorema 3.1.6 es M inyectivo.

◆

Lema 3.3.3. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$ simple. Entonces existe un coideal a derecha I de C tal que $M \cong I$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 3.1.2 tenemos $M \overset{\rho}{\rightarrowtail} M \otimes C \cong \bigoplus_{i \in I} C$ donde $\#I = dim_k M$, como M es simple aplicando la Proposición 1.2.2 es $\dim_k M < \infty$, luego $\#I < \infty$. Sea $n = \#I$, entonces $M \overset{\rho}{\rightarrowtail} \bigoplus_{i=1}^n C$ en $\mathcal{M}^C$. Luego $0 \neq M \cong \rho(M) < \bigoplus_{i=1}^n C$.
Consideremos $\pi_i : \bigoplus_{i=1}^n C \to C$ la proyección sobre C y sea $\widehat{\pi_i} = \pi_i|_{\rho(M)} : \rho(M) \to C$.
Como $\rho(M)$ es simple tenemos que $\ker(\widehat{\pi_i}) = 0$ o $\ker(\widehat{\pi_i}) = \rho(M)$. Si $\ker(\widehat{\pi_i}) = \rho(M)$, es $\widehat{\pi_i} = 0$ y si $\ker(\widehat{\pi_i}) = 0$ es $\widehat{\pi_i}$ es inyectiva. Como $\rho(M) \neq 0$ existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\widehat{\pi_{i_0}} \neq 0$. Por lo tanto $\widehat{\pi_{i_0}} : \rho(M) \to Im(\widehat{\pi_{i_0}}) \subset C$ es un isomorfismo. Entonces $M \cong Im(\widehat{\pi_{i_0}}) \subset C$.

◆

Proposición 3.3.4. *Si $M \in \mathcal{M}^C$ simple. Entonces existe una envolvente inyectiva $E(M)$ de M tal que $E(M) \subseteq C$.*

Demostración. Sea $E(M)$ una envolvente inyectiva de M que sabemos que existe por el Corolario 3.2.8 y sea $f : M \to E(M)$ la inclusión.
Por definición de envolvente sabemos que M es esencial en $E(M)$. Aplicando el Lema 3.3.3 existe I coideal a derecha tal que $M \cong I$.
Como C es inyectivo en $\mathcal{M}^C$, aplicando el Teorema 3.2.9 existe $g : E(M) \to C$ morfismo inyectivo de

C-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ & I \arrow[u, hook] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "f"'] & E(M). \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[uul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Luego $g|_M : M \rightarrowtail g(E(M))$ es una envolvente inyectiva de M.

◆

Lema 3.3.5. *Sean $M, N \in \mathcal{M}^C$, $N < M$ es esencial si y solo si $s(M) < N$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea P un subcomódulo simple de M, entonces por ser $N < M$ esencial es $P \cap N \neq 0$. Como $0 \neq P \cap N < P$ con P simple es $P \cap N = P$, entonces $P < N$. Luego $s(M) < N$.

($\Leftarrow$) Sea $0 \neq P < M$ en $\mathcal{M}^C$. Entonces existe $0 \neq S < P$ simple, luego $S < N$. Por lo tanto $N < M$ es esencial.

◆

Proposición 3.3.6. *Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{M}^C$. Entonces $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$.*

Demostración. Como $E(M_i) \in \mathcal{M}^C$ es inyectivo para todo $i \in I$, por la Proposición 3.1.7, es $\bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ inyectivo.

Para cada $i \in I$ tenemos que $M_i \hookrightarrow E(M_i)$. Entonces $M = \bigoplus_{i \in I} M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ (podemos pensar $M < \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$).

Sea $S < \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ simple. Definimos $\rho_i :\ S \rightarrowtail \bigoplus_{j \in I} E(M_j) \xrightarrow{\pi_i} E(M_i)$ en $\mathcal{M}^C$. Como $S \neq 0$, existe $i \in I$ tal que $\rho_i \neq 0$. Dado que S es simple es $\rho_i : S \rightarrowtail E(M_i)$. Entonces $\rho_i(S) < E(M_i)$ simple. Además $M_i < E(M_i)$ esencial, entonces aplicando el Lema 3.3.5 es $\rho_i(S) < M_i$. Entonces si $s \in S$ es $s = \sum_{i \in I} \rho_i(s) \in \sum_{i \in I} M_i = M$. Luego $S < M$. Por lo tanto $M < \bigoplus_{i \in I} E(M_i)$ esencial.

◆

Lema 3.3.7. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$. Entonces $E(M) = E(s(M))$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.5 i) es $s(M)$ un subcomódulo esencial de M.
Veamos que $E(M)$ es la envolvente inyectiva de $s(M)$.
Es inmediato ver que $E(M)$ es inyectivo y que $s(M) < E(M)$. Queda ver que $s(M) < E(M)$ es esencial.
Como $s(M) < M$ y $M < E(M)$ son esenciales, entonces por la Proposición 3.2.5 ii) $s(M) < E(M)$ es esencial.

◆

Teorema 3.3.8. *Sea C una coálgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
i) Si $M \in \mathcal{M}^C_{fin}$, entonces $E(M) \in \mathcal{M}^C_{fin}$.
ii) Si $M \in \mathcal{M}^C$ simple, entonces $E(M) \in \mathcal{M}^C_{fin}$.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Es inmediato.

ii) $\Leftarrow$ i) Sea $M \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Por el Lema 3.3.7 es $E(M) = E(s(M))$. Al ser $M \in \mathcal{M}^C_{fin}$ resulta que $s(M) = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, donde los M_i son C-comódulos simples. Entonces aplicando la Proposición 3.3.6 es $E(s(M)) = E(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$. Como $M_i \in \mathcal{M}^C$ simple, entonces, es $E(M_i) \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Luego $\dim_k E(s(M)) < \infty$ y por lo tanto $\dim_k E(M) < \infty$.

◆

Proposición 3.3.9. *Sea $M \in \mathcal{M}^C$ inyectivo. Si escribimos $s(M) = \bigoplus_{i\in I} M_i$, M_i simple para todo $i \in I$, es $M = \bigoplus_{i\in I} E(M_i)$.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^C$ inyectivo, entonces $M = E(M) = E(s(M)) = E(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} E(M_i)$.

◆

Corolario 3.3.10. *Sea C una coálgebra y $s(C) = \bigoplus_{i\in I} S_i$ con S_i simple. Entonces $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$.*

Demostración. Como C es inyectivo en $\mathcal{M}^C$, aplicando la Proposición 3.3.9 tenemos que $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$.

◆

Teorema 3.3.11. *Sea C una coálgebra. Si existe $\theta : C \to C^*$ morfismo inyectivo de C^*-módulos a izquierda ($C \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ vía la acción $\rightharpoonup$), entonces para todo $S \in \mathcal{M}^C$ simple es $E(S) \in \mathcal{M}^C_{fin}$.*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{M}^C$ simple. Entonces aplicando el Lema 3.3.3, existe J coideal a derecha de C tal que $S \cong J$. Supongamos $J = S$.
Como $S \neq 0$ existe $0 \neq x \in S$, entonces podemos considerar el coideal a derecha $C^* \rightharpoonup x \subset S$, como S es simple tenemos que $S = C^* \rightharpoonup x$.

Definimos $b : C \times C \to k$ por $b(x, y) = \theta(y)(x)$ para todo $x, y \in C$.
La forma bilineal b cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &i) \text{ Si } b(x,y) = 0 \text{ para todo } x \in C, \text{ entonces } y = 0.\\ &ii) \ b(x \leftharpoonup \alpha, y) = b(x, \alpha \rightharpoonup y) \text{ para todo } x, y \in C \text{ y } \alpha \in C^*. \end{aligned}$$

i) $\theta(y)(x) = b(x, y) = 0$ para todo $x \in C$. Entonces $\theta(y) = 0$ y como θ es inyectivo es $y = 0$.
ii) $b(x \leftharpoonup \alpha, y) = \theta(y)(x \leftharpoonup \alpha) = \sum \theta(y)(\alpha(x_1)x_2) = \sum \alpha(x_1)\theta(y)(x_2) = (\alpha \cdot \theta(y))(x) = \theta(\alpha \rightharpoonup y)(x) = b(x, \alpha \rightharpoonup y)$.

Aplicando i), como $x \neq 0$ existe $c \in C$ tal que $b(c, x) \neq 0$.
Sea $U = \{y \in C : b(z, y) = 0, \text{para todo } z \in c \leftharpoonup C^*\}$.
Veamos que U es un C^*-submódulo a izquierda de C, es decir que $C^* \rightharpoonup U \subseteq U$. Sean $z \in c \leftharpoonup C^*$, $\alpha \in C^*$, $y \in U$:

$$\begin{aligned} b(z, \alpha \rightharpoonup y) &= b(z \leftharpoonup \alpha, y) && [\text{aplicando ii)}]\\ &= b((c \leftharpoonup \beta) \leftharpoonup \alpha, y) && [z \in c \leftharpoonup C^*]\\ &= b(c \leftharpoonup \beta \cdot \alpha, y) && [\leftharpoonup \text{acción}]\\ &= 0. && [y \in U] \end{aligned}$$

Como U es un C^*-submódulo a izquierda de C, resulta que U es un coideal a derecha de C:
Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de C. Entonces $\Delta(y) = \sum_{i\in I} y_i \otimes e_i$.

Sea $y \in U$, entonces $\alpha \rightharpoonup y = \sum y_i \alpha(e_i) \in U$ para todo $\alpha \in C^*$. Tomamos $\alpha_j \in C^*$, tal que $\alpha_j(e_i) = \delta_{ij}$. Entonces $\alpha_j \rightharpoonup y = \sum y_i \alpha_j(e_i) = \sum y_i \delta_{ij} = y_j \in U$ para todo $j \in I$. Luego $\Delta(U) \subseteq U \otimes C$.

Como S es simple, es $S \cap U = S$ o $S \cap U = 0$.
Si $S \cap U = S$, es $S \subseteq U$. Entonces $x \in U$ y sería $b(c, x) = 0$ lo cual contradice la elección de C. Entonces necesariamente es $S \cap U = 0$.

Sea $E(S)$ la envolvente inyectiva de S. Como $S \cap U = 0$, es $E(S) \cap U = 0$.

Definimos $\xi : C \to (c \leftharpoonup C^*)^*$ un morfismo de C^*-módulos a izquierda, por $\xi(y)(z) = b(z, y)$ para todo $y \in C, z \in c \leftharpoonup C^*$. Donde $(c \leftharpoonup C^*)^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ vía la acción $C^* \otimes (c \leftharpoonup C^*)^* \to (c \leftharpoonup C^*)^*$ dada por $(\alpha \bullet \beta)(z) = \beta(z \leftharpoonup \alpha)$ para todo $\alpha \in C^*, \beta \in (c \leftharpoonup C^*)^*$ y $z \in c \leftharpoonup C^*$.
Como estamos dualizando una acción a derecha ($\leftharpoonup$) obtenemos una acción a izquierda. Por lo tanto ξ es un morfismo de C^*-módulos a izquierda.

Calculemos el núcleo de ξ:

$$\ker(\xi) = \{y \in C : \xi(y)(z) = b(z, y) = 0, \text{para todo } z \in c \leftharpoonup C^*\} = U.$$

Entonces tenemos que $\tilde{\xi} : C/U \hookrightarrow (c \leftharpoonup C^*)^*$.
Como $c \leftharpoonup \alpha = \sum \alpha(c_1)c_2$ con $\alpha(c_1) \in k$, entonces $c \leftharpoonup C^*$ está contenido el subespacio generado por $\{c_2 : \Delta(c) = c_1 \otimes c_2\}$ donde los c_2 son finitos. Entonces $\dim_k(c \leftharpoonup C^*)$ es finita. Por lo tanto $\dim_k(c \leftharpoonup C^*)^*$ es finita.

Como $E(S) \cap U = 0$ y $S \hookrightarrow E(S) \hookrightarrow C$, existe un morfismo inyectivo $E(S) \to C/U$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E(S) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & C \arrow[d, "\pi"] \\ & C/U. \end{tikzcd}$$

Entonces finalmente tenemos que $\dim_k E(S) \leq \dim_k(C/U) \leq \dim_k(c \leftharpoonup C^*)^*$ que es finita. Luego $\dim_k E(S)$ es finita.

◆

3.4. Densidad de C^{*rat}

Proposición 3.4.1. *Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ en ${}^C\mathcal{M}$. Entonces $M^* \cong \prod_{i \in I} M_i^*$ y $\bigoplus_{i \in I} M_i^* \hookrightarrow \prod_{i \in I} M_i^*$ en ${}_{C^*}\mathcal{M}$. Si $\#I < \infty$, tenemos que $M^* \cong \bigoplus_{i \in I} M_i^*$.*

Demostración. $\prod_{i \in I} M_i^* = \{(\alpha_i)_{i \in I} : \alpha_i \in M_i^* \text{para todo } i \in I\}$.

$\prod_{i \in I} M_i^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ vía la acción $\beta \bullet (\alpha_i)_{i \in I} = (\beta \cdot \alpha_i)_{i \in I}$ para todo $\beta \in C^*$ y $(\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i^*$.

Definimos $\Theta : M^* \to \prod_{i \in I} M_i^*$ por $\Theta(\alpha) = (\alpha_i)_{i \in I}$ donde $\alpha_i = \alpha|_{M_i}$.

Veamos que Θ es biyectiva: Sea $\Theta(\alpha) = \Theta(\beta)$, entonces $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i \in I$. Sea $m \in M$, entonces $m = \sum_{i \in I} \pi_i(m)$ donde $\pi_i : M \to M_i$ es la proyección de M sobre M_i. Luego $\alpha(m) = \sum_{i \in I} \alpha(\pi_i(m)) = \sum_{i \in I} \alpha_i(\pi_i(m)) = \sum_{i \in I} \beta_i(\pi_i(m)) = \sum_{i \in I} \beta(\pi_i(m)) = \beta(m)$ para todo $m \in M$. Entonces Θ es inyectivo.
Sea $(\gamma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i^*$. Definimos $\alpha \in M^*$ por $\alpha(m) = \sum_{i \in I} \gamma_i(m_i)$ donde $m = \sum_{i \in I} m_i$. Entonces $\alpha_i(m_i) = \alpha(m_i) = \gamma_i(m_i)$ para todo $m_i \in M_i$ y para todo $i \in I$. Luego Θ es sobreyectiva.

Veamos ahora que Θ es un morfismo de C^*-módulos:

Sean $\alpha \in C^*$ y $\beta \in M^*$. entonces

$$\Theta(\alpha \cdot \beta)_i(m_i) = (\alpha \cdot \beta)|_{M_i}(m_i) = \sum_{j \in J} \alpha(c_{ij})\beta(m_{ij}) \text{ donode } \rho(m_i) = \sum_{j \in J} c_{ij} \otimes m_{ij} \text{ siendo } \rho \text{ la coacción de } M.$$

$$(\alpha \centerdot \Theta(\beta))_i(m_i) = (\alpha \cdot \beta_i)(m_i) = \sum_{j \in J} \alpha(c_{ij})\beta_i(m_{ij}) = \sum_{j \in J} \alpha(c_{ij})\beta(m_{ij}) \qquad \text{para todo } m_i \in M_i.$$

Entonces $\Theta(\alpha \cdot \beta)_i = (\alpha \centerdot \Theta(\beta))_i$ para todo $i \in I$. Luego $\Theta(\alpha \cdot \beta) = (\alpha \centerdot \Theta(\beta))$.

$$\bigoplus_{i \in I} M_i^* = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i : \alpha_i \in M_i^* \text{ y } \alpha_i = 0 \text{ salvo una cantidad finita de subíndices} \right\}.$$

Consideremos $\iota : \bigoplus_{i \in I} M_i^* \hookrightarrow \prod_{i \in I} M_i^*$ dada por $\iota(\sum_{i \in i} \alpha_i) = (\alpha_i)_{i \in I}$. Es claro que ι es un morfismo inyectivo.

Supongamos ahora que $\#I = n$. Veamos en este caso que ι es un isomorfismo.
Sea $(\alpha_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n M_i^*$. Entonces consideramos $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Claramente $\alpha \in \bigoplus_{i=1}^n M_i^*$ y $\iota(\alpha) = (\alpha_i)_{i=1}^n$. Entonces ι es sobreyectivo.

◆

Observación 3.4.1. *La Proposición 3.4.1 prueba en particular que $M^* \cong \prod_{i \in I} M_i^*$ como espacios vectoriales y si $\#I < \infty$ es $M^* \cong \bigoplus_{i \in I} M_i^*$.*

Lema 3.4.2. *Sea $V = V_1 \oplus V_2$ como espacios vectoriales y sean $X_1 \subseteq V_1^*$ y $X_2 \subseteq V_2^*$ subespacios. Si $X = X_1 \oplus X_2$ es denso en V^*, entonces X_i es denso en V_i^* para $i = 1, 2$.*

Demostración. Sea $x \in X_1^\perp$. Si $f \in X$, entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_i \in X_i$ para $i = 1, 2$. Dado que $V = V_1 \oplus V_2$, aplicando la Observación 5.3.1, es $V^* = V_1^* \oplus V_2^*$. Como $f_2 \in X_2 \subseteq V_2^*$ es $f_2(V_1) = 0$.
Si $x \in X_1^\perp$, entonces $x \in V_1$ y por lo anterior $f_2(x) = 0$. Además $f_1(x) = 0$ porque $x \in X_1^\perp$. Entonces $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$, luego $x \in X^\perp$. Como X es denso en V^*, por el Corolario 2.1.3, es $X^\perp = 0$ entonces $x = 0$. Por lo tanto $X_1^\perp = \{0\}$. Entonces también por el Corolario 2.1.3 es X_1 denso en V_1^*. De igual forma se prueba que X_2 es denso en V_2^*.

◆

Lema 3.4.3. *Sea V un k-espacio vectorial tal que $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ donde $\{V_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios de V. Entonces $\bigoplus_{i \in I} V_i^*$ es denso en V^*.*

Demostración. Sea $X = \bigoplus_{i \in I} V_i^*$ subespacio de V^*. Por el Corolario 2.1.3 alcanza con probar que $X^\perp = 0$.
Supongamos que $X^\perp \neq 0$, entonces existe $0 \neq x \in X^\perp$. Como $0 \neq x \in V$ es $x = \sum_{i \in I} x_i$, con algún $x_i \neq 0$. Sea $f \in V^*$ tal que $f(V_j) = 0$ para todo $j \neq i$ y $f(x_i) \neq 0$, claramente $f \in X$. Como $x \in X^\perp$ tenemos que $f(x) = 0$, además $f(x) = f(x_i)$. Luego $f(x_i) = 0$ esto contradice la definición de f. Entonces $X^\perp = 0$.

◆

Lema 3.4.4. *Sea $u : V \to V'$ un mapa k-lineal y $u^* : V'^* \to V^*$ el morfismo dual de u. Entonces:*
i) Si X es un subespacio de V'^*, $(u^*(X))^\perp = u^{-1}(X^\perp)$.
ii) Si u es inyectivo e $Y \subseteq V'^*$ es denso, $u^*(Y)$ es denso en V^*.

Demostración. i) Un $x \in u^*(X)^\perp$ si y solo si $f(u(x)) = 0$ para todo $f \in X$, si y solo si $u(x) \in X^\perp$, si y solo si $x \in u^{-1}(X^\perp)$. Entonces $u^*(X)^\perp = u^{-1}(X^\perp)$.

ii) Sea $Y \subseteq V'^*$ denso y u inyectivo. Por el Corolario 2.1.3 alcanza probar que $u^*(Y)^\perp = 0$.

$$\begin{aligned} u^*(Y)^\perp &= u^{-1}(Y^\perp) && \text{[por i)]} \\ &= u^{-1}(0) && \text{[Y es denso]} \\ &= 0. && \text{[u es inyectivo]} \end{aligned}$$

◆

Lema 3.4.5. *Sea $M \in {}^C\mathcal{M}$ y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de C-subcomódulos de M tal que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Entonces $\bigoplus_{i\in I}(M_i)_l^{*rat} \hookrightarrow M_l^{*rat}$. Si $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, es $M_l^{*rat} \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i)_l^{*rat}$.*

Demostración. Como $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ tenemos que $M^* \cong \prod_{i\in I} M_i^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$, por la Observación 5.3.1.

Como $M_i^* \hookrightarrow M^*$ para todo $i \in I$, es $(M_i)_l^{*rat} \hookrightarrow M_l^{*rat}$ para todo $i \in I$. Entonces $\bigoplus_{i\in I}(M_i)_l^{*rat} \hookrightarrow M_l^{*rat}$.

Si $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Entonces por la Proposición 3.4.1 es $M^* \cong \bigoplus_{i=1}^n M_i^*$. Observar que en general vale que si $N_1, \cdots, N_r \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ entonces $(\bigoplus_{i=1}^r N_i)_l^{rat} \cong \bigoplus_{i=1}^n (N_i)_l^{rat}$. Luego se deduce que $M_l^{*rat} \cong (\bigoplus_{i=1}^n M_i^*)_l^{rat} \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i)_l^{*rat}$. Entonces $M_l^{*rat} \cong \bigoplus_{i=1}^n (M_i)_l^{*rat}$.

◆

Lema 3.4.6. *Sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales. Para cada $i \in I$ sea X_i un subespacio denso en Y_i^*. Si $V = \bigoplus_{i\in I} Y_i$, entonces $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es denso en el subespacio $\bigoplus_{i\in I} Y_i^*$ de V^*.*

Demostración. Recordemos que X es denso en V^* si y solo si para todo $\varphi \in V^*$, $v_1, \cdots, v_n \in V$, existe $\psi \in X$ tal que $\psi(v_i) = \varphi(v_i)$ para todo $i = 1, \cdots, n$.
Sea $\varphi \in \bigoplus_{i\in I} Y_i^*$ y $v^1, \cdots, v^n \in V$. Entonces $v^l = \sum_{i\in I} v_i^l$ con $v_i^l \in Y_i$ finitos y $\varphi = \sum_{i\in I} \varphi_i$, con $\varphi_i \in Y_i^*$ finitos. Entonces podemos suponer que existe $J \subset I$ finito tal que $v^l = \sum_{i\in J} v_i^l$ y $\varphi = \sum_{i\in J} \varphi_i$ para todo $l = 1, \cdots, n$.
Si $J = \{i_1, \cdots, i_r\}$ podemos suponer que $\varphi = \varphi_{i_1} + \cdots + \varphi_{i_r}$ y $v^l = v_{i_1}^l + \cdots + v_{i_r}^l$ para todo $l = 1, \cdots, n$. $\vartheta(\varphi, v_1, \cdots, v_n) \cap \bigoplus_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ si y solo si existe $\psi \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ tal que $\psi(v^l) = \varphi(v^l)$ para todo $l = 1, \cdots, n$, si solo si $\sum_{i\in I} \psi_i(\sum_j v_{i_j}^l) = \sum_{i\in I} \varphi_i(\sum_j v_{i_j}^l)$, si y solo si $\sum_{k=1}^n \psi_{i_k}(v_{i_k}^l) = \sum_{k=1}^n \varphi_{i_k}(v_{i_k}^l)$ para todo $l = 1, \cdots, n$.
Para cada $k = 1, \cdots, r$, como X_{i_k} es denso en $Y_{i_k}^*$ y $\varphi_{i_k} \in Y_{i_k}^*, v_{i_k}^1, \cdots, v_{i_k}^n \in Y_{i_k}$, entonces existe $\psi_{i_k} \in X_{i_k}$ tal que $\varphi_{i_k}(v_{i_k}^l) = \psi_{i_k}(v_{i_k}^l)$ para todo $l = 1, \cdots, n$. Entonces existen $\psi_{i_1}, \cdots, \psi_{i_r}$ tal que $\varphi_{i_k}(v_{i_k}^l) = \psi_{i_k}(v_{i_k}^l)$ para todo $l = 1, \cdots, n$. Luego $\sum_{k=1}^r \varphi_{i_k}(v_{i_k}^l) = \sum_{k=1}^r \psi_{i_k}(v_{i_k}^l)$. Si definimos $\psi = \sum_{j=1}^r \psi_{i_j}$, tenemos que $\psi \in \bigoplus_{i\in I} X_i$ y $\psi(v^l) = \varphi(v^l)$ para todo $l = 1, \cdots, n$.
Entonces $\bigoplus_{i\in I} X_i$ es denso en $\bigoplus_{i\in I} Y_i^*$.

◆

Teorema 3.4.7. *Sea C una coálgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
i) C_l^{*rat} es denso en C^*.
ii) Para todo $S \in {}^C\mathcal{M}$ simple, $E(S)_l^{*rat}$ es denso en $E(S)^*$.
iii) Para todo $Q \in {}^C\mathcal{M}$ inyectivo, Q_l^{*rat} es denso en Q^*.
iv) Para todo $M \in {}^C\mathcal{M}$, M_l^{*rat} es denso en M^*.

Demostración. i)$\Rightarrow$ ii) Sea $S \in {}^C\mathcal{M}$ simple. Entonces por la Proposición 3.3.4 existe $E(S) \subset C$ y por lo tanto existe X subcomódulo de C, tal que $C = E(S) \oplus X \in {}^C\mathcal{M}$. Luego por el Lema 3.4.5 es $C^* \cong E(S)^* \oplus X^*$ en ${}_{C^*}\mathcal{M}$. Entonces aplicando el Lema 3.4.5 es $E(S)_l^{*rat} \oplus X_l^{*rat} = C_l^{*rat}$. Como C_l^{*rat} es denso en C^*, aplicando el Lema 3.4.2 es $E(S)_l^{*rat}$ denso en $E(S)^*$.

ii)$\Rightarrow$ iii) Sea $Q \in {}^C\mathcal{M}$ inyectivo. Entonces por la Proposición 3.3.9 es $Q = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ con $S_i \in {}^C\mathcal{M}$ simple, luego $Q^* \cong \prod_{i\in I} E(S_i)^*$. Por el Lema 3.4.3 es $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*$ denso en Q^*.
Por otro lado aplicando el Lema 3.4.5 es $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat} \subseteq Q_l^{*rat}$.

Como $E(S_i)_l^{*rat}$ es denso en $E(S_i)^*$ entonces, por el Lema 5.1.4, $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat}$ es denso en $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*$. Además por ser $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*$ denso en Q^* tenemos que $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat}$ es denso en Q^*. Por otro lado $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat} \subseteq Q_l^{*rat}$. Entonces Q_l^{*rat} es denso en Q^*.

iii) $\Rightarrow$ iv) Sea $\iota : M \to E(M)$ la inclusión. Consideremos $\iota^* : E(M)^* \to M^*$ el morfismo dual.
Por iii) $E(M)_l^{*rat}$ es denso en $E(M)^*$. Entonces aplicando el Lema 3.4.4 es $\iota^*(E(M)_l^{*rat})$ denso en M^*. Como ι^* es un morfismo de C^*-módulos a izquierda es $\iota^*(E(M)_l^{*rat}) \subseteq M_l^{*rat}$. Entonces M_l^{*rat} es denso en M^*.

iv)$\Rightarrow$ i) Es inmediato.

◆

Proposición 3.4.8. *Sea $M \in {}^C\mathcal{M}$ y Q un subcomódulo de M. Si C_l^{*rat} es denso en C^*, existe N subcomódulo maximal de M de codimensión finita, con $Q < N \neq M$.*

Demostración. Sea $Q \in {}^C\mathcal{M}$, entonces $Q^\perp \in {}_{C^*}\mathcal{M}$.

Veamos primero que $Q^\perp \cong (M/Q)^*$ en ${}_{C^*}\mathcal{M}$.
Recordemos que $Q^\perp = \{\alpha \in M^* : \alpha(Q) = 0\}$.
Sea $\pi : M \to M/Q$ la proyección canónica. Consideremos $\pi^* : (M/Q)^* \to M^*$ dado por $\pi^*(\alpha) = \alpha \cdot \pi$.
Veamos que π^* es un morfismo en ${}_{C^*}\mathcal{M}$: Sea $\alpha \in C^*$ y $\beta \in (M/Q)^*$, entonces

$$\begin{aligned}(\pi^*(\alpha \centerdot \beta))(m) &= (\alpha \centerdot \beta)(\pi(m)) \\ &= \sum \alpha(c_i)\beta(\overline{m_i}) \qquad [\overline{\rho}(\ \overline{m}) = \sum c_i \otimes \overline{m_i} \text{ si } \rho(m) = \sum c_i \otimes m_i] \\ &= (\alpha \cdot (\beta \cdot \pi))(m) \qquad \text{para todo } m \in M.\end{aligned}$$

Si $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$, es $\alpha \circ \pi = \beta \circ \pi$. Como π es sobreyectivo tenemos que $\alpha = \beta$, entonces π^* es inyectivo.

Sea $\beta \in \mathrm{Im}(\pi^*)$, entonces existe $\alpha \in (M/Q)^*$ tal que $\beta(m) = \alpha(\overline{M})$, para todo $m \in M$.
Sea $m \in Q$, entonces $\overline{m} = 0$. Luego $\beta(m) = 0$, por lo tanto tenemos que $\mathrm{Im}(\pi^*) \subseteq Q^\perp$.

Sea $\beta \in Q^\perp \subset M^*$. Entonces $Q \subset \ker(\beta)$, luego existe $\widehat{\beta} : M/Q \to k$ tal que $\beta = \widehat{\beta} \circ \pi = \pi^*(\widehat{\beta})$. Entonces $Q^\perp \subseteq \mathrm{Im}(\pi^*)$.

Finalmente tenemos que $(M/Q)^* \xrightarrow[\pi^*]{\cong} Q^\perp$. Entonces $Q_l^{\perp rat} \xrightarrow{\cong} (M/Q)_l^{*rat}$.

Como C_l^{*rat} es denso en C^*, alplicando el Teorema 3.4.7 es $(M/Q)_l^{*rat}$ denso en $(M/Q)^*$. En particular $(M/Q)_l^{*rat} \neq 0$. Entonces $Q_l^{\perp rat} \neq 0$. Luego $0 \neq Q_l^{\perp rat} < M_l^{*rat}$ en $\mathcal{M}^C$. Entonces aplicando la Proposición 1.2.2 existe $0 \neq X < Q_l^{\perp rat}$, X simple en $\mathcal{M}^C$. Luego por la Proposición 1.2.2 es X de dimensión finita.
Sea $N = X^\perp = \{m \in M :\ \alpha(m) = 0,\ \forall \alpha \in X\}$. El subespacio N es un subcomódulo de M. Aplicando la Proposición 2.1.4 es $\mathrm{codim}_k N = \dim_k X$, entonces $\mathrm{codim}_k N$ es finita.

Como $X \neq 0$ es $N \neq M$.

Veamos que N es maximal: Sea P subcomódulo de M tal que $N \subseteq P \subsetneq M$. Entonces $P^{\perp} \subseteq N^{\perp} = (X^{\perp})^{\perp} = X$ porque $\dim_k X < \infty$. P es un subespacio de M, entonces aplicando el Teorema 2.1.2 es $P^{\perp\perp} = P \neq M$. Luego $P^{\perp} \neq 0$. Como X es simple tenemos que $P^{\perp} = X$, entonces $N = X^{\perp} = P^{\perp\perp} = P$. Entonces N es un subcomódulo maximal de M.

◆

Teorema 3.4.9. *i) Si se cumple que para todo $S \in {}^C\mathcal{M}$ simple, $E(S) \in {}^C\mathcal{M}_{fin}$. Entonces C_l^{*rat} es denso en C^*.*
ii) Si se cumple que para todo $S \in \mathcal{M}^C$ simple, $E(S) \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Entonces C_r^{*rat} es denso en C^*.

Demostración. i) Aplicando el Corolario 3.3.10 tenemos que $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i) \in {}^C\mathcal{M}$, con S_i subcomódulo simple de C para todo $i \in I$. Como $E(S_i) \in {}^C\mathcal{M}_{fin}$, aplicando la Proposición 2.3.8 es $E(S_i)^* \in \mathcal{M}^C_{fin}$. Entonces $E(S_i)_l^{*rat} = E(S_i)^* \in {}_{C^*}\mathcal{M}$ para todo $i \in I$.
Dado que $C = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$, aplicando el Lema 3.4.3, es $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*$ denso en C^*. Entonces $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat}$ es denso en C^* y como $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)_l^{*rat} \subseteq \left(\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*\right)_l^{rat}$ tenemos que $\left(\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*\right)_l^{rat}$ es denso en C^*. Además como $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^* \subseteq C^*$ es $\left(\bigoplus_{i\in I} E(S_i)^*\right)_l^{rat} \subseteq C_l^{*rat}$. Entonces C_l^{*rat} es denso en C^*.

ii) Aplicando el Teorema 1.1.5 tenemos que las categorías ${}^{C^{cop}}\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^C$ son isomorfas. Entonces si para todo $S \in \mathcal{M}^C$ simple, es $E(S) \in \mathcal{M}^C_{fin}$ tenemos que para todo $S \in {}^{C^{cop}}\mathcal{M}$ simple, es $E(S) \in {}^{C^{cop}}\mathcal{M}_{fin}$. Luego aplicando i) tenemos que $(C^{cop})_l^{*rat}$ es denso en $(C^{cop})^*$. Observar que $(C^{cop})_l^{*rat} = C_r^{*rat}$, entonces C_r^{*rat} es denso en C^*.

◆

Lema 3.4.10. *Sea C una coálgebra. Cnsideremos $M \in \mathcal{M}^C (M \in^C \mathcal{M})$, X subespacio de C^* e Y subespacio de M. Entonces $\overline{X} \cdot Y = X \cdot Y (Y \cdot \overline{X} = Y \cdot X)$. Donde $\overline{X}$ es la clausura de X con la topología finita.*

Demostración. Probaremos solamente el caso $N \in \mathcal{M}^C$, el otro caso es análogo.
Claramente $X \cdot Y \subseteq \overline{X} \cdot Y$.
Sea $\alpha \in \overline{X}$ e $y \in Y$. Si $\rho : M \to M \otimes C$ es la coacción de M, $\rho(y) = \sum y_0 \otimes y_1$, entonces $\alpha \cdot y = \sum \alpha(y_1) y_0$. Como X es denso en $\overline{X}$, existe $\beta \in X$ tal que $\alpha(y_1) = \beta(y_1)$ para todos los y_1. Entonces $\beta \cdot y = \sum \beta(y_1) y_0 = \sum \alpha(y_1) y_0 = \alpha \cdot y$. Luego $\alpha \cdot y = \beta \cdot y \in X \cdot Y$. Entonces $\overline{X} \cdot Y \subseteq X \cdot Y$.

◆

Teorema 3.4.11. *Sea C una colǵebra tal que C_l^{*rat} es denso en C^*. entonces C_l^{*rat} es un ideal bilateral idempotente de C^*. Si además C_r^{*rat} es denso en C^* tenemos que $C_l^{*rat} = C_r^{*rat}$.*

Demostración. Sea $I = C_l^{*rat}$, veamos que es un ideal bilateral:
Sea $\beta \in I$ y sea $\alpha \in C^*$. Como $\beta \in I$ existen $\beta_i \in C^*$, $x_i \in C$, $i = 1, \cdots, n$ tal que $\gamma \cdot \beta = sum_{i=1}^n \gamma(x_i)\beta_i$ para todo $\gamma \in C^*$. Entonces:
$\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha) = (\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha = (\sum_{i=1}^n \gamma(x_i)\beta_i) \cdot \alpha = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i)(\beta_i \cdot \alpha)$. Entonces $\beta \cdot \alpha \in I$.
Como $C_l^{*rat} \subseteq C^*$ es un C^*-submódulo, es un ideal a izquierda de C^*.

Como I es denso en C^* tenemos que $\overline{I} = C^*$. Entonces aplicando el Lema 3.4.10 es $I \cdot I = \overline{I} \cdot I = C^* \cdot I = I$. Luego $I^2 = I$.

Si además $J = C_r^{*rat}$ es denso en C^*, tenemos que $\overline{I} = \overline{J} = C^*$, donde $I \in \mathcal{M}^C$ y $J \in^C \mathcal{M}$. Entonces aplicando el Lema 3.4.10 es $J \cdot I = \overline{J} \cdot I = C^* \cdot I = I$ y $J \cdot I = J \cdot \overline{I} = J \cdot C^* = J$. Luego tenemos que $I = J$.

◆

Capítulo 4

Integrales

En este capítulo se definen las *integrales* para un álgebra aumentada, se dan algunos ejemplos y se estudia la relación entre la semisimplicidad de un álgebra de Hopf H y la existencia de una integral t en H tal que $\varepsilon(t) \neq 0$. Una referencia para este capítulo es [DNR01].

4.1. Integrales para un álgebra de Hopf

Definición 4.1.1. Un *álgebra aumentada* es un par (H, ε) en el cual H es un álgebra y $\varepsilon : H \to k$ es un morfismo de álgebras.

Proposición 4.1.1. *1) Toda biálgebra es un álgebra aumentada.*
2) Si H es un álgebra de Hopf. Entonces (H^*, E) es un álgebra aumentada definiendo $E(\alpha) = \alpha(1_H)$, para todo $\alpha \in H^*$ y el mapa $S^* : H^* \to H^*$, $S^*(\alpha) = \alpha \circ S$ es un antimorfismo de álgebras.

Demostración. 1) Es inmediato.
2) Veamos que E es un morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} E(\alpha\beta) &= \alpha\beta(1_H) = \alpha(1_H)\beta(1_H) = E(\alpha)E(\beta), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in H^*. \\ E(1_{H^*}) &= E(\varepsilon) = \varepsilon(1_H) = 1. \end{aligned}$$

Ahora veamos que S^* es un antimorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} S^*(\alpha\ \beta)(x) &= ((\alpha\ \beta) \circ S)(x) = \sum \alpha(S(x)_1)\ \beta(S(x)_2) = \sum \alpha(S(x_2))\ \beta(S(x_1)) = \sum (\alpha \circ S)(x_2)\ (\beta \circ S)(x_1) \\ &= \sum S^*(\alpha)(x_2)\ S^*(\beta)(x_1) = (S^*(\beta)\ S^*(\alpha))(x), \quad \text{para todo } x \in H. \\ S^*(1_{H^*}) &= S^*(\varepsilon) = \varepsilon \circ S = \varepsilon = 1_{H^*}. \end{aligned}$$

◆

Definición 4.1.2. Sea H un álgebra aumentada. Una *integral a izquierda* en H es un elemento $\mathrm{t} \in H$ tal que $xt = \varepsilon(x)t$, para todo $x \in H$ y una *integral a derecha* en H es un elemento $\mathrm{t} \in H$ tal que $tx = \varepsilon(x)t$, para todo $x \in H$.

Proposición 4.1.2. *Sea $\mathrm{t} \in H$, t es una integral a izquierda en H si y solo si t es una integral a derecha en H^{op}.*

Demostración. t es una integral a izquierda en H si y solo si $xt = \varepsilon(x)t$, para todo $x \in H$ si y solo si $t \cdot_{op} x = \varepsilon(x)t$, para todo $x \in H$ si y solo si t es una integral a derecha en H^{op}.

◆

Ejemplo 4.1.1. Sea $(G\ ,\ e\ ,\cdot)$ un grupo finito, consideremos el espacio vectorial de base G:

$$kG := \{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\ k_i g_i : k_i \in k, g_i \in G\}$$

En kG tenemos una estructura de álgebra de Hopf definida por $m(f \otimes g) = f \cdot g$, $u(1) = e$, $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ y $S(g) = g^{-1}$, para todo $f, g \in G$.
Definimos $t := \sum_{g \in G} g$, veamos que t es una integral a izquierda y derecha en kG.
Sea $h \in kG$, entonces $ht = h \sum_{g \in G} g = \sum_{g \in G} hg = \sum_{f \in G} f$, luego $ht = t$, para todo $h \in G$. De donde deducimos que t es una integral a izquierda en H.
De forma análoga se prueba que t es una integral a derecha en H.

Ejemplo 4.1.2. Sea k un cuerpo de característica $p > 0$. Sobre el álgebra de polinomios $k[X]$ se induce una estructura de álgebra de Hopf como sigue: usando la propiedad universal del álgebra de polinomios existen y son únicos los siguientes morfismos de álgebras $\Delta : k[X] \to k[X] \otimes k[X]$ tal que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\varepsilon : k[X] \to k$ con $\varepsilon(X) = 0$ y $S : k[X] \to k[X]$, tal que $S(X) = -X$.
Por otro lado $\Delta(X^p) = X^p \otimes 1 + 1 \otimes X^p$ (porque estamos en característica p y todos los coeficientes binomiales C_i^p con 1 ≤ i < p son divisibles por p), $\varepsilon(X^p) = 0$ y $S(X^p) = -X^p$. Entonces el ideal generado por X^p es un ideal de Hopf y por lo tanto $H = \frac{k[X]}{(X^p)}$ es un álgebra de Hopf.
Sea $x = \overline{X}$ en H y definimos t= x^{p-1}. Veamos que t es una integral a izquierda y derecha en H:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{p-1} k_i x^i\right) x^{p-1} &= k_0 x^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} k_i x^{p+i-1} \\ &= k_o x^{p-1} && [x^p = 0] \\ &= \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{p-1} k_i x^i\right) x^{p-1} && [\varepsilon(x) = 0]\end{aligned}$$

Entonces x^{p-1} es una integral a izquierda en H. Como H es conmutativa resulta que t es también una integral a derecha en H.

Ejemplo 4.1.3. (El álgebra de Hopf de dimensión 4 de Sweedler)
Asumamos que k es un cuerpo de característica distinta de 2. Sea H la k- álgebra generada por c y x que satisfacen las siguientes relaciones: $c^2 = 1,\quad x^2 = 0,\quad xc = -cx.$
Se prueba que H es un k-espacio vectorial de dimensión 4, del cual una base es $\{1, c, x, cx\}$. El espacio vectorial H admite una estructura de álgebra de Hopf definiendo:

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1, \quad \varepsilon(c) = 1,\ \varepsilon(x) = 0, \quad S(c) = c^{-1},\ S(x) = -cx.$$

Veamos que $x + cx$ es una integral a izquierda de H:
Sea $t = x + cx$, entonces $t = \varepsilon(1)t$, $ct = cx + x = \varepsilon(c)(x + cx) = \varepsilon(c)t$, $xt = x^2 + xcx = 0 - cx^2 = 0 = \varepsilon(x)t$, $cxt = cx^2 + cxcx = 0 - cx^2c = 0 = \varepsilon(cx)t$. Entonces $yt = \varepsilon(y)t$, para todo $y \in H$.
Luego t es una integral a izquierda en H.
De forma análoga se prueba que $x - cx$ es una integral a derecha en H.

Proposición 4.1.3. *Sea H un álgebra aumentada. Vale que $I := \{t \in H : t$ es una integral a izquierda en $H\}$ es un ideal bilateral de H.*

Demostración. Es fácil probar que I es un subespacio de H. Veamos que si $t \in I$ y $x \in H$, entonces $xt \in I$ y $tx \in I$.
Sea $y \in H$, entonces, $y(xt) = (yx)t = \varepsilon(yx)t = \varepsilon(y)\varepsilon(x)t = \varepsilon(y)xt$, por lo tanto $xt \in I$ y $y(tx) = (yt)x = \varepsilon(y)tx$, entonces $tx \in I$.

◆

4.2. Semisimplicidad de un álgebra de Hopf

Teorema 4.2.1. *Sea H un álgebra de Hopf. Entonces H es semisimple si y solo si existe una integral a izquierda t en H para la cual $\varepsilon(t) \neq 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) La counidad ε: $H \to k$ es un morfismo de álgebras, entonces $\ker(\varepsilon)$ es un ideal de H de codimensión 1. Sea $x \in H$ e $y \in \ker(\varepsilon)$ entonces $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = 0$. Luego $xy \in ker(\varepsilon)$.
Como H es semisimple, $\ker(\varepsilon)$ es sumando directo de H, por lo tanto existe I ideal izquierdo de H tal que $H = \ker(\varepsilon) \oplus I$. Luego $1 = z + t$ con $z \in \ker(\varepsilon)$ y $t \in I \subset H$. Claramente $t \neq 0$, porque $1 \notin \ker(\varepsilon)$.
Como $\ker(\varepsilon)$ tiene codimensión 1, I tiene dimensión 1 e $I = kt$.
Sea ahora $l \in H$, entonces $lt \in I$ (porque I ideal a izquierda de H). La representación de lt en la suma directa $H = \ker(\varepsilon) \oplus I$ es $lt = 0 + lt$. Por otro lado : $l = (l - \varepsilon(l)1) + \varepsilon(l)1$, por lo tanto $lt = (l - \varepsilon(l)1)t + \varepsilon(l)t$.
Como $(l - \varepsilon(l)1)t \in \ker(\varepsilon)$, $\varepsilon(l)t \in I$ y la representación de un elemento de H como suma de dos elementos en $\ker(\varepsilon)$ e I es única, tenemos que $(l - \varepsilon(l)1)t = 0$ y $\varepsilon(l)t = lt$. Lo cual prueba que t es una integral a izquierda en H.
Además $I \cap ker(\varepsilon) = 0$ y $t \neq 0$, entonces $\varepsilon(t) \neq 0$. Esto termina de probar la primera implicancia.

($\Leftarrow$) Sea t una integral a izquierda en H tal que $\varepsilon(t) \neq 0$. Podemos suponer que $\varepsilon(t) = 1$, porque si esto no ocurre, como $\varepsilon(t) \neq 0$, tomamos una nueva integral $t' = t/\varepsilon(t)$, con $\varepsilon(t') = 1$.
Hay que ver que H es semisimple. Para ello veremos que para todo $M \in {}_H\mathcal{M}$ y todo H-submódulo N de M, resulta que N es sumando directo de M.
Sea π: $M \to N$ mapa lineal tal que $\pi\mid_N = id_N$ (al escribir M como suma directa de N con otro subespacio, definimos π como la proyección de M sobre N).
Definimos $P : M \to N$, tal que $P(m) = \sum t_1 \pi(S(t_2)m)$ para todo $m \in M$, donde $\Delta(t) = \sum t_1 \otimes t_2$.
Primero veamos que $P(n) = n$, para todo $n \in N$.

$$\begin{aligned}
P(n) &= \sum t_1\ \pi(S(t_2)n) \\
&= \sum t_1\ S(t_2)n && [S(t_2)n \in N] \\
&= \varepsilon(t)1_H n && [t_1 S(t_2) = \varepsilon(t)1] \\
&= n && [\varepsilon(t) = 1_k]
\end{aligned}$$

Ahora veamos que P es un morfismo de H-módulos a izquierda. Para todo $x \in H$ y $m \in M$ tenemos

$$\begin{aligned}
xP(m) &= \sum xt_1\ \pi(S(t_2)\ m) \\
&= \sum x_1\varepsilon(x_2)t_1\ \pi(S(t_2)\ m) && [x = \sum x_1\varepsilon(x_2)] \\
&= \sum x_1 t_1\ \pi(S(t_2)\varepsilon(x_2)\ m) && [\pi \text{ es lineal}] \\
&= \sum x_1 t_1\ \pi(S(t_2)\ S(x_2)\ x_3\ m) && [\varepsilon(x)1 = \sum S(x_1)x_2]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum x_1 t_1 \; \pi(S(x_2 t_2)\; x_3\; m) && [S(yx) = S(x)S(y)] \\
&= \sum (x_1 t)_1 \; \pi((S(x_1 t)_2) x_2 m) && [x_1 t = \varepsilon(x_1) t] \\
&= \sum (\varepsilon(x_1) t)_1 \; \pi((S(\varepsilon(x_1) t)_2)\; x_2\; m) && \\
&= \sum \varepsilon(x_1) t_1 \; \pi(S(t_2)\; x_2\; m) && \\
&= \sum t_1 \; \pi(S(t_2) \varepsilon(x_1)\; x_2\; m) && \\
&= \sum t_1 \pi(S(t_2)\; x\; m) && [x = \sum \varepsilon(x_1) x_2] \\
&= P(xm)
\end{aligned}
$$

Entonces $xP(m) = P(xm)$, para todo $m \in M$ y para todo $x \in H$.
Por lo tanto $P : M \to N$ es un morfismo de H-módulos a izquierda, tal que $P|_N = id_N$.
Luego N es un sumando directo en M, de hecho $M = N \oplus ker(P)$.

◆

Observación 4.2.1. *En el Corolario 6.0.9 veremos que en el caso de un álgebra de Hopf, el espacio de las integrales a izquierda y el espacio de las integales a derecha tienen dimensión* ≤ 1.

Retomando los ejemplos de la Sección 4.1, veamos en que casos las álgebras de Hopf mencionadas son semisimples.

1) Sea $H = kG$ el álgebra de grupo y $t = \sum_{g \in G} g$ una integral a izquierda.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\textstyle\sum_{g \in G} g) = |G| 1_k.$$

Por lo tanto el álgebra de grupo es semisimple si y solo si $|G|1_k \neq 0$, es decir si car(k) no divide a $|G|$. Este es el teorema de Maschke para grupos finitos.

2) Sea $H = k[X]/(X^p)$ y $t = x^{p-1}$ una integral a izquierda. Como $\varepsilon(t) = \varepsilon(x^{p-1}) = 0$, tenemos que H no es semisimple.

3) Sea H el álgebra de Hopf de dimensión 4 de Sweedler y $t = x + cx$ una integral a izquierda en H.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(x) + \varepsilon(c)\varepsilon(x) = 0.$$

Luego H no es semisimple.

Proposición 4.2.2. *Sea H un álgebra de Hopf. Si J es un ideal a derecha (izquierda) no nulo que es también un coideal a derecha (izquierda) de H. Entonces $J = H$. En particular se obtiene lo siguiente :*
i) Si H es un álgebra de Hopf que contiene un ideal derecho (izquierdo) no nulo de dimensión finita, entonces H tiene dimensión finita.
ii) Un álgebra de Hopf que contiene una integral a izquierda no nula es de dimensión finita.
iii) Un álgebra de Hopf semisimple es de dimensión finita.

Demostración. J es un ideal a derecha y un coideal a derecha, entonces $JH \subseteq J$ y $\Delta(J) \subseteq J \otimes H$.
Si $\varepsilon(J) = 0$, entonces para todo $x \in J$ tenemos $x = \sum \varepsilon(x_1)x_2 \in \varepsilon(J)H = 0$, así que $J = 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\varepsilon(J) \neq 0$, luego existe $x \in J$ tal que $\varepsilon(x) = 1$. Entonces $1_H = \varepsilon(x)1_H = \sum x_1 S(x_2) \in JH \subseteq J$, por lo tanto $1_H \in J$. Luego $H = J$.

i) Sea J un ideal a derecha no nulo de dimensión finita y sea $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ una base de J.
Consideremos $I = H^* \rightharpoonup J$ (donde $\rightharpoonup$ fue definida en la Sección 2.1). Veamos que I es un ideal y un

coideal a derecha de H no nulo ($\varepsilon \rightharpoonup x = x$, entonces $J \subseteq I$)de dimensión finita. Entonces tenemos que $H = I$ y por lo tanto H tiene dimensión finita.

Veamos que I es un ideal a derecha de H ($IH \subseteq I$).

$$\begin{aligned}
(\alpha \rightharpoonup x)\, y &= \sum \alpha(x_2)\, x_1\, y \\
&= \sum \alpha(x_2)\, x_1\, \varepsilon(y_2) y_1 && [y = \sum \varepsilon(y_2) y_1] \\
&= \sum \alpha(x_2 \varepsilon(y_2))\, x_1 y_1 \\
&= \sum \alpha(x_2 y_2\, S(y_3))\, x_1 y_1 && [\varepsilon(x) 1 = \sum x_1 S(x_2)] \\
&= \sum x_1 y_1\, (S(y_3) \rightharpoonup \alpha)(x_2 y_2) \\
&= \sum (xy_1)_1\, (\alpha \leftharpoonup y_2)((xy_1)_2) && [\leftharpoonup \text{ fue definida en la Sección 2.1}] \\
&= \sum (\alpha \leftharpoonup y_2) \rightharpoonup (xy_1) \in I.
\end{aligned}$$

I es de dimensión finita: Sea $\{e_l : l \in \Lambda\}$ una base de H y para cada $i = 1, \cdots n$ sea $\Delta(x_i) = \sum_{l \in \Lambda} x_i^l \otimes e_l$, donde todos los $x_i^l \in H$ son cero salvo un conjumto finito de subíndices $I_i \subset \Lambda$. Luego $\alpha \rightharpoonup x_i = \sum_{l \in \Lambda} x_i^l \alpha(e_l)$, para todo $\alpha \in H^*$.
Consideremos $\alpha^l \in H^*$ tal que $\alpha^l(e_k) = \delta_{lk}$, luego $\alpha^k \rightharpoonup x_i = \sum_{l \in \Lambda} x_i^l \alpha^k(e_l) = \sum_{l \in \Lambda} x_i^l \delta_{kl} = x_i^k$, entonces $x_i^k \in H^* \rightharpoonup J$, para todo i, k. Por lo tanto $\{x_i^l : l \in I_i, i = 1, \cdots, n\}$ genera a $H^* \rightharpoonup J = I$. Entonces I es de dimensión finita.

Por último veamos que I es un coideal a derecha de H, es decir $\Delta(I) \subset I \otimes H$.
Primero $\Delta(\alpha \rightharpoonup x_i) = \sum_{l \in \Lambda} \Delta(x_i^l)\alpha(e_l)$, además $(id \otimes \Delta)\Delta(x_i) = (\Delta \otimes id)\Delta(x_i)$, entonces $\sum_{l \in \Lambda} \Delta(x_i^l) \otimes e_l = \sum_{k,l \in \Lambda} x_i^l \otimes e_l^k \otimes e_k$, aplicando $id \otimes \alpha$, tenemos que $\sum_{l \in \Lambda} \Delta(x_i^l)\alpha(e_l) = \sum_{k,l \in \Lambda} x_i^l \otimes e_l^k \alpha(e_k)$. Entonces $\Delta(\alpha \rightharpoonup x_i) = \sum_{k,l \in \Lambda} x_i^l \otimes e_l^k \alpha(e_k) \in I \otimes H$. Luego $\Delta(I) \subset I \otimes H$.

ii) Sea t una integral a izquierda en H, consideremos ($I = kt$) el subespacio generado por t. Observar que I es un ideal a izquierda de dimensión finita: $x \in H, u \in I \Rightarrow xu = xat = axt = a\varepsilon(x)t \in I$.
Entonces aplicando (i) H es de dimensión finita.

iii) Sea H un álgebra de Hopf semisimple, entonces aplicando el Teorema 4.2.1 existe una integral t tal que $\varepsilon(t) \neq 0$, esto implica ii).

◆

Capítulo 5

Cointegrales

En este capítulo se definen las *cointegrales* para una biálgebra y se dan algunas propiedades del espacio de las cointegrales. Se estudia la conexión existente entre el espacio de las cointegrales y H^{*rat}, donde H es un álgebra de Hopf y por último se prueba la equivalencia entre la existencia de una cointegral de un álgebra de Hopf que no se anula en 1_H y la cosemisimplicidad de dicha álgebra. También se dan algunos ejemplos de cointegrales. Una referencia para este capítulo es [DNR01].

5.1. Cointegrales para una biálgebra

Definición 5.1.1. Sea H una biálgebra. Una funcional $\Upsilon \in H^*$ es una *cointegral a izquierda* de H si $\sum \Upsilon(x_2)x_1 = \Upsilon(x)1$ para todo $x \in H$. El conjunto de las cointegrales a izquierda de H se nota por $\int_l$. Una funcional $\Upsilon \in H^*$ es una *cointegral a derecha* de H si $\sum \Upsilon(x_1)x_2 = \Upsilon(x)1$ para todo $x \in H$, el conjunto de las cointegrales a derecha de H se nota por $\int_r$. Es claro que $\int_l$ y $\int_r$ son subespacios de H^*.

Proposición 5.1.1. *Sea $\Upsilon \in H^*$, entonces Υ es una integral a izquierda (derecha) en H^* si y solo si Υ es una cointegral a izquierda (derecha) de H.*

Demostración. Primero observar que Υ es una integral a izquierda en H^* si y solo si $\alpha\Upsilon = E(\alpha)\Upsilon$ para todo $\alpha \in H^*$ si y solo si $\alpha\Upsilon = \alpha(1)\Upsilon$ para todo $\alpha \in H^*$.
($\Rightarrow$) Si $\alpha\Upsilon(x) = \sum \alpha(x_1)\Upsilon(x_2) = \alpha(\sum x_1\Upsilon(x_2)) = \alpha(\Upsilon(x)1) = \alpha(1)\Upsilon(x)$. Entonces $\alpha\Upsilon(x) = \alpha(1)\Upsilon(x)$ para todo $x \in H$, por lo tanto $\alpha\Upsilon = \alpha(1)\Upsilon$.
($\Leftarrow$) Si $\alpha\Upsilon = \alpha(1)\Upsilon$, entonces $\alpha\Upsilon(x) = \alpha(1)\Upsilon(x) = \alpha(\Upsilon(x)1)$ para todo $\alpha \in H^*$.
Por otro lado $\alpha\Upsilon(x) = (\alpha * \Upsilon)(x) = \sum \alpha(x_1)\Upsilon(x_2) = \alpha(\sum x_1\Upsilon(x_2))$.
Entonces $\alpha(\sum x_1\Upsilon(x_2)) = \alpha(\Upsilon(x)1)$ para todo $\alpha \in H^*$, luego $\sum x_1\Upsilon(x_2) = \Upsilon(x)1$.

◆

Proposición 5.1.2. *i) El subespacio $\int_l$ es un ideal de H^*.*
ii) Se cumple que $\int_l \subseteq H_l^{*rat}$, siendo H_l^{*rat} la parte racional a izquierda de H^*. En particular si $H_l^{*rat} = 0$, entonces $\int_l = 0$.

Demostración. *i)* Es inmediato aplicando la Proposición 5.1.1 y la Proposición 4.1.3.

ii) Es inmediato a partir de la Proposición 5.1.1.

◆

Proposición 5.1.3. $\int_l(H) = \int_r(H^{cop}) = \int_r(H^{op,cop})$.

Demostración. Sea $\Upsilon \in H^*$, $\Upsilon \in \int_l(H)$ si y solo si (aplicando la Proposición 5.1.1) Υ es una integral a izquierda en H^*, si y solo si (aplicando la Proposición 4.1.2) Υ es una integral a derecha en H^{*op}.
Por la Proposición 1.1.4 tenemos que $H^{*op} = (H^{cop})^*$, entonces $\Upsilon \in \int_l(H)$ si y solo si Υ es una integral a derecha en $(H^{cop})^*$, si y solo si (aplicando la Proposición 5.1.1) $\Upsilon \in \int_r(H^{cop})$, esto prueba la primer igualdad. La segunda igualdad es inmediata porque en la definición de cointegrales no se utiliza el producto de H.

◆

Lema 5.1.4. *Sea H un álgebra de Hopf. Si Υ es una cointegral a izquierda de H y $x, y \in H$. Entonces $\sum x_1\Upsilon(x_2S(y)) = \sum \Upsilon(xS(y_1))y_2$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum x_1\ \Upsilon(x_2\ S(y)) &= \sum x_1\Upsilon(x_2S(y_1))\varepsilon(y_2) && [y = \sum y_1\varepsilon(y_2)]\\
&= \sum x_1\ \Upsilon(x_2\ S(y_1))\ S(y_2)\ y_3 && [\varepsilon(z)1 = \sum S(z_1)z_2]\\
&= \sum \Upsilon(x_2\ (S(y_1))_2)\ x_1\ (S(y_1))_1\ y_2 && [\text{S anticonmutativa}]\\
&= \sum \Upsilon(xS(y_1))y_2
\end{aligned}$$

◆

5.2. Conexión entre las cointegrales y H^{*rat}

Sea H un álgebra de Hopf. Se tiene que H_l^{*rat} es un H^*-módulo a izquierda racional, esto induce una estructura de H-comódulo a derecha en H_l^{*rat}, dada por $\rho : H_l^{*rat} \to H_l^{*rat} \otimes H$, $\rho(\alpha) = \sum \alpha_0 \otimes \alpha_1$ tal que $\beta\alpha = \sum \beta(\alpha_1)\alpha_0$ para todo $\beta \in H^*$.

Teorema 5.2.1. *El subespacio H_l^{*rat} es un H-submódulo a derecha de H^* (con la acción $\leftharpoondown$ definida en la Sección 2.1).*
La estructura de H-módulo a derecha y la estructura de H-comódulo a derecha dada por ρ le dan a H_l^{*rat} estructura de H-módulo de Hopf a derecha.

Demostración. Sea $\alpha \in H_l^{*rat}$ y $x \in H$, hay que ver que $\alpha \leftharpoondown x \in H_l^{*rat}$. Veamos primero que para todo $\beta \in H^*$ se tiene la siguiente relación

$$\beta\ (\alpha \leftharpoondown x) = \sum \beta(\alpha_1 x_2)\ (\alpha_0 \leftharpoondown x_1).$$

Sea $y \in H$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum \beta(\alpha_1 x_2)\ (\alpha_0 \leftharpoondown x_1)(y) = \\
&= \sum \beta(\alpha_1 x_2)\ \alpha_0(y\ S(x_1)) \\
&= \sum (x_2 \rightharpoonup \beta)(\alpha_1)\ \alpha_0(y\ S(x_1)) && \text{[por definición de } \rightharpoonup] \\
&= \sum ((x_2 \rightharpoonup \beta)\ \alpha)(y\ S(x_1)) && \text{[por definición de } \rho] \\
&= \sum (x_2 \rightharpoonup \beta)(y\ S(x_1))_1\ \alpha(y\ S(x_1))_2 && \text{[por def. del prod. de conv.]} \\
&= \sum (x_2 \rightharpoonup \beta)(y_1\ S(x_1)_1)\ \alpha(y_2\ S(x_1)_2) \\
&= \sum (x_3 \rightharpoonup \beta)(y_1\ S(x_2))\ \alpha(y_2\ S(x_1)) && [S \text{ es anticonmutativa}] \\
&= \sum \beta(y_1\ S(x_2)\ x_3)\ \alpha(y_2\ S(x_1)) && \text{[por definición de } \rightharpoonup] \\
&= \sum \beta(y_1 \varepsilon(x_2))\ \alpha(y_2\ S(x_1)) && [\varepsilon(x)1 = \textstyle\sum S(x_1)x_2] \\
&= \sum \beta(y_1)\ \alpha(y_2\ S(x_1 \varepsilon(x_2))) \\
&= \sum \beta(y_1)\ \alpha(y_2\ S(x)) && [x = \textstyle\sum x_1 \varepsilon(x_2)] \\
&= \sum \beta(y_1)\ (\alpha \leftharpoondown x)(y_2) \\
&= (\beta\ (\alpha \leftharpoondown x))(y)
\end{aligned}
$$

Entonces $\beta\ (\alpha \leftharpoondown x) = \sum \beta(\alpha_1 x_2)(\alpha_0 \leftharpoondown x_1)$. Por lo tanto $\alpha \leftharpoondown x \in H_l^{*rat}$. Además probamos que $\rho(\alpha \leftharpoondown x) = \sum \alpha_0 \leftharpoondown x_1 \otimes \alpha_1 x_2$. Entonces H_l^{*rat} es un H-módulo de Hopf a derecha.

◆

Lema 5.2.2. *El subespacio de coinvariantes $(H_l^{*rat})^{coH}$ es $\int_l$.*

Demostración. Sea $\alpha \in H_l^{*rat}$, entonces $\alpha \in (H_l^{*rat})^{coH}$ si y solo si $\rho(\alpha) = \alpha \otimes 1$ si y solo si $\beta\alpha = \beta(1)\alpha$ para todo $\beta \in H^*$ si y solo si, por la Proposición 5.1.1, $\alpha \in \int_l$. Entonces $(H_l^{*rat})^{coH} = \int_l$.

◆

Teorema 5.2.3. *El mapa $f : \int_l \otimes H \to H_l^{*rat}$ definido por $f(\Upsilon \otimes x) = \Upsilon \leftharpoondown x$ para todo $\Upsilon \in \int_l$, $x \in H$ es un isomorfismo de H-módulos de Hopf a derecha.*

Demostración. Por el Teorema 5.2.1 tenemos que H_l^{*rat} es un H-módulo de Hopf a derecha, entonces aplicando el teorema fundamental de módulos de Hopf, $f : (H_l^{*rat})^{coH} \otimes H \to H_l^{*rat}$, dada por $f(\alpha \otimes x) = \alpha \leftharpoondown x$ es un isomorfismo de módulos de Hopf.
Luego aplicando el Lema 5.2.2, $f : \int_l \otimes H \to H_l^{*rat}$, tal que $f(\Upsilon \otimes x) = \Upsilon \leftharpoondown x$ es un isomorfismo de módulos de Hopf.

◆

Corolario 5.2.4. *$H_l^{*rat} = 0$ si y solo si $\int_l = 0$.*

◆

Corolario 5.2.5. *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda S.*
1) Si H tiene una cointegral a izquierda no nula, entonces S es inyectiva.
2) Si H es de dimensión finita, $\int_l$ tiene dimensión 1 y S es biyectiva.

Demostración. 1) Si S no es inyectiva, existe $x \in H$ con $x \neq 0$ y $S(x) = 0$. Entonces para $\Upsilon \in \int_l$ con $\Upsilon \neq 0$, aplicando el Teorema 5.2.3 $f(\Upsilon \otimes x) = \Upsilon \leftharpoonup x = S(x) \rightharpoonup \Upsilon = 0$, contradiciendo la inyectividad de f.

2) Si H tiene dimensión finita, $H_l^{*rat} = H^*$. Entonces, aplicando el Teorema 5.2.3, obtenemos un isomorfismo de módulos de Hopf $f : \int_l \otimes H \to H^*$. En particular es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces $\dim(H^*) = \dim(\int_l \otimes H)$. Pero $\dim(H) = \dim(H^*)$ y $\dim(\int_l \otimes H) = \dim(\int_l)\dim(H)$. Por lo tanto $\dim(H) = \dim(\int_l)\dim(H)$, entonces $\dim(\int_l) = 1$. Además S es un endomorfismo inyectivo de un espacio vectorial de dimensión finita, luego S es biyectiva.

◆

Observar que H_r^{*rat} es un H^*-módulo a derecha racional y luego resulta un H-comódulo a izquierda. Analogamente vale que H_r^{*rat} admite una estructura de H-módulo a izquierda tal que H_r^{*rat} es un H-módulo de Hopf a izquierda. En particular tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.2.6. *i) El mapa $g : H \otimes \int_r \to H_r^{*rat}$ definido por $g(x \otimes \Upsilon) = x \rightharpoondown \Upsilon$ para todo $x \in H$, $\Upsilon \in \int_r$ es un isomorfismo de H-módulos de Hopf a izquierda.*
ii) $H_r^{*rat} = 0$ si y solo si $\int_r = 0$.

5.3. Cosemisimplicidad de un álgebra de Hopf

Lema 5.3.1. *Sea $\Upsilon \in H^*$, $\Upsilon \in \int_r$ si y solo si $\Upsilon \in Hom^H(H, k)$.*

Demostración. Observar que $k \in \mathcal{M}^H$, con $\rho : k \to k \otimes H$, $\rho(x) = x \otimes 1_H$.
Sea $\Upsilon \in H^*$, entonces $\Upsilon \in \mathrm{Hom}^H(H, k)$ si y solo si $(\rho \circ \Upsilon)(y) = ((\Upsilon \otimes id) \circ \Delta)(y)$ para todo $y \in H$, si y solo si $\Upsilon(y) \otimes 1_H = \sum \Upsilon(y_1) \otimes y_2$ para todo $y \in H$, si y solo si $\Upsilon(y)1_H = \sum \Upsilon(y_1)y_2$ para todo $y \in H$, si y solo si $\Upsilon \in \int_r$.

◆

Teorema 5.3.2. *Sea H un álgebra de Hopf. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
i) H es cosemisimple.
ii) k es inyectivo en $\mathcal{M}^H$ (${}^H\mathcal{M}$).
iii) Existe $\Upsilon \in H^*$ cointegral a derecha (izquierda) tal que $\Upsilon(1_H) = 1_k$.

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Es exactamente el Teorema 3.3.2.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $u : k \to H$ la unidad de H, u es un morfismo inyectivo de H-comódulos, porque $u(1_k) = 1_H$ y $(\Delta \circ u)(x) = ((u \otimes id) \circ \rho)(x)$ para todo $x \in k$.
Como $k \in \mathcal{M}^H$ es inyectivo, entonces existe $\Upsilon : H \to k$ morfismo de H-comódulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} k & \\ k \arrow[u, leftarrow, "id_k"'] \arrow[r, "u"'] & H \arrow[ul, dashed, "\Upsilon"'] \end{tikzcd}.$$

Por lo tanto aplicando el Lema 5.3.1 es $\Upsilon \in \int_r$. Además $\Upsilon(1_H) = \Upsilon(u(1_k)) = 1_k$, luego $\Upsilon(1_H) = 1_k$.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* Para ver que k es inyectivo veamos que es sumando directo de un H-comódulo libre, es más veamos que es sumando directo de H.
Como $\Upsilon \in \int_r$, entonces por el Lema 5.3.1 es $\Upsilon \in \mathrm{Hom}^H(H, k)$, por lo tanto $\ker(\Upsilon)$ es un subcomódulo de H.
Veamos que $H = u(k) \oplus \ker(\Upsilon)$: sea $x \in H$, entonces $x = x - (u \circ \Upsilon)(x) + (u \circ \Upsilon)(x)$ donde $x - (u \circ \Upsilon)(x) \in \ker(\Upsilon)$ y $(u \circ \Upsilon)(x) \in u(k)$, sea $y = u(a)$ tal que $\Upsilon(y) = 0$, entonces $id_k(a) = (\Upsilon \circ u)(a) = 0$, luego $a = 0$ y por lo tanto $y = 0$. Entonces $H = u(k) \oplus \ker(\Upsilon)$.
Como u es inyectivo tenemos que k es isomorfo a un sumando directo de un libre. Entonces k es inyectivo.

◆

Observación 5.3.1. *Si H es un álgebra de Hopf cosemisimple y escribimos $H = k \cdot 1_H \oplus C$, siendo C una subcoálgebra de H, entonces de la prueba del Teorema 5.3.2 se deduce que la proyección de H sobre $k \cdot 1_H$ asociada a esta descomposición es una cointegral a izquierda y derecha que en 1_H vale 1.*

Ejemplo 5.3.1. Sea $H = kG$, el álgebra de grupo definida en el Ejemplo 4.1.1, $kG = \bigoplus_{g \in G} k \cdot g = k \cdot 1 \oplus \bigoplus_{g \neq 1} k \cdot g$, donde $k \cdot g$ es una subcoálgebra unidimensional, luego simple. Entonces kG es un álgebra de Hopf cosemisimple, luego por la Observación 5.3.1 el mapa $p_1 : H \to k$ definido por $p_1(g) = \delta_{1g}$, para todo $g \in G$, es una cointegral a izquierda y derecha de H.

Ejemplo 5.3.2. Sea H un k-espacio vectorial, del cual una base es $\{c_i : i \in \mathbb{N}\}$, H admite una estructura de biálgebra. La estructura de coálgebra esta dada por

$$\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}, \quad \varepsilon(c_m) = \delta_{0,m}$$

y la estructura de álgebra por

$$c_n c_m = \binom{n+m}{n} c_{n+m}$$

con la unidad $1 = c_0$. También tenemos un isomorfismo de álgebras $\phi : H^* \to k[[X]]$, $\phi(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \alpha(c_n) X^n$, para todo $\alpha \in H^*$.
Supongamos que Υ es una cointegral a izquierda de H, entonces para todo $\alpha \in H^*$ tenemos que $\alpha\Upsilon = \alpha(1)\Upsilon$ y aplicando ϕ obtenemos $\phi(\alpha)\phi(\Upsilon) = \alpha(1)\phi(\Upsilon)$ para todo $\alpha \in H^*$. Luego $\phi(\Upsilon) = 0$ (porque $k[[X]]$ es un dominio) y como ϕ es un isomorfismo, esto implica que $\Upsilon = 0$. Lo cual prueba, aplicando el Teorema 5.3.2, que H no es cosemisimple.

Ejemplo 5.3.3. Sea k un cuerpo de característica cero y $H = k[X]$ *el álgebra de polinomios* con la estructura de álgebra de Hopf definida en el Ejemplo 4.1.3. Veamos que H no tiene cointegrales no nulas y por lo tanto no es cosemisimple. Sea $\Upsilon \in H^*$ una cointegral a izquierda, entonces $\alpha\ \Upsilon = \alpha(1)\ \Upsilon$, para todo $\alpha \in H^*$.
Sea $\alpha \in H^*$ tal que $\alpha(X) \neq 0$. Como $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, tenemos que $(\alpha\ \Upsilon)(X) = \alpha(X)\ \Upsilon(1) + \alpha(1)\ \Upsilon(X)$. Como Υ es una cointegral a izquierda resulta también que $(\alpha\ \Upsilon)(X) = \alpha(1)\ \Upsilon(X)$, entonces $\alpha(X)\ \Upsilon(1) = 0$, como $\alpha(X) \neq 0$ tenemos que $\Upsilon(1) = 0$. Veamos por inducción que $\Upsilon(X^n) = 0$, para todo $n \geq 0$ y esto concluirá la prueba de que Υ es 0.
Supongamos que $\Upsilon(X^i) = 0$, para todo $i = 0, \cdots, n-1$. Veamos que $\Upsilon(X^n) = 0$
Observando que $\Delta(X^{n+1}) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \binom{n+1}{i} X^{n+1-i} \otimes X^i$, tenemos que $(\alpha\ \Upsilon)(X^{n+1}) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \binom{n+1}{i}\ \alpha(X^{n+1-i})\ \Upsilon(X^i)$. Como Υ es una cointegral a izquierda, es $(\alpha\ \Upsilon)(X^{n-1}) = \alpha(1)\ \Upsilon(X^{n+1})$.
Luego $(n+1)\ \alpha(X)\ \Upsilon(X^{n+1}) = 0$ y como $\alpha(X) \neq 0$, tenemos que $\Upsilon(X^n) = 0$.

Capítulo 6

Unicidad de las cointegrales y biyectividad de la antípoda

El objetivo de este capítulo es probar la unicidad de las cointegrales y a partir de esto deducir la unicidad de las integrales en un álgebra de Hopf de dimensión finita. También es probar que si un álgebra de Hopf tiene una cointegral no nula, entonces su antípoda es biyectiva. Una referencia para este capítulo es [DNR01].

Lema 6.0.3. *Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula. Entonces existe $\theta : H \to H^*$ morfismo inyectivo de H^*-módulos a izquierda.*

Demostración. Existe $\Upsilon \in H^*$, $\Upsilon \neq 0$ tal que $\alpha\ \Upsilon = \alpha(1)\ \Upsilon$, para todo $\alpha \in H^*$ o equivalentemente tal que $\sum \Upsilon(x_2)x_1 = \Upsilon(x)1$, para todo $x \in H$.
Sea $\theta : H \to H^*$, dada por $\theta(y)(x) = \Upsilon(xS(y))$ para todo $x, y \in H$.
Observemos primero que $H \in_{H^*}\mathcal{M}$ con la acción $\alpha \rightharpoonup x = \sum x_1\alpha(x_2)$ y que $H^* \in_{H^*}\mathcal{M}$ con la acción $(\alpha \cdot \beta)(x) = \sum \alpha(x_1)\beta(x_2)$.
Veamos que θ es un morfismo de H^*-módulos a izquierda, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^* \otimes H & \xrightarrow{\rightharpoonup} & H \\ {\scriptstyle id\otimes\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ H^* \otimes H^* & \xrightarrow{\cdot} & H^* \end{array} .$$

Por un lado es:

$$\begin{aligned}\theta(\alpha \rightharpoonup y)(x) &= \theta(\sum y_1\ \alpha(y_2))(x) = \sum \theta(y_1\ \alpha(y_2))(x) = \sum \Upsilon(x\ S(y_1\ \alpha(y_2))) \\ &= \sum \alpha(\Upsilon(x\ S(y_1))\ y_2) = \sum \Upsilon(x\ S(y_1))\ \alpha(y_2) = \sum \alpha(\Upsilon(x\ S(y_1))\ y_2).\end{aligned}$$

Por otro lado es:

$$(\alpha \cdot \theta(y))(x) = \sum \alpha(x_1)\ \theta(y)(x_2) = \sum \alpha(x_1)\ \Upsilon(x_2\ S(y)) = \sum \alpha(x_1\ \Upsilon(x_2\ S(y))).$$

Entonces aplicando el Lema5.1.4 tenemos que $\theta(\alpha \rightharpoonup y)(x) = (\alpha \cdot \theta(y))(x)$ para todo $x \in H$. Por lo tanto $\theta(\alpha \rightharpoonup y) = \alpha \cdot \theta(y)$ y θ resulta un morfismo de H^*-módulos a izquierda.

θ inyectivo : Si $\theta(y) = 0$, es $\theta(y)(x) = \Upsilon(x\ S(y)) = 0$, para todo $x \in H$. Pero $\Upsilon(x\ S(y)) = (\Upsilon \leftharpoondown y)(x)$, entonces $\Upsilon \leftharpoondown y = 0$. Aplicando el Teorema 5.2.3 tenemos que $y = 0$. Luego θ es inyectivo.

◆

Teorema 6.0.4. *Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula. Entonces H_r^{*rat} es denso en H^*.*

Demostración. Por ser H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula, aplicando el Lema 6.0.3, existe $\theta : H \to H^*$ morfismo inyectivo de H^*-módulos a izquierda. Luego aplicando el Teorema 3.3.11 tenemos que para todo $S \in \mathcal{M}^H$ simple, $E(S) \in \mathcal{M}^H_{fin}$ y finalmente por el Teorema 3.4.9 es H_r^{*rat} es denso en H^*.

◆

Corolario 6.0.5. *Si $\int_l \neq 0$. Entonces $\int_r \neq 0$.*

Demostración. Aplicando el Teorema 6.0.4 es H^{*rat} es denso en H^*, en particular $H^{*rat} \neq 0$. Luego aplicando el Teorema 5.2.6 tenemos que $\int_r \neq 0$.

◆

Corolario 6.0.6. *Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a derecha no nula. Entonces H_l^{*rat} es denso en H^*.*

Demostración. Primero observar que $(H^{op,cop})_r^{*rat} = H_l^{*rat}$.
Aplicando la Proposición 5.1.3 tenemos que $\int_r(H) = \int_l(H^{op,cop})$.
Observar que $H^{op,cop}$ es un álgebra de Hopf, entonces por el Teorema 6.0.4 es $\overline{(H^{op,cop})_r^{*rat}} = (H^{op,cop})^*$.
Entonces $\overline{H_l^{*rat}} = (H^{op,cop})^* = H^*$ (como espacios vectoriales). Luego H_l^{*rat} es denso en H^*.

◆

Lema 6.0.7. *Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula, I un ideal a izquierda denso en H^*, $M \in \mathcal{M}^H_{fin}$ y $f : I \to M$ un morfismo de H^*-módulos a izquierda. Entonces existe un único morfismo $h : H^* \to M$ de H^*-módulos que extiende a f.*

Demostración. Como $M \in \mathcal{M}^H$, aplicando el Corolario 3.2.8 existe $E(M) \in \mathcal{M}^H$.
Por ser H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula, aplicando el Lema 6.0.3, existe $\theta : H \to H^*$ morfismo inyectivo de H^*-módulos a izquierda. Luego aplicando el Teorema 3.3.11 tenemos que para todo $S \in \mathcal{M}^H$ simple, $E(S) \in \mathcal{M}^H_{fin}$ y finalmente por el Teorema 3.3.8, como $M \in \mathcal{M}^H_{fin}$, es $E(M) \in \mathcal{M}^H_{fin}$.
Dado que $E(M) \in \mathcal{M}^H_{fin}$ inyectivo, entonces aplicando el Lema 3.1.9 resulta que $E(M) \in {}_{H^*}\mathcal{M}$ inyectivo.
Como $E(M)$ es inyectivo, existe $h : H^* \to E(M)$ morfismo de H^*-módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, hook] & E(M) \\ H^* \arrow[urr, dashed, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Sea $x \in E(M)$, entonces $\delta(x) = \sum x_0 \otimes x_1$, donde todos los $x_1 = 0$ salvo un conjunto finito de índices .
Como I es denso en H^*, existe $\alpha \in I$ tal que $\alpha(x_1) = \varepsilon(x_1)$, para todo x_1. Por lo tanto $x = \sum x_0\ \varepsilon(x_1) =$

$\sum x_0\ \alpha(x_1) = \alpha \cdot x \in I \cdot x$. Entonces $x \in I \cdot x$.
Sea $e = h(\varepsilon) \in E(M)$, entonces es $I \cdot e = I \cdot h(\varepsilon) = h(I\varepsilon) = h(I) = f(I) \subseteq M$.
Si $\alpha \in H^*$ es $h(\alpha) = h(\alpha\varepsilon) = \alpha \cdot h(\varepsilon) = \alpha \cdot e \in M$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(h) \subseteq M$. Luego h es el morfismo que buscábamos.

Si h' es otro morfismo con la misma propiedad, entonces $h - h'$ es 0 en I. Luego $I \cdot (h - h')(\varepsilon) = (h-h')(I\varepsilon) = (h-h')(I) = 0$ y nuevamente como I es denso en H^* tenemos que $(h-h')(\varepsilon) \in I \cdot (h-h')(\varepsilon)$, por lo tanto $(h - h')(\varepsilon) = 0$, entonces $h = h'$.

◆

Teorema 6.0.8. *Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula y $M \in \mathcal{M}^H_{fin}$. Entonces dim $Hom_{H^*}(H, M) \leq$ dim M. En particular dim$\int_l$= dim$\int_r$=1.*

Demostración. Por el Lema 6.0.3 existe $\theta : H \to H^*$ morfismo inyectivo de H^*-módulos a izquierda. Por otro lado $H \in \mathcal{M}^H \cong \mathrm{Rat}(_{H^*}\mathcal{M})$, entonces $\theta(H) \in \mathrm{Rat}(_{H^*}\mathcal{M})$. Además $\theta(H) \subseteq H^*$, luego $\theta(H) \subseteq H_l^{*rat}$.
Como $H \in \mathcal{M}^H$ es libre, entonces H es inyectivo en $\mathcal{M}^H \cong \mathrm{Rat}(_{H^*}\mathcal{M})$.
Sea $M \in \mathcal{M}^H_{fin}$ y sea $\psi : Hom_{H^*}(H_l^{*rat}, M) \to Hom_{H^*}(H, M)$ el mapa lineal definido por:

$$\begin{tikzcd}
H_l^{*rat} \arrow[r, "f"] & M \\
\theta(H) \arrow[u, "\iota"] & \\
H \arrow[u, "\theta"] \arrow[uur, "\psi(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

donde ι es la inclusión de $\theta(H)$ en H_l^{*rat}.
Veamos que ψ es sobreyectivo.
Previamente como H es inyectivo, existe $\eta : H_l^{*rat} \to H$ morfismo de H^*-módulos a izquierda tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & H & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[u, "id"] \arrow[r, "\iota\circ\theta"'] & H_l^{*rat}. \arrow[ul, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in Hom_{H^*}(H, M)$. Consideremos $g \circ \eta : H_l^{*rat} \to M$ morfismo de H^*-módulos a izquierda. Luego $\psi(g \circ \eta) = g \circ \eta \circ \iota \circ \theta = g$. Entonces ψ es sobreyectiva.
Como H es un álgebra de Hopf con una coitegral a izquierda no nula, tenemos por los Corolarios 6.0.5 y 6.0.6 que H_l^{*rat} es denso en H^*, entonces aplicando el Lema 6.0.7 tenemos que $Hom_{H^*}(H_l^{*rat}, M) \cong Hom_{H^*}(H^*, M) \cong M$. Por lo tanto $\dim_k Hom_{H^*}(H, M) \leq \dim_k Hom_{H^*}(H_l^{*rat}, M) = \dim_k M$.
En particular si $M = k$, tenemos que $\dim_k Hom_{H^*}(H, k) \leq 1$.
Por el Lema 5.3.1 sabemos que $\int_r = \mathrm{Hom}^H(H, k) = \mathrm{Hom}_{H^*}(H, k)$ porque H y $k \in \mathcal{M}^H$. Entonces $\dim_k \int_r \leq 1$. Aplicando el Corolario 6.0.5 es $\int_r \neq 0$, entonces tenemos que $\dim_k \int_r = 1$.

Por la Proposición 5.1.3 tenemos que $\int_l(H) = \int_r(H^{op,cop})$.
Como $H^{op,cop}$ un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula (porque $\int_r(H) = \int_l(H^{op,cop})$), entonces $\dim_k \int_l(H^{op,cop})$= 1 por lo tanto $\dim_k \int_l(H) = 1$.

◆

Corolario 6.0.9. *Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces* $dim_k\{t \in H : t \text{ es una integral a izquierda en } H\} = dim_k\{t \in H : t \text{ es una integral a derecha en } H\} = 1$. *En particular si H es un álgebra de Hopf tenemos que* $dim_k\{t \in H : t \text{ es una integral a izquierda en } H\} = dim_k\{t \in H : t \text{ es una integral a derecha en } H\} \leq 1$.

Demostración. Como H es de dimensión finita tenemos que $H \cong (H^*)^*$ como álgebras de Hopf. Por otro lado, aplicando la Proposición 5.1.1 tenemos que Υ es una integral en H^* si y solo si Υ es una cointegral de H. Entonces t es una integral a izquierda en H si y solo si t es una cointegral de H^* y por el Teorema 6.0.8 tenemos que $\dim_k\{t \in H : \text{t es una integral a izquierda en H}\} = 1$. De igual forma se prueba para integrales a derecha.

◆

Lema 6.0.10. *1) Sean H y K dos álgebras de Hopf y $\phi : H \to K$ un morfismo inyectivo de coálgebras, con $\phi(1) = 1$. Si $\Upsilon \in K^*$ es una cointegral a izquierda, entonces $\Upsilon \circ \phi$ es una cointegral a izquierda de H.*
2) Sea H un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula. Entonces $\Upsilon \circ S$ es una cointegral a derecha no nula de H.

Demostración. 1) Hay que ver que $\sum \Upsilon\phi(x_2)x_1 = \Upsilon\phi(x)1$, para todo $x \in H$. Como ϕ es inyectivo basta ver que $\phi(\sum \Upsilon\phi(x_2)x_1) = \phi(\Upsilon\phi(x)1_H)$, para todo $x \in H$

$$\phi(\sum \Upsilon\phi(x_2)x_1) = \sum \Upsilon\phi(x_2)\phi(x_1) = \sum \Upsilon(\phi(x)_2)\phi(x)_1 = \Upsilon\phi(x)1_K = \Upsilon\phi(x)\phi(1_H) = \phi(\Upsilon\phi(x)1_H).$$

2) La antípoda $S : H \to H^{\mathrm{op,cop}}$ es un morfismo inyectivo de coálgebras con $S(1) = 1$.
Aplicando 1), si Υ es una cointegral a izquierda no nula de H, entonces $\Upsilon \circ S$ es una cointegral a izquierda de $H^{\mathrm{op,cop}}$, luego $\Upsilon \circ S$ es una cointegral a derecha de H.
Veamos ahora que $\Upsilon \circ S \neq 0$. Sea $J \subseteq H$ la envolvente inyectiva de $k1_H$, en $\mathcal{M}^H$.
Como $\int_l \neq 0$, resulta J de dimensión finita y $H = J \oplus X$ donde X es un coideal derecho de H. Sea $\alpha \in H^*$ tal que $\alpha(X) = 0$ y $\alpha(1) \neq 0$. Entonces $X \subseteq \ker(\alpha)$, donde X tiene codimensión finita. Luego aplicando la Proposición 2.3.9 $\alpha \in H_l^{*rat}$. Por lo tanto, por el Teorema 6.0.8 $\alpha = \Upsilon \leftharpoonup x$, para algun $x \in H$ y además $\alpha(1) = (\Upsilon \leftharpoonup x)(1) = \Upsilon(S(x))$, entonces $\Upsilon \circ S \neq 0$.

◆

Corolario 6.0.11. *Si H es un álgebra de Hopf con una cointegral no nula. Entonces $S^*(\int_l) = \int_r$.*

Demostración. Sea $S : H \to H$ la antípoda de H, consideremos $S^* : H^* \to H^*$, dada por $S^*(\alpha)(x) = \alpha(S(x))$, para todo $\alpha \in H^*$ y $x \in H$.
Sea Υ una cointegral a izquierda no nula, entonces aplicando el Lema 6.0.10, $\Upsilon \circ S$ es una cointegral a derecha no nula. Como $\dim_k \int_r = dim_k \int_l = 1$, tenemos que $S^*(\int_l) = \int_r$.

◆

Corolario 6.0.12. *Sea H un álgebra de Hopf, con una cointegral no nula. Entonces S es biyectiva.*

Demostración. Por el Corolario 5.2.5 sabemos que S es inyectiva. Falta probar que Ses sobreyectiva. Supongamos que no lo es, es decir $S(H) \neq H$.
Como $S(H)$ es una subcoálgebra de H, tenemos que $S(H)$ es un H-subcomódulo a izquierda de H. Entonces aplicando la Proposición 3.4.8, existe M un H-submódulo a izquierda maximal de H tal que $S(H) \subseteq M$ y M de codimensión finita.
Sea $\beta \in H^*$ tal que $\beta \neq 0$ y $\beta(M) = 0$, luego $M \subseteq \ker(\beta)$. Entonces aplicando la Proposición 2.3.9,

$\beta \in H_l^{*rat}$. Luego aplicando el Teorema 5.2.3, existe $x \in H$ tal que $\beta = \Upsilon \leftharpoonup x$. Como $\beta \neq 0$ es $x \neq 0$ y para todo $y \in M$ tenemos $(\Upsilon \leftharpoonup x)(y) = \beta(y) = 0$. Para todo $z \in H$, tenemos que $S(z) \in M$, así que:

$$\begin{aligned}(\Upsilon \circ S)(x\, z) &= \Upsilon(S(x\, z))\\ &= \Upsilon(S(z)\, S(x))\\ &= (\Upsilon \leftharpoonup x)(S(z))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces $(\Upsilon \circ S)(xH) = 0$.
Como $\Upsilon \circ S \in \int_r$, entonces $\Upsilon \circ S$ es un morfismo de H^*-módulos a izquierda. Luego $(\Upsilon \circ S)(H^* \rightharpoonup xH) = 0$. Aplicando la Proposición 4.2.2 $(\Upsilon \circ S)(H) = 0$, entonces $\Upsilon \circ S = 0$, esto contradice el Lema 6.0.10. Entonces S es biyectiva.

◆

Teorema 6.0.13. *Si H es un álgebra de Hopf con una cointegral no nula. Entonces $H_l^{*rat} = H_r^{*rat}$.*

Demostración. Como H es un álgebra de Hopf con una cointegral a izquierda no nula, aplicando el Teorema 6.0.4, tenemos que H_r^{*rat} es denso en H^*. Aplicando el Corolario 6.0.5, H tiene una cointegral a derecha no nula, entonces por el Corolario 6.0.6 es H_l^{*rat} denso en H^*. Entonces por el Teorema 3.4.11 es $H_l^{*rat} = H_r^{*rat}$.

◆

Bibliografía

[DNR01] Dascalescu, Nastasescu, and Raianu, *Hopf algebras an introduction*, Marcel Dekker ed., New York, 2001.

[Kas82] Kasch, *Modules and rings*, Academic press ed., 1982.

[Per01] Mariana Pereira, *Biálgebras y categorías monoidales*,2001, Trabajo monográfico. Licenciatura en Matemática, Universidad de la República.

[Rot79] Rotman, *An introduction to homological algebra*, Academic Press ed., 1979.

[Swee69] Sweedler. *Hopf algebras*. Benjamin ed.,1969.