TRABAJO MONOGRÁFICO

Análisis Armónico en Grupos Compactos.

Eusebio Gardella

Orientador: Fernando Abadie

7 de octubre de 2009
Montevideo
Uruguay

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Resumen

En el presente trabajo se estudia la teoría de representaciones de grupos compactos. Después de mostrar que toda representación es suma de representaciones irreducibles y que estas últimas son de dimensión finita, se prueba el resultado central de esta monografía: el teorema de Peter-Weyl. Éste describe completamente las representaciones irreducibles del grupo, y muestra explícitamente la descomposición de la representación regular como suma de representaciones irreducibles. Posteriormente se estudian algunas consecuencias del teorema de Peter-Weyl, y se calculan las representaciones irreducibles de algunos grupos clásicos. Finalmente, luego de vincular las representaciones irreducibles del grupo con las de un subgrupo cerrado a través del teorema de reciprocidad de Frobenius, se muestra cómo aplicar el análisis armónico en la resolución de cierto problema de reconstrucción de un cuerpo convexo.

Abstract

In the present work, the theory of representatios for compact groups is studied. After showing that every representation can be writen as the sum of irreducible representations, and that the latter are finite dimensional, the main result of this monograph is proved: the Peter-Weyl theorem. It describes completely the irreducible representations of the group, and shows explicitely the decomposition of the regular representation as the sum of irreducible representations. After that, some consecuences of the Peter-Weyl theorem are studied, and the irreducible representations of some classic groups are calculated. Finally, after linking the irreducible representations of the group with those of a closed subgroup of it, through the Frobenius' reciprocity theorem, it is shown how to apply the harmonic analysis in the resolution of certain problem of reconstruction of a convex body.

Índice general

Introducción.

El análisis armónico no conmutativo, y su herramienta básica, la teoría de representaciones de grupos, ha existido como un área independiente de estudio desde fines del siglo XIX. En el sentido más general, el análisis armónico puede ser definido como el aparato matemático aplicable al estudio y el uso de la simetría en los modelos matemáticos del ambiente. La simetría es descrita en términos de grupos de transformaciones y el objeto del análisis armónico es el estudio de las correspondientes representaciones de grupos.

Las primeras ideas del análisis armónico (las nociones de funciones generatrices de una sucesión y los caracteres de grupo de un grupo abeliano finito), habían aparecido en el contexto de la teoría de números y en la teoría de las probabilidades a principios del siglo XVIII; aún antes de la creación de la propia noción de grupo. Con la aparición de las series de Fourier y la transformada de Fourier en la física matemática, en el siglo XIX, el análisis armónico conmutativo se convirtió en la herramienta más poderosa para la resolución de varios problemas de invarianza por traslaciones. Como ejemplo de ello encontramos la teoría de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, las series de Fourier y la transformada de Fourier.

La aparición del análisis armónico no conmutativo es usualmente relacionada con una serie de artículos de Frobenius, publicados en el período 1896-1901. El objetivo original de Frobenius fue encontrar la solución a un problema planteado por su tutor, Dedekind. El problema era el siguiente. Denotemos por $x_1, \ldots, x_n$ los elementos de un grupo finito G, de orden n. La tabla de multiplicación (también denominada tabla de Cayley) del grupo G puede ser interpretada como una matriz $n \times n$; y el determinante de dicha matriz es un polinomio homogéneo de grado n, y tiene n variables, a saber, $x_1, \ldots, x_n$. Dedekind lo llamó *el determinante del grupo* y descubrió que para un grupo abeliano G, el determinante podía descomponerse en factores lineales, cuyos coeficientes coinciden con los caracteres del grupo. Por ejemplo, para el grupo cíclico de tres elementos, tenemos la identidad

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = (x+y+z)(x+\epsilon y+\epsilon^2 z)(z+\epsilon^2 y+\epsilon z),$$

donde $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Dedekind pudo descomponer el determinante del grupo en factores simples (no necesariamente lineales), para algunos grupos no abelianos, aunque no encontró un patrón general. Frobenius descubrió que, en general, el determinante del grupo es un producto de la forma $P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$, donde los P_i son polinomios irreducibles de grado n_i. Por otro lado, también introdujo las expresiones

$$\chi_j^{(i)} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(1, 0, \ldots, 0),$$

denominándolos caracteres del grupo. Además, mostró que (en términos actuales) son funcionales multiplicativos en el centro del álgebra de grupo de G.

Frobenius dio una clasificación completa de las representaciones irreducibles de los grupos más importantes, incluyendo el grupo de simetrías de un polígono regular con n vértices, el grupo de permutaciones S_n y el grupo alternante A_n. Más aún, probó que las representaciones de grupos finitos son completamente reducibles. Este resultado fue demostrado de forma independiente y simultánea (en 1897) por F. E. Molin, y actualmente se acostumbra a llamarlo Teorema de Maschke, en referencia al matemático que lo probó un año después para representaciones sobre un cuerpo de característica p tal que el orden del grupo no es divisible por p.

Otro resultado teórico importante de Frobenius fue un teorema involucrando una relación entre las representaciones de un grupo dado y las de un subgrupo de él. Este resultado es actualmente conocido como la reciprocidad de Frobenius.

Por otro lado, Burnside fue el primero en aplicar la teoría de representaciones de grupos finitos al estudio de la estructura de grupos. El teorema que afirma la solubilidad de los grupos de orden $p^\alpha q^\beta$ para p y q primos, fue el punto inicial para un arduo trabajo acerca de la clasificación de todos los grupos finitos simples, que fue concluida recientemente.

A continuación presentamos una breve evolución histórica en el estudio de la teoría de representaciones.

El primer período de desarrollo (aproximadamente entre 1890 y 1920), está marcado por los trabajos de Frobenius y Schur y los de Burnside y Molin. Sólo grupos finitos y representaciones finito-dimensionales son consideradas en los trabajos de este período. El ímpetu original del desarrollo de la teoría de las representaciones fue la generalización por parte de Frobenius de las nociones de carácter en grupos abelianos. Fue rápidamente descubierto que esta noción de carácter podía ser definida como la traza de una representación matricial del grupo. En consecuencia, la teoría de Frobenius y la teoría de grupos abelianos, que había sido desarrollada previamente, fueron unidas en una única teoría de representaciones de grupos.

Un sorprendente descubrimiento de esta época, que fue sistemáticamente utilizado por parte de Schur, fue el proceso de promediación sobre un grupo, y su famoso lema acerca de los operadores de intercambio para representaciones irreducibles. Las relaciones de ortogonalidad fueron obtenidas en su forma general, en los trabajos de Burnside junto con una descripción de la estructura de las álgebras irreducibles de matrices.

El segundo período está caracterizado por la creación de las teorías de representaciones para grupos topológicos compactos. El resultado general más importante de este período es el teorema de Haar, acerca de la existencia de una medida finita invariante, así como el teorema de Peter-Weyl, sobre la completitud del sistema de representaciones finitas de un grupo. Durante este mismo período, Weyl y Cartan desarrollaron la teoría de representaciones finitas para grupos de Lie compactos. Estos resultados no sólo fueron impresionantes por su elegancia sino que también encontraron diversas aplicaciones en la matemática y la física (la teoría de los espacios simétricos y la teoría del movimiento en la mecánica cuántica). La teoría de representaciones de grupos se ha convertido en una rama importante de la matemática y tiene una popularidad creciente.

El sistemático estudio de las representaciones de grupos de dimensión infinita fue el principal tema del tercer período, que comenzó en 1940. Es natural marcar el principio de este período con el artículo publicado en 1943 por Gel'fand y Raikov, acerca de la completitud del sistema de representaciones unitarias irreducibles para grupos localmente compactos. Durante este período, Murray y von Neumann completaron su estudio sobre álgebras de operadores. La teoría de las álgebras de von Neumann fue unida a la teoría de representaciones de grupos en algunos trabajos de Adel'son-Vel'skii, Mautner y Godement.

El primer teorema de clasificación de representaciones de dimensión infinita fue obtenida en 1947 por Gel'fand y Naimark. Posteriormente, en 1950, estos autores obtuvieron las representaciones de dimensión infinita de $SL(n), SO(n)$ y $Sp(n)$ para n arbitrario. Este trabajo obtuvo gran reconocimiento, y desde su aparición, la cantidad de investigaciones sobre representaciones de dimensión infinita se ha incrementado continuamente.

Esta monografía se centra en los descubrimientos realizados en el segundo período de los antes mencionados. A continuación presentamos la motivación para el estudio de las representaciones de grupos compactos.

Desde el punto de vista lógico, el concepto de grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ es una combinación de los conceptos abstractos de grupo $(G, \cdot)$ y de espacio topológico (G, τ). Las operaciones de multiplicación en el grupo y de clausura en el espacio topológico son concebidas de forma simultánea en un mismo conjunto G. Sin embargo, estas operaciones no son independientes, y están conectadas a través de la condición de continuidad: las operaciones de grupo en $(G, \cdot)$ deben ser continuas en la topología del espacio (G, τ).

Históricamente, el concepto de grupo topológico surgió en conexión con las consideraciones de grupos de funciones continuas, por lo que originalmente todo grupo topológico era tratado como tal: como un grupo de funciones continuas. Desarrollos posteriores en esta área han demostrado que las propiedades de mayor relevancia no guardan relación con el hecho de que el grupo en consideración sea un grupo de funciones continuas, sino que sólo depende de la estructura misma del grupo topológico.

Una cuestión que surge naturalmente al construir una nueva teoría, es si ésta guarda alguna relación con objetos previamente conocidos, para los cuales existe un mayor desarrollo del conocimiento. Ejemplos de esto pueden ser los grupos de matrices o los grupos de Lie. Establecer alguna conexión en esta dirección permitiría responder preguntas sobre los grupos topológicos a partir de elementos más concretos.

Decimos que un grupo topológico admite una representación de dimensión finita si existe un homomorfismo continuo $\pi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, un homomorfismo continuo desde G a un grupo topológico de matrices invertibles. Puesto que es obvia la existencia de la representación trivial, a través de la cual cada elemento en G se corresponde con la identidad en $\mathbb{C}^n$, la pregunta relevante es si dado un grupo topológico, existen representaciones no triviales de él. Más aún, cabe preguntarse si existe un sistema completo[1] de tales representaciones.

Si bien el problema considerado en el contexto de los grupos localmente compactos tiene una respuesta más complicada, podemos dar una respuesta satisfactoria a él si el grupo G es compacto. En este caso, la situación es en algunos sentidos más complicada, pero en otros lo es más simple que para grupos abelianos localmente compactos. Las complicaciones surgen a partir del hecho de que no toda representación de G es unidimensional si G no es abeliano. En cambio, toda representación irreducible es de dimensión finita si G es compacto, y en consecuencia pueden aplicarse las herramientas del álgebra lineal. Por otro lado, el objeto dual de un grupo abeliano es de nuevo un grupo: *el grupo dual* $\widehat{G}$. Sin embargo, el objeto dual de un grupo no abeliano, que también se denota por $\widehat{G}$, no es un grupo en general, sino un conjunto sin estructura adicional.

El primer paso en el desarrollo de la teoría es construir en cada grupo compacto una medida invariante, o equivalentemente, una noción de integración invariante. Concretamente, buscamos asignarle a cada boreliano $B \in \sigma(\tau)$ (la sigma álgebra de Borel asociada a τ) un número no negativo (su *medida*) que verifique la condición de invarianza: la medida de B debe ser igual a la medida de gB para todo g en G. La primera construcción de una medida invariante fue presentada por Haar en 1933. Estos resultados permiten considerar el espacio de Hilbert asociado a G: $L^2(G)$, con lo cual entran en juego las herramientas del análisis funcional, además de aquellas provenientes de la topología y el álgebra.

Antes de que la construcción de una integración invariante fuera usada para grupos compactos en general, Peter-Weyl la utilizaron para la construcción de un sistema completo de representaciones para grupos de Lie compactos, en los cuales la integración invariante puede construirse de forma más simple. Como resultado del trabajo de Haar, su construcción puede ser automáticamente aplicada a grupos compactos.

Por otro lado, históricamente los grupos de Lie han sido el objeto de estudio de numerosos trabajos. Ellos han sido estudiados en detalle, y en consecuencia sería importante establecer una conexión entre los grupos de Lie y los grupos topológicos (compactos). Resulta que a partir de la existencia de un sistema completo de representaciones en un grupo compacto arbitrario, es posible construir cualquier grupo compacto a partir de grupos de Lie mediante un determinado proceso de paso al límite (concretamente, un *límite inverso*).

[1] Decimos que un grupo G admite un *sistema completo de representaciones* si para cada $g \in G$ distinto de la identidad, existe una representación de G a través de la cual g no se corresponde con la matriz identidad.

La estructura de la monografía es la que sigue.

El capítulo uno tiene como primer objetivo presentar la teoría básica de los grupos compactos y sus representaciones. En él se presentan distintas construcciones y ejemplos de representaciones y se prueba el Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos, que es el principal resultado de esta monografía.

En el segundo capítulo presentamos algunas propiedades topológicas de G que se deducen de propiedades de $L^2(G)$ a partir del Teorema de Peter-Weyl más algunos teoremas de topología general.

El tercer capítulo tiene como objetivo calcular explícitamente las representaciones irreducibles de algunos grupos compactos bien conocidos: $SU(2)$ y $SO(3)$. Para $SU(2)$, tendremos que calcular su medida de Haar, y hallar sus representaciones irreducibles "a mano". Sin embargo, para $SO(3)$ tomaremos un camino más corto, pues éste es un cubrimiento doble de $SU(2)$, y así obtendremos sus representaciones irreducibles a partir de las de este último.

El cuarto capítulo presenta la teoría de representaciones de grupos con mayor detalle que en el capítulo uno. Su principal objetivo es probar el Teorema de Reciprocidad de Frobenius, que utilizaremos en el último capítulo. En el camino, se probarán importantes resultados acerca de los caracteres de las representaciones de un grupo compacto y se definirá la noción de multiplicidad de una representación irreducible en otra dada.

En el último capítulo damos respuesta al siguiente problema. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo compacto centrado del cual sólo conocemos las áreas de las secciones por cada hiperplano, es decir, tal que la función que a cada hiperplano P le asigna el número real área$(P \cap K)$, es conocida. ¿Será posible obtener K a partir de esta información? La respuesta es afirmativa en el caso de que K sea además convexo y simétrico. Para obtener este resultado, utilizaremos la teoría del análisis armónico desarrollada en los capítulos precedentes.

Capítulo 1

Teorema de Peter-Weyl.

Este es el capítulo más importante de esta monografía y sobre él se sustentan los demás capítulos. Como su nombre lo indica, el principal objetivo de este capítulo es probar el Teorema de Peter-Weyl, lo cual se concreta en la última sección. Para llegar a él, debemos por un lado familiarizar al lector con los conceptos y la notación que se utilizan. Por el otro, debemos también obtener algunos resultados cruciales e importantes en sí mismos, que nos aproximen al teorema.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En primer lugar, se recuerdan brevemente los resultados básicos relacionados con la medida y la integral de Haar, que constituyen las formas naturales de medir e integrar en un grupo compacto: cuando $G = S^1$, la medida de Haar viene dada por algún múltiplo de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. La última parte de esta sección está dedicada a mostrar que la imagen de la forma integrada de la representación regular está contenida en el álgebra de los operadores compactos de $L^2(G)$. Posteriormente se presenta la teoría básica de las representaciones de un grupo compacto. Pueden destacarse los siguientes resultados: el hecho de que toda representación irreducible en un grupo compacto es de dimensión finita; el Lema de Schur, acerca de los operadores de intercambio entre representaciones irreducibles; y finalmente el hecho de que $C(G)$ contiene una identidad aproximada con respecto a la involución, lo cual permite demostrar, a través de los operadores de Hilbert-Schmidt, que los coeficientes matriciales asociados a las representaciones irreducibles de G generan un subespacio denso de $L^2(G)$. En la tercera sección se introducen los denominados coeficientes matriciales del grupo G, se estudia su relación con la representación regular, las relaciones de ortogonalidad que ellos verifican, y se demuestra que el espacio que ellos generan es denso en $C(G)$.

Finalmente, la prueba del Teorema de Peter-Weyl sigue la siguiente lógica. A partir de las relaciones de ortogonalidad de los coeficientes matriciales, es posible obtener una base ortonormal del subespacio generado por los coeficientes matriciales. Como este último es denso en $L^2(G)$, se deduce que este conjunto ortonormal es de hecho una base ortonormal en $L^2(G)$. Así, descomponemos $L^2(G)$ en una suma directa indexada en el conjunto de las clases de representaciones irreducibles de G, $\widehat{G}$, de espacios de funciones continuas, de forma que existe una biyección natural entre cada uno de estos espacios y $\widehat{G}$. En esta situación, resulta más sencillo estudiar la representación regular izquierda, λ, (de hecho, cualquier representación) restringiéndola a cada uno de estos subespacios de $L^2(G)$.

De esta forma, y con algunos cálculos, se deduce que en cada espacio, λ es equivalente a un múltiplo de la representación irreducible que éste tiene asociado. La reunión de todos estos resultados y argumentos, junto con algunas cuentas adicionales, es esencialmente la prueba del Teorema de Peter-Weyl.

1.1. Integración invariante.

Los funcionales, medidas e integrales invariantes son una herramienta vital en el estudio de las representaciones de grupos localmente compactos. Además, permiten obtener los espacios y álgebras de funciones que se estudian en el análisis armónico. Si bien en el caso compacto puede obtenerse más información acerca de las medidas invariantes, los grupos locamente compactos admiten una tal medida, esencialmente única, y que en cierta forma determina la topología del grupo, como veremos más adelante.

1.1.1. La medida de Haar.

Todo grupo topológico localmente compacto admite una medida regular de Borel, no nula e invariante por traslaciones. A tal medida la denominamos *medida de Haar*, y a la integral que ella induce, que también es invariante por traslaciones, la denominamos *integral de Haar*. Este es un resultado importante en el estudio de los grupos localmente compactos, pero omitiremos aquí dar una demostración. El lector interesado podrá encontrar la demostración clásica de él en [4] y [5], o una demostración más concreta para grupos compactos en [15].

Teorema 1.1.1. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida regular de Borel no nula μ, tal que $\mu(tA) = \mu(A)$ para todo $t \in G, A \subseteq G$ de Borel. Además, si ν es otra medida que verifica lo anterior, entonces existe $\lambda \geq 0$ tal que $\mu = \lambda\nu$.*

Denotaremos por μ a la medida provista por el teorema anterior. En general no será cierto que $\mu(At) = \mu(A)$ para todo $t \in G, A \subseteq G$ de Borel. Para enfatizar este hecho, llamaremos a la medida μ medida de Haar *izquierda*. Puede construirse de forma análoga, una medida de Haar invariante a derecha. Un hecho que distingue a los grupos compactos de sus similares localmente compactos, es la existencia en general de medidas de Haar invariantes a izquierda y derecha simultáneamente.

Teorema 1.1.2. *Sea G un grupo compacto. Entonces existe una única medida de Haar de probabilidad en G que es invariante por traslaciones izquierdas y derechas en G.*

En las condiciones del teorema anterior, la medida de Haar no sólo es invariante por traslaciones, sino también por inversiones. Concretamente, se tiene lo siguiente.

Proposición 1.1.3. *Sean G un grupo compacto, μ la medida de Haar del teorema anterior, y $A \subseteq G$ de Borel. Entonces $\mu(A^{-1}) = \mu(A)$.*

Demostración. Si definimos en G la medida μ' por $\mu'(E) = \mu(E^{-1})$, entonces μ' es otra medida invariante por traslaciones, puesto que μ es bi-invariante. Por lo tanto, existe $\lambda \geq 0$ tal que $\mu = \lambda\mu'$. Tomando B un conjunto simétrico en G ($B = B^{-1}$), se concluye que $\lambda = 1$ y entonces $\mu = \mu'$. $\square$

Observación 1.1.4. En virtud de la invarianza por traslaciones a izquierda y derecha, y por inversiones, concluimos que al integrar en un grupo compacto respecto a su medida de Haar, pueden efectuarse los cambios de variables $s \mapsto tsr^{-1}$ para t y $r \in G$ arbitrarios, sin afectar el valor de la integral.

1.2. Representaciones unitarias.

1.2.1. Definiciones y construcciones básicas.

Comenzaremos esta sección introduciendo las primeras definiciones y resultados sobre las representaciones de un grupo. Además, fijaremos la notación que se usará en los próximos capítulos.

A partir de ahora, G será un grupo localmente compacto y de Hausdorff, y $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert complejo. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de las transformaciones lineales $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotadas.

Definición 1.2.1. Una *representación del grupo G* sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ débilmente continuo. La continuidad débil de π debe entenderse en el siguiente sentido:

$$\forall\ \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \text{el mapa } G \to \mathbb{C} :\ g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle \text{ es continuo.}$$

Además, si $\pi(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es unitaria $\forall\ g \in G$, decimos que π es una *representación unitaria.*

Notación. $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ :\ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ es unitaria}\}$.

La condición de continuidad débil para una representación unitaria es equivalente a la continuidad fuerte de la misma, es decir, la condición de que $g \mapsto \pi(g)\xi$ sea continuo para todo $\xi \in \mathcal{H}$. En efecto, se tiene lo siguiente.

Proposición 1.2.2. *Sea π una representación unitaria de G débilmente continua. Entonces es fuertemente continua, es decir:*

$$\lim_{t \to t_0} \|\pi(t)x - \pi(t_0)x\| = 0,\ \forall\ x \in \mathcal{H}, t_0 \in G.$$

Demostración. Basta ver que si $t \to e$, entonces $\pi(t)x \to x$ en la norma de $\mathcal{H}$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Para ello, sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\pi(t)x - x\|^2 &= \langle \pi(t)x - x, \pi(t)x - x \rangle \\ &= \|\pi(t)x\|^2 - \langle \pi(t)x, x \rangle - \langle x, \pi(t)x \rangle + \|x\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi(t)x, x \rangle \to 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

donde el límite vale para cada x en $\mathcal{H}$, con lo que se concluye la prueba. □

Definición 1.2.3. Decimos que dos representaciones $\pi_1 : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y $\pi_2 : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ son *equivalentes*, si existe un operador acotado $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que verifique

$$\pi_1(g) = U^{-1}\pi_2(g)U.$$

Si además U es un operador unitario, entonces decimos que π_1 y π_2 son *unitariamente equivalentes*. En este caso, se verifica

$$\pi_1(g) = U^*\pi_2(g)U.$$

En cualquiera de los dos casos, escribiremos $\pi_1 \cong \pi_2$ y denotamos por $[\pi]$ a la clase de equivalencia (unitaria) de π.

Observación 1.2.4. De aquí en más, todas las representaciones que consideremos, a menos que lo digamos expresamente, serán unitarias. En general, la expresión *representación de* G significará *representación unitaria de* G. Asimismo, la equivalencia que consideraremos será la unitaria, y el símbolo $\pi_1 \cong \pi_2$ significará que *las representaciones unitarias* π_1 *y* π_2 *son unitariamente equivalentes.*

Las representaciones unitarias son las más importantes y constituyen la clase de representaciones más estudiada. Existen al menos dos razones para esto. Por un lado, las representaciones unitarias aparecen naturalmente en diversas aplicaciones (sistemas dinámicos, mecánica cuántica, etc.). Por otro lado, las representaciones unitarias poseen una serie de importantes propiedades, que en gran medida facilitan su estudio. Por ejemplo, todo subespacio invariante de una representación unitaria reduce a la representación, ya que su complemento ortogonal también es invariante.

Es importante observar que en el caso de grupos compactos, no hay pérdida de generalidad al considerar únicamente este tipo de representaciones, como lo evidencia la siguiente proposición. El lector interesado podrá encontrar los detalles de la demostración en [6].

Proposición 1.2.5. *Sean* G *compacto y* $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *una representación de* G *(no necesariamente unitaria). Entonces* π *es equivalente a una representación unitaria de* G.

Demostración. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno original en $\mathcal{H}$, consideramos en $\mathcal{H}$ el siguiente producto interno:

$$\langle x, y \rangle_\pi = \int_G \langle \pi(g)x, \pi(g)y \rangle dg \quad \forall\ x, y \in \mathcal{H}.$$

Se prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ es efectivamente un producto interno en $\mathcal{H}$, y que este último es completo con respecto a la norma que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ induce. Así, se deduce que $\mathcal{H}$ dotado con ese producto interno resulta un espacio de Hilbert en el cual $\pi(g)$ es unitaria para todo $g \in G$. Finalmente, el isomorfismo entre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\pi)$ es la identidad. □

Notación. Si $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación unitaria de G, d_π representará la dimensión de $\mathcal{H}_\pi$.

Observación 1.2.6. Si $\pi_1 \cong \pi_2$, entonces $d_{\pi_1} = d_{\pi_2} =: d_{[\pi]}$. Si π y ρ son representaciones de G y $d_\pi \neq d_\rho$, entonces $\pi \ncong \rho$. En particular, si una representación es finita y otra no, entonces no son unitariamente equivalentes.

La definición y la proposición que siguen serán de utilidad al momento de trabajar con funciones continuas, y representan una generalización del concepto de función uniformemente continua a grupos topológicos (no necesariamente métricos). Concretamente, se tiene lo siguiente:

Definición 1.2.7. Dada $f : G \to E$, donde E es un espacio normado, decimos que f es uniformemente continua si, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de la identidad e, tal que

$$\|f(t) - f(g)\| < \epsilon \quad \text{si } t^{-1}g \in U.$$

Observación 1.2.8. Es claro que la continuidad uniforme es una condición más fuerte que la continuidad usual, pues implica esta última.

Observación 1.2.9. Como es sabido, los conceptos de continuidad y continuidad uniforme no son equivalentes en general. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.10. *Sean G un grupo compacto, E un espacio normado y $f : G \to E$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la colección de todos los abiertos U de G que contienen a e. Ordenamos $\mathcal{U}$ con la inclusión inversa, es decir, $U \geq W$ si $U \subseteq W$.

Supongamos que el resultado es falso, por lo que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}$, existen $t_U, g_U \in G$ con $t_U^{-1}g_U \in U$ y $\|f(t_U) - f(g_U)\| > \epsilon_0$. Ahora, $\{t_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ es una red en G, que es compacto, por lo que existen $t \in G$ y una subred de $\{t_U\}_{U\in\mathcal{U}}$, que suponemos que es ella misma, tales que $t_U \to_U t$. Puesto que $t_U^{-1}g_U \to_U e$, se tiene que $g_U = t_U(t_U^{-1}g_U) \to t$.

En consecuencia, si W es un entorno de t, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $t_U, g_U \in W$. Como f es continua en t, W puede ser tomado de modo que $\|f(t) - f(w)\| < \frac{\epsilon_0}{2} \ \ \forall\, w \in W$.

Con esta elección de W, se tiene que

$$\|f(t_U) - f(g_U)\| \leq \|f(t_U) - f(t)\| + \|f(t) - f(g_U)\| < \epsilon_0,$$

lo cual es un absurdo. En consecuencia, f es uniformemente continua en G. □

Observación 1.2.11. Análogamente se prueba que si G es un grupo localmente compacto, entonces las funciones continuas de soporte compacto son uniformemente continuas. La única variación en la demostración es que habrá que tomar alguna precaución de modo que $t_U \in \mathrm{sop}(f)$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Ejemplo 1. Sean G un grupo compacto y $\mathcal{H} = L^2(G)$. La *representación regular izquierda* de G, $\lambda : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, viene dada por $\lambda(g)f(t) = f(g^{-1}t)$. Obsérvese que $\lambda(g)$ es una isometría para cada $g \in G$, por la invariancia de la integral de Haar (ver observación 1.1.4).Veamos que efectivamente es una representación unitaria de G:

λ es un homomorfismo:

- $\lambda(e)f(t) = f(e^{-1}t) = f(et) = f(t)$ y en consecuencia, $\lambda(e) = Id_{L^2(g)}$.

• $\lambda(gs)f(t) = f((gs)^{-1}t) = f(s^{-1}g^{-1}t) = \lambda(s)f(g^{-1}t) = \lambda(g)\big(\lambda(s)f(t)\big)$, por lo que $\lambda(gs) = \lambda(g)\lambda(s)$.

λ **es continua:**

Sea $f \in C(G)$, y veamos que $g \mapsto \lambda(g)f$ es continua. Sea $(g_i)_{i\in I} \subseteq G$ una red tal que $g_i \to g$. Como f es continua en G, es uniformemente continua, y en consecuencia, dado ϵ existe un entorno W de e en G tal que

$$|f(t) - f(r)| < \epsilon \quad \text{si } t^{-1}r \in W.$$

Sea $i_0 \in I$ tal que $g_i^{-1}g \in W$ para todo $i \geq i_0$. Entonces, si $i \geq i_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\lambda(g_i)f - \lambda(g)f\|_2^2 &= \int_G |\lambda(g_i)f(t) - \lambda(g)f(t)|^2 dt = \int_G |f(g_i^{-1}t) - f(g^{-1}t)|^2 dt < \\ &< \int_G \epsilon^2 dt = \epsilon^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\lambda(g_i)f - \lambda(g)f\|_2 < \epsilon$ para todo $i \geq I$.

Finalmente, sean $h \in L^2(G)$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe $f \in C(G)$ tal que

$$\|h - f\|_2 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Además, si $(g_i)_{i\in I}$ es como antes, existe $j \in I$ tal que

$$\forall\ i \geq j, \|\lambda(g_i)f - \lambda(g)f\|_2 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces, dado que $\lambda(g)$ es una isometría para todo $g \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\lambda(g_i)h - \lambda(g)h\|_2 &\leq \|\lambda(g_i)h - \lambda(g_i)f\|_2 + \|\lambda(g_i)f - \lambda(g)f\|_2 + \|\lambda(g)f - \lambda(g)h\|_2 \\ &< \epsilon\ \forall i \in I, i \geq j.\end{aligned}$$

En consecuencia, $g \mapsto \lambda(g)h$ es continua $\forall\ h \in L^2(G)$.

λ **es unitaria:**

Dados $g \in G, f, h \in L^2(G)$, vale la siguiente igualdad:

$$\langle \lambda(g)f, h\rangle = \int_G f(g^{-1}t)\overline{h(t)}dt = \int_G f(r)\overline{h(gr)}dr = \langle f, \lambda(g^{-1})h\rangle.$$

En consecuencia, $\lambda(g)^* = \lambda(g^{-1})$, esto es, λ es unitaria.

Finalmente, veamos que λ es una representación inyectiva (o fiel) de G. En efecto, sea $g \in G$ y supongamos que

$$\lambda_g = \lambda_e = Id_{L^2(G)},$$

o sea que para toda $f \in L^2(G)$,

$$\lambda_g(f) = f.$$

Equivalentemente, para toda $f \in L^2(G)$, se cumple $f(g^{-1}t) = f(t)$ para casi todo $t \in G$.

Supongamos que $g \neq e$ y sean V un entorno compacto de e tal que $g^{-1}V \cap V = \emptyset$, y $f \in C(G)$ tal que $f|_V = 0$; $f|_{g^{-1}V} = 1$. Entonces $0 = f(t) = f(g^{-1}t) = 1$ para casi todo $t \in V$, lo cual es un absurdo, puesto que por la invariancia de μ y la compacidad de G, cualquier abierto de este último tiene medida positiva. En consecuencia, λ es inyectiva.

Ejemplo 2. Un ejemplo simétrico al anterior viene dado por la *representación regular derecha*, dada por

$$\rho : G \to L^2(G)$$

$$\rho_g(f)(t) = f(tg) \quad \forall\ f \in \mathcal{U}(L^2(G)) \text{ y } g, t \in G.$$

Observación 1.2.12. Las representaciones regulares izquierda y derecha son unitariamente equivalentes.

Demostración. Sea $U : L^2(G) \to L^2(G)$ definido por

$$Uf(g) = f(g^{-1}).$$

Entonces, es claro que $U^2 = Id$ y se tiene que

$$\langle Uf, h\rangle = \int_G f(g^{-1})\overline{h(g)}dg = \int_G f(g)\overline{h(g^{-1})}dg = \langle f, Uh\rangle.$$

Por lo tanto, U es un operador unitario en $L^2(G) = \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\rho$. Además,

$$\lambda_g U(f)(t) = U(f)(g^{-1}t) = f(t^{-1}g) = \rho_g(f)(t^{-1}) = \rho_g U(f)(t).$$

Se concluye entonces que U es un operador unitario que intercambia a λ y ρ, por lo que estas últimas son unitariamente equivalentes. $\square$

En consecuencia, las propiedades que fueron observadas para la representación regular izquierda, también son válidas para la representación regular derecha.

Definición 1.2.13. Decimos que una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es *irreducible* si no existe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio propio cerrado invariante por π, es decir, tal que $\pi(g)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}\ \forall\ g \in G$.

Observación 1.2.14. Si $\dim(\mathcal{H}) < \infty$, la condición de que $\mathcal{K}$ sea cerrado resulta superflua.

Definición 1.2.15. Dado un grupo G, definimos su *objeto dual* por $\hat{G} := \{\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \pi \text{ es irreducible}\}/\cong$, donde $\cong$ representa la equivalencia unitaria de representaciones de G.

Observación 1.2.16. El objeto dual $\widehat{G}$ no es más que un conjunto sin ninguna estructura algebraica adicional.

Definición 1.2.17. Si π y η son representaciones de un mismo grupo G, entonces $\pi \oplus \eta : G \to \mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_\eta$ es la representación de G definida por

$$\pi \oplus \eta(g)(\xi, \zeta) = (\pi(g)x, \eta(g)y). \tag{1.2.1}$$

Además, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$n\pi = \oplus_{i=1}^{n} \pi.$$

Observación 1.2.18. Es inmediato verificar que con la definición anterior, la suma de una cantidad finita de representaciones es una representación.

A continuación definiremos la suma de una cantidad arbitraria de representaciones. Para que la suma sea efectivamente una representación, tendremos que exigir alguna hipótesis adicional a los sumandos.

Definición 1.2.19. Dada una familia arbitraria $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ de espacios de Hilbert, definimos su *suma directa* por

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \{x \in \prod_{i\in I} \mathcal{H}_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty\},$$

con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle_{\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i} = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle_{\mathcal{H}_i}, \quad \forall\ x, y \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i.$$

Observación 1.2.20. Es fácil verificar que $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ con el producto interno antes definido, es efectivamente un espacio de Hilbert.

Definición 1.2.21. Sean $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ tales que $\|T_i\| \leq M$ para cada $i \in I$. Podemos también definir el *operador suma directa* por

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} T_i \quad &: \quad \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \\ \langle (\bigoplus_{i\in I} T_i) x, y\rangle_{\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i} \quad &= \quad \sum_{i\in I} \langle T_i x_i, y_i\rangle_{\mathcal{H}_i} \quad \forall\ x, y \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i. \end{aligned}$$

Observación 1.2.22. Con la notación anterior, se verifica que $\bigoplus_{i\in I} T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i)$ y que $\| \bigoplus_{i\in I} T_i\| \leq M$.

Observación 1.2.23. También con la notación anterior, vale que si $T_i \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_i)$, entonces $\bigoplus_{i\in I} T_i \in \mathcal{U}(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i)$.

Definición 1.2.24. Sean $\{(\pi_i, \mathcal{H}_i)\}_{i\in I}$ representaciones de G, tales que para todos $g \in G, i \in I$, es $\|\pi_i(g)\| \leq M$. Entonces, definimos la *suma directa de representaciones* de G en el espacio $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ por

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} \pi_i : G \quad &\to \quad \mathcal{B}(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i) \text{ tal que} \\ g \quad &\mapsto \quad \bigoplus_{i\in I} \pi_i(g) \quad \forall\ g \in G. \end{aligned}$$

Definición 1.2.25. Dada una representación de G, π, cada sumando directo de ella (cuando exista) se dice *subrepresentación* de π.

Observación 1.2.26. Es inmediato verificar que $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$ es débilmente continua si cada π_i lo es.

Observación 1.2.27. En virtud de la observación 1.2.23, si cada π_i es unitaria, también lo es $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$.

Definición 1.2.28. Definimos el *conmutador* de $\pi(G)$ por $\pi(G)' = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A\pi(g) = \pi(g)A \ \forall \ g \in G\}$.

Observación 1.2.29. Si π es unitaria, entonces $\pi(G)'$ es autoadjunto, es decir, si $A \in \ \pi(G)'$, entonces $A^* \in \pi(G)'$.

Demostración. Si $A \in \pi(G)'$, entonces $A\pi(g) = \pi(g)A \ \forall \ g \in G$. Tomando adjuntos en ambos miembros, se obtiene

$$A^*\pi(g) = (\pi(g)^*A)^* = \left(\pi(g^{-1})A\right)^* = \left(A\pi(g^{-1})\right)^* = \pi(g^{-1})^*A^* = \pi(g)A^*.$$

□

1.2.2. Primeras propiedades y el Lema de Schur.

En este apartado obtendremos algunos resultados importantes a partir de herramientas básicas. A pesar de ello, no sólo tienen interés en sí mismas, sino que estas propiedades permitirán deducir algunos resultados de mayor relevancia y, en particular, nos encaminarán hacia el Teorema de Peter-Weyl.

Haremos una breve disgresión para recordar los hechos básicos acerca de la integración vectorial, herramienta que necesitaremos para probar que toda representación irreducible de G es de dimensión finita. El lector interesado podrá encontrar más detalles en el apéndice de [14].

Sea $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio de medida, donde M es un espacio compacto, μ una medida regular de Borel compleja en M. Si X un espacio de Banach, definimos $\mathcal{B}(M, X) := \{f : M \to X : \|f\|_\infty < \infty\}$. Además, decimos que una función $f : M \to X$ es *escalonada* si existen $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$ medibles y disjuntos, $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) \cdot x_i.$$

Sea $\mathcal{S}_X = \{f : M \to X : f \text{ es escalonada}\}$, que es un subespacio de $\mathcal{B}(M, X)$ no cerrado a menos que M sea finito.

Sea $\int : \mathcal{S}_X \to X$ definido por $\int \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) \cdot x_i\right) dt = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot x_i \in X$. Es rutinario verificar que la fórmula anterior no depende de la descomposición elegida para $f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) \cdot x_i$. Además, se tiene que

$$\| \int f \| = \| \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot x_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \| \cdot x_i \| \leq |\mu|(M) \cdot \|f\|_\infty,$$

de modo que $\int$ es un operador lineal entre $\mathcal{S}_X$ y X que es acotado, y verifica $\| \int \| \leq |\mu|(M)$. En consecuencia, $\int$ se extiende por continuidad a $\overline{\int} : \overline{\mathcal{S}_X} \to X$. Los elementos de $\overline{\mathcal{S}_X}$ se llaman funciones regladas, y, mediante argumentos generales de Teoría de la Medida, puede verse que cualquier función continua entre M y X es reglada.

La siguiente observación es una propiedad fundamental que verifica el operador recién construido, y es una generalización de la correspondiente propiedad de la integral de Riemann o Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Observación 1.2.30. En las condiciones de los párrafos anteriores, sean además Y de Banach y $T : X \to Y$ un operador acotado. Si $f \in \mathcal{S}_X$, entonces $T \circ f \in \mathcal{S}_Y$ y además

$$\begin{aligned} \int T \circ f &= \int T \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \cdot x_i \right) dt \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \cdot T x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot T x_i dt \\ &= T \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot x_i dt \right) \\ &= T \left(\int f \right). \end{aligned}$$

Además, $\|T \circ f\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_\infty$. Como T es acotado, la extensión de $\int$ a los conjuntos $\overline{\mathcal{S}_X}, \overline{\mathcal{S}_Y}$ verifica la misma propiedad: $\int T \circ f = T \left(\int f \right)$ para toda f reglada.

Teorema 1.2.31. *Sea π una representación de G. Entonces, π tiene una subrepresentación de dimensión finita.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$, y consideremos el operador $\theta_{x,x} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por $\theta_{x,x}(y) = \langle y, x \rangle x \ \forall \ y \in \mathcal{H}$. Definimos $\alpha : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por $\alpha_t = \pi(t)\theta_{x,x}\pi(t)^*$. Así, $\forall \ y \in \mathcal{H}$,

$$\alpha_t(y) = \pi(t)\theta_{x,x}\pi(t)^* y = \pi(t)\big(\langle \pi(t)^* y, x \rangle x\big) = \langle y, \pi(t)x \rangle \pi(t)x = \theta_{\pi(t)x,\pi(t)x},$$

por lo que $\alpha_t = \theta_{\pi(t)x,\pi(t)x} \ \forall \ t \in G$.

Por otro lado, observemos que α_t es continua en norma: sea $y \in \mathcal{H}$ tal que $\|y\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_t - \theta_{x,x})y\| &= \|\langle y, \pi(t)x\rangle \pi(t)x - \langle y, x\rangle x\| \\
&\leq \|\langle y, \pi(t)x\rangle(\pi(t)x - x)\| + \|x\langle y, \pi(t)x\rangle - \langle y, x\rangle x\| \\
&\leq \|y\|\|\pi(t)x\|\|\pi(t)x - x\| + \|x\|\|y\|\|\pi(t)x - x\| \\
&= 2\|\pi(t)x - x\| \to_t 0,
\end{aligned}$$

donde el último paso se debe a que π es fuertemente continua (ver observación 1.2.2).

Ahora, si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ está definido por $T = \int_G \alpha_t dt$ (ver los comentarios previos), entonces T es compacto, puesto que la integral converge en norma. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle Ty, y\rangle &= \int_G \langle \alpha_t y, y\rangle dt \\
&= \int_G \langle\langle y, \pi(t)x\rangle \pi(t)x, y\rangle dt \\
&= \int_G \langle y, \pi(t)x\rangle\langle \pi(t)x, y\rangle dt \\
&= \int_G |\langle y, \pi(t)x\rangle|^2 dt \geq 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, T es positivo y por lo tanto autoadjunto. Además, es no nulo: $\langle Ty, y\rangle > 0$ pues el integrando es unitario, no negativo y no nulo. Así, el Teorema Espectral aplicado a T permite afirmar que existe un valor propio de T, $\lambda > 0$, y así $\mathcal{H}_\lambda := \ker(T - \lambda)$ es de dimensión finita.

Veamos que para todo $s \in G$, es $\pi(s)T = T\pi(s)$. En efecto, si $s \in G, y \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\pi(s)(Ty) &= \pi(s)\big(\int_G \langle y, \pi(t)x\rangle \pi(t)x dt\big) \\
&= \int_G \langle y, \pi(t)x\rangle \pi(st)x dt \\
&= \int_G \langle y, \pi(s^{-1}r)x\rangle \pi(r)x dr \\
&= \int_G \langle \pi(s)y, \pi(r)x\rangle \pi(r)x dr \\
&= T\left(\pi(s)y\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\mathcal{H}_\lambda$ es un subespacio propio de T, es invariante por $\pi(s)$ para todo $s \in G$. Se deduce que $\tilde{\pi} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\lambda)$ definida por $\tilde{\pi}(g)\xi = \pi(g)\xi$ para cada $g \in G, \xi \in \mathcal{H}_\lambda$, es una subrepresentación de π de dimensión finita. $\square$

El teorema anterior tiene dos importantes consecuencias, que se resumen en el corolario y el teorema que siguen. Éstos, junto con el Teorema de Peter-Weyl, describen ampliamente el Análisis Armónico para grupos compactos.

Corolario 1.2.32. *Si π es una representación irreducible de G, entonces es de dimensión finita.*

Demostración. Sea $\tilde{\pi}$ una subrepresentación de dimensión finita de π. Como π es irreducible, no tiene subrepresentaciones no triviales, de modo que $\tilde{\pi} = \pi$ y resulta de dimensión finita. $\square$

Teorema 1.2.33. *Sea π una representación de G. Entonces π se descompone como suma de representaciones irreducibles.*

Demostración. Podemos suponer que π no es irreducible. Si ese es el caso, sea $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ un subespacio propio, de dimensión finita e invariante por π, el cual existe por el teorema 1.2.31. Entonces, $\mathcal{K}^{\perp}$ también es un subespacio propio e invariante por π: si $x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}^{\perp}$, se tiene que

$$0 = \langle \pi(g^{-1})x, y \rangle = \langle x, \pi(g)y \rangle,$$

por lo que $\pi(g)y \in \mathcal{K}^{\perp}$ para todo $y \in \mathcal{K}, g \in G$. Por otro lado, $\eta := \pi|^{\mathcal{U}(\mathcal{K})}$ es una subrepresentación de π, que se descompone como suma de representaciones irreducibles. En efecto, todo subespacio de $\mathcal{K}$ (automáticamente cerrado en él) reduce a η, en virtud del cálculo anterior. En consecuencia, la factorización de $\mathcal{K}$ en subespacios invariantes termina en una cantidad finita de pasos.

Consideremos ahora la familia

$$\mathfrak{F} := \{\big(\eta, \mathcal{K}\big) : \eta : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K}) \text{ es una subrepresentación de } \pi, \text{ y } \eta = \oplus_{i \in I} \eta_i, \text{ con } \eta_i \text{ irreducible}\},$$

que es no vacía por el argumento anterior. Ordenamos $\mathfrak{F}$ de la siguiente manera: si $\eta = \oplus_{i \in I} \eta_i, \eta' = \oplus_{j \in J} \eta'_j$, con $\eta_i : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K}_i), \eta'_j : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K}'_j)$, entonces $\eta \leq \eta'$ si $I \subseteq J$ y $\big(\eta_i, \mathcal{K}_i\big) = \big(\eta'_i, \mathcal{K}'_i\big)$, para todo $i \in I$.

Sea $\mathcal{C} = \{\big(\eta_\lambda, \mathcal{K}_\lambda\big) : \lambda \in \Lambda\}$ una cadena en $\mathfrak{F}$. Entonces $\mathcal{K}_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} \mathcal{K}_\lambda^{(i)}, \eta_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} \eta_\lambda^{(i)}$, con $\eta_\lambda^{(i)} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K}_\lambda^{(i)})$ irreducible, y si $\lambda \leq \lambda'$, entonces $I_\lambda \subseteq I_{\lambda'}$, y $\big(\eta_\lambda^{(i)}, \mathcal{K}_\lambda^{(i)}\big) = \big(\eta_{\lambda'}^{(i)}, \mathcal{K}_{\lambda'}^{(i)}\big)$ para todo $i \in I_\lambda$.

Sean $\mathcal{K}_\infty := \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{K}_\lambda, \eta_\infty : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K}_\infty)$ definida por $\eta_\infty(g)y = \eta_\lambda(g)y$ si $g \in G, y \in \mathcal{K}_\lambda$. Como $\eta_{\lambda'}(g)$ extiende a $\eta_\lambda(g)$ si $\lambda \leq \lambda'$, η_∞ está bien definida. Es inmediato que $\eta_\infty(g)$ es acotada, y por lo tanto $\eta_\infty(g)$ se extiende por continuidad a $\eta(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}_\infty}$. Se verifica fácilmente que el mapa resultante $\eta : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$ es una representación unitaria de G, y que si $I = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, entonces $\eta = \oplus_{\lambda \in \Lambda, i \in I} \eta_\lambda^{(i)}$, $\mathcal{K} = \oplus \lambda \in \Lambda, i \in I \mathcal{K}_\lambda^{(i)}$, de modo que $\big(\eta_\lambda, \mathcal{K}_\lambda\big) \leq \big(\eta, \mathcal{K}\big)$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Por lo tanto, usando el Lema de Zorn, se tiene que $\mathfrak{F}$ tiene un elemento maximal $\big(\rho, \mathcal{H}_\rho\big)$. Si fuera $\mathcal{H}_\rho \subsetneq \mathcal{H}$, la subrepresentación de π obtenida al restringir ésta a $\mathcal{H}_\rho^{\perp}$ permitiría hallar una subrepresentación irreducible $\big(\pi', \mathcal{H}'\big)$ de π, con $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}_\rho^{\perp}$. Pero entonces $\big(\rho \oplus \pi', \mathcal{H}_\rho \oplus \mathcal{H}'\big)$ es un elemento de la familia $\mathfrak{F}$ y es estrictamente mayor que $\big(\rho, \mathcal{H}_\rho\big)$. La contradicción implica que $\big(\rho, \mathcal{H}_\rho\big) = \big(\pi, \mathcal{H}\big)$, y por lo tanto π se escribe como la suma directa de representaciones irreducibles de G. $\square$

Lema 1.2.34. *Sean G un grupo compacto, y π, ρ representaciones irreducibles de G. Si $P : \mathcal{H}_\rho \to \mathcal{H}_\pi$ verifica*

$$\pi(g)P = P\rho(g) \textit{ para todo } g \in G,$$

entonces o bien P es invertible, o $P = 0$.

Demostración. Veamos que $\ker P$ y $\operatorname{rango} P$ son subespacios invariantes para ρ y π respectivamente. En efecto, si $x \in \mathcal{H}_\rho$ verifica $Px = 0$, entonces

$$0 = \pi(g)Px = P\rho(g)x,$$

por lo que $\rho(g)x \in \ker P$ para todo $g \in G$. Por otro lado, si $z \in \operatorname{rango} P$, existe $y \in \mathcal{H}_\rho$ tal que $z = Py$. Entonces,

$$\pi(g)z = \pi(g)Py = P\rho(g)y \in \operatorname{rango} P.$$

Como $\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\rho$ son espacios de dimensión finita, tanto $\ker P$ como $\operatorname{rango} P$ son cerrados. Como ρ es irreducible, o bien $\ker P = \mathcal{H}_\rho$ o $\ker P = 0$. En el primer caso, se tiene que $P = 0$. En el segundo caso, sabemos que $\operatorname{rango} P$ es cerrado e invariante para π, por lo que $\operatorname{rango} P = 0$ o $\operatorname{rango} P = \mathcal{H}_\pi$. Como el primer caso es incompatible con que P sea el operador nulo, se concluye que es P es sobreyectivo, y en consecuencia un isomorfismo. □

Teorema 1.2.35. *(Schur) Sean G un grupo compacto y π una representación de dimensión finita de G. Entonces, son equivalentes:*

(a) *π es irreducible*
(b) $\pi(G)' = \mathbb{C} \cdot I$
(c) *Todo elemento no nulo de $\mathcal{H}$ es cíclico para π, es decir,*

$$\textit{si } x \in \mathcal{H}, x \neq 0, \overline{\pi(G)x} := \overline{\textit{span}}\{\pi(g)x : g \in G\} = \mathcal{H}.$$

Demostración. (a) implica (b). Sea $Q \in \pi(G)'$. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existe un valor propio λ de Q. Además, $P := \lambda I - Q$ también es un elemento de $\pi(G)'$. Como se tiene $\det(P) = 0$, por ser λ un valor propio de Q, el lema anterior asegura que debe ser $P = 0$, esto es, $Q = \lambda I$.

(b) implica (c). Sea $x_0 \in \mathcal{H}$ no nulo. Como $V := \overline{\pi(G)x_0}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ no trivial, bastará ver que si $P_V : \mathcal{H} \to V$ es la proyección ortogonal sobre V, entonces $P_V \in \pi(G)'$. En efecto, ello implicará que $P_{V^\perp} = 0$ y $V = \mathcal{H}$.

Sean $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle P_V \pi(g)x, y\rangle &= \langle \pi(g)x, P_V y\rangle \\ &= \langle \pi(g)P_V x + \pi(g)(I - P_V)x, P_V y\rangle. \end{aligned}$$

Como $V^\perp$ es invariante para π, por ser ésta unitaria, resulta que

$$\pi(g)(I - P_V)x \in V^\perp$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle P_V\pi(g)x, y\rangle &= \langle \pi(g)P_Vx, P_Vy\rangle \\ &= \langle P_V\pi(g)P_Vx, y\rangle \\ &= \langle \pi(g)P_Vx, y\rangle.\end{aligned}$$

puesto que $\pi(g)P_Vx \in V$. En consecuencia, $V = \mathcal{H}$.

(c) implica (a). Sean $\{0\} \subsetneq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado invariante para π, y x un elemento no nulo de $\mathcal{K}$. Entonces, como $\mathcal{H}$ es de dimensión finita,

$$span\{\pi(g)x : g \in G\} = \overline{span}\{\pi(g)x : g \in G\} \subseteq \mathcal{K}.$$

En consecuencia, $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ y π es irreducible. □

1.2.3. Formas integradas.

Otra construcción que nos será de suma utilidad, tanto para demostrar el Teorema de Peter-Weyl como en capítulos posteriores, es la forma integrada de una representación. Mantendremos la notación del resto del capítulo y comenzamos con algunas definiciones básicas.

Definición 1.2.36. Un *álgebra* A sobre $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial junto con un mapa bilineal y asociativo $A \times A \to A$ dado por $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Además, A es un *álgebra normada* si es un espacio normado que cumple $\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$ para cada $a, b \in A$. Si A tiene unidad 1, imponemos que $\|1\| = 1$. Finalmente, si $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces se dice que A es un *álgebra de Banach*.

Observación 1.2.37. Los morfismos de álgebras de Banach son los homomorfismos de álgebras que son continuos.

Definición 1.2.38. Un álgebra A con una involución (es decir, un isomorfismo antilineal $* : A \to A$ que cumple $(a^*)^* = a \ \forall\ a \in A$), es una *$*$-álgebra*. Además, si A es normada (respectivamente, de Banach) y la involución es una isometría, entonces se dice que A es una *$*$-álgebra normada* (respectivamente, *$*$-álgebra de Banach*).

Observación 1.2.39. Los morfismos de $*$-álgebras de Banach son morfismos de álgebras de Banach que respetan la involución.

A continuación mostramos dos ejemplos generales de $*$-álgebras de Banach. La verificación de la definición en cada caso no es inmediata, y el lector podrá encontrar la misma en detalle en [1] o [16].

Proposición 1.2.40. *Si G es un grupo compacto, entonces $L^1(G)$ es una $*$-álgebra de Banach con el producto dado por la convolución, esto es:*

$$f * g(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)ds,$$

y la involución dada por $f^*(t) = \overline{f(t^{-1})}$.

Proposición 1.2.41. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una $*$-álgebra de Banach con la composición como producto y la involución dada por la operación del adjunto, esto es, caracterizada por el hecho de que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}$.*

La demostración de la proposición que sigue puede adaptarse de modo de obtener una generalización a espacios de Hilbert del hecho de que en espacios vectoriales de dimensión finita, una transformación lineal está unívocamente determinada por los valores que ella toma en alguna base del espacio, si bien su enunciado es un caso particular de lo anterior. Cuando la dimensión es infinita, será necesario tomar alguna precaución al momento de elegir los valores en la base, de modo que la transformación lineal inducida resulte continua.

Proposición 1.2.42. *Sean $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria y $f \in L^1(G)$. Entonces existe un único operador $\pi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\langle \pi(f)x, y\rangle = \int_G f(t)\langle \pi(t)x, y\rangle dt \ \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}.$$

Demostración. Por el Lema de Riesz, basta ver que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por $A(x,y) = \int_G f(t)\langle\pi(t)x, y\rangle dt \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}$ es una forma sesquilineal acotada. La sesquilinealidad de A se deduce de la correspondiente del producto interno en $\mathcal{H}$. Por otro lado, se tiene que si $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} |A(x,y)| &= |\int_G f(t)\langle\pi(t)x, y\rangle dt| \\ &\leq \int_G |f(t)|\|\pi(t)\|\|x\|\|y\|dt \\ &= \|f\|_1\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Se concluye que existe un operador $\pi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como en la tesis. Además, esta demostración permite observar que $\|\pi\| \leq 1$. □

Corolario 1.2.43. *El operador $\pi(f)$ provisto por la proposición anterior verifica $\pi(f)x = \int_G f(t)\pi(t)xdt \ \ \forall\ x \in \mathcal{H}$.*

Proposición 1.2.44. *Sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación de G. Entonces el mapa $\varphi : L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $f \mapsto \pi(f)$ es un homomorfismo de $*$-álgebras de Banach.*

Demostración. Tenemos que verificar que φ es multiplicativo, continuo y que $\varphi(f^*) = \varphi(f)^*$. Veámoslo en ese orden.

Sean $f, g \in L^1(G), x \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\pi(f * g)(x) &= \int_G f * g(t)\pi(t)xdt \\
&= \int_G \int_G f(ts^{-1})g(s)\pi(t)xdsdt \\
&= \int_G g(s)\big(\int_G f(ts^{-1})\pi(t)xdt\big)ds \\
&= \int_G g(s)\big(\int_G f(r)\pi(rs)xdr\big)ds \\
&= \int_G g(s)\pi(f)(\pi(s)x)ds \\
&= \pi(f)\big(\int_G g(s)\pi(s)xds\big) \\
&= \pi(f)\pi(g)x.
\end{aligned}$$

Por otro lado, la demostración de la Proposición 1.2.42 muestra que $\|\varphi(f)\| = \|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$, por lo que $\|\varphi\| \leq 1$, y φ resulta continua. Finalmente, si $f \in L^1(G), x, y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(f^*)x, y\rangle &= \int_G \overline{f(t^{-1})}\langle \pi(t)x, y\rangle dt \\
&= \overline{\int_G f(t^{-1})\langle \pi(t^{-1})y, x\rangle dt} \\
&= \overline{\langle \varphi(f)y, x\rangle} \\
&= \langle x, \varphi(f)y\rangle,
\end{aligned}$$

y en consecuencia $\varphi(f^*) = \varphi(f)^*$. Así, φ es un homomorfismo de $*$-álgebras de Banach.□

Ejemplo 3. Si $\lambda : G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ es la representación regular izquierda, calculemos su forma integrada. Para ello, sean $f \in L^1(G), \xi \in L^2(G), t \in G$. Entonces,

$$\lambda_f(\xi)(t) = \int_G f(s)\lambda(s)\xi(t)ds = \int_G f(s)\xi(s^{-1}t)ds = f * \xi(t),$$

y por lo tanto, $\lambda_f(\xi) = f * \xi, \ \forall\ f \in L^1(G), \xi \in L^2(G)$.

Ejemplo 4. Sea ahora $\rho : G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ la representación regular derecha de G. Si $U : L^2(G) \to L^2(G)$ está dado por $f \mapsto U(f) = \check{f} \in L^2(G)$, donde $\check{f}(t) = f(t^{-1})\ \forall\ t \in G$ (ver el ejemplo 1 y la observación 1.2.12), se tiene que $\rho_g = U\lambda_g U\ \forall\ g \in G$. Además,

$$\begin{aligned}
(f \,\breve{*}\, g)(t) &= f * g(t^{-1}) \\
&= \int_G f(s)g(s^{-1}t^{-1})ds \\
&= \int_G f(t^{-1}r^{-1})g(r)dr \\
&= \int_G \check{g}(r)\check{f}(r^{-1}t)dr \\
&= \check{g} * \check{f}(t).
\end{aligned}$$

En consecuencia, si $f \in L^1(G), \xi \in L^2(G), t \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\rho_f(\xi)(t) &= \int_G f(s)\rho(s)\xi(t)ds \\
&= \int_G f(s)U\lambda_s U\xi(t)ds \\
&= U\left(\int_G f(s)\lambda_s(U\xi)(t)ds\right) \\
&= U\left(\lambda_f\breve{\xi}\right)(t) \\
&= U\left(f * \breve{\xi}\right)(t) \\
&= \xi * \breve{f}(t).
\end{aligned}$$

Observación 1.2.45. Con la notación de los ejemplos anteriores, dado que λ_t y ρ_s conmutan para todos $t, s \in G$, también conmutan λ_t y ρ_f, λ_f y ρ_t, y λ_f y ρ_g, para todos $s, t \in G, f, g \in L^1(G)$.

1.2.4. Operadores de Hilbert-Schmidt.

En esta sección desarrollaremos parte de la teoría de los operadores de Hilbert-Schmidt, con el objetivo de demostrar que la imagen de la forma integrada de la representación regular está contenida en el álgebra de los operadores compactos de $L^2(G)$. Más aún, veremos que el operador resultante de aplicar esta representación a una función continua es de Hilbert-Schmidt, con lo que obtendremos una identidad aproximada con respecto a la convolución en $C(G)$.

De aquí en más, X será un espacio de Hausdorff compacto, y μ será una medida regular de Borel compleja definida en X.

Definición 1.2.46. Sea $T : L^2(X) \to L^2(X)$. Si existe $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ que verifica

$$T\xi(x) = \int_X K(x, y)\xi(y)dy,$$

entonces decimos que T es un *operador de Hilbert-Schmidt*, y que K es su *núcleo*. Además, la norma de Hilbert-Schmidt de T es $\|T\|_{HS} := \|K\|_2$.

Observación 1.2.47. Sean T un operador de Hilbert-Schmidt y K su núcleo. Entonces T es un operador compacto. Además, es autoadjunto si y sólo si $K(x, y) = \overline{K(y, x)}\ \forall x, y \in X$.

Demostración. Ver [1]. □

Observación 1.2.48. Si T es compacto y autoadjunto, cada subespacio propio $\mathcal{H}_\alpha = \{\xi \in L^2 : T(\xi) = \alpha\xi\}$ correspondiente a un valor propio $\alpha \neq 0$ es de dimensión finita. Por el Teorema Espectral, existe entonces una sucesión $\{\phi_i\}$ de vectores propios ortonormales (que corresponden a los subespacios propios de valor propio no nulo), tales que toda $\xi \in L^2$ se escribe de manera única como

$$\xi = \sum_i c_i\phi_i + \phi_0,$$

con $T(\phi_0) = 0$ y $c_i = \langle \xi, \phi_i \rangle$, donde la serie converge según $\| \cdot \|_2$.

Nos concentraremos ahora en el caso en que $X = G$, un grupo compacto y de Hausdorff, y μ es su medida de Haar. Si $f \in C(G)$, entonces

$$\lambda_f \xi(t) = f * \xi(t) = \int_G f(r)\xi(r^{-1}t)dr = \int_G \xi(s)f(ts^{-1}) = \int_G K_f(t,s)\xi(s)ds,$$

con $K_f(t,s) = f(ts^{-1})$, es un operador de Hilbert-Schmidt. Además, en vista de la observación 1.2.47, si $f(s) = \overline{f(s^{-1})}$, entonces λ_f es autoadjunto, puesto que

$$K_f(t,s) = f(ts^{-1}) = \overline{f(st^{-1})} = \overline{K_f(s,t)}.$$

Observación 1.2.49. Si $\xi \in L^2(G)$, entonces $\|\xi\|_1 \leq \|\xi\|_2$.

Demostración. Como $\mu(G) = 1$, una aplicación directa de la desigualdad de Hölder muestra que

$$\|\xi\|_1 = \int_G |\xi(t)|dt = \int_G |\xi(t)|1dt \leq \left(\int_G |\xi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_G 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2.$$

□

Observación 1.2.50. Con la notación de las observaciones anteriores,

$$\|\lambda_f \xi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|\xi\|_2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\|\lambda_f \xi\|_\infty = \|f * \xi\|_\infty = \max_{t\in G} |\int_G \xi(r)f(tr^{-1})dr| &\leq \max_{t\in G} \int_G |\xi(r)|\|f\|_\infty dr \\ &\leq \|f\|_\infty \max_{t\in G} \int_G |\xi(r)|dr = \|f\|_\infty \|\xi\|_1 \leq \|f\|_\infty \|\xi\|_2\end{aligned}$$

□

Hasta ahora tenemos que si $f \in C(G)$ cumple $f(t^{-1}) = \overline{f(t)}\ \forall\ t \in G$, entonces $\lambda_f : L^2(G) \to L^2(G)$ es un operador compacto y autoadjunto. Así, cada subespacio propio $\mathcal{H}_\alpha$ distinto de $\ker \lambda_f$ es de dimensión finita. A continuación probaremos que la imagen de λ_f está contenida en el espacio de las funciones continuas de G, y en particular obtendremos que los subespacios propios de λ_f contienen sólo funciones continuas. El operador λ_f, con elección adecuada de f, nos permitirá obtener una identidad aproximada en $C(G)$ con respecto a la convolución.

Proposición 1.2.51. *Sea $f \in C(G)$. Entonces,*

1. $\lambda_f\big(L^2(G)\big) \subseteq C(G)$.

2. *Si* $\tilde{\lambda_f} : \big(L^2(G), \| \cdot \|_2\big) \to \big(C(G), \| \cdot \|_\infty\big)$ *es la correstricción de* λ_f *a* $C(G)$*, entonces* $\tilde{\lambda_f}$ *es acotado y* $\|\tilde{\lambda_f}\| \leq \|f\|_\infty$.

3. λ_f *es un operador de Hilbert-Schmidt.*

Demostración. (1). Sea $K_f(t,s) = f(ts^{-1}) \in C(G \times G)$. Entonces si $\xi \in L^2(G), t \in G$, es

$$\lambda_f \xi(t) = f * \xi(t) = \int_G f(s)\xi(s^{-1}t)ds = \int_G f(tr^{-1})\xi(r)dr = \int_G K_f(t,s)\xi(s)ds.$$

Por la continuidad uniforme de $f \in C(G)$, dado $\epsilon > 0$, sea U un entorno de e en G de modo que $|f(t) - f(r)| < \epsilon$ si $tr^{-1} \in U$. Entonces, si $tr^{-1} \in U$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda_f \xi(t) - \lambda_f \xi(r)| &\leq \int_G |K_f(t,s) - K_f(r,s)||\xi(s)|ds \\ &= \int_G |f(ts^{-1}) - f(rs^{-1})| \\ &< \epsilon \|\xi\|_1 \leq \epsilon \|\xi\|_2, \end{aligned}$$

de modo que $\lambda_f \xi$ es de hecho uniformemente continua para cada $\xi \in L^2(G)$.

(2). Sean $\xi \in L^2(G), t \in G$. Entonces,

$$|\tilde{\lambda_f}\xi(t)| \leq \int_G |f(ts^{-1})||\xi(s)|ds \leq \|f\|_\infty \|\xi\|_1 \leq \|f\|_\infty \|xi\|_2,$$

y en consecuencia, $\|\tilde{\lambda_f}\| \leq \|f\|_\infty$.

(3). Como $f \in C(G) \subseteq L^2(G)$, entonces $K_f \in C(G \times G) \subseteq L^2(G \times G)$, y por lo tanto λ_f es un operador de Hilbert-Schmidt, y además

$$\|\lambda_f\|_{HS} = \|K_f\|_2 = \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty < \infty.$$

□

Corolario 1.2.52. *Sean $f \in C(G)$ y $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$ un valor propio de λ_f, $\mathcal{H}_\alpha \subseteq L^2(G)$ el subespacio propio de valor propio α asociado a λ_f. Entonces $\mathcal{H}_\alpha \subseteq C(G)$.*

Demostración. Si $\xi \in \mathcal{H}_\alpha$, se tiene que

$$\lambda_f \xi = \alpha \xi \in \lambda_f\big(L^2(G)\big) \subseteq C(G),$$

y entonces $\xi = \frac{1}{\alpha}\lambda_f \xi \in C(G)$. □

Observación 1.2.53. Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ al conjunto de los operadores de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ es denso en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ según la norma de los operadores. El lector interesado podrá encontrar una demostración de este hecho en [1].

Corolario 1.2.54. *Sean $\lambda, \rho : L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G))$ las representaciones regulares integradas de G, izquierda y derecha respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned} \lambda\big(L^1(G)\big) &\subseteq \mathcal{K}\big(L^2(G)\big) \text{ y} \\ \rho\big(L^1(G)\big) &\subseteq \mathcal{K}\big(L^2(G)\big). \end{aligned}$$

Demostración. Se tiene que $C(G)$ es denso en $L^1(G)$, y como $\|\lambda_f - \lambda_g\| \leq \|f - g\|_1$, el hecho de que $\lambda\big(C(G)\big) \subseteq \mathcal{HS}\big(L^2(G)\big)$ implica que

$$\lambda\big(L^1(G)\big) \subseteq \mathcal{K}\big(L^2(G)\big).$$

Por otro lado, dado que $\rho_f = U\lambda_f U$, donde $U\xi = \breve{\xi}$, obtenemos la afirmación correspondiente a ρ a partir de lo anterior. □

Proposición 1.2.55. *Si G es un grupo compacto, entonces existe una red $\{f_\alpha\} \subseteq C(G)$ tal que para toda $\xi \in C(G)$, la red $\{\lambda_{f_\alpha}\xi\}_\alpha$ converge uniformemente a ξ.*

Demostración. Para cada entorno U de $e \in G$, sea f_U una función continua no negativa tal que $\int_G f_U(t)dt = 1$ y $sop(f_U) \subseteq U$. Observemos que tal elección es posible: podemos tomar una función de Urysohn que separe $\{e\}$ de U^c, normalizada de modo que su integral sea igual a 1. Entonces $\{f_U\}_U$ es una red en $C(G)$ dirigida por la inclusión inversa, es decir, $U \geq V \Leftrightarrow U \subseteq V$.

Sea $\xi \in C(G)$. Así, ξ es uniformemente continua, y dado $\epsilon > 0$ existe un entorno W de e tal que $|\xi(s) - \xi(t)| < \epsilon \ \forall\ s,t \in G$ tales que $t^{-1}s \in W$. Entonces, si $U \geq W$, se tiene:

$$\begin{aligned} |\lambda_{f_U}\xi(t) - \xi(t)| &= |\int_G \xi(s) f_U(s^{-1}t)ds - \xi(t)| \leq \int_G f_U(s^{-1}t)|\xi(s) - \xi(t)|ds \\ &< \epsilon \int_G f_U(s^{-1}t)ds = \epsilon. \end{aligned}$$

En particular, la diferencia $|\lambda_{f_U}\xi(t) - \xi(t)|$ tiende a cero con U uniformemente en $t \in G$, por lo que λ_{f_U} converge uniformemente a ξ. □

Observación 1.2.56. Bajo las mismas hipótesis, puede probarse la convergencia uniforme de $f_U * \xi$ a ξ exigiendo además que $f_U^* = f_U$. Esto último no es una hipótesis restrictiva: si f_U es como en la proposición anterior (no necesariamente autoadjunta), entonces $\frac{f_U + f_U^*}{2}$ también verifica las condiciones de la proposición y además es autoadjunta. De esta forma puede obtenerse una identidad aproximada asociada a la representación regular derecha integrada, ρ.

1.3. Los coeficientes matriciales.

Sean $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ una representación de dimensión finita y $\beta = \{e_1, \ldots, e_{d_\pi}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_\pi$. Para cada $g \in G$, la matriz de $\pi(g)$ con respecto a β es $\big(\langle \pi(g)e_j, e_i\rangle\big)_{i,j}$. Se dice entonces que $\phi_{ij}(g) := \langle \pi(g)e_j, e_i\rangle$ es una *función coordenada* o *coeficiente matricial* de π.

Observación 1.3.1. Para cada $1 \leq i,j \leq d_\pi$, $\phi_{ij}^\pi \in C(G) = \{\varphi : G \to \mathbb{C} : \varphi \text{ es continua}\}$.

Definición 1.3.2. Denotamos por $\mathcal{E}$ al subespacio de $L^2(G)$ generado por aquellos coeficientes matriciales que corresponden a representaciones irreducibles de G. Concretamente, $\mathcal{E} = \text{span}\{\xi : G \to \mathbb{C} : \xi(g) = \langle \pi(g)x, y\rangle : \pi \text{ irreducible}, x, y \in \mathcal{H}_\pi\}$.

Observación 1.3.3. Recordemos que toda representación de G se descompone como la suma de representaciones irreducibles. Entonces, para cada representación σ de dimensión finita, la función ζ dada por

$$\zeta(g) = \langle \sigma(g)x, y \rangle$$

define un elemento de $\mathcal{E}$, para cada $x, y \in \mathcal{H}_\sigma$.

Observación 1.3.4. Consideramos la involución en $L^2(G)$ dada por $\xi^*(g) = \overline{\xi(g^{-1})}$. Entonces, $\mathcal{E}$ es una familia autoadjunta.

Demostración. Basta demostrar que si π es una representación irreducible de G, entonces $(\phi_{ij}^\pi)^* = \phi_{ji}^\pi$. En efecto,

$$(\phi_{ij}^\pi)^*(g) = \overline{\phi_{ij}^\pi(g^{-1})} = \overline{\langle \pi(g^{-1})e_j, e_i \rangle} = \langle e_i, \pi(g^{-1})e_j \rangle = \langle \pi(g)e_i, e_j, \rangle = \phi_{ji}^\pi(g).$$

□

Observación 1.3.5. Dada $A \in M_n(\mathbb{C})$, su norma de Hilbert-Schmidt como operador en $\mathbb{C}^n$ se puede calcular en términos de sus entradas:

$$\|(a_{ij})\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}. \tag{1.3.1}$$

Observación 1.3.6. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $\|A\|_{H.S.}^2 = \operatorname{tr}(A^*A)$. En particular, si $B = U^*AU$ para alguna matriz unitaria U, entonces $\|A\|_{HS} = \|B\|_{HS}$.

Por lo tanto, si π es una representación de dimensión finita, entonces $\|\pi(g)\|_{HS}$ sólo depende de la clase de equivalencia unitaria de π.

Proposición 1.3.7. *Sea G un grupo compacto y abeliano. Entonces sus representaciones irreducibles son de dimensión 1.*

Demostración. Sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ una representación irreducible de G, que sabemos que es de dimensión finita. Como G es abeliano, para todos $g, t \in G$, es

$$\pi(g)\pi(t) = \pi(gt) = \pi(tg) = \pi(t)\pi(g).$$

En consecuencia, $\pi(t) \in \pi(G)'$, por lo que existe $\lambda_t \in \mathbb{C}$ con $|\lambda_t| = 1$, tal que

$$\pi(t) = \lambda_t Id_{\mathbb{C}^n},$$

en virtud del Lema de Schur. Es claro que el mapa $t \mapsto \lambda_t$ es continuo. Además, si $\lambda_t Id_{\mathbb{C}^n}$ es irreducible, es $n = 1$: de lo contrario, cualquier subespacio de $\mathbb{C}^n$ es (cerrado e) invariante por π. □

Corolario 1.3.8. *Si G es un grupo compacto y abeliano, entonces sus representaciones irreducibles coinciden con los coeficientes matriciales.*

Ejemplo 5. Tomemos el caso en que $G = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con la topología relativa de $\mathbb{C}$. Observemos que G es un grupo compacto y abeliano. Sabemos que sus representaciones irreducibles son de dimensión 1, por la proposición anterior. Además, ellas están dadas por

$$\begin{array}{rcl} \pi_n : G & \to & \mathcal{U}(\mathbb{C}) \simeq S^1 = G \\ e^{i\theta} & \mapsto & e^{in\theta} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Equivalentemente, se tiene que las representaciones irreducibles de $\mathbb{T}$ son de la forma

$$\pi_n : z \mapsto z^n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Además, si $\xi \in \mathcal{E}$, entonces ξ es combinación lineal de los coeficientes matriciales de G y tiene la forma

$$\xi(z) = \sum_{i=-n}^{n} a_i z^i.$$

Los detalles de este ejemplo se encuentran en el Teorema 9.13 de [1].

Observación 1.3.9. En virtud del ejemplo anterior, cuando G es abeliano, y a veces en general, a los elementos de la familia $\mathcal{E}$ se les denomina *polinomios trigonométricos*.

Cerramos esta sección con dos teoremas centrales de la misma, que vinculan fuertemente la representación regular integrada y los operadores de Hilbert-Schmidt, estudiados en secciones anteriores, con los polinomios trigonométricos.

Teorema 1.3.10. *Sean $f \in C(G)$ con $f = f^*$, es decir, $f(t) = \overline{f(t^{-1})}$ para todo $t \in G$, y $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, un valor propio de λ_f. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{H}_\alpha$ es el subespacio propio de λ_f asociado a α, entonces $\mathcal{H}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$.*

2. *$\lambda_f\big(L^2(G)\big) \subseteq \overline{\mathcal{E}}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq C(G)$.*

Demostración. (1). Como λ_f y ρ_t conmutan para todo $t \in G$, y $\mathcal{H}_\alpha$ es un subespacio propio de λ_f, entonces es invariante por ρ_t, para todo $t \in G$. Así, si ρ^α es la subrepresentación de ρ asociada al subespacio $\mathcal{H}_\alpha$, entonces es una representación de dimensión finita de G, por ser λ_f compacto. Por lo tanto, si $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_\alpha$, se tiene que $\phi_{ki}^{\rho^\alpha} : G \to C$ dada por $\phi_{ki}^{\rho^\alpha}(g) = \langle \rho_g \xi_i, \xi_k \rangle$ es un elemento de $\mathcal{E}$, en virtud de la observación 1.3.3.

Por otra parte, $\rho_g(\xi_i) = \sum_{k=1}^r \phi_{ki}^{\rho^\alpha}(g)\xi_k$, y como las funciones ξ_k son continuas por el corolario 1.2.52, se deduce que

$$\xi_i(g) = \rho_g \xi(e) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k(e)\phi_{ki}^{\rho^\alpha}(g) \quad \forall\, g \in G,$$

esto es, $\xi_i = \sum_{k=1}^r \xi_k(e)\phi_{ki}^{\rho^\alpha} \in \mathcal{E}$.

(2). Como $f = f^*$, se tiene que $\lambda_f = \lambda_f^*$ por la observación 1.2.47, de modo que

λ_f es un operador compacto y autoadjunto. Por el Teorema Espectral, existe una base ortonormal $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ de $\overline{\operatorname{Im}\lambda_f}$, formada por vectores propios de λ_f.

Entonces, si $\xi \in L^2(G)$, podemos escribirla de forma única como suma de funciones propias: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k + \xi_0$, con $\xi_0 \in \ker\lambda_f,\ (c_k)_{k\geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$. Si ahora $\xi_N := \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k$, se tiene que $\lambda_f(\xi_N) \in \mathcal{E}$, por la parte anterior. Además, por la parte (2) de la proposición 1.2.51, se tiene si $M \geq N$,

$$\|\lambda_f(\xi_M) - \lambda_f(\xi_N)\|_\infty = \|\lambda_f(\xi_M - \xi_N)\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|\xi_M - \xi_N\|_2 < \|f\|_\infty\epsilon,$$

si N es suficientemente grande, puesto que (ξ_N) converge en $L^2(G)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k\phi_k$.

Por lo tanto, $\lambda_f\xi_N$ es uniformemente de Cauchy, y en consecuencia converge uniformemente a cierto $\eta \in \overline{\mathcal{E}}^{\|\cdot\|_\infty}$. Entonces, es $\eta = \lim_N \lambda_f\xi_N \in L^2(G)$, de modo que

$$\eta = \lim_N \lambda_f\xi_N = \lambda_f\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k\Big) = \lambda_f\xi.$$

En consecuencia, $\lambda_f(\xi) \in \overline{\mathcal{E}}^{\|\cdot\|_\infty}$. □

Finalmente, el próximo teorema hace uso de la unidad aproximada en $C(G)$ construida en la sección anterior, para obtener cualquier función continua en el grupo como un límite uniforme de elementos de $\mathcal{E}$. Concretamente, se tiene lo siguiente.

Teorema 1.3.11. *$\mathcal{E}$ es denso en $C(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Sea $f \in C(G)$ tal que $f = f^*$. Entonces, si $\xi \in C(G)$,

$$\lambda_{f_\alpha}\xi = f_\alpha * \xi \rightrightarrows \xi,$$

por la proposición 1.2.55, y entonces $\xi \in \overline{\mathcal{E}}^{\|\cdot\|_\infty}$. □

En muchas ocasiones utilizaremos una versión más débil del teorema anterior, resumida en el siguiente corolario.

Corolario 1.3.12. *Como μ es una medida de probabilidad en G, si $\xi \in C(G)$ vale que $\|\xi\|_2 \leq \|\xi\|_\infty$, por lo que $\mathcal{E}$ también es denso en $L^2(G)$ con respecto a $\|\cdot\|_2$.*

1.4. El teorema de Peter-Weyl.

Al igual que los caracteres[1] en los grupos abelianos localmente compactos, las representaciones unitarias irreducibles en un grupo compacto son una herramienta esencial para analizar la estructura del grupo y del espacio $L^2(G)$. Concretamente, el objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema.

[1] En el contexto de los grupos abelianos, el término *carácter* tiene un significado distinto de aquel que se le asocia para grupos compactos (no necesariamente abelianos); ver 4.1. Concretamente, si G es abeliano y localmente compacto, un carácter de G es un homomorfismo $\chi : G \to S^1$ continuo. El concepto de representación de grupo (cuando éste no es necesariamente abeliano) constituye una generalización del concepto de carácter, puesto que en grupos abelianos las representaciones irreducibles son unidimensionales; es decir, son los caracteres del grupo.

Teorema 1.4.1. *(Peter-Weyl). Sea G un grupo compacto.*

(a) *Si ρ es la representación regular derecha de G, entonces*

$$\rho \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \cdot \pi \tag{1.4.1}$$

(b) *Dado $g \in G$, existe $[\pi] \in \widehat{G}$ tal que $\pi(g) \neq I$.*
(c) *Si $\xi \in L^2(G)$, entonces*

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_{[\pi]} tr(\pi(\xi)^*\pi(\xi)) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \|\pi(\xi)\|_{H.S.}^2. \tag{1.4.2}$$

Para demostrarlo, haremos uso de los siguientes resultados intermedios.

Lema 1.4.2. *Sean π_1, π_2 representaciones unitarias de un grupo localmente compacto G, y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ que verifica $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$ $\forall g \in G$. Entonces $A^*A\pi_1(g) = \pi_1(g)A^*A$, es decir, $A^*A \in \pi_1(G)'$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle A^*A\pi_1(g)x, y\rangle &= \langle A\pi_1(g)x, Ay\rangle \\
&= \langle \pi_2(g)Ax, Ay\rangle \\
&= \langle Ax, \pi_2(g^{-1})Ay\rangle \\
&= \langle Ax, A\pi_1(g^{-1})y\rangle \\
&= \langle A^*Ax, \pi_1(g^{-1})y\rangle \\
&= \langle \pi_1(g)A^*Ax, y\rangle,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\pi_1(g)A^*A = A^*A\pi_1(g)$, como queríamos demostrar. □

Corolario 1.4.3. *En el contexto del lema anterior, se tiene también que $A^*\pi_2(g) = \pi_1(g)A^*$, y por lo tanto, $AA^* \in \pi_2(G)'$.*

Lema 1.4.4. *Sean π_1, π_2 representaciones de un grupo localmente compacto G, π_1 irreducible, y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ no nulo, que verifica $A\pi_1(g) = \pi_2(g)A$ $\forall g \in G$. Entonces $A\mathcal{H}_1$ es un subespacio cerrado invariante para π_2 y además se tiene que $\pi_1 \cong \pi_2|_{A\mathcal{H}_1}$.*

Demostración. Por el lema anterior, y en virtud del Teorema de Schur (1.2.35), como $A^*A \in \pi_1(G)'$, se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A^*A = \lambda I$. Además, como A es no nulo, existe $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $\|x\| = 1$ y $Ax \neq 0$. En consecuencia,

$$\lambda = \lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle.$$

Así que $\lambda > 0$. Entonces, si $B := \lambda^{-\frac{1}{2}}A$,

$$B^*B = \overline{\lambda^{-\frac{1}{2}}}\lambda^{-\frac{1}{2}}A^*A = \frac{1}{\lambda}\lambda I_{\mathcal{H}_2} = I_{\mathcal{H}_2}.$$

Por lo tanto, B es una isometría y, en consecuencia, es un operador unitario de $\mathcal{H}_1$ en $B\mathcal{H}_1 = A\mathcal{H}_1$. Como A es múltiplo de una isometría, $A\mathcal{H}_1$ resulta cerrado en $\mathcal{H}_2$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(BB^*)(BB^*) &= B(B^*B)B^* = B(I_{\mathcal{H}_1})B^* = BB^*,\\ (BB^*)^* &= BB^*,\\ Bx &= BB^*(Bx),\end{aligned}$$

por lo que BB^* es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}_2$ sobre $B\mathcal{H}_1 = BB^*(\mathcal{H}_2)$. Además, $BB^* \in \pi_2(G)'$ y entonces resulta que $A\mathcal{H}_1$ es invariante para π_2. En efecto, si $x \in \mathcal{H}_1$, tenemos que

$$\pi_2(Ax) = \pi_2(BB^*Ax) = BB^*\pi_2(Ax) \in A\mathcal{H}_1.$$

□

El siguiente resultado es crucial, y depende fuertemente del hecho de que G es compacto. Trabajaremos con su medida de Haar, μ, que por ser G compacto, es invariante a izquierda y derecha. Además, como $\mu(G) < \infty$, la normalizaremos de modo que $\mu(G) = 1$. Por último, al no haber posibilidad de confusión, denotaremos esta medida como dg.

Proposición 1.4.5. *Sean π_1, π_2 representaciones irreducibles de un grupo compacto G. Dadas las bases ortonormales para $\mathcal{H}_i : \{e^i_k\}_{k=1}^{d_{\pi_i}}, i = 1, 2$, sean*

$$\phi^i_{kl}(g) = \langle \pi_i(g)e^i_l, e^i_k\rangle. \tag{1.4.3}$$

(a) Si $\pi_1 \ncong \pi_2$, entonces

$$\int_G \phi^1_{ij}(g)\overline{\phi^2_{kl}(g)}dg = 0 \ \forall i, j, k, l \tag{1.4.4}$$

(b)

$$\int_G \phi^1_{ij}(g)\overline{\phi^1_{kl}(g)}dg = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{d_{\pi_1}} \ \forall i, j, k, l \tag{1.4.5}$$

Demostración. Para cada $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, sea $A := \int_G \pi_2(g)B\pi_1(g^{-1})dg$. Así,

$$\begin{aligned}A\pi_1(r) &= \int_G \pi_2(g)B\pi_1(g^{-1}r)dg\\ &= \int_G \pi_2(rr^{-1}g)B\pi_1(g^{-1}r)dg\\ &= \pi_2(r)\int_G \pi_2(r^{-1}g)B\pi_1(g^{-1}r)dg\\ &= \pi_2(r)A\end{aligned}$$

Si $\pi_1 \ncong \pi_2$, entonces $A = 0$, en virtud del Lema 1.4.4. Observemos que esto es válido para todo operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Tomando $B = B_{ik}$, definido por

$$B_{ik}(x) = \langle x, e^1_i\rangle e^2_k,$$

se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle Ae_j^1, e_l^2\rangle \\
&= \int_G \langle \pi_2(g)B_{ik}\pi_1(g^{-1})e_j^1, e_l^2\rangle dg \\
&= \int_G \langle B_{ik}\pi_1(g^{-1})e_j^1, \pi_2(g^{-1})e_l^2\rangle dg \\
&= \int_G \langle \langle \pi_1(g^{-1})e_j^1, e_i^1\rangle e_k^2, \pi_2(g^{-1})e_l^2\rangle dg \\
&= \int_G \langle \pi_1(g^{-1})e_j^1, e_i^1\rangle \overline{\langle \pi_2(g^{-1})e_l^2, e_k^2\rangle} dg \\
&= \int_G \phi_{ij}^1(g^{-1})\overline{\phi_{kl}^2(g^{-1})} dg \\
&= \int_G \phi_{ij}^1(g)\overline{\phi_{kl}^2(g)} dg
\end{aligned}$$

Demostremos ahora (b). Tomando ahora $\tilde{B} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$; $\tilde{A} = \int_G \pi_1(g)\tilde{B}\pi_1(g^{-1})dg$ y aplicando nuevamente el Teorema de Schur, se concluye que $\tilde{A} = \lambda_{\tilde{B}} \cdot I$. Tomando trazas, obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\tilde{A}) &= \sum_{k=1}^{d_{\pi_1}} \langle \tilde{A}e_k^1, e_k^1\rangle = \sum_{k=1}^{d_{\pi_1}} \langle \int_G \pi_1(g)\tilde{B}\pi_1(g^{-1})e_k^1 dg, e_k^1\rangle \\
&= \int_G \sum_{k=1}^{d_{\pi_1}} \langle \pi_1(g)\tilde{B}\pi_1(g^{-1})e_k^1 dg, e_k^1\rangle
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $\pi_1(g)$ es invertible para todo $g \in G$ (por ser unitaria), tenemos que $\{\pi_1(g^{-1})e_k^1\}$ es una base de $\mathcal{H}_1$ para cada $g \in G$ y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{d_{\pi_1}} \langle \pi_1(g)\tilde{B}\pi_1(g^{-1})e_k^1 dg, e_k^1\rangle = \operatorname{tr}(\tilde{B})$$

Es así que

$$\operatorname{tr}(\tilde{A}) = \int_G \operatorname{tr}(\tilde{B})dg = \operatorname{tr}(\tilde{B}) \tag{1.4.6}$$

Como $\operatorname{tr}(\tilde{A}) = \operatorname{tr}(\lambda_{\tilde{B}}I) = \lambda_{\tilde{B}} \cdot d_{\pi_1}$ y $\operatorname{tr}(\tilde{B}_{ik}) = \operatorname{tr}(\langle \cdot, e_i^1\rangle e_k^1) = \delta_{ik}$, se tiene que $\lambda_{\tilde{B}_{ik}} = \frac{\delta_{ik}}{d_{\pi_1}}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_G \phi^1_{ij}(g)\overline{\phi^1_{kl}(g)}dg &= \int_G \langle\pi(g)e^1_j, e^1_i\rangle\overline{\langle\pi(g)e^1_l, e^1_k\rangle}dg = \\
&= \int_G \langle\langle\pi(g)e^1_j, e^1_i\rangle\pi(g^{-1})e^1_k, e^1_l\rangle dg = \\
&= \int_G \langle\pi(g)B_{ik}\pi(g^{-1})e^1_j, e^1_l\rangle dg = \\
&= \int_G \langle\pi(g^{-1})B_{ik}\pi(g)e^1_j, e^1_l\rangle dg = \\
&= \langle A_{ik}e^1_j, e^1_l\rangle = \\
&= \lambda_{\tilde{B}_{ik}}\langle e^1_j, e^1_l\rangle = \\
&= \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{d_{\pi_1}}
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.4.6. *Si π es una representación irreducible de G, la parte (b) de la proposición anterior establece que $\{\phi^\pi_{ij}\}$ es un conjunto ortogonal en $L^2(G)$, y que $\{d_\pi^{\frac{1}{2}}\phi^\pi_{ij}\}$ es ortonormal.*

Corolario 1.4.7. *En el contexto del corolario anterior, sean η una representación irreducible de G tal que $\pi \ncong \eta$; y $\{e^\rho_k\}_{k\in A}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_\eta$. Entonces, $\phi^\eta_{kl} \perp \phi^\pi_{ij}$, donde $\phi^\eta_{kl}(g) = \langle\eta(g)e^\eta_l, e^\eta_k\rangle$, en virtud de la parte (a).*

Volvemos ahora a la demostración del Teorema de Peter-Weyl (1.4.1).

(a) Sea ρ la representación regular derecha de G. Entonces

$$\rho \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \cdot \pi \tag{1.4.7}$$

Demostración. Dada una representación irreducible π (y por ende, finita), definimos $\mathcal{H}_{[\pi]}$ como el subespacio de $L^2(G)$ generado por las d_π^2 funciones $\{d_\pi^{\frac{1}{2}}\phi^\pi_{ij}\}$. Veamos que $\mathcal{H}_{[\pi]}$ sólo depende, como la notación lo indica, de $[\pi]$.

En efecto, es claro que no depende de la base ortonormal elegida en $\mathcal{H}_\pi$: dada otra base ortonormal, la transformación de una base en otra a través de la matriz de cambio de base induce una transformación de los coeficientes matriciales respecto de una base en los correspondientes de la otra, a través de la misma matriz asociada.

Por otro lado, sean η una representación de G unitariamente equivalente a π, y $U : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\pi$ un operador unitario que verifica

$$\eta(g) = U\pi(g)U^* \ \forall g \in G.$$

Al ser U unitario, si $f^\eta_i := U^*e^\pi_i$, entonces $\{f_i\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_\eta$. Definiendo entonces $e^\eta_{ij} := U^*e^\pi_{ij}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi^{\eta}_{ij}(g) &= \langle \eta(g) f^{\eta}_j, f^{\eta}_i \rangle \\
&= \langle U\pi(g)U^* f^{\eta}_j, f^{\eta}_i \rangle \\
&= \langle \pi(g)U^* f^{\eta}_j, U^* f^{\eta}_i \rangle \\
&= \langle \pi(g) e^{\pi}_j, e^{\pi}_i \rangle \\
&= \phi^{\pi}_{ij}(g)
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\phi^{\eta}_{ij} = \phi^{\pi}_{ij}$. Queda demostrado que $\mathcal{H}_{[\pi]}$ sólo depende de la clase de equivalencia unitaria de π.

En virtud del corolario 1.4.6, sabemos que $\{d_\pi^{\frac{1}{2}} \phi^{\pi}_{ij}\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_{[\pi]}$. Además, de los corolarios 1.3.12 y 1.4.7, se deduce que $\{d_\pi^{\frac{1}{2}} \phi^{\pi}_{ij}\}_{\pi \in \widehat{G}}$ es una base ortonormal de $L^2(G)$. Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}
\phi^{\pi}_{ij}(g^{-1}t) &= \langle \pi(t) e^{\pi}_j, \pi(g) e^{\pi}_i \rangle \\
&= \Big\langle \sum_{k=1}^{d_\pi} \langle \pi(t) e^{\pi}_j, e^{\pi}_k \rangle e^{\pi}_k, \pi(g) e^{\pi}_i \Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{d_\pi} \langle \pi(t) e^{\pi}_j, e^{\pi}_k \rangle \langle e^{\pi}_k, \pi(g) e^{\pi}_i \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{d_\pi} \phi^{\pi}_{ik}(g^{-1}) \phi^{\pi}_{kj}(t).
\end{aligned}$$

Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, d_\pi\}$, definimos

$$A_i : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{[\pi]} \;\text{ por }\; A_i e^{\pi}_j = \phi^{\pi}_{ij}$$

(se define en una base ortogonal de $\mathcal{H}_\pi$ y se extiende linealmente al mismo). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\rho_g A_i e^{\pi}_j(t) &= \phi^{\pi}_{ij}(tg) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\pi} \phi^{\pi}_{ik}(t) \phi^{\pi}_{kj}(g) \\
&= \sum_{k=1}^{d_\pi} \langle \pi(g) e^{\pi}_j, e^{\pi}_k \rangle A_i e^{\pi}_k(t) \\
&= A_i \left(\sum_{k=1}^{d_\pi} \langle \pi(g) e^{\pi}_j, e^{\pi}_k \rangle e^{\pi}_k \right)(t) \\
&= A_i\big(\pi(g) e^{\pi}_j\big)(t)
\end{aligned}$$

El cálculo anterior muestra que si $\mathcal{H}_{i,[\pi]} := span\{\phi^{\pi}_{i1}, \ldots, \phi^{\pi}_{id_\pi}\}$, entonces

$$\rho|_{\mathcal{H}_{i,[\pi]}}(g) A_i = A_i \pi(g) \;\forall\; g \in G.$$

Por lo tanto, el Lema 1.4.4 implica que $\pi \cong \rho|_{\mathcal{H}_{i,[\pi]}}$ y, en consecuencia, $\rho|_{\mathcal{H}_{[\pi]}} \cong d_\pi \cdot \pi$. Dado que existe una base de $L^2(G)$ formada por los coeficientes matriciales que corresponden a las representaciones irreducibles, tenemos

$$L^2(G) = \mathcal{H}_\rho \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{H}_{[\pi]}$$

y en consecuencia, hemos probado que

$$\rho \cong \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \cdot \pi$$

□

(b) Dado $g \in G$, existe $[\pi] \in \widehat{G}$ tal que $\pi(g) \neq I$.

Demostración. Supongamos que existe $g_0 \in G$ tal que para toda representación π, $\pi(g_0) = Id_{\mathcal{H}_\pi}$. Puesto que $\pi(e) = Id_{\mathcal{H}_\pi} \forall\ \pi$ y a partir de lo demostrado en (a), resulta que

$$\rho(g_0) = \rho(e) = Id_{L^2(G)},$$

lo cual implica que $g_0 = e$, puesto que ρ es inyectiva. □

(c) Si $f \in L^2(G)$, entonces

$$\|f\|_2^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_{[\pi]} tr(\pi(f)^*\pi(f)) = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \|\pi(f)\|_{H.S.}^2. \tag{1.4.8}$$

Demostración. Como $\beta := \{d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} \phi_{ij}^\pi\}_{[\pi]\in\widehat{G}}$ es una base ortonormal de $L^2(G)$, si $f \in L^2(G)$, podemos escribir

$$f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_{[\pi]}} c_{[\pi],i,j} . d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} \phi_{ij}^\pi$$

Y entonces,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_{[\pi]}} |c_{[\pi],i,j}|^2$$

Calculemos los coeficientes $c_{[\pi],i,j}$, que por ser β una base ortonormal son los coeficientes de Fourier de f. Teniendo en cuenta la proposición 1.2.42, obtenemos que:

$$\begin{aligned} c_{[\pi],i,j} &= \int_G f(g) \overline{d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} \phi_{ij}^\pi} dg \\ &= d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} \int_G f(g) \langle e_i^\pi, \pi(g) e_j^\pi \rangle dg \\ &= d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} \langle \pi(f) e_i^\pi, e_j^\pi \rangle \\ &= d_{[\pi]}^{\frac{1}{2}} [\pi(f)]_{ij} \end{aligned}$$

Y por lo tanto tenemos que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{d_{[\pi]}} d_{[\pi]} |[\pi(f)]_{ij}|^2 = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_{[\pi]} \|\pi(f)\|_{H.S.}^2.$$

□

El Teorema de Peter-Weyl describe una descomposición de $L^2(G)$ en subespacios ortogonales. El siguiente teorema da una fórmula para las proyecciones ortogonales sobre cada uno de tales subespacios.

Dados un grupo compacto G y una representación unitaria de dimensión finita $\pi : G \to \mathcal{H}$, el *carácter* de π es la función $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_\pi(g) = \operatorname{tr}(\pi(g)).$$

Teorema 1.4.8. *Dada $f \in L^2(G)$, su proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_{[\pi]}$ es $\rho(e_\pi)f = d_\pi f * \chi_\pi$, donde $e_\pi = d_\pi \overline{\chi_\pi}$. En consecuencia, su descomposición según $L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{H}_{[\pi]}$ es*

$$f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi f * \chi_\pi.$$

Demostración. Con la notación del Teorema de Peter-Weyl, sea $P_{[\pi]} = P_{\mathcal{H}_{[\pi]}}^{L^2(G)}$ la proyección ortogonal de $L^2(G)$ sobre $\mathcal{H}_{[\pi]}$. Dada $f \in L^2(G)$, sabemos que $f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} P_{[\pi]}(f)$. Bastará demostrar que $d_\pi f * \chi_\pi = P_{[\pi]}(f) \quad \forall\ [\pi] \in \widehat{G}$.

Recordemos que si $\{e_i\}_{i=1}^{d_\pi}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_\pi$ y $\phi_{ij}^\pi \in C(G)$ está definida por

$$\phi_{ij}^\pi(g) = \langle \pi(g)e_j, e_i\rangle \quad \forall\ g \in G, 1 \leq i,j \leq d_\pi,$$

entonces $\mathcal{H}_{[\pi]} = \operatorname{span}\{d_\pi^{\frac{1}{2}} \phi_{ij}^\pi : 1 \leq i,j \leq d_\pi\}$. Además, $\{d_\pi^{\frac{1}{2}} \phi_{ij}^\pi : 1 \leq i,j \leq d_\pi\}$ es una base ortonormal de tal espacio. Por lo tanto,

$$P_{[\pi]}(f) = d_\pi \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \langle f, \phi_{ij}^\pi\rangle \phi_{ij}^\pi \quad \forall\ f \in L^2(G).$$

En consecuencia, bastará ver que si $f \in L^2(G)$, entonces $\sum_{i,j=1}^{d_\pi} \langle f, \phi_{ij}^\pi\rangle \phi_{ij}^\pi = f * \chi_\pi$.

Recordemos también que

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^\pi(t^{-1}g) &= \sum_{k=1}^{d_\pi} \phi_{ik}^\pi(t^{-1}) \phi_{kj}^\pi(g) \quad \forall\ t, g \in G, \\ \phi_{ij}^\pi(t^{-1}) &= \overline{\phi_{ji}^\pi(t)} \quad \forall\ t \in G. \end{aligned}$$

Ahora, dados $f \in L^2(G), [\pi] \in \widehat{G}, g \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned} f * \chi_\pi(g) &= \int_G f(t)\chi_\pi(t^{-1}g)dt \\ &= \int_G f(t)\sum_{j=1}^{d_\pi} \phi_{jj}^\pi(t^{-1}g)dt \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \int_G f(t)\phi_{ji}^\pi(t^{-1})\phi_{ij}^\pi(g)dt \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \Big(\int_G f(t)\overline{\phi_{ij}^\pi(t)}dt \Big)\phi_{ij}^\pi(g) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \langle f, \phi_{ij}^\pi\rangle \phi_{ij}^\pi(g), \end{aligned}$$

lo cual implica que $f * \chi_\pi = \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \langle f, \phi_{ij}^\pi\rangle \phi_{ij}^\pi$ y así queda demostrado el teorema. $\square$

Proposición 1.4.9. *Sea G un grupo compacto. Entonces G es abeliano si y sólo si toda representación irreducible de G es unidimensional.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es la proposición 1.3.7.

($\Leftarrow$) Observemos que las representaciones unitarias unidimensionales de G son múltiplos de la identidad en $\mathbb{C}$ por un escalar de módulo 1. En consecuencia, tales representaciones conmutan. Entonces, si π es una representación irreducible de G,

$$\pi(xyx^{-1}y^{-1}) = \pi(x)\pi(y)\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1} = \pi(x)\pi(x)^{-1}\pi(y)\pi(y)^{-1} = Id_{\mathbb{C}}.$$

En consecuencia, $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker\pi$ para cada $[\pi] \in \widehat{G}$. Por el teorema de Peter-Weyl, sabemos que dado $g \in G$, existe $[\pi] \in \widehat{G} \ / \ \pi(g) \neq Id_{\mathbb{C}}$. Equivalentemente, se tiene que

$$\bigcap_{[\pi]\in\widehat{G}} \ker\pi = \{e\}.$$

En consecuencia, $xyx^{-1}y^{-1} = e, xy = yx$, y como x e y son arbitrarios, resulta que G es abeliano. $\square$

Capítulo 2

Consecuencias del Teorema de Peter-Weyl.

En este capítulo utilizaremos el Teorema de Peter-Weyl y las consecuencias vistas en el capítulo anterior, para caracterizar aquellos grupos topológicos compactos de Hausdorff para los cuales hay una cantidad finita o numerable de clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles. Esto surgirá de analizar los resultados del capítulo anterior relacionando las propiedades topológicas del grupo compacto G con las algebraicas de $L^2(G)$ y la cardinalidad de $\widehat{G}$. De aquí en adelante, G denotará un grupo topológico de Hausdorff.

2.1. $\widehat{G}$ finito.

Teorema 2.1.1. *Sea G compacto. Entonces $\widehat{G}$ es finito si y sólo si G lo es.*

Demostración. Por el Teorema de Peter-Weyl, sabemos que

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{H}_{[\pi]},$$

donde cada $\mathcal{H}_{[\pi]}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita, y formado por funciones continuas. De lo anterior se deduce que $\widehat{G}$ es finito si y sólo si $L^2(G)$ tiene dimensión finita. Como el espacio de las funciones continuas de $G, C(G)$, es denso en $L^2(G)$, este último tiene dimensión finita si y sólo si $C(G) = L^2(G)$, si y sólo si $C(G)$ tiene dimensión finita, (la implicancia ($\Leftarrow$) se deduce del hecho de que dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, todo subespacio de dimensión finita es cerrado en $\mathcal{H}$). Veamos que $C(G) = L^2(G)$ si y sólo si G es finito.

Si $C(G) = L^2(G)$, supongamos por absurdo que G es infinito, y veamos que en ese caso $C(G)$ tiene dimensión infinita también, lo cual es un absurdo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $x_1, \dots, x_n \in G$ distintos. Para cada $i = 1, \dots, n$, sea $f_i \in C(G)$ tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Consideremos ahora $\varphi : C(G) \to \mathbb{C}^n$ tal que $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Es claro que φ es lineal, y puesto que $\varphi(f_i) = e_i$, también es sobreyectiva. En consecuencia, $\dim C(G) \geq \dim \mathbb{C}^n = n$, y como n es arbitrario, $C(G)$ tiene dimensión infinita.

Recíprocamente, si G es finito y de Hausdorff, su topología es la discreta y toda función en G es automáticamente continua. En este caso, es claro que

$$C(G) = L^2(G) = \mathbb{C}^{|G|}.$$

$\square$

2.2. $\widehat{G}$ numerable.

Estudiaremos ahora el caso en que $\widehat{G}$ es numerable. En estos casos, la topología en G jugará un papel más importante que cuando $\widehat{G}$ es finito (en donde la topología de G era la discreta).

Definición 2.2.1. Dados un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$, decimos que x tiene base local numerable si existe una familia $\{V_n\}_{n\geq 1}$ de entornos de x de modo que para todo abierto U en X que contiene a x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subseteq U$. Si además (X, τ) tiene base local numerable en todo punto de X, decimos que (X, τ) verifica el primer axioma de numerabilidad.

Notación. Si (X, τ) cumple el primer axioma de numerabilidad, diremos que (X, τ) (o simplemente X, cuando su topología está sobreentendida), es N1.

Observación 2.2.2. Si G es un grupo topológico, las traslaciones por elementos del grupo son homeomorfismos. En consecuencia, G es N1 si y sólo si la identidad e tiene una base local numerable.

Observación 2.2.3. Sea $\{V_n\}_{n\geq 1}$ una base de entornos de la identidad $e \in G$. Entonces si

$$W_n := V_n \cap (V_n)^{-1},$$

resulta que $\{W_n\}_{n\geq 1}$ es una base de entornos simétricos de e. En consecuencia, siempre podemos asumir que las bases locales contienen sólo entornos simétricos.

El principal resultado de esta sección afirma que $\widehat{G}$ es numerable si y sólo si G es N1. Para llegar a demostrarlo, necesitaremos algunos resultados intermedios que tienen interés en sí mismos.

Lema 2.2.4. *Si G es un grupo compacto y N1, entonces es separable.*

Demostración. Sea $\{V_n\}_{n\geq 1}$ base de entornos simétricos de la identidad e. Para cada natural n, $\{tV_n\}_{t\in G}$ es un cubrimiento abierto de G. Por la compacidad de este último, existen $t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n$ tales que

$$G = \bigcup_{j=1}^{k_n} t_j^n V_n.$$

Veamos que $\{t_1^m, \ldots, t_{k_n}^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en G. Sean U un abierto en G y s en U. Se tiene que $s^{-1}U$ es un entorno de e y en consecuencia existen $n \in \mathbb{N}, t_j^n \in G$ tales que

$$V_n \subseteq s^{-1}U \text{ y } s \in t_j^n V_n.$$

En consecuencia, como V_n es simétrico, obtenemos que

$$t_j^n \in sV_n^{-1} = sV_n \subseteq U.$$

Por lo tanto, $t_j^n \in U$, y $\{t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en G. $\square$

Definición 2.2.5. Dado un espacio topológico (X, τ), decimos que su topología tiene base numerable si existe una familia $\{V_n\}_{n\geq 1}$ de abiertos de X de modo que para todo U abierto en X y para todo $x \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in V_n \text{ y } V_n \subseteq U.$$

En tal caso, decimos que (X, τ) verifica el segundo axioma de numerabilidad.

Notación. Si (X, τ) cumple el segundo axioma de numerabilidad, diremos que (X, τ) (o simplemente X, cuando su topología esté sobreentendida), es N2.

Lema 2.2.6. *Si G es un grupo compacto y N1, entonces es N2.*

Demostración. Por el lema anterior, sabemos que G es separable. Sean $\{V_n\}_{n\geq 1}$ una base local numerable de entornos simétricos para $e \in G$, y $\{g_n\}_{n\geq 1}$ un conjunto numerable y denso en G. Veamos que $\{g_n V_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para la topología de G.

Dados W abierto de G, $x \in W$, sean m tal que $xV_m^2 \subseteq W$, y n tal que $x^{-1}g_n \in V_m$. Entonces $x \in g_n V_m$ y $g_n V_m = xx^{-1}g_n V_m \subseteq xV_m^2 \subseteq W$. $\square$

Enunciamos el siguiente teorema que nos permitirá deducir más propiedades de los grupos topológicos. Su demostración puede encontrarse en [9].

Teorema 2.2.7. *Si (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff y N2, entonces es regular si y sólo si es metrizable y separable.*

Corolario 2.2.8. *Si G es un grupo compacto y de Hausdorff, entonces es automáticamente regular (de hecho es también normal). Si además es N1, entonces es separable y N2. En consecuencia, todo grupo compacto de Hausdorff y N1 es metrizable (con una métrica invariante además).*

Corolario 2.2.9. *Si G es un grupo compacto, entonces es N1 si y sólo si es metrizable.*

En este momento estamos en condiciones de caracterizar los grupos compactos para los cuales $\widehat{G}$ es numerable.

Teorema 2.2.10. *Si G es un grupo compacto, entonces $\widehat{G}$ es numerable si y sólo si G es N1.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Teorema de Peter-Weyl, sabemos que

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{H}_{[\pi]},$$

donde cada $\mathcal{H}_{[\pi]}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita. De lo anterior se deduce que $\widehat{G}$ es numerable si y sólo si $L^2(G)$ tiene dimensión numerable como espacio de Hilbert, y esto último es equivalente a que $L^2(G)$ sea separable.

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^2(G)$ un conjunto numerable y denso. Podemos suponer que $f_n \in C(G)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $m \in \mathbb{N}$ está fijo, sabemos que existe $\{g_k^m\}_{k\geq 1} \subseteq C(G)$ tal que

$$g_k^m \to f_m \text{ en } L^2(G).$$

Por lo tanto,

$$\{g_k^m : m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\} \subseteq C(G)$$

también es denso (y numerable) en $L^2(G)$.

En virtud de la observación 2.2.2, bastará ver que la identidad e tiene una base local numerable. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, y denotamos por e_n a la imagen de e por f_n, es decir, $e_n = f_n(e) \in \mathbb{C}$. Si $m \in \mathbb{N}$, sea $B^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{m}}(e_n)$ la bola en $\mathbb{C}$ de radio $\frac{1}{m}$ centrada en e_n. Entonces,

$$V_{n,m} := f_n^{-1}\big(B^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{m}}(e_n)\big)$$

es un abierto de G que contiene a e.

Afirmación: $\{V_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base local para e.

Recordemos que si G es compacto y de Hausdorff, entonces es normal, y en consecuencia existen funciones de Urysohn que separan conjuntos cerrados de G.

Sea U un abierto de e en G. Entonces $\{e\}$ y U^c son cerrados disjuntos en G. Por lo tanto, existe $f : G \to \mathbb{C}$ continua tal que

$$f(e) = 1 \text{ y } f|_{U^c} = 0.$$

Como $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C(G)$ es denso en $L^2(G)$, sabemos que existe una subsucesión (que indexaremos con $n \in N$ para simplificar la notación) tal que

$$f_n \to_n f \quad \text{en } L^2(G).$$

Ahora, $\{f_n\}$ converge en $\|\cdot\|_2$, por lo que converge en medida (en la medida de Haar de G), y entonces existe una subsucesión (que nuevamente supondremos que es ella misma) que converge en casi todo punto de G. Como todas las funciones involucradas son continuas, la convergencia en casi todo punto es equivalente a la convergencia puntual de f_n a f. Veamos que en estas condiciones f_n converge a f en $\|\cdot\|_\infty$.

Si $g \in G$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_g \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(g) - f(g)| < \epsilon \quad \forall\, n \geq n_g.$$

Como f_n y f son continuas, existe U_g, abierto de G, que contiene a g y es tal que

$$|f_{n_g}(t) - f(t)| < \epsilon_1 \quad \forall\, t \in U_g.$$

Además, $\{U_g : g \in G\}$ es un cubrimiento abierto de G que, por ser compacto, admite un subcubrimiento finito, de modo que existen $g_1, \ldots, g_p$ tales que $G = \bigcup_{k=1}^{p} U_{g_k}$. Tomando $n_0 = \text{máx}\{n_{g_k} : k = 1, \ldots, p\}$, se deduce que

$$|f_{n_0}(g) - f(g)| < \epsilon \ \ \forall g \in G, \ \text{y} \ \forall n \geq n_0$$

esto es, $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \epsilon$, y por lo tanto $f_n \to_n f \quad$ según $\| \cdot \|_\infty$.

Finalmente, sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$ y consideremos $B_\delta^{\mathbb{C}}(1)$ (recordar que si f es la función de Urysohn antes construida, es $f(e) = 1$). Como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, resulta que $e_n \to 1$. Sean $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$e_{n_0} \in B_\delta^{\mathbb{C}}(1),$$

y $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{m_0}}(e_{n_0}) \subseteq B_\delta^{\mathbb{C}}(1).$$

Podemos pedir además que $\|f - f_{n_0}\|_\infty < \frac{1}{2}$. Entonces

$$e \in V_{n_0,m_0} = f_{n_0}^{-1}\big(B^{\mathbb{C}}_{\frac{1}{m_0}}(e_{n_0})\big).$$

Veamos que $V_{n_0,m_0} \subseteq U$, lo que termina de probar que $\{V_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base local para e.

Supongamos que existe $x \in V_{n_0,m_0}$ tal que $x \notin U$. Entonces

$$f(x) = 0 \text{ y } |f_{n_0}(x)| > \frac{1}{2}.$$

Se sigue que

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| = |f_{n_0}(x)| > \frac{1}{2} > \|f - f_n\|_\infty,$$

lo cual es absurdo. En consecuencia, $V_{n_0,m_0} \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Si G es N1, entonces es metrizable y, en ese caso, $C(G)$ es separable, por lo que $L^2(G)$ también lo es, y resulta $\widehat{G}$ numerable. $\square$

2.3. Ejemplo de $\widehat{G}$ no numerable.

Para cerrar este capítulo exponemos un ejemplo de un grupo compacto con una cantidad no numerable de representaciones unitarias irreducibles módulo la equivalencia unitaria.

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ el grupo con dos elementos, dotado con la topología discreta. Entonces*

$$G = \mathbb{Z}_2^{[0,1]} = \{f : [0, 1] \to \{0, 1\}\}$$

con la topología producto y la multiplicación coordenada a coordenada, es un grupo compacto para el cual $\widehat{G}$ no es numerable.

Demostración. Por un lado, G es compacto por el teorema de Tychonoff. Además, el hecho de que $\widehat{G}$ no es numerable se deduce de que no es N2 (y por lo tanto, tampoco N1). En efecto, supongamos que $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\geq 1}$ es una base numerable de abiertos no vacíos para la topología de G. Como $[0,1]$ no es numerable, existe $t \in [0,1]$ tal que

$$\pi_t(V_n) = \mathbb{Z}_2 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $\pi_t^{-1}(\{0\})$ es un abierto de G que no contiene a ninguno de los abiertos de $\mathcal{V}$, lo cual es absurdo.

Por otro lado, hallaremos explícitamente una cantidad no numerable de representaciones irreducibles de G que no son unitariamente equivalentes.

Recordemos que si un grupo es abeliano, entonces sus representaciones irreducibles son de dimensión 1. Además, dos representaciones irreducibles de dimensión 1 son unitariamente equivalentes si y sólo si son iguales. En efecto, si $\sigma, \eta : G \to \mathcal{B}(\mathbb{C})$ son irreducibles y equivalentes, existe $U : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un operador unitario tal que

$$\sigma(g) = U\eta(g)U^* \quad \forall g \in G.$$

Además, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $U(z) = e^{i\theta}z$, por lo que

$$\sigma(g)(z) = U\eta(g)U^*(z) = e^{i\theta}\eta(g)(e^{-i\theta}z) = \eta(g)(z) \quad \forall\ g \in G, z \in \mathbb{C}.$$

En consecuencia, $\sigma = \eta$.

Volviendo a nuestro grupo G, nótese que $\mathbb{Z}_2$ tiene dos representaciones irreducibles: σ, η, que están determinadas por las igualdades

$$\sigma(1) = Id_{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad \eta(1) = -Id_{\mathbb{C}}.$$

Ahora, consideremos para cada $t \in [0,1], \eta_t : G \to \mathcal{B}(\mathbb{C})$ definida por

$$\eta_t(f) = \eta(f(t)).$$

Es claro que si $s \neq t$, entonces $\eta_s \neq \eta_t$, por lo que $\{\eta_t : t \in [0,1]\}$ es no numerable. Por otro lado, η_t es irreducible para todo $t \in [0,1]$, así que $\{[\eta_t] : t \in [0,1]\} \subseteq \widehat{G}$ y este último resulta no numerable.

De hecho se puede probar que $\widehat{G} \cong \bigoplus_{t\in[0,1]} \mathbb{Z}_2$ dotado con la topología discreta. $\square$

Capítulo 3

Representaciones de los Grupos Clásicos.

En este capítulo se calcularán las clases de representaciones unitarias de dos grupos clásicos: $SU(2)$ y $SO(3)$.

3.1. Representaciones irreducibles de SU(2).

Comenzamos esta sección definiendo el objeto de estudio:

$$SU(2) = \{s \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : s \text{ es unitaria y } \det s = 1\}$$

El primer paso para encontrar las representaciones irreducibles de $SU(2)$ será hallar su medida de Haar.

Proposición 3.1.1. *$SU(2)$ y S^3, la esfera unitaria en $\mathbb{R}^4$, son homeomorfos.*

Demostración. Si $s^{-1} = s^*$, existe un vector $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$s = \begin{pmatrix} x + iy & z + iw \\ -z + iw & x - iy \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

Además, si $\det s = 1$, resulta

$$\begin{aligned} \|(x, y, z, w)\|_1^2 &= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |w|^2 \\ &= \det s \\ &= 1, \end{aligned}$$

así que $(x, y, z, w) \in S^3$. Recíprocamente, dado $(x, y, z, w) \in S^3$, la matriz s dada por la ecuación 3.1.1 es un elemento de $SU(2)$. Además, es claro que esta correspondencia es un homeomorfismo. En consecuencia, $SU(2)$ es homeomorfo a S^3. □

Observación 3.1.2. En virtud de la proposición anterior, hallar la medida de Haar en $SU(2)$ será equivalente a hallar una medida en S^3 que sea invariante por la operación *equivalente*, según el isomorfismo anterior, a la traslación en $SU(2)$.

Sea E el espacio vectorial definido por

$$E = \Big\{ \begin{pmatrix} x+iy & z+iw \\ -z+iw & x-iy \end{pmatrix} : (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \Big\}. \tag{3.1.2}$$

Entonces, la traslación izquierda $L_s : SU(2) \to SU(2)$ definida por $L_s(t) = s^{-1}t$, se extiende a un mapa en E que, a través de la identificación $E \simeq \mathbb{R}^4$, es lineal en $\mathbb{R}^4$. Además, tal identificación está dada por

$$\mathtt{x} = (x,y,z,w) \mapsto \tilde{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} x+iy & z+iw \\ -z+iw & x-iy \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det \tilde{\mathtt{x}} = (x+iy)(x-iy) - (-z+iw)(z+iw) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \|\mathtt{x}\|^2,$$

se tiene que

$$\|L_s \mathtt{x}\|^2 = \det(L_s \tilde{\mathtt{x}}) = \det(s^{-1}\tilde{\mathtt{x}}) = \det(\tilde{\mathtt{x}}) = \|\mathtt{x}\|^2 \quad \forall\ \mathtt{x} \in \mathbb{R}^4,\ \forall\ s \in SU(2)$$

así que L_s es una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^4$. Además, como $O(4)$ tiene dos componentes conexas, de acuerdo a $\det u = \pm 1$, concluimos que

$$L_s \in SO(4)\ \forall s \in SU(2).$$

Análogamente, $R_s \in SO(4)\ \forall s \in SU(2)$, donde R_s denota la traslación derecha:

$$R_s(t) = ts.$$

Observación 3.1.3. El mapa $s \mapsto L_s$ no es sobreyectivo, puesto que

$$\dim SO(4) = 6 \text{ y } \dim SU(2) = 3.$$

Observación 3.1.4. De lo anterior se deduce que para encontrar la medida de Haar en $SU(2)$, bastará encontrar la medida invariante por rotaciones de S^3 (no necesariamente todas, sino aquellas que provengan de elementos en $SU(2)$).

Obtenemos una parametrización de S^3 observando que si

$$x = \cos\theta,\ \text{con } 0 \le \theta \le \pi,$$

entonces (y,z,w) está en la 2-esfera de radio $\operatorname{sen}\theta$. En consecuencia,

$$x = \cos\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ z = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\cos\psi,\ w = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi$$

$$\text{con } \ 0 \le \theta, \phi \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi$$

es una parametrización de S^3.

Un resultado de geometría diferencial, que puede encontrarse en [5], afirma que la medida de S^3 invariante por rotaciones de masa total 1 está dada por

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi\ d\theta d\phi d\psi.$$

Observación 3.1.5. Si $f : SU(2) \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_{SU(2)} f(s)ds = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi, \psi) \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \; d\theta d\phi d\psi. \qquad (3.1.3)$$

Determinaremos ahora las clases de conjugación de $SU(2)$. Si $s \in SU(2)$, el polinomio característico de s viene dado por

$$\chi_s(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(s) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda \cos\theta + 1.$$

Un resultado de álgebra lineal básica nos permite afirmar que existen $\theta \in [0, 2\pi]$ y una matriz unitaria u tales que

$$s = u^* h_\theta u \quad \text{ó} \quad s = u^* h_{-\theta} u \qquad (3.1.4)$$

donde

$$h_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Además, u puede tomarse en $SU(2)$ normalizando su determinante. Tenemos entonces que para toda $s \in SU(2)$, existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tal que s es conjugada a h_θ en $SU(2)$. Por lo tanto, cada función central f de $SU(2)$ puede considerarse como una función en $[-\pi, \pi]$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$, a través de

$$f(s) = f(h_\theta) =: f(\theta).$$

Observación 3.1.6. Toda función central en $SU(2)$ se corresponde bajo la identificación anterior con una función par en $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Para todo $\theta \in [-\pi, \pi], h_\theta$ es conjugado a $h_{-\theta}$ en $SU(2)$:

$$h_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = u^* h_{-\theta} u$$

donde $\det u = 1$, y corresponde a $(0, 0, 1, 0) \in S^3$. En consecuencia,

$$f(-\theta) = f(h_{-\theta}) = f(h_\theta) = f(\theta).$$

□

Observación 3.1.7. De la observación anterior se deduce que si f es central, entonces no depende de ϕ y ψ, y se cumple

$$\begin{aligned} \int_{SU(2)} f(s)ds &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \phi \; d\theta d\phi d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \Big(\int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \; d\phi \Big) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta \; d\theta. \end{aligned}$$

Construiremos ahora una representación irreducible de dimensión $n+1$ para cada natural n. Consideremos E_n, el $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert de los polinomios homogéneos de grado n en dos variables complejas, munido con el siguiente producto interno:

$$\langle \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}, \sum_{j=0}^{n} b_j x^j y^{n-j} \rangle = \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! a_k \overline{b_k}.$$

Observación 3.1.8. Notemos que $\dim E_n = n+1$ y

$$\{(x+y)^n, (x+\omega y)^n, \ldots, (x+\omega^{n-1}y)^n, y^n\}$$

es una base de E_n, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ es una raíz n-ésima de la unidad.

Definimos $\sigma^{(n)} : SU(2) \to \mathcal{B}(E_n)$ a través de

$$\big(\sigma_s^{(n)} P\big)(z) = P(s^{-1}z) \quad s \in SU(2),\ P \in E_n,\ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

Proposición 3.1.9. *$\sigma^{(n)}$ es una representación unitaria de $SU(2)$ en E_n.*

Demostración. • *$s \mapsto \sigma_s^{(n)}$ es un homomorfismo*:

$$\big(\sigma_{st}^{(n)} P\big)(z) = P(t^{-1}s^{-1}z) = \big(\sigma_t^{(n)} P\big)(s^{-1}z) = \sigma_s^{(n)}\big(\sigma_t^{(n)} P\big)(z)$$

así que $\sigma_{st}^{(n)} = \sigma_s^{(n)} \sigma_t^{(n)}$.

• *$\sigma_s^{(n)}$ es un operador unitario para cada $s \in SU(2)$*:

Si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ fijo, sea

$$P_u(z) := (uz)^n = (ax+by)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} x^k y^{n-k}$$

Entonces, si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
\big\langle P_u, P_v \big\rangle_{E_n} &= \langle \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} x^k y^{n-k}, \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j} x^j y^{n-j} \rangle = \\
&= \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! a^k b^{n-k} \overline{c}^k \overline{d}^{n-k} \\
&= n! \sum C_k^n a^k \overline{c}^k (b\overline{d})^{n-k} \\
&= n!(a\overline{c} + b\overline{d})^n = n!\big(\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^2}\big)^n
\end{aligned}$$

Como

$$\big(\sigma_s^{(n)} P_u\big)(z) = P_u(s^{-1}z) = (us^{-1}z)^n = P_{us^{-1}}(z),$$

se tiene que

$$\left\langle\sigma_s^{(n)}P_u,\sigma_s^{(n)}P_v\right\rangle_{E_n}=n!\langle us^{-1},vs^{-1}\rangle_{\mathbb{C}^2}^n=n!\langle u,v\rangle_{\mathbb{C}^2}^n=\left\langle P_u,P_v\right\rangle_{E_n}.$$

De esta forma, tomando sucesivamente u y v del tipo

$$(1,\omega^j)\text{ con }j=0,\ldots,n-1,\text{ y }(0,1),$$

se deduce que $\sigma_s^{(n)}$ preserva el producto interno en una base de E_n. Esto implica que $\sigma_s^{(n)}$ es una isometría para cada $s\in SU(2)$.

Finalmente, $\sigma_s^{(n)}$ es sobreyectivo, con inversa dada por $\sigma_{s^{-1}}^{(n)}$. Se concluye entonces que $\sigma_s^{(n)}$ es una representación unitaria. □

Procedemos a hallar cada carácter $\chi_n:=\chi_{\sigma^{(n)}}$.

Observación 3.1.10. Sean

$$P_k(x,y):=x^ky^{n-k}\text{ para }k=0,1,\ldots,n.$$

Entonces, $\{P_0,\ldots,P_n\}$ es una base ortogonal de E_n, con

$$\|P_k\|^2=k!(n-k)!.$$

Observación 3.1.11. Como cada carácter es una función central, bastará encontrar su valor en h_θ, para cada $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Proposición 3.1.12. *Para $\theta\in[-\pi,\pi]$, se tiene*

$$\chi_n(h_\theta)=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sigma_{h_\theta}^{(n)}P_k(x,y) &= P_k\big(h_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\big)=P_k(e^{i\theta}x,e^{-i\theta}y)=(e^{i\theta}x)^k(e^{-i\theta}y)^{n-k}\\ &= e^{ik\theta}x^ke^{(n-k)(-i\theta)}y^{n-k}=e^{i(2k-n)\theta}x^ky^{n-k}\end{aligned}$$

Y en consecuencia,

$$\chi_n(h_\theta)=\sum_{k=0}^n\langle\sigma_{h_\theta}^{(n)}P_k,P_k\rangle.\frac{1}{\|P_k\|^2}=\sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta}.$$

Observemos que

$$\chi_n(h_0)=n+1=\lim_{\theta\to0}\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$\chi_n(h_\pi)=\chi_n(h_{-\pi})=(-1)^n(n+1)=\lim_{\theta\to\pm\pi}\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

y para $\theta \neq 0, \pm\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\chi_n(h_\theta) &= \sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)\theta} \\
&= e^{in\theta} \sum_{k=0}^{n} (e^{-2i\theta})^k \\
&= e^{in\theta} \Big(\frac{1 - e^{-2i\theta(n+1)}}{1 - e^{-2i\theta}} \Big) \\
&= e^{in\theta} \Big(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta(2n+1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \Big) \\
&= \frac{e^{i\theta(n+1)} - e^{-i\theta(n+1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\
&= \frac{\cos((n+1)\theta) + i\operatorname{sen}((n+1)\theta) - \cos((n+1)\theta) + i\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}.
\end{aligned}$$

□

Observación 3.1.13. En el capítulo siguiente probaremos que si σ es una representación de dimensión finita de G, entonces es irreducible si y sólo si $\|\chi_\sigma\|_{L^2(G)} = 1$ (ver proposición 4.1.10). Asumiremos este resultado por el momento.

Corolario 3.1.14. *$\sigma^{(n)}$ es irreducible para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. A partir de la proposición anterior, tenemos que

$$\langle \chi_n, \chi_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\ d\theta.$$

Además, un cálculo directo utilizando integración por partes muestra que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2((n+1)\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \big(1 - \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\big)\ d\theta,$$

por lo que

$$2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\ d\theta = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Deducimos entonces que $\langle \chi_n, \chi_n \rangle = 1$ y en consecuencia, $\sigma^{(n)}$ es irreducible. □

Hemos demostrado entonces, que $\{\sigma^{(n)} : n = 0, 1, \ldots\}$ son representaciones irreducibles de $SU(2)$. Como sus dimensiones son distintas dos a dos, también sabemos que no son unitariamente equivalentes.

Por último, veamos que no hay otras representaciones irreducibles. Para ello, recordemos que una representación es idénticamente nula si y sólo si su carácter es la función nula.

Teorema 3.1.15. $\widehat{SU(2)} = \{\sigma^{(n)} : n = 0, 1, \ldots\}$.

Demostración. En base al comentario anterior, basta demostrar que si σ es una representación de $SU(2)$ cuyo carácter es ortogonal a $\chi_{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces es $\sigma = 0$.

Supongamos que σ es como antes, y sea χ_σ su carácter, que es una función central en $L^2(SU(2))$ con la siguiente propiedad:

$$\langle \chi_\sigma, \chi_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que lo anterior puede expresarse como

$$0 = \langle \chi_\sigma, \chi_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_\sigma(\theta) \chi_n(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_\sigma(\theta) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}((n+1)\theta) \, d\theta.$$

Además, como χ_σ es una función central, es una función par en $[-\pi, \pi]$, por lo que

$$\eta(\theta) := \chi_\sigma(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

es una función impar en $[-\pi, \pi]$, cuyos coeficientes de Fourier están dados por

$$\widehat{\eta}(n) = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta = \frac{i}{2} \langle \chi_\sigma, \chi_{n-1} \rangle = 0 \quad \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\{\operatorname{sen}(n\theta), \cos(n\theta), 1 : \; n \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$ para cada $\theta \in (0, \pi)$, resulta que $\eta = 0$ y entonces $\chi_\sigma = 0$, lo cual implica que $\sigma = 0$. $\square$

3.2. Representaciones irreducibles de SO(3).

Recordemos que

$$SO(3) = \{U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : U^T U = I, \det U = 1\}.$$

El camino para calcular $\widehat{SO(3)}$ será probar en primer lugar que $SO(3)$ es isomorfo a un cociente de $SU(2)$, por lo que obtendremos representaciones irreducibles de $SO(3)$ considerando aquellas representaciones irreducibles de $SU(2)$ que son triviales en el subgrupo por el cual se pasa al cociente.

Explícitamente, una parte de la afirmación anterior viene dada por lo siguiente:

Teorema 3.2.1. *Si I es la matriz identidad en $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, entonces*

$$SO(3) \simeq \frac{SU(2)}{\{I, -I\}}.$$

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ el mapa definido por

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}.$$

Es claro que F es inyectivo y continuo. Por otro lado, es inmediato que

$$H := \mathrm{rango}(F) = \{h \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : h \text{ es hermitiana } (h = h^*) \text{ y } \mathrm{tr}(h) = 0\}.$$

Si $s \in SU(2)$, el mapa $h \mapsto shs^{-1}$ con $h \in H$, es una transformación lineal de H en sí mismo:

$$(shs^{-1})^* = (shs^*)^* = sh^*s^* = shs^{-1}$$
$$\mathrm{tr}(shs^{-1}) = \mathrm{tr}(ss^{-1}h) = \mathrm{tr}(h) = 0,$$

y por lo tanto induce vía F una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$\tau_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \tau_s(x,y,z) = F^{-1}(sF(x,y,z)s^{-1}) \tag{3.2.1}$$

Como

$$\det F(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2,$$

resulta que τ_s debe preservar la norma, esto es,

$$\|\tau_s(x,y,z)\|^2 = \|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

y en consecuencia es una isometría de $\mathbb{R}^3$. Como también es sobreyectiva, resulta que $\tau_s \in O(3)\ \forall\ s \in SU(2)$, de donde se deduce que τ es un homomorfismo continuo de $SU(2)$ en $O(3)$. Más aún, como $SU(2)$ es conexo (por ser homeomorfo a S^3) y $\det \tau_s = 1$ para $s \in SU(2)$, debe ser $\tau_s \in SO(3)$.

En consecuencia, τ es un homomorfismo continuo de $SU(2)$ en $SO(3)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\tau \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\tau \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & 0 & \operatorname{sen}(2\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(2\theta) & 0 & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \\
\tau \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\operatorname{sen}\theta \\ -i\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que el $\mathrm{rango}\,\tau$ contiene las rotaciones sobre los ejes x, y, z, y en consecuencia $SO(3) \subseteq \mathrm{rango}\,\tau$. Como la inclusión inversa es cierta por definición, obtenemos que $SO(3) = \mathrm{rango}\,\tau$.

Finalmente, como

$$\ker\tau = \{s \in SU(2) : sh = hs \ \forall\ h \in H\} = \{I, -I\},$$

concluimos que τ induce un isomorfismo de grupos topológicos entre

$$SO(3) \text{ y } \frac{SU(2)}{\{I, -I\}}.$$

$\square$

Ahora estamos en condiciones de describir todas las representaciones irreducibles de $SO(3)$.

Proposición 3.2.2. *Para cada natural par n, la ecuación*

$$\pi^{(n)}_{\tau_s} = \sigma^{(n)}_s$$

define una representación irreducible $\pi^{(n)}$ de $SO(3)$.

Recíprocamente, cualquier representación irreducible de $SO(3)$ es equivalente a $\pi^{(n)}$ para algún n par.

Demostración. Si n es par,

$$\ker\tau \subseteq \ker\sigma^{(n)},$$

pues

$$\sigma^{(k)}_{-e} = (-1)^k\sigma^{(k)}_e \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, existe una representación $\pi^{(n)}$ de $SO(3)$ tal que

$$\pi^{(n)} \circ \tau = \sigma^{(n)}.$$

Además, $\pi^{(n)}$ es una representación irreducible de $SO(3)$ por serlo $\sigma^{(n)}$.

Por otro lado, si σ es una representación irreducible de $SO(3)$, $\sigma \circ \tau$ es una representación irreducible de $SU(2)$, y en consecuencia

$$\exists\ k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sigma \circ \tau = \sigma^{(k)}.$$

Como

$$\{I, -I\} \subseteq \ker(\sigma \circ \tau) = \ker(\pi^{(k)}),$$

entonces k debe ser par, y resulta $\sigma = \pi^{(k)}$. $\square$

Corolario 3.2.3. *$SO(3)$ tiene exactamente una representación irreducible por cada dimensión impar, y ninguna representación irreducible de dimensión par.*

Demostración. $\dim(\pi^{(n)}) = \dim(\sigma^{(n)}) = n + 1$ que es impar. $\square$

Capítulo 4

Elementos de la Teoría de Representaciones de Grupos.

En este capítulo nos concentraremos más en el aspecto algebraico de las representaciones de un grupo compacto, en contraste con los capítulos anteriores que tuvieron un enfoque más bien analítico.

4.1. Caracteres de representaciones finitas.

Dados un grupo compacto G y una representación unitaria de dimensión finita $\pi : G \to \mathcal{H}$, el *carácter* de π es la función $\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_\pi(g) = \operatorname{tr}(\pi(g)).$$

Esta noción de carácter puede extenderse a representaciones unitarias no necesariamente finitas, pero nos concentraremos en primer lugar sólo en aquellas de dimensión finita, y luego consideraremos sólo las representaciones irreducibles de G. En esta sección expondremos algunas propiedades funamentales de los caracteres, especialmente sus relaciones de ortogonalidad.

Observación 4.1.1. Con la notación del párrafo y los capítulos anteriores,

$$\chi_\pi(g) = \sum_{i=1}^{d_\pi} \phi_{ii}(g).$$

Observación 4.1.2. En vista de la observación anterior, es claro que los caracteres son funciones continuas en G.

Observación 4.1.3. Con la notación de las observaciones anteriores, se tiene que

$$\chi_\pi(g^{-1}) = \overline{\chi_\pi(g)}.$$

Demostración. Dada una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{d_\pi}$ de $\mathcal{H}_\pi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \chi_\pi(g^{-1}) &= \sum_{i=1}^{d_\pi} \langle \pi(g^{-1})e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{d_\pi} \langle e_i, \pi(g)e_i \rangle = \sum_{i=1}^{d_\pi} \overline{\langle \pi(g)e_i, e_i \rangle} = \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{d_\pi} \langle \pi(g)e_i, e_i \rangle} = \overline{\chi_\pi(g)}. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado establece una importante propiedad de ortogonalidad de los caracteres, similar a la obtenida para coeficientes matriciales (y que de hecho, se deduce de ella).

Teorema 4.1.4. *Sean π y σ dos representaciones irreducibles de G. Supongamos además que no son unitariamente equivalentes. Entonces:*

1. $\chi_\pi \perp \chi_\sigma$ *en* $L^2(G)$.
2. $\|\chi_\pi\|_2 = 1$.

Demostración. Sean $\{e_i^\pi\}_{i=1}^{d_\pi}$ y $\{e_j^\sigma\}_{j=1}^{d_\sigma}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}_\pi$ y $\mathcal{H}_\sigma$ respectivamente. Haciendo uso de la proposición 1.4.5, un cálculo directo muestra que

$$\langle \chi_\pi, \chi_\sigma \rangle = \int_G \chi_\pi(g)\overline{\chi_\sigma(g)}dg = \sum_{i,j} \int_G \overline{\phi_{ii}^\pi(g)}\phi_{jj}^\sigma(g)dg = 0.$$

Por otro lado, puesto que ϕ_{ii}^π es ortogonal a ϕ_{jj}^π si $i \neq j$, se obtiene que

$$\|\chi_\pi\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^{d_\pi} \phi_{ii}^\pi \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d_\pi} \|\phi_{ii}^\pi\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d_\pi} d_\pi^{-1} = 1$$

□

Observación 4.1.5. Es claro que los caracteres están definidos en las clases de equivalencia (no unitaria) de representaciones de G, y dado que toda representación de G es equivalente a una unitaria (proposición 1.2.5), en el teorema anterior podría pedirse únicamente que las representaciones π y σ no sean equivalentes.

Corolario 4.1.6. *El conjunto $\{\chi_\pi : [\pi] \in \widehat{G}\}$ es ortonormal en $L^2(G)$.*

Observación 4.1.7. Es claro que el conjunto anterior no es una base de $L^2(G)$, puesto que

$$\overline{\operatorname{span}}\{\chi_\pi : [\pi] \in \widehat{G}\} \subsetneq L^2(G),$$

ya que cualquier combinación lineal de caracteres es una función constante sobre clases de conjugación, debido a que los caracteres lo son (ver observación 4.2.3).

A continuación nos aproximaremos hacia la definición de *multiplicidad* de una representación irreducible en otra dada. Una primera aproximación sería partir del teorema 1.2.33, que implica que toda representación π de G se escribe como $\pi = \oplus_{\sigma\in\widehat{G}} n_{[\pi],[\sigma]}\sigma$. En esta situación, si η es una representación irreducible de G, sería razonable definir la multiplicidad de η en π como $n_{\pi,\eta}$. Si tomáramos este camino, habría que probar que la multiplicidad está bien definida, es decir, que si $\pi = \oplus_{\sigma\in\widehat{G}} m_{[\pi],[\sigma]}\sigma$ es otra descomposición de π, entonces $n_{[\pi],[\sigma]} = m_{[\pi],[\sigma]}$ para cada $\sigma \in \widehat{G}$.

No adoptaremos esta definición, y en cambio definiremos la multiplicidad de acuerdo a la relación entre $\mathcal{H}_\pi$ y $\mathcal{H}_\sigma$. De todas formas, tendremos siempre en mente la noción anterior de multiplicidad, que resultará ser equivalente a la definición que daremos. La justificación de nuestra definición se encuentra en la parte (2) del siguiente lema, y la equivalencia de ella con la motivación que acabamos de dar, se encuentra en la parte (3).

Lema 4.1.8. *Sean $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria, $\sigma \in \widehat{G}$ y $e_\sigma := d_\sigma\overline{\chi_\sigma}$. Entonces,*

1. *$\pi(e_\sigma)$ es una proyección ortogonal.*

2. *Si $[\pi] \in \widehat{G}$, entonces $\pi(e_\sigma) = \delta_{[\pi],[\sigma]} Id_{\mathcal{H}_\pi}$. En particular, $\dim \pi(e_\sigma) = d_\sigma\delta_{[\pi],[\sigma]}$.*

3. *Si $\pi = \oplus_{\sigma\in\widehat{G}} n_{[\pi],[\sigma]}\sigma$, entonces $\dim \pi(e_\sigma)\mathcal{H}_\pi = d_\sigma n_{[\pi],[\sigma]}$.*

Demostración. (1). En virtud de la proposición 1.2.44, para ver que $\pi(e_\sigma)$ es una proyección ortogonal, bastará ver que $e_\sigma^* * e_\sigma = e_\sigma$. Ahora, si $x \in G$ y puesto que $\overline{\chi_\sigma}^* = \overline{\chi_\sigma}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(d_\sigma\overline{\chi_\sigma})^* * (d_\sigma\overline{\chi_\sigma})(x) &= d_\sigma^2 \int_G \overline{\chi_\sigma}(xs^{-1})\overline{\chi_\sigma}(s)ds \\
&= d_\sigma^2 \sum_{i,j=1}^{d_\sigma} \int_G \overline{\phi_{ii}}^\sigma(xs^{-1})\overline{\phi_{jj}}^\sigma(s)ds \\
&= d_\sigma^2 \sum_{i,j,l=1}^{d_\sigma} \overline{\phi_{li}^\sigma}(x) \int_G \phi_{il}^\sigma(s)\overline{\phi_{jj}^\sigma}(s)ds \\
&= d_\sigma^2 \sum_{i,j,l=1}^{\sigma} \overline{\phi_{li}^\sigma}(x)\frac{\delta_{ij}\delta_{lj}}{d_\sigma} \\
&= d_\sigma \sum_{i=1}^{d_\sigma} \overline{\phi_\sigma^{ii}}(x) \\
&= d_\sigma\overline{\chi_\sigma}(x).
\end{aligned}
$$

(2). Sea $\mathcal{H}_{1,[\pi]} := span\{\phi_{1,1}^\pi, \ldots, \phi_{1,d_\pi}^\pi\}$. Por la parte (a) del Teorema de Peter-Weyl, existe un operador unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{1,[\eta]}$ que verifique $U^*\rho_t U = \pi_t$ para todo $t \in G$. Así, $\pi(e_\sigma) = U^*\rho_(e_\sigma)U = U^*P_{[\sigma]}U$, en virtud del teorema 1.4.8. Luego, si $\pi \cong \sigma$, se tiene que $U\big(\mathcal{H}_\pi\big) = \mathcal{H}_{1,[\sigma]}$ y en consecuencia, $U^*P_{[\sigma]}U = id_{\mathcal{H}_\pi}$.

Por otro lado, si $\pi \ncong \sigma$, se tiene $U\big(\mathcal{H}_\pi\big) = \mathcal{H}_{1,[\pi]} \subseteq \mathcal{H}_{[\pi]} \perp \mathcal{H}_{[\sigma]}$, de modo que $P_{[\sigma]}U = 0$.

En consecuencia

$$\pi(e_\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \pi \ncong \sigma; \\ Id_{\mathcal{H}_\pi}, & \text{si } \pi \cong \sigma. \end{cases}$$

(3). De acuerdo con el teorema 1.2.33, escribimos π como suma de irreducibles y aplicamos la parte anterior para encontrar que

$$\pi(e_\sigma) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} n_{[\pi],[\pi]} \cdot \pi(e_\sigma) = Id_{\mathcal{H}_\sigma} \oplus \cdots \oplus Id_{\mathcal{H}_\sigma},$$

donde el último miembro tiene exactamente $n_{[\pi],[\sigma]}$ sumandos. En consecuencia,

$$\dim \pi(e_\sigma) = n_{[\pi],[\sigma]} d_\sigma.$$

□

Definición 4.1.9. Sean $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación de G y $[\sigma] \in \widehat{G}$. Entonces, la *multiplicidad de σ en π* es $m_\sigma(\pi) = \begin{cases} \frac{\dim \pi(e_\sigma)\mathcal{H}_\pi}{d_\sigma}, & \text{si } \dim \pi(e_\sigma)\mathcal{H}_\pi < \infty; \\ \dim \pi(e_\sigma)\mathcal{H}_\pi, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Observación 4.1.10. Si $\dim \pi(e_\sigma)\mathcal{H}_\pi < \infty$, se tiene que $m_\sigma(\pi) = \frac{\operatorname{Tr}\pi(e_\sigma)}{d_\sigma}$.

Proposición 4.1.11. *Sean σ y η representaciones de dimensión finita de G. Dada $[\pi] \in \widehat{G}$, denotamos por μ_π y ν_π las multiplicidades de π en σ y η respectivamente. Entonces:*

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\eta \rangle = \sum_{[\pi] \in \widehat{G}} \mu_\pi \nu_\pi.$$

En particular, σ es irreducible si y sólo si

$$\|\chi_\sigma\|_2^2 = \int_G |\chi_\sigma(g)|^2 dg = 1.$$

Demostración. Sabemos que σ y η se descomponen como suma de representaciones irreducibles. Concretamente, $\sigma \cong \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \mu_\pi \pi$ y $\eta \cong \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \nu_\pi \pi$. Por lo tanto, $\chi_\sigma = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \mu_\pi \chi_\pi$ y $\chi_\eta = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \nu_\pi \chi_\pi$.

Finalmente,

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\eta \rangle = \langle \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \mu_\pi \chi_\pi, \sum_{[\sigma]\in\widehat{G}} \nu_\sigma \chi_\sigma \rangle = \sum_{[\pi],[\sigma]\in\widehat{G}} \mu_\pi \nu_\pi \langle \chi_\pi, \chi_\sigma \rangle = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \mu_\pi \nu_\pi.$$

□

Corolario 4.1.12. *Si $[\pi] \in \widehat{G}$ y σ es una representación de dimensión finita de G, entonces la multiplicidad de π en σ coincide con*

$$\langle \chi_\sigma, \chi_\pi \rangle = \int_G \chi_\sigma(g) \overline{\chi_\pi(g)} dg.$$

Corolario 4.1.13. *Si σ es una representación finita de G, entonces $\sigma = 0$ si y sólo si $\chi_\sigma = 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es inmediato.

($\Leftarrow$) Si σ es una representación de G, entonces $\sigma \cong \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \mu_\pi \pi$. Además, $\mu_\pi = \langle \chi_\sigma, \chi_\pi \rangle = 0$, por lo que es $\sigma = 0$. □

4.2. Funciones centrales del grupo.

Definición 4.2.1. Dada $f : G \to \mathbb{C}$, decimos que f es una función *central* si es invariante por todos los automorfimos internos de G.

Observación 4.2.2. Es claro que f es central si y sólo si es constante en cada clase de conjugación de G. Es por ello que las funciones centrales también son llamadas *funciones de clase.*

Observación 4.2.3. Si $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ es una representación de G de dimensión finita, su carácter es una función central.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\chi_\pi(tgt^{-1}) &= \operatorname{tr}\big(\pi(tgt^{-1})\big) \\
&= \operatorname{tr}\big(\pi(t)\pi(g)\pi(t)^{-1}\big) \\
&= \operatorname{tr}\big(\pi(t)\pi(t)^{-1}\pi(g)\big) \\
&= \operatorname{tr}\big(\pi(g)\big) \\
&= \chi_\pi(g).
\end{aligned}$$

□

El principal resultado de esta sección afirma que cualquier función central de $L^2(G)$ se descompone como la suma de caracteres con ciertos coeficientes.

Lema 4.2.4. *Dados $[\pi] \in \widehat{G}$, y $s, t \in G$, vale la siguiente igualdad:*

$$d_\pi \int_G \chi_\pi(rsr^{-1}t)dr = \chi_\pi(s)\chi_\pi(t).$$

Demostración. Recordemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\phi^\pi_{ij}(tg) &= \sum_{k=1}^{d_\pi} \phi^\pi_{ik}(t)\phi^\pi_{kj}(g) \quad \forall t, g \in G, 1 \le i, j \le d_\pi \\
\phi^\pi_{ij}(t^{-1}) &= \overline{\phi^\pi_{ji}(t)}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
d_\pi \int_G \chi_\pi(rsr^{-1}t)dr &= d_\pi \sum_{i=1}^{d_\pi} \int_G \phi^\pi_{ii}(rsr^{-1}t)dr \\
&= d_\pi \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \int_G \phi^\pi_{ij}(rsr^{-1})\phi^\pi_{ji}(t)dr \\
&= d_\pi \sum_{i,j,k=1}^{d_\pi} \left(\int_G \phi^\pi_{ik}(rs)\phi^\pi_{kj}(r^{-1})dr \right) \phi^\pi_{ji}(t) \\
&= d_\pi \sum_{i,j,k=1}^{d_\pi} \left(\int_G \phi^\pi_{ik}(rs)\overline{\phi^\pi_{jk}(r)}dr \right) \phi^\pi_{ji}(t) \\
&= d_\pi \sum_{i,j,k,l=1}^{d_\pi} \left(\int_G \phi^\pi_{il}(r)\phi^\pi_{lk}(s)\overline{\phi^\pi_{jk}(r)}dr \right) \phi^\pi_{ji}(t) \\
&= d_\pi \sum_{i,j,k,l=1}^{d_\pi} \left(\int_G \phi^\pi_{il}(r)\overline{\phi^\pi_{jk}(r)}dr \right) \phi^\pi_{lk}(s)\phi^\pi_{ji}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_\pi \sum_{i,j,k,l=1}^{d_\pi} \frac{\delta_{ij}\delta_{lk}}{d_\pi}\phi^\pi_{lk}(s)\phi^\pi_{ji}(t) \\
&= \sum_{i,l=1}^{d_\pi} \phi^\pi_{ll}(s)\phi^\pi_{ii}(t) \\
&= \chi_\pi(s)\chi_\pi(t).
\end{aligned}$$

□

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.5. *Si $f \in L^2(G)$ es central, entonces*

$$f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi. \tag{4.2.1}$$

Demostración. Recordemos que, por el Teorema de Peter-Weyl, se tiene que

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \mathcal{H}_\pi,$$

y que por el Teorema 1.4.8, si a $f \in L^2(G)$ la escribimos según la descomposición anterior, obtenemos que

$$f = \sum_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi \cdot f * \chi_\pi.$$

Por lo tanto, bastará ver que si f es central, entonces

$$d_\pi \cdot f * \chi_\pi = \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi.$$

Calculando directamente con las definiciones, y teniendo en cuenta el lema anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
d_\pi \cdot f * \chi_\pi(t) &= d_\pi \int_G f(s)\chi_\pi(s^{-1}t)ds \\
&= d_\pi \int_G \int_G f(r^{-1}sr)\chi_\pi(s^{-1}t)dsdr \\
&= d_\pi \int_G \int_G f(s)\chi_\pi(rs^{-1}r^{-1}t)dsdr \\
&= \left(\int_G f(s)\chi_\pi(s^{-1})ds \right) \chi_\pi(t) \\
&= \left(\int_G f(s)\overline{\chi_\pi(s)}ds \right) \chi_\pi(t) \\
&= \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi(t),
\end{aligned}$$

donde en la segunda identidad se utilizó el hecho de que f es central. En consecuencia, $d_\pi \cdot f * \chi_\pi = \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi$ y con ello queda demostrado el teorema. □

Corolario 4.2.6. *Ya habíamos probado que el conjunto* $\{\chi_\pi : [\pi] \in \widehat{G}\}$ *es ortonormal en* $L^2(G)$*, y habíamos deducido que*

$$\overline{span}\{\chi_\pi : [\pi] \in \widehat{G}\} \subseteq \{f \in L^2(G) : f \text{ es central}\}.$$

El teorema anterior afirma que los conjuntos anteriores son iguales.

4.3. Representación inducida.

Supongamos que G es un grupo compacto, y $F \subseteq G$ es un subgrupo cerrado. Es claro que si U es una representación unitaria de G, entonces $u := U|_F$ es una representación unitaria de F. Surge de forma natural la siguiente pregunta: dada una representación unitaria de F, ¿puede extenderse (o inducirse) a una de G? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y en esta sección describiremos explícitamente cómo se induce una representación en un grupo compacto a partir de una en un subgrupo cerrado de él.

Observación 4.3.1. Como F es cerrado en G, resulta un grupo compacto. En consecuencia, admite también una medida de Haar positiva, invariante por traslaciones, y de masa total 1. Para simplificar la notación, y como creemos que no hay lugar a confusión, denotaremos tal medida por dt, ds, dr, etc. (al igual que la medida de Haar de G).

Supongamos que $u : F \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ es una representación irreducible de F. Entonces, por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único mapa lineal $\varphi : C(G) \otimes \mathcal{H}_u \to C(G, \mathcal{H}_u)$ tal que para toda $f \in C(G), \xi \in \mathcal{H}_u$ es $\varphi(f \otimes \xi) = f \cdot \xi$, donde $f \cdot \xi(t) = f(t)\xi$, para todo $t \in G$. Consideremos sobre $C(G) \bigotimes \mathcal{H}_u$ el producto interno definido por

$$\langle \sum_i f_i \otimes \xi_i, \sum_j f'_j \otimes \xi'_j \rangle_{C(G)\otimes\mathcal{H}_u} = \sum_{i,j} \langle f_i, f'_j \rangle_{L^2(G)} \langle \xi_i, \xi'_j \rangle_{\mathcal{H}_u},$$

y sobre $C(G,\mathcal{H}_u)$ el producto interno

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{C(G,\mathcal{H}_u)} = \int_G \langle \alpha(t), \beta(t)\rangle_{\mathcal{H}_u} dt.$$

Ahora, si $\sum_i f_i \otimes \xi_i, \sum_j f'_j \otimes \xi'_j \in C(G)\otimes \mathcal{H}_u$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big\langle \varphi\big(\sum f_i\otimes\xi_i\big), \varphi\big(\sum f'_j\otimes\xi'_j\big)\Big\rangle &= \sum_{i,j} \langle f_i\cdot\xi_i, f'_j\cdot\xi'_j\rangle \\
&= \sum_{i,j}\int_G \langle f_i(t)\xi_i, f'_j(t)\xi'_j\rangle_{\mathcal{H}_u} dt \\
&= \sum_{i,j}\int_G f_i(t)\overline{f'_j(t)}\langle \xi_i, \xi'_j\rangle_{\mathcal{H}_u} dt \\
&= \sum_{i,j} \langle f_i, f'_j\rangle_{L^2(G)}\langle \xi_i, \xi'_j\rangle_{\mathcal{H}_u} \\
&= \sum_{i,j} \langle f_i\otimes\xi_i, f'_j\otimes\xi'_j\rangle_{L^2(G)\otimes\mathcal{H}_u} \\
&= \langle \sum f_i\otimes\xi_i, \sum f'_j\otimes\xi'_j\rangle,
\end{aligned}$$

por lo que φ es una isometría, y en particular inyectiva.

Ahora, dada $\alpha \in C(G,\mathcal{H}_u)$, sea $\{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_u$. Entonces existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_{d_u} \in C(G)$ únicos de modo que $\alpha(t) = \sum_{i=1}^{d_u}\alpha_i(t)\eta_i$. Puesto que las funciones α_i son continuas, se tiene que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{d_u}\alpha_i\cdot\eta_i = \varphi\big(\sum_{i=1}^{d_u}\alpha_i\otimes\eta_i\big),$$

de modo que φ es sobreyectiva. Así, $\varphi : C(G)\bigotimes\mathcal{H}_u \to C(G,\mathcal{H}_u)$ es un isomorfismo lineal que preserva el producto interno.

Se deduce que φ se extiende a un isomorfismo $\tilde{\varphi} : L^2(G)\otimes\mathcal{H}_u \to L^2(G,\mathcal{H}_u)$ de espacios de Hilbert, a través del cual en adelante identificaremos ambos espacios.

Definimos entonces el siguiente espacio, naturalmente asociado a u:

$$\mathcal{H}_U = \overline{\{\xi\in C(G,\mathcal{H}_u) : \xi(sx) = u(s)\xi(x),\ \forall\ s\in F, x\in G\}}.$$

Observación 4.3.2. Si $\rho\otimes id : G\to\mathcal{B}(L^2(G)\otimes\mathcal{H}_u)$ está dada por $(\rho\otimes id)_t = \rho_t\otimes id_{\mathcal{H}_u}$, entonces $\rho\otimes id$ es una representación unitaria de G.

Observación 4.3.3. En las condiciones de los párrafos anteriores, $\mathcal{H}_U$ es invariante por $\rho\otimes id$.

Demostración. Si $\xi \in \mathcal{H}_U$, entonces

$$\begin{aligned}
(\rho\otimes id)_t\xi\big(sx\big) &= \rho_t\big(\xi(sx)\big) \\
&= \xi(sxt) \\
&= u(s)\left(\rho_t(\xi)\right)(x) \\
&= u(s)\big(\rho\otimes id\big)_t\xi(x).
\end{aligned}$$

□

En virtud de la observación anterior, podemos considerar la subrepresentación U de $\rho\otimes id$ en $\mathcal{H}_U$. Denotaremos por $Q : L^2(G)\otimes\mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_U$ a la proyección ortogonal.

Definición 4.3.4. La *representación inducida* de u en G (más precisamente: la representación de G inducida por la representación u del subgrupo F) es $U : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$ definida por

$$U_t = Q\big(\rho_t\otimes id\big)Q^* \ \forall\ t\in G.$$

Notación. A la representación inducida la denotaremos por $\mathrm{Ind}_F^G(u)$, o simplemente $\mathrm{Ind}(u)$ cuando esté claro quiénes son los grupos G y F. Finalmente, cuando la representación de F esté sobreentendida o no juegue un papel importante, y no se genere confusión, la representación inducida se denotará por Ind_F^G y nos referiremos a ella como la *representación inducida desde el subgrupo F*.

Lema 4.3.5. *Sea $V : G\to\mathcal{U}(\mathcal{H}_V)$ una representación irreducible, y sea $e_V = d_V\overline{\chi_V}$. Entonces $U(e_V)\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_U)$ es una proyección ortogonal sobre un subespacio de $\mathcal{H}_{[V]}\otimes\mathcal{H}_u$.*

Demostración. Aplicando el teorema 1.4.8, se tiene que

$$\big(\rho\otimes id\big)(e_V) = \rho(e_V)\otimes id_{\mathcal{H}_u} = P^{L^2(G)}_{\mathcal{H}_{[V]}}\otimes id_{\mathcal{H}_u}.$$

y en consecuencia

$$\big(\rho\otimes id\big)(e_V)(L^2(G)\otimes\mathcal{H}_u) = \mathcal{H}_{[V]}\otimes\mathcal{H}_u.$$

Por lo tanto, la imagen de $U(e_V) = Q(\rho\otimes id)e_VQ^*$ está incluida en $\mathcal{H}_{[V]}\otimes\mathcal{H}_u$. □

Recordemos que si U y V son representaciones de G, con V irreducible y U de dimensión finita, entonces la multiplicidad de V en U coincide con

$$\langle\chi_U,\chi_V\rangle_{L^2(G)} = \int_G \chi_U(g)\overline{\chi_V(g)}dg.$$

Además, también veremos que esta multiplicidad es igual a $\mathrm{Tr}U(e_V)$. Por lo tanto, para hallarla necesitaremos una fórmula explícita para la forma integrada de $U = Ind(u)$.

Proposición 4.3.6. *Sean $\xi\in C(G,\mathcal{H}_u), x\in G$. Entonces*

1. *$Q\xi\in C(G,\mathcal{H}_u)$, y $Q\xi(x) = \int_F u(s^{-1})\xi(sx)ds$.*
2. *Si además $\xi\in\mathcal{H}_U$ y $f\in L^1(G)$, entonces*

$$U(f)\xi(x) = \int_G K_f(x,t)\xi(t)dt, \quad \textit{donde } K_f(x,t) = \int_G u(s)f(x^{-1}st)ds.$$

Demostración. (1). En primer lugar, denotemos por $Q' : C(G, \mathcal{H}_u) \to C(G, \mathcal{H}_u)$ al operador definido por el miembro derecho de la igualdad en (1). Basta demostrar que $Q'\xi \in C(G, \mathcal{H}_u)$, y que Q' es un operador acotado, idempotente, autoadjunto y que su imagen es exactamente $\mathcal{H}_U \cap C(G, \mathcal{H}_u)$, para luego extenderlo a $L^2(G, \mathcal{H}_u)$ y concluir que $Q = Q'$. Veámoslo en ese orden.

Como ξ es continua en G, es uniformemente continua por la proposición 1.2.10, y dado $\epsilon > 0$ existe un abierto V que contiene a e de modo que si $x^{-1}y \in V$, $\|\xi(x) - \xi(y)\| < \epsilon$. Así, si $x, y \in G$ son tales que $x^{-1}y \in V$, se tiene que

$$\|Q'\xi(x) - Q'\xi(y)\| \leq \int_F \|u(s^{-1})\| \|\xi(sx) - \xi(sy)\| ds < \epsilon,$$

por lo que $Q'\xi \in C(G, \mathcal{H}_u)$.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|Q'(\xi)\|^2 &= \int_G \|Q'\xi(x)\|^2 dx \\
&= \int_G \Big\| \int_F u(s^{-1})\xi(sx) ds \Big\|^2 dx \\
&\leq \int_G \left(\int_F \|u(s^{-1})\| \|\xi(xs)\| ds \right)^2 dx \\
&\leq \int_G \left[\left(\int_F \|\xi(sx)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \\
&= \int_F \int_G \|\xi(sx)\|^2 dx ds \\
&= \|\xi\|^2,
\end{aligned}$$

de modo que Q' es acotado sobre $C(G, \mathcal{H}_u)$, con $\|Q'\| \leq 1$. Así, Q' se extiende a un operador acotado $\overline{Q'} : L^2(G, \mathcal{H}_u) \to L^2(G, \mathcal{H}_u)$.

Ahora, veamos que Q' es idempotente, verificándolo primero en $C(G, \mathcal{H}_u)$.

$$\begin{aligned}
Q'(Q'\xi)(x) &= \int_F u(s^{-1}) Q'\xi(sx) ds \\
&= \int_F u(s^{-1}) \int_F u(t^{-1})\xi(tsx) dt ds \\
&= \int_F \int_F u((ts)^{-1})\xi(tsx) dt ds \\
&= \int_F \big(\int_F u(r^{-1})\xi(rx) dr \big) ds \\
&= \int_F Q'\xi(x) ds \\
&= Q'\xi(x).
\end{aligned}$$

Esto implica que $(Q')^2 = Q'$, ya que es cierto en un subespacio denso de $L^2(G, \mathcal{H}_u)$ y Q' es un operador acotado.

Dada $\zeta \in C(G, \mathcal{H}_u)$, vale que

$$\begin{aligned}
\langle Q'\xi, \zeta\rangle_{L^2(G,\mathcal{H}_u)} &= \int_G \big\langle Q'\xi(t), \zeta(t)\big\rangle_{\mathcal{H}_u} dt \\
&= \int_G \left\langle \int_F u(s^{-1})\big(\xi(st)\big)ds, \zeta(t) \right\rangle_{\mathcal{H}_u} dt \\
&= \int_G \int_F \big\langle \xi(st), u(s)\big(\zeta(t)\big)\big\rangle_{\mathcal{H}_u} ds dt \\
&= \int_G \left\langle \xi(r), \int_F u(s)\big(\zeta(s^{-1}r)\big)ds \right\rangle_{\mathcal{H}_u} dr \\
&= \int_G \big\langle \xi(r), Q'\zeta(r)\big\rangle_{\mathcal{H}_u} dr \\
&= \langle \xi, Q'\zeta\rangle_{L^2(G,\mathcal{H}_u)}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, dado que $C(G, \mathcal{H}_u)$ es denso en $L^2(G, \mathcal{H}_u)$, se deduce que $(Q')^* = Q'$.

Finalmente, veamos que rango$(Q') = \mathcal{H}_U \cap C(G, \mathcal{H}_u)$. Por un lado, la inclusión rango$(Q') \subseteq \mathcal{H}_U \cap C(G, \mathcal{H}_u)$ se deduce de que si $s \in G$,

$$\begin{aligned}
Q'\xi(sx) &= \int_F u(t^{-1})\xi(tsx)dt \\
&= \int_F u(sr^{-1})\big(\xi(xr)\big)dr \\
&= u(s)\int_F u(r^{-1})\big(\xi(xr)\big)dr \\
&= u(s)Q'\xi(x).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, dada $\zeta \in \mathcal{H}_U \cap C(G, \mathcal{H}_u)$, se tiene que

$$Q'\zeta(x) = \int_F u(s)\big(\zeta(xs)\big)ds = \int_F u(s)u(s^{-1})\big(\zeta f(x)\big)ds = \zeta(x),$$

con lo que rango$(Q') \supseteq \mathcal{H}_U \cap C(G, \mathcal{H}_u)$, y se deduce que $Q = Q'$.

(2). Se tiene que

$$\begin{aligned}
U(f)\xi(x) &= \int_G f(t)U_t\xi(x)dt \\
&= \int_G f(t)\left(\int_F u(s)\big(\rho_t\otimes id\big)\xi(sx)ds\right)dt \\
&= \int_G\int_F f(t)u(s)\xi(sxt)dsdt \\
&= \int_F\int_G f(t)u(s)\xi(sxt)dtds \\
&= \int_F\int_G f(x^{-1}s^{-1}r)u(s)\xi(r)drds \\
&= \int_G\left(\int_F u(s)f(x^{-1}s^{-1}r)ds\right)\xi(r)dr \\
&= \int_G K_f(x,r)\xi(r)dr.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.7. *(de reciprocidad de Frobenius)*

Sean $u : F \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_u)$ una representación irreducible de F, y $U : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_U)$ su representación inducida. Sean además $V : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_V)$ una representación irreducible de G y $v := V|_F$. Entonces, la multiplicidad de V en U coincide con la multiplicidad de u en v: $n_{[V],[U]} = n_{[u],[v]}$. Es decir que, en el caso de ser $\dim U < \infty$, se tiene:

$$\int_G \chi_U(g)\overline{\chi_V(g)}dg = \int_F \chi_v(s)\overline{\chi_u(s)}ds \left(= \int_F \chi_V(s)\overline{\chi_u(s)}ds\right).$$

Demostración. Como $U_t = Q\big(\rho_t\otimes id\big)Q^*$, se tiene que

$$U(e_V) = \int_G e_V(t)U_t dt = \int_G Qe_V(t)\big(\rho_t\otimes id\big)Q^*dt = Q\big(\rho(e_V)\otimes id\big)Q^*.$$

En consecuencia, y teniendo en cuenta la fórmula explícita de Q que resulta de la proposición anterior, si $\xi \in L^2(G,\mathcal{H}_u), x \in G$, es

$$\begin{aligned}
Q\big(\rho(e_V)\otimes id\big)Q^*\xi(x) &= \int_F u(s^{-1})\big(\rho(e_V)\otimes id\big)\xi(sx)ds \\
&= \int_F\int_G u(s^{-1})e_V(t)\xi(sxt)dtds \\
&= \int_F\int_G u(s^{-1})e_V(x^{-1}s^{-1}r)\xi(r)drds \\
&= \int_F\int_G u(s)e_V(x^{-1}sr)\xi(r)drds \\
&= \int_G K(x,r)\xi(r)dr,
\end{aligned}$$

donde $K(x,r) = \int_F u(s)e_V(x^{-1}sr)ds \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$, es decir, $K = K_{e_V}$. Como $P_V := \rho(e_V) \otimes id$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_{[V]} \otimes \mathcal{H}_u$, que es de dimensión finita, y $U(e_V) = QP_VQ^*$, entonces

$$n_{[V],[U]} = \frac{\dim U(e_V)}{d_V} = \frac{\mathrm{Tr}\big(U(e_V)\big)}{d_V}.$$

Afirmación: $n_{[u],[v]} = \langle \chi_u, \chi_v \rangle = \frac{1}{d_V} \int_G TrK(x,x)dx$.

Puesto que $K(x,y) = \int_F u(s)e_V(x^{-1}sy)ds$, resulta

$$K(x,x) = \int_F u(s)e_V(s)ds = d_V \int_F u(s)\overline{\chi_V(s)}ds,$$

que en particular no depende de $x \in G$. Ahora, si $\{h_i\}_{i=1}^{d_u}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_u$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}K(x,x) &= \sum_{i=1}^{d_u} \langle K(x,x)h_i, h_i \rangle \\ &= d_V \sum_{i=1}^{d_u} \int_F \langle u(s)\overline{\chi_V}(s)h_i, h_i \rangle ds \\ &= d_v \int_F \overline{\chi_V}(s) \sum_{i=1}^{d_u} \langle u(s)h_i, h_i \rangle ds \\ &= d_V \int_F \chi_u(s)\overline{\chi_V}(s)ds \\ &= d_V \langle \chi_u, \chi_V \rangle_{L^2(F)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la afirmación recién demostrada y que $n_{[V],[U]} = \frac{\mathrm{Tr}\big(U(e_V)\big)}{d_V}$, es claro que para demostrar el teorema, bastará verificar la siguiente afirmación.

Afirmación: $Tr\big(U(e_V)\big) = \int_G Tr(K(x,x))dx$.

Como $U(e_V)$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}_U$ sobre un subespacio de $\mathcal{H}_{[V]} \otimes \mathcal{H}_u$, para calcular su traza basta tomar la base ortonormal $\{d_V^{\frac{1}{2}}\phi_{ij}^V \otimes e_k : 1 \leq i,j \leq d_V; 1 \leq k \leq d_u\}$, y calcular:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(U(e_V)\big) &= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \sum_{k=1}^{d_u} \langle U(e_V)\phi_{ij}^V \otimes e_k, \phi_{ij}^V \otimes e_k\rangle \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \sum_{k=1}^{d_u} \int_G \langle U(e_V)\big(\phi_{ij}^V \otimes e_k\big)(x), \big(\phi_{ij}^V \otimes e_k\big)(x)\rangle dx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \sum_{k=1}^{d_u} \int_G \langle \left(\int_G K(x,u)\phi_{ij}^V(u)du \right) e_k, \phi_{ij}^V(x) e_k\rangle dx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \sum_{k=1}^{d_u} \int_G \int_G \langle K(x,u)\phi_{ij}^V(u)\overline{\phi_{ij}^V(x)} e_k, e_k\rangle dudx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \int_G \int_G \phi_{ij}^V(u)\overline{\phi_{ij}^V(x)} \sum_{k=1}^{d_u} \langle K(x,u) e_k, e_k\rangle dudx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \int_G \int_G \phi_{ij}^V(u)\overline{\phi_{ij}^V(x)} \mathrm{Tr} K(x,u) dudx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \int_G \left(\int_G \mathrm{Tr} K(x,u)\phi_{ij}^V(u)du \right) \overline{\phi_{ij}^V(x)} dx \\
&= d_V \sum_{i,j=1}^{d_V} \int_G T(\phi_{ij}^V)(x)\overline{\phi_{ij}^V(x)} dx \\
&= \mathrm{Tr}(T),
\end{aligned}
$$

donde $T : L^2(G) \to L^2(G)$ es el operador integral dado por $T(f)(x) = \int_G \mathrm{Tr} K(x,u) f(u)du$. A continuación veremos que la traza de este operador es $\int_G \mathrm{Tr}(K(x,x))dx$.

Recordemos que $\{\phi_{ij}^\pi : \pi \in \widehat{G}\}$ es una base ortogonal de $L^2(G)$. Sean $\pi \in \widehat{G}$ y $1 \leq i,j \leq d_\pi$. Entonces

$$
\begin{aligned}
T\phi_{ij}^\pi(x) &= \int_G \mathrm{Tr} K(x,t)\phi_{ij}^\pi(t)dt \\
&= d_V \int_G \left(\int_F \mathrm{Tr}(u(s))\chi_V(t^{-1}s^{-1})ds \right) \phi_{ij}^\pi(t)dt \\
&= d_V \int_G \left(\int_F \chi_u(s) \sum_{k,l=1}^{d_V} \phi_{kl}^V(t^{-1}s^{-1})\phi_{lk}^V(x)ds \right) \phi_{ij}^\pi(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= d_V \sum_{k,l,m=1}^{d_V} \left(\int_G \int_F \chi_u(s) \phi^V_{km}(t^{-1}) \phi^V_{ml}(s^{-1}) ds \phi^\pi_{ij}(t) dt \right) \phi^V_{lk}(x) \\
&= d_V \sum_{k,l,m=1}^{d_V} \left(\int_F \chi_u(s) \overline{\phi^V_{lm}(s)} ds \right) \left(\int_G \overline{\phi^V_{mk}(t)} \phi^\pi_{ij}(t) dt \right) \phi^V_{lk}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{d_V} \langle \chi_u, \phi^V_{ki} \rangle_{L^2(F)} \delta_{[\pi],[V]} \phi^V_{kj}(x).
\end{aligned}
$$

De modo que si $\pi \ncong V, \mathcal{H}_{[\pi]} \subseteq \ker T$ y $T(\mathcal{H}_{[V]}) \subseteq \mathcal{H}_{[V]}$.

Además, T es autoadjunto, puesto que el núcleo que lo define, $\mathrm{Tr}(K(t,x))$, lo es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(K(t,x)) &= \mathrm{Tr} \left(\int_F u(s) e_V(t^{-1} s x) ds \right) \\
&= \mathrm{Tr} \left(\int_F u(s) \overline{e_V(x^{-1} s^{-1} t)} ds \right) \\
&= \mathrm{Tr} \left(\int_F u(s^{-1})^* \overline{e_V(x^{-1} s^{-1} t)} ds \right) \\
&= \mathrm{Tr} \left[\left(\int_F u(s) e_V(x^{-1} s t) ds \right)^* \right] \\
&= \mathrm{Tr}\big(K(x,t)^*\big) \\
&= \overline{\mathrm{Tr}(K(x,t))}.
\end{aligned}
$$

El Teorema Espectral aplicado al operador integral T permite afirmar que existen una base ortonormal de $\mathcal{H}_{[V]}, \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{d_V^2}\}$ y $\rho_1, \ldots, \rho_{d_V^2} \in \mathbb{R}$, tales que

$$
T\psi(x) = \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \quad \forall\ \psi \in L^2(G),\ \forall\ x \in G.
$$

En particular, para toda $\psi \in L^2(G)$ vale la siguiente secuencia de igualdades:

$$
\begin{aligned}
\int_G \mathrm{Tr} K(x,y) \psi(y) dy &= T\psi(x) \\
&= \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \langle \psi, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) \\
&= \int_G \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \psi(y) \overline{\varphi_k(y)} \varphi_k(x) dy \\
&= \int_G \left(\sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} \right) \psi(y) dy.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $\mathrm{Tr}K(x,y) = \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}$. Además, es inmediato que

$$\int_G \mathrm{Tr}K(x,x)dx = \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \int_G \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k,$$

y que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}T &= d_V \sum_{i,j} \int_G \int_G \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}\phi_{ij}^V(y)\overline{\phi_{ij}^V(x)}dxdy \\
&= d_V \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \sum_{i,j} \left(\int_G \varphi_k(x)\overline{\phi_{ij}^V(x)}dx\right) \overline{\left(\int_G \varphi_k(y)\overline{\phi_{ij}^V(y)}dy\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k \sum_{i,j} d_V^{\frac{1}{2}} \langle \varphi_k, \phi_{ij}^V \rangle \overline{d_V^{\frac{1}{2}} \langle \varphi_k, \phi_{ij}^V \rangle} \\
&= \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{k=1}^{d_V^2} \rho_k = \int_G \mathrm{Tr}K(x,x)dx,$$

con lo que queda demostrado el teorema. □

Ejemplo 6. Supongamos que u es la representación trivial en el subgrupo F de G. Entonces $\mathrm{Ind}(u)$ es la representación *quasi regular* en $X = F \setminus G$ (coclases izquierdas de F en G). En otras palabras, $\mathrm{Ind}(u)$ está definida por

$$\mathrm{Ind}(u)(hg) = \rho(g) \quad \forall\ g \in G, h \in F.$$

$\mathrm{Ind}(u)$ es constante sobre las coclases de F en G y en consecuencia puede pensarse como una 'representación' (en algún sentido) del conjunto X en $L^2(X)$.

Ejemplo 7. Un caso particular de lo anterior es cuando $F = \{e\}$ y entonces $\rho = \mathrm{Ind}_F^G(u)$.

Capítulo 5

Análisis Armónico en la Esfera.

Como aplicación del análisis armónico en grupos compactos, mostraremos en el presente capítulo que todo cuerpo del espacio que sea convexo, centrado y simétrico está determinado por las áreas de sus secciones con cada hiperplano.

5.1. Presentación del problema.

Comenzamos esta sección con algunas definiciones intuitivas.

Definición 5.1.1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que A es un *cuerpo* si es compacto y su interior es no vacío.

Definición 5.1.2. Dado un cuerpo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos el *baricentro* de A es el punto de $x_A \in \mathbb{R}^n$ cuya i-ésima coordenada es

$$(x_A)_i = \int_K x_i dx_1 \cdots dx_n.$$

Además, decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es *centrado* si $x_A = 0$.

Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo centrado del cual sólo conocemos las áreas de las secciones por cada hiperplano, es decir, tal que la función que a cada hiperplano P le asigna el número real área$(P \cap K)$, es conocida. ¿Será posible obtener K a partir de esta información? La respuesta es afirmativa en el caso de que K sea además convexo y simétrico. Para obtener este resultado, utilizaremos la teoría del análisis armónico desarrollada en los capítulos anteriores. Concretamente, el objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.1.3. *Un cuerpo convexo, centrado y simétrico en $\mathbb{R}^n$ está unívocamente determinado por las áreas de sus secciones con cada hiperplano.*

Asumiremos $n = 3$ para simplificar notaciones y cálculos, pero el resultado es válido en general.

Describiremos un cuerpo convexo, centrado y simétrico K, a través de una función

f_K definida en la esfera unitaria $S \subseteq \mathbb{R}^3$, de la siguiente manera. Si $x \in S$, sea l_x el rayo desde el origen de coordenadas que pasa por x. Ahora, sea

$$f_K(x) = \frac{1}{2} r_x^2 \tag{5.1.1}$$

donde r_x es la longitud del segmento $l_x \cap K$. Como K es centrado y simétrico, f_K es una función par en S. Además, es claro que es una función continua y estrictamente positiva. La utilidad de tal función se evidencia en el contenido del siguiente resultado.

Proposición 5.1.4. *Las áreas de todas las posibles secciones por planos de $\mathbb{R}^3$ se obtienen a partir de f_K. Concretamente, si P es un plano por el origen en $\mathbb{R}^3$, y $\mathcal{C} = S \cap P$ es el círculo máximo correspondiente, entonces*

$$\textit{área}(K \cap P) = \int_{\mathcal{C}} f_K(x)dx$$

Demostración. Utilizamos el cambio de coordenadas polares para deducir que

$$\text{área}(K \cap P) = \int_{K \cap P} 1dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2(\theta)}{2} d\theta = \int_{\mathcal{C}} \frac{r_x^2}{2} dx = \int_{\mathcal{C}} f_K(x)dx$$

□

En consecuencia, el problema resulta equivalente a demostrar que una función continua, par y positiva en la esfera está determinada por sus integrales en cada círculo máximo.

5.2. Adaptación del problema al análisis armónico.

Para resolver el problema presentado en la sección anterior, acudiremos a las herramientas de la teoría de representaciones de grupos compactos. Para ello, será necesario considerar un espacio de funciones en la esfera más grande que el anterior (el de las funciones continuas, pares y estrictamente positivas, que denotaremos por $K(S)$), teniendo la precaución de no tomar un espacio "demasiado" grande, en donde no toda función esté determinada por sus integrales sobre círculos máximos.

En línea con lo anterior, sean

$$L^2(S) = \{f : S \to \mathbb{R} : \int_S f^2 dA < \infty\}$$

y $L^2_+(S) \subseteq L^2(S)$ el subespacio de las funciones pares de cuadrado integrable. Es claro que

$$K(S) \subseteq L^2_+(S) \subseteq L^2(S).$$

Sea $SO(3)$ el grupo ortogonal especial, es decir, el conjunto de las isometrías lineales del espacio que preservan la orientación:

$$SO(3) = \{U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : U^T U = I, \det U = 1\}.$$

Identificamos este conjunto de forma natural con las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ que dejan fijo el origen, o también, con las rotaciones de la esfera. Puesto que estas rotaciones dejan fijos los espacios $L^2(S)$ y $L^2_+(S)$ (en S estamos considerando la medida dA, que es invariante por rotaciones), consideramos la representación regular izquierda

$$T : SO(3) \to L^2(S) \text{ definida por } T_U(f)(x) = f(U^{-1}x)$$

y la subrepresentación

$$T_+ : SO(3) \to L^2_+(S) \text{ siendo } T_+(U) = T(U)|_{L^2_+(S)}.$$

Definimos el siguiente operador:

$$J : L^2(S) \to L^2(S) \ \text{ donde } Jf(x) = \int_{\mathcal{C}_x} f(y)dy \tag{5.2.1}$$

donde $\mathcal{C}_x$ es el círculo máximo de epicentro en x. Por ejemplo, si $x = (0,0,1)$ (el polo norte), resulta $\mathcal{C}_x = \{(a,b,0) \in S : a^2 + b^2 = 1\}$ (el ecuador). Observemos que para todo x en S se cumple que $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_{-x}$, por lo que Jf es una función par de $L^2_+(S)$, para cada f en $L^2(S)$.

En rigor, el operador anterior queda definido por la ecuación 5.2.1 sólo en $C(S)$. Además, si $f \in C(S)$, se tiene que

$$\|Jf\|_2^2 = \int_S |\int_{C_x} f(y)dy|^2 dx \leq \int_S \int_{C_x} |f(y)|^2 dydx = 2\|f\|_2,$$

puesto que $C_x = C_{-x}$ para todo x en S.

Por otro lado, al ser este $C(S)$ denso en $L^2(S)$, el operador J definido en $C(S)$ admite una extensión continua a todo $L^2(S)$. Además, dicha extensión asume la misma formulación para casi todo x en S, para f en $L^2(S)$.

Nuestro problema consiste en ver que el operador J es inyectivo, es decir, probar que funciones distintas no tienen las mismas integrales sobre cada círculo máximo. Esto se deduce de la siguiente observación.

Observación 5.2.1. La correspondencia $K \mapsto f_K$ definida según la ecuación 5.1.1, es inyectiva.

Demostración. En primer lugar, observemos que un punto en un cuerpo queda determinado por su norma y el rayo desde el origen que lo contiene, esto es, por r_x y l_x, o lo que es equivalente, por $f_K(x)$ y x.

Sean K y K' cuerpos tales que $f_K = f_{K'}$. Sean p en K, y x en S tales que p está en el rayo por el origen desde x. Como $f_K(x) = f_{K'}(x)$, necesariamente p está en K' (el rayo es el mismo: el que pasa por x). En consecuencia, $K \subseteq K'$, lo cual implica $K = K'$. $\square$

En síntesis, hasta ahora tenemos que cada cuerpo K define una función continua f_K en S, y así tenemos una correspondencia fiel entre los cuerpos y un cierto subconjunto de $L^2(S)$.

Además, construimos un operador $J : L^2(S) \to L^2(S)$ de forma que $Jf_K(x)$ es el área de una cierta sección de K. Es así que el operador Jf_K posee toda la "información" de la cual partimos para resolver el problema: las áreas de todas las secciones de K por todos los posibles hiperplanos. Quisiéramos ver que este operador J también es inyectivo, y así, partiendo de Jf_K podríamos determinar el cuerpo K.

Notemos que en $L^2(S)$ hay funciones que no se corresponden con ningún cuerpo. En consecuencia, probar que el operador J es inyectivo en $L^2(S)$ es más de lo que necesitamos, y bastaría probar la inyectividad en algún subconjunto que contuviera a $K(S)$. Precisamente será eso lo que haremos, debido a que J no es inyectivo en $L^2(S)$: en efecto, si g es una función impar en S, entonces $\int_{\mathcal{C}_x} g(y)dy = 0$ para todo x en S, por lo que $Jg = 0$.

5.3. Resolución del problema.

Nuestro objetivo ahora será probar que J es inyectivo en $L^2_+(S)$.

Proposición 5.3.1. *J intercambia a las representaciones T, T_+.*

Demostración. Debemos probar que $JT = T_+J$, es decir, que para toda $U \in SO(3)$ se cumple $JT_U = (T_+)_U J$. Observar que la composición tiene sentido pues $ran(J) \subseteq L^2_+(S)$. Ahora, si $f \in L^2(S)$ y $x \in S$, se tiene que

$$(JT_U(f))(x) = \int_{\mathcal{C}_x} T_U f(y)dy = \int_{\mathcal{C}_x} f(U^{-1}y)dy.$$

Introduciendo el cambio de variable $z = U^{-1}y$ (cuyo jacobiano tiene determinante igual a 1, pues $U \in SO(3)$), y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} U^{-1}(\mathcal{C}_x) &= \{U^{-1}y : \|y\| = 1, \langle x, y\rangle = 0\} \\ &= \{U^{-1}y : y \in \mathbb{R}^n, \|U^{-1}y\| = 1, \langle U^{-1}x, U^{-1}y\rangle = 0\} \\ &= \mathcal{C}_{U^{-1}x} \end{aligned}$$

obtenemos que, para toda f, para toda U y para todo x, se tiene

$$(JT_U(f))(x) = \int_{\mathcal{C}_{U^{-1}x}} f(z)dz = Jf(U^{-1}x) = T_U(Jf)(x) = (T_+)_U(Jf)(x)$$

En consecuencia, $JT = T_+J$. □

Por el Teorema de Peter Weyl, sabemos que $L^2_+(S)$ se escribe como la suma directa de espacios de dimensión finita e irreducibles para T_+. Además, por el Lema de Schur, en cada uno de estos espacios, J es un operador escalar. A continuación, calcularemos explícitamente estos subespacios y encontraremos los valores propios de J en ellos. Finalmente, como serán todos no nulos, concluiremos que J es inyectivo.

Para el cálculo de dichos subespacios, será de utilidad considerar el espacio de los polinomios homogéneos en la esfera. Es así que para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto de los polinomios homogéneos en tres variables de grado n, restrictos a S, es decir,

$$\mathcal{P}_n = \{f : S \to \mathbb{R} : f = P|_S \text{ con } P \in \mathbb{R}[x, y, z] \text{ homogéneo de grado } n\}.$$

Proposición 5.3.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+2}$$

y además

$$\dim \mathcal{P}_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Demostración. Dada $f \in \mathcal{P}_n$, sea P_f^n algún polinomio homogéneo de grado n tal que $f = P_f^n|_S$. Consideremos ahora $Q \in \mathbb{R}[x, y, z]$ definido por

$$Q(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot P_f^n(x, y, z),$$

que es un polinomio homogéneo de grado $n + 2$. Además, como

$$(x^2 + y^2 + z^2)|_S = 1,$$

resulta que

$$Q|_S = P_f^n|_S = f,$$

y entonces $f \in \mathcal{P}_{n+2}$.

Por otro lado, veamos que el mapa que asigna a cada polinomio homogéneo en x, y, z de grado n, su restricción a S, es un isomorfismo lineal. La linealidad y la sobreyectividad son inmediatas, así que tomemos P tal que $P|_S = 0$. Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, entonces como P es homogéneo, $P(0, 0, 0) = 0$. Supongamos $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ y entonces se tiene

$$0 = f\left(\frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}\right) = P\left(\frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}\right) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^n} P(x, y, z).$$

Se deduce entonces que $P(x, y, z) = 0$ y como (x, y, z) es arbitrario, $P = 0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{P}_n &= \dim\{\text{polinomios homogéneos en } x, y, z \text{ de grado } n\} \\ &= \sharp\{\text{monomios en } x, y, z \text{ de grado } n\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} n - i + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Denotaremos por $\mathcal{H}_n$ al complemento ortogonal de $\mathcal{P}_{n-2}$ en $\mathcal{P}_n$ según el producto interno de $L^2(S)$. En particular,

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n \bigoplus \mathcal{P}_{n-2}.$$

Observación 5.3.3. $\dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{P}_n - \dim \mathcal{P}_{n-2} = 2n + 1$

El siguiente teorema es la clave para demostrar que J es inyectivo en $L^2_+(S)$.

Teorema 5.3.4. *Las descomposiciones de $L^2(S)$ y $L^2_+(S)$ en espacios irreducibles para $T : SO(3) \to \mathcal{B}(L^2(S))$ tienen las formas*

$$L^2(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \qquad y \qquad L^2_+(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_{2k}$$

siendo $H_1 := \mathcal{P}_1$.

Demostración. Por un lado, veamos que $\mathcal{H}_n$ es invariante para T, para todo $n = 0, 1, \ldots$. Dado $U \in SO(3)$, como el espacio de los polinomios homogéneos en x, y, z de grado n es invariante por U, si $f \in \mathcal{H}_n$, es

$$\begin{aligned} \langle T_U(f), g \rangle &= \langle f, T_U^*(g) \rangle \\ &= \langle f, T_{U^{-1}}(g) \rangle \\ &= 0 \quad \forall g \in \mathcal{P}_{n-2} \end{aligned}$$

pues $T_{U^{-1}}(g) \in \mathcal{P}_{n-2}$. En consecuencia, $T_U(f) \in \mathcal{H}_n$. Además, podemos descomponer cada espacio $\mathcal{P}_n$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{P}_{n-2} \\ &= \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{n-2} \oplus \mathcal{P}_{n-4} \\ &\vdots \\ &= \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{n-2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n \bmod 2} \end{aligned}$$

por lo que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \tag{5.3.1}$$

donde la igualdad (hasta ahora) es algebraica. Por el Teorema de Stone-Weirstrass, $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ es denso en $C(S)$ y en consecuencia, también lo es en $L^2(S)$. Por lo tanto, como $\bigoplus_2 \mathcal{H}_n$ es un espacio de Hilbert denso en $L^2(S)$, debe ser igual a este último. Observemos además que

$$\mathcal{H}_n \cap L^2_+(S) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \mathcal{H}_n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por otro lado, dada $f \in L^2_+(S)$, podemos escribir $f = \sum_n f_n$, donde $f_n \in \mathcal{H}_n$ y la serie convergen en $L^2(S)$. Si $\tilde{g} \in L^2(S)$, denotaremos por $\tilde{g}$ a la función de $L^2(S)$ definida por $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Así, como $f \in L^2_+(S)$, es

$$f = \tilde{f} = \frac{f + \tilde{f}}{2} = \sum_n \frac{f_n + \tilde{f}_n}{2}.$$

Además, puesto que son polinomios homogéneos, vale que $\tilde{f}_n = (-1)^n f_n$, por lo que si n es impar, $\tilde{f}_n + f_n = 0$ y si n es par, $\tilde{f}_n + f_n = 2f_n$. Obtenemos entonces que $f = \sum_k f_{2k}$

y concluimos que es $L^2_+(S) = \bigoplus_2 \mathcal{H}_{2k}$.

Resta ver que los espacios $\mathcal{H}_n$ son irreducibles. Esta afirmación es la de más difícil verificación, y nos tomará varios pasos demostrarla.

Afirmación: *$\mathcal{P}_n$ tiene $[\frac{n}{2}] + 1$ funciones linealmente independientes que son invariantes por el subgrupo de rotaciones sobre el eje z.*

Notemos que dicho subgrupo es isomorfo a S^1. Primero, veamos que si $f : S \to \mathbb{R}$ cumple lo anterior, entonces sólo depende de z (observar que $x^2 + y^2 = 1 - z^2$). En efecto, tomemos una tal f (que podemos tomar pues, por ejemplo, $f(x, y, z) = z^n$ es invariante por S^1), y supongamos que existen

$$z_0 \in (-1, 1), (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) / x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1 - z_0^2$$

y tales que $f(x_1, y_1, z_0) \neq f(x_2, y_2, z_0)$. Si θ es el ángulo entre $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, sea U_θ la rotación que deja fijo el eje z y rota un ángulo $-\theta$ el plano $z = 0$. Entonces es claro que f no es invariante por U_θ:

$$U_\theta(f)(x_1, y_1, z_0) = f(U_\theta^{-1}(x_1, y_1, z_0)) = f(x_2, y_2, z_0) \neq f(x_1, y_1, z_0).$$

Por otro lado, es inmediato que las funciones

$$\{z^n, z^{n-2}(x^2 + y^2), \ldots, z^{n-2[\frac{n}{2}]}(x^2 + y^2)^{[\frac{n}{2}]}\}$$

son linealmente independientes y que son invariantes por S^1. Queremos ver que si $f \in \mathcal{P}_n$ es invariante por S^1, entonces f es combinación lineal de estas funciones. Para ello, sea f en esas condiciones y consideremos un polinomio homogéneo P de grado n que verifique $P|_S = f$.

Sabemos que fijado z_0, $P(x, y, z_0)$ sólo depende de $(x^2 + y^2)$, pues sus curvas de nivel son circunferencias que corresponden a cada esfera cortada con $\{z = z_0\}$. Entonces $P(x, y, z) = f_z(x^2 + y^2)$ es un polinomio en y, z. Si suponemos $P(x, y, z) \neq z^n$, las variables x e y están en la fórmula que define a P, y puede restarse el monomio $P(0, 0, z) = az^n$ (buscamos funciones linealmente independientes de las anteriores).

Por lo tanto, $P(0, 0, z) = 0 \ \forall z$, y así $(x^2 + y^2) | f_z(x^2 + y^2)$.

En consecuencia, si P depende explícitamente de x, y, entonces tiene un factor de la forma $(x^2 + y^2)$. Iterando este procedimiento, se deduce que f es una combinación lineal de las funciones anteriores.

Afirmación: *$\mathcal{H}_n$ contiene exactamente una función (a menos de constantes multiplicativas) invariante por S^1.*

Lo demostraremos por inducción en n, para los pares y los impares. Si $n = 1$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1$ y hay $[\frac{1}{2}] + 1 = 1$ función invariante por S^1. Si $n = 2$, las funciones son z^2 y $x^2 + y^2$. Equivalentemente, las funciones son $x^2 + y^2 + z^2$ y $2z^2 - x^2 - y^2$. Por un lado, $x^2 + y^2 + z^2$

es un elemento de $\mathcal{H}_0$ por ser constante. Además, $2z^2 - x^2 - y^2$ es un elemento de $\mathcal{H}_2$ pues si $f \in \mathcal{P}_0$ es

$$f(x,y,z) = k \ \forall (x,y,z) \in S,$$

utilizando un cambio de variables cilíndricas, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_S k(2z^2 - x^2 - y^2)\ dxdydz &= k \int_S 2z^2 - (1 - z^2) dxdydz \\ &= k \int_S 3z^2 - 1 dxdydz \\ &= 2k\pi \int_{-1}^{1} 3z^2 - 1 dz \\ &= 2k\pi \cdot \left(z^3 - z\right)|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

Ya vimos que $\mathcal{P}_n = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{n-2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n \bmod 2}$ tiene exactamente $[\frac{n}{2}] + 1$ funciones linealmente independientes invariantes por S^1. Además, cada uno de los últimos $[\frac{n}{2}]$ sumandos tiene exactamente una función invariante, que corresponde a $\mathcal{P}_n$.

Si $\mathcal{V}_n$ es el espacio de las funciones de $\mathcal{P}_n$ invariantes por S^1, sabemos que

$$\dim \mathcal{V}_n = [\frac{n}{2}] + 1.$$

Además, podemos proyectar $\mathcal{V}_n$ sobre cada sumando directo de $\mathcal{P}_n$ (observar que la suma de estas proyecciones tendrá dimensión $[\frac{n}{2}]+1$), y la hipótesis inductiva asegura que la dimensión de la proyección sobre $\mathcal{H}_j$ es exactamente 1 si $j \neq n$. En consecuencia, la dimensión de la proyección sobre $\mathcal{H}_n$ también es 1, de donde se deduce la afirmación.

Afirmación: *Cada espacio $W \subseteq L^2(S)$ irreducible para T contiene al menos una función no nula invariante por rotaciones alrededor del eje z.*

Sean $T : SO(3) \to \mathcal{U}(L^2(S))$ la representación regular izquierda,

$$T_U(f)(x) = f(U^{-1}x),$$

y $W \subseteq L^2(S)$ invariante e irreducible por T, es decir que

$$T^W : SO(3) \to \mathcal{U}(W)$$

es una representación irreducible. Considero $T^W|_{S^1} : S^1 \to \mathcal{U}(W)$ su restricción a S^1. Por el Teorema de Peter-Weyl encontramos que

$$\begin{aligned} W &= l_1 W_1 \oplus \cdots \oplus l_k W_k \quad \text{con } W_i \text{ irreducible para } T^W|_{S^1} \\ T^W|_{S^1} &= l_1 T_1 \oplus \cdots \oplus l_k T_k \quad \text{con } T_i : S^1 \to \mathcal{U}(W_i) \text{ irreducible} \end{aligned}$$

Demostrar la afirmación es equivalente a ver que alguna T_i es la representación trivial de S^1 en W.

Consideramos los caracteres de la representación trivial, que denotaremos por **1**, y de las representaciones $T^W|_{S^1}$, T^W y de la representación inducida por $\mathbf{1}$ a $SO(3)$, que denotaremos por $Ind\uparrow_{S^1}^{SO(3)}$. Si $m_{T^W,Ind\uparrow_{S^1}^{SO(3)}}$ denota la multiplicidad de la representación irreducible T^W en $Ind\uparrow_{S^1}^{SO(3)}$, aplicamos la Reciprocidad de Frobenius (Teorema 4.3.7) para encontrar que

$$\langle \chi_{T^W|_{S^1}}, \mathbf{1}\rangle = m_{T^W,Ind\uparrow_{S^1}^{SO(3)}} \tag{5.3.2}$$

Por último, veamos que $Ind\uparrow_{S^1}^{SO(3)}$ es equivalente a T (y en consecuencia la multiplicidad anterior es mayor o igual a 1, demostrando la afirmación).

Sea

$$L^2(SO(3),\mathcal{H}_W) = \{f : SO(3) \to \mathcal{H}_W \text{ tal que } \int_{SO(3)} \|f(t)\|^2 < \infty\}.$$

Consideramos el subespacio $\mathcal{H}_{\mathbf{1}}$ de $L^2(SO(3),\mathcal{H}_W)$ definido por

$$\mathcal{H}_{\mathbf{1}} = \{f \in L^2(SO(3),\mathcal{H}_W) \text{ tal que } f(sx) = f(x)\ \forall\ s \in S^1, \forall\ x \in SO(3)\},$$

es decir, el conjunto de las funciones que son constantes sobre las coclases de $\frac{SO(3)}{S^1}$. Por otro lado, es claro que $\frac{SO(3)}{S^1} \simeq S$(la 2-esfera en $\mathbb{R}^3$), y por lo tanto

$$\mathcal{H}_{\mathbf{1}} \simeq L^2(S).$$

En consecuencia, si ρ es la representación regular derecha en $L^2(SO(3),\mathcal{H}_W)$, entonces la representación inducida de $\mathbf{1}$ a $SO(3)$ está dada por

$$Ind_{S^1}^{SO(3)}(g) = \rho(g)|_{L^2(S)} \cong T,$$

concluyendo la prueba de la afirmación anterior.

Finalmente, la irreducibilidad de $\mathcal{H}_n$ se deduce de las afirmaciones anteriores: de no ser irreducible, admitiría una descomposición en al menos dos espacios irreducibles (puesto que T es una representación unitaria), y tendría al menos dos funciones linealmente independientes invariantes por S^1, lo cual es absurdo. □

Por último, calcularemos los valores propios de J en los espacios $\mathcal{H}_n$. Para ello, daremos una forma explícita para la función $L_n \in \mathcal{H}_n$ invariante por las rotaciones del eje z.

Observación 5.3.5. Si $f : S \to \mathbb{R}$ depende sólo de la coordenada z, entonces se cumple

$$\int_S f(x,y,z)\ dxdydz = \pi \int_{-1}^{1} f(z)dz \tag{5.3.3}$$

Demostración. Introducimos un cambio de variables cilíndricas para obtener

$$\int_S f(x,y,z)\ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{-1}^{1} f(z)dz = \pi \int_{-1}^{1} f(z)dz$$

□

Proposición 5.3.6. *Puede tomarse L_n como el n-ésimo polinomio de Legendre, es decir:*

$$L_n(z) = \frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]. \tag{5.3.4}$$

Demostración. Recordemos que los polinomios de Legendre surgen de ortonormalizar con el procedimiento de Gram-Schmidt el conjunto $\{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$ con respecto al producto interno de $L^2([-1,1])$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial).

Podemos asumir que $\|L_n\|_2 = 1$, de modo que bastará con demostrar que L_n es ortogonal a z^k para todo $k < n$.

Si $k = n \bmod 2$, entonces $\langle L_n(z), z^k\rangle = 0$ pues L_n es ortogonal a $\mathcal{P}_j$ si $j < n$ y $j = n \bmod 2$.

Por otro lado, sabemos que L_n es combinación lineal de las funciones

$$\{z^{n-2j}(x^2+y^2)^j : j = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]\}.$$

En consecuencia, para demostrar que L_n es ortogonal a z^k para $k \neq n \bmod 2$, alcanzará con ver que cada $z^{n-2j}(x^2+y^2)^j$ lo es. En efecto, como

$$f_j(x,y,z) := z^{n-2j}(x^2+y^2)^j = z^{n-2j}(1-z^2)^j,$$

se tiene que

$$\langle f_j, z^k\rangle = \int_S z^{n-2j}(1-z^2)^j z^k \; dxdydz = \pi \int_{-1}^1 z^{n-2j}(1-z^2)^j z^k \; dz = 0$$

por ser $f_j(z).z^k$ una función impar en $[-1,1]$, lo cual concluye la demostración. □

Sea λ_n el valor propio del operador J en $\mathcal{H}_n$. Sustituyendo L_n por f en la fórmula que define a J: $Jf(x) = \int_{\mathcal{C}_x} f(y)dy$, y tomando como x el punto $(0,0,1)$, se obtiene

$$\lambda_n L_n(1) = 2\pi L_n(0).$$

Además, los valores de $L_n(0), L_n(1)$ son fáciles de hallar:

$$L_n(1) = \frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]|_{z=1} = n!(z+1)^n|_{z=1} = 2^n n!,$$

$$\begin{aligned} L_n(0) &= \frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]|_{z=0} \\ &= \frac{d^n}{dz^n}[\sum_{i=0}^n C_i^n(-1)^i z^{2i}]|_{z=0} \\ &= \sum_{i>[\frac{n}{2}]} C_i^n(-1)^i(2i)(2i-1)\dots(2i-n+1)z^{2i-n}|_{z=0} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ (-1)^k(2k)!C_k^{2k}, & \text{si } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Por último, el valor de λ_n se deduce de lo anterior para obtener

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 2\pi(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

En conclusión, hemos demostrado que J es un operador de núcleo trivial en $L^2_+(S)$ y por lo tanto es inyectivo. En consecuencia, queda demostrado el Teorema 5.3.4.

Bibliografía

[1] Conway, John B. *A Course in functional analysis.* Graduate Texts in Mathematics, segunda edición, Springer-Verlag, New York. 1990.

[2] Fell, J. M. G. y Doran, R. S. *Representations of* **-algebras, locally compact groups,and Banach* **-algebraic bundles. Vol. 1: Basic Representation Theory of Groups and Algebras.* Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Boston, MA. 1988.

[3] Fell, J. M. G. y Doran, R. S. *Representations of* **-algebras, locally compact groups,and Banach* **-algebraic bundles. Vol. 2: Banach* **-Algebraic Bundles, Induced Representations, and the Generalized Mackey Analysis.* Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Boston, MA. 1988.

[4] Folland, Gerald B. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York), segunda edición, John Wiley & Sons Inc., New York. 1999.

[5] Halmos, Paul R. *Measure Theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York. 1950.

[6] Hewitt, Edwin y Ross, Kenneth A. *Abstract harmonic analysis. Vol. 1: Structure of topological groups, integration theory, group representations.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], segunda edición, Springer-Verlag, Berlin. 1979.

[7] Hewitt, Edwin y Ross, Kenneth A. *Abstract harmonic analysis. Vol. 2: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], segunda edición, Springer-Verlag, Berlin. 1979.

[8] Joyal, André y Street, Ross. *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, como parte II de *Category Theory, Proceedings, Como 1990. Lectures Notes in Math,* 1488, páginas 411-492. Springer-Verlag, Berlin. 1991.

[9] Kelley, John L. *General topology.* Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York. 1975.

[10] Kirillov, Aleksandr A. *Elements of the theory of representations.* Springer-Verlag, Berlin. 1976.

[11] Kirillov, Aleksandr A. *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I*, Encyclopaedia Math. Sci., Springer, Berlin. 1969.

[12] Kye, Seung-Hyeok. *Notes on abstract harmonic analysis.* Lecture Notes Series, Seoul National University, Seoul. 1994.

[13] Lago, Juan P. *Análisis Armónico Conmutativo: Dualidad de Pontryagin.* Monografía de Licenciatura. Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. 2008.

[14] Pedersen, Gert K. *C^*-algebras and their automorphism groups.* London Mathematical Society Monographs, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London. 1979.

[15] Pontryagin, L. *Topological groups.* Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York. 1966.

[16] Rudin, Walter. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics, segunda edición, McGraw-Hill Inc., New York. 1991.

[17] Rudin, Walter. *Real and complex analysis.* Tercera edición, McGraw-Hill Book Co., New York. 1987.

[18] Weyl, Hermann. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations.* Princeton University Press, segunda edición, Princeton, N. J. 1946.