TRABAJO MONOGRÁFICO

El proceso de contacto

Nicolás Frevenza Orientador: Gustavo Guerberoff

6 de junio de 2011 Montevideo Uruguay Licenciatura en Matemática Facultad de Ciencias Universidad de la República

Resumen

Este trabajo es una introducción al estudio del proceso de contacto. En la primera parte se define el proceso de contacto a través del método de la representación gráfica brindado por Harris en 1978 y se estudian las primeras consecuencias de esa construcción. Posteriormente se estudia el proceso de contacto en \mathbb{L}^d a través su comparación con un proceso de percolación orientada por sitios, estableciendo la existencia de una única transición de fase en este grafo y analizando el comportamiento cuando el parámetro del proceso es igual al valor crítico. A su vez se presentan algunos resultados sobre el comportamiento en la fase crítica y super-crítica. En la última parte de la monografía se muestra que en el caso del árbol regular de grado d + 1, \mathbb{T}_d , existen dos comportamientos bien disímiles en la fase super-crítica; en uno de ellos cada sitio es re infectado en tiempos arbitrariamente grandes y en el otro no.

Agradecimientos

A mis padres, abuelos y hermanos, que nunca cuestionaron las elecciones que realicé en mi vida universitaria; así fue con el cambio de carrera, con la dedicación a la militancia estudiantil y con los tiempos que me dí para hacer las cosas. Soportaron todo ello sin pedir justificaciones, no es poco, y eso es lo más agradezco.

Luciana merece un destaque particular; entiende y aún tolera bastante mis fanatismos.

Al Pájaro, porque creo que más para bien que para mal, me dio libertad para hacer este trabajo y acoplarlo con mis prioridades que no siempre resultan fáciles de entender, al menos desde los lugares comunes.

Quiero también agradecer a Ernesto por su dedicación cada vez que acudí en su ayuda con dudas de cualquier índole, y sobre todo por sus vanos intentos de apurarme, tarea casi imposible que emprendió con ahínco en el último tiempo. Y por supuesto a Nacho de Pando, Damián y Bruno, que de diferentes maneras se encomendaron a la misma tarea.

A la barra reformista. Sigo convencido de que estamos yendo por algo nuevo, y que de a poco, se viene haciendo su lugar. En especial a los compañeros con los que me tocó asumir responsabilidades dentro del proceso en diferentes momentos y lugares, aunque ello implicara renunciar. Me queda la inmensa felicidad de haber sido parte de esta barra, y por supuesto, de continuar siéndoLO.

Cuando en aquel Octubre de 2008 el trabajo colectivo era mezquina y dogmáticamente depreciado, un amigo compartió conmigo una frase del libro más hermoso que había leído en su vida:

Así es verdad - replicó Don Quijote -; por lo cual los no de principios nobles deben acompañar la gravedad del cargo que ejercitan con una blanda suavidad que, guiada por la prudencia, los libre de la murmuración maliciosa, de quien no hay estado que se escape.

El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha (XLII)

Sin dudas fue removedor y me fortaleció; por eso lo comparto.

A Lea, Manuel, Miji y Vicky, que son, en los aciertos y los errores, los hermanos que me dio la militancia para toda la vida.

"No tengan piedad de mí: la memoria, si veraz y violenta, es una materia exquisita". Eso escribió Osvaldo Soriano en su último cuento publicado; yo lo leí en *Piratas, fantasmas y dinosaurios*; me impresionó por su sinceridad. Creo que desde allí supe que estaría en mi monografía. Y por si acaso, creo que el comandante Quomo, con su especial vínculo con el azar, manifestaría su acuerdo.

Índice general

1.	Pre	liminares	5
	1.1.	Definiciones básicas de grafos	5
	1.2.	Tres propiedades de la distribución exponencial	6
	1.3.	El proceso de Poisson	6
	1.4.	Resultados de procesos de percolación	9
	1.5.	Un teorema de dominación de medidas	11
2.	Con	strucción del proceso de contacto	15
	2.1.	Introducción e historia	15
	2.2.	La construcción del proceso	16
	2.3.	Primeras propiedades del proceso de contacto	19
		2.3.1. Aditividad, monotonía y continuidad en λ	19
		2.3.2. Tasa de crecimiento en \mathbb{L}^d	23
		2.3.3. La medida invariante superior	27
		2.3.4. Dualidad	30
		2.3.5. Convergencia completa	32
	2.4.	La formulación del problema	34
	2.5.	Una desigualdad FKG	37
3.	El p	$ {\rm proceso} {\rm de} {\rm contacto} {\rm en} \mathbb{L}^d \qquad \qquad$	42
	0.1		
	3.1.	La transición de fase	42
	3.1.	La transición de fase	42 48
	3.1.3.2.	La transición de fase	42 48 49
	3.1. 3.2.	La transición de fase	42 48 49 60
	3.1.3.2.3.3.	La transición de fase	42 48 49 60 68
	3.1.3.2.3.3.	La transición de fase 3.1.1. Simulaciones Una condición para la sobrevivencia 3.2.1. Acoplamiento con los procesos de percolación Resultados para la fase supercrítica 3.3.1. El teorema de convergencia completa	42 48 49 60 68 69
	3.1.3.2.3.3.	La transición de fase 3.1.1. Simulaciones	42 48 49 60 68 69 72
	 3.1. 3.2. 3.3. 	La transición de fase 3.1.1. Simulaciones 3.1.1. Simulaciones	42 48 49 60 68 69 72 74
	3.1.3.2.3.3.3.4.	La transición de fase 3.1.1. Simulaciones	42 48 49 60 68 69 72 74 76
4.	 3.1. 3.2. 3.3. 3.4. El p 	La transición de fase \dots	 42 48 49 60 68 69 72 74 76 78
4. 5.	 3.1. 3.2. 3.3. 3.4. El p Apé 	La transicion de fase \dots	 42 48 49 60 68 69 72 74 76 78 82
4. 5.	 3.1. 3.2. 3.3. 3.4. El p Apé 5.1. 	La transicion de fase \dots	 42 48 49 60 68 69 72 74 76 78 82 82
4. 5.	 3.1. 3.2. 3.3. 3.4. El p Apé 5.1. 5.2. 	La transicion de fase \dots	 42 48 49 60 68 69 72 74 76 78 82 82 82 82
4. 5.	 3.1. 3.2. 3.3. 3.4. El p Apé 5.1. 5.2. 5.3. 	La transicion de fase \dots	 42 48 49 60 68 69 72 74 76 78 82 82 82 82 85

Capítulo 1 Preliminares

En este capítulo se introducen definiciones básicas y resultados generales que se requieren para trabajar con el proceso de contacto. Algunos de estos resultados se suelen tratar en cursos de probabilidad básicos (o más avanzados como Introducción a los procesos estocásticos), por lo que solamente serán enunciados sin demostración.

1.1. Definiciones básicas de grafos

Definiciones 1.1.1. Dados un conjunto de vértices V y uno de aristas $E \subset V \times V$, se dice que G = (V, E) es un grafo no dirigido cuando $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$ para todo $x, y \in V$. Si $(x, y) \in E$ diremos que $x \in y$ son vecinos o adyacentes, y escribimos $x \sim y$.

Se dice que $x e y \in V$ están *conectados* si existe un camino e_1, \ldots, e_n tal que $e_j = (x_{j-1}, x_j) \in E$, con $x_0 = x$ y $x_n = y$. Diremos que la *longitud del camino* es el número de aristas que lo forman; n en el caso anterior. Un grafo contiene un *ciclo* cuando existe un vértice x y un camino de longitud positiva que conecta a x consigo mismo.

Un grafo es *conexo* cuando para todo par de vértices x, y existe un camino que los conecta. Cuando un grafo es conexo se induce una distancia $\delta : V \times V \mapsto \mathbb{N}$ definida como sigue:

$$\delta(x,y) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \colon \exists e_1, \ldots, e_n \in E \text{ tales que } e_j = (x_{j-1}, x_j) \text{ con } x_0 = x, x_n = y\right\}.$$

El grado de un vértice x es la cantidad de aristas que lo tienen como extremo. Se dice que un grafo G tiene grado acotado cuando existe $\kappa > 0$ tal que para todo $x \in V$ el grado de x se encuentra acotado por κ . Un grafo es regular cuando todos sus vértices tienen igual grado.

Un grafo G = (V, E) es un *árbol* si es conexo y no contiene ciclos; si además G es regular se dice que es un árbol regular. \mathbb{T}_d denota al árbol regular de grado d + 1.

Salvo que se indique lo contrario se trabajará siempre con grafos conexos y de grado acotado (por κ), ello implica que V será a lo sumo numerable.

Ejemplo. Llamaremos retículo cúbico *d*-dimensional al grafo $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E)$, donde el conjunto de aristas $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : ||x - y||_1 = 1\}$, siendo $||z||_1 = |z_1| + \ldots + |z_d|$. \mathbb{L}^d es un grafo regular. En la monografía nos referiremos esencialmente al proceso de contacto sobre este grafo. En general, cuando no exista posibilidad de confusión, abusaremos de la

notación escribiendo \mathbb{Z}^d en vez de \mathbb{L}^d al referirnos a este último; al momento de trabajar con otros grafos que tengan a \mathbb{Z}^d o un subconjunto de éste como vértices seremos precisos en la notación.

1.2. Tres propiedades de la distribución exponencial

Una variable aleatoria X posee distribución exponencial de parámetro λ , y se escribe $X \sim \exp(\lambda)$, cuando tiene como densidad a la función: $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \ge 0\}}$. Enunciamos tres resultados bien conocidos de las variables exponenciales a los que recurriremos frecuentemente, y cuyas pruebas se encuentran en cualquier libro básico de probabilidad, como por ejemplo [PM08].

Proposición 1.2.1. Si $X \sim \exp(\alpha) e Y \sim \exp(\beta)$ son independientes, entonces

• Propiedad de pérdida de memoria:

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \text{ para todo } s, t \ge 0.$$

- $Z = \min\{X, Y\}$ tiene distribución exponencial de parámetro $\alpha + \beta$.
- X Y tiene densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha x} & x > 0\\ \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} e^{\beta x} & x \le 0 \end{cases}$$

En particular $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$

1.3. El proceso de Poisson

Los procesos de Poisson juegan un rol muy importante en la construcción y el estudio del proceso de contacto. A continuación se definen los procesos de conteo para luego definir el proceso de Poisson y enunciar caracterizaciones del mismo, así como otras propiedades útiles.

Sea $(\Omega, \mathcal{N}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una función $X : [0, \infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es un proceso aleatorio en tiempo continuo si $X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definida por $X_t(\omega) = X(t, \omega)$, es una variable aleatoria. Siendo así, notamos al proceso $(X_t : t \ge 0)$. De ahora en más se asumirá que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ y se dice que el proceso parte del origen.

Diremos que el proceso $(X_t: t \ge 0)$ tiene *incrementos independientes*, cuando dados cualesquiera $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in [0, +\infty)$ tales que $s_1 < t_1 \le s_2 < \ldots \le s_n < t_n$ se cumpla que:

$$X_{t_1} - X_{s_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{s_n},$$

son variables aleatorias independientes.

De la misma manera se dice que el proceso aleatorio tiene *incrementos estacionarios* (u homogéneos), cuando $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \leq x)$ no depende de t para todo h positivo y x real. En este caso, como el proceso parte del origen, $X_{t+h} - X_t$ y X_h tienen la misma distribución.

Definición 1.3.1. Sea $(T_n: n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias estrictamente positivas. Definimos $S_0 = 0$, y $S_k = T_1 + \ldots + T_k$ para k positivo.

El proceso de conteo $(N_t: t \ge 0)$ asociado a la sucesión $(T_n: n \ge 1)$ es:

$$N_t(\omega) = \sup\{k \in \mathbb{N} \colon S_k(\omega) \le t\}.$$

Diremos que $S_0, S_1, \ldots, S_k, \ldots$, son los tiempos de salto del proceso de conteo. Observar que $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$.

Definición 1.3.2. Un proceso de Poisson de parámetro λ es un proceso de conteo donde $(T_n: n \ge 1)$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ .

Comencemos estudiando el proceso de Poisson a través de una proposición y dos teoremas que lo caracterizan.

Proposición 1.3.3. Consideremos $(N_t: t \ge 0)$ un proceso de Poisson de parámetro λ . Entonces se cumple que:

1. Para cada $n \ge 1$, la variable aleatoria $S_n = T_1 + \ldots + T_n$ tiene densidad dada por

$$q(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0 \ y \ q(x) = 0 \ \text{si } x \le 0.$$

2. Para cada t > 0, la variable aleatoria N_t tiene distribución de Poisson de parámetro λt , esto es

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad para \ todo \ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.3.4. Un proceso de conteo $(N_t: t \ge 0)$ es un proceso de Poisson de parámetro λ cuando se verifican las siguientes dos condiciones:

1. Dados tiempos $t_0 = 0 \le t_1 < \ldots < t_k \ y \ n_1, \ldots, n_k$ naturales arbitrarios, se cumple

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j).$$

2. Dados t, h positivos cualesquiera,

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = n) = \mathbb{P}(N_h = n) = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \quad para \ todo \ n \in \mathbb{N}$$

La primera condición nos dice que los incrementos son independientes, y la segunda que son estacionarios con distribución de Poisson de parámetro λh .

Teorema 1.3.5. Consideremos un proceso de conteo $(N_t: t \ge 0)$. Entonces es un proceso de Poisson si y sólo si tiene la propiedad de incrementos independientes y estacionarios, y verifica que:

$$\mathbb{P}(N_t \ge 2) = o(t) \quad cuando \ t \to 0.$$

Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en el décimo capítulo de [PM08].

Observación 1.3.6. Utilizando las caracterizaciones anteriores no es díficil probar que la suma de dos procesos de Poisson independientes entre sí, de parámetros λ y μ respectivamente, es un nuevo proceso de Poisson de parámetro $\lambda + \mu$.

Observación 1.3.7. También es sencillo observar que la probabilidad de que dos procesos de Poisson independientes entre sí salten en un mismo tiempo es nula; por lo que cuando trabajamos con procesos de Poisson independientes supondremos que los saltos de ambos ocurren en instantes diferentes.

Una idea que será muy útil repetidas veces es la de acoplar dos procesos de Poisson de diferente parámetro, es decir, brindar una construcción de ambos en el mismo espacio de probabilidad.

A partir de un proceso de Poisson de parámetro λ se puede construir otro proceso de Poisson de parámetro $\mu < \lambda$ eligiendo algunos de los tiempos de salto del primero. Probaremos la siguiente afirmación: sea N_t es un proceso de Poisson de parámetro λ , y $(S_n : n \ge 1)$ sus tiempos de salto, considere $(X_n : n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con distribución Bernoulli de parámetro p, independientes de N_t ; se define un nuevo proceso de conteo M_t , eligiendo los tiempos de salto de acuerdo a las variables Bernoulli, esto es, S_n será tiempo de salto de M_t solamente si $X_n = 1$. El proceso de conteo M_t resulta ser un proceso de Poisson de parámetro λp .

Para probar la afirmación utilizaremos la caracterización del teorema (1.3.5). Comencemos probando que $\mathbb{P}(M_t \ge 2) = o(t)$ cuando $t \to 0$. En efecto, se tiene que:

$$\mathbb{P}(M_t \ge 2) \le \mathbb{P}(N_t \ge 2) = o(t)$$

cuando $t \to 0$ porque N_t es un proceso de Poisson.

Sean $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ y n_1, \ldots, n_k naturales arbitrarios. Queremos probar que M_t tiene incrementos independientes, para ello calculamos $\mathbb{P}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}} = n_k, \ldots, M_{t_1} = n_1)$:

$$= \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k + l_k, Bin(n_k + l_k, p) = n_k, \dots,$$
$$\dots, N_{t_1} = n_1 + l_1, Bin(n_1 + l_1, p) = n_1)$$
$$= \mathbb{P}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}} = n_k) \dots \mathbb{P}(M_{t_1} = n_1),$$

donde Bin(n, p) son binomiales de parámetros $n \ge p$, independientes de N_t , e independientes entre sí, pues cuentan la cantidad de saltos que no se suprimen en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$, y todos estos son disjuntos. Aplicando la independencia y luego sumando en cada índice se deduce la igualdad, lo que prueba que las variables aleatorias $M_{t_k} - M_{t_{k-1}}, \ldots, M_{t_1}$ son independientes, y por tanto M_t tiene incrementos independientes.

Para mostrar que los incrementos son estacionarios calculamos:

$$\mathbb{P}(M_{t+h} - M_t = k) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = k+l, Bin(k+l, p) = k)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_h = k+l) \mathbb{P}(Bin(k+l, p) = k)$$
$$= \mathbb{P}(M_h = k).$$

Por tanto, $(M_t: t \ge 0)$ es un proceso de Poisson de parámetro λp .

Observación 1.3.8. Si $(N_t: t \ge 0)$ es un proceso de Poisson y s > 0 es un tiempo fijo, se prueba que $(N_{t+s} - N_s: t \ge 0)$ es también un proceso de Poisson que cuenta a partir del tiempo s.

1.4. Resultados de procesos de percolación

Varios de los resultados que se presentan en la monografía dependen en buena medida de realizar comparaciones (o mejor dicho, acoplamientos) entre cierta clase de procesos de percolación y el proceso de contacto. Es por ello que en esta sección enunciamos los resultados de procesos de percolación que se utilizarán, y se incluyen las referencias básicas donde se encuentran las pruebas de los mismos. Se pueden definir procesos de percolación en cualquier grafo conexo pero nos concentraremos en \mathbb{L}^d y $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$ (este último se definirá más adelante), que son en definitiva los grafos con los que trabajaremos.

Los procesos de percolación han sido largamente estudiados desde que en 1957 Broadbent y Hammersley introdujeron el proceso de percolación independiente en \mathbb{L}^d . En particular hay una importante literatura sobre la temática a la que recurrimos para interiorizarnos en el tema; esto incluye [Gr99], [Du88], [Gr10]. Existe también una monografía de Licenciatura en Matemática ([Fr05]) que aborda el tema.

El proceso de percolación estándar sobre el que refiere la mayoría de la bibliografía existente (incluída la mencionada en el párrafo anterior) es el denominado *bond percolation* o percolación por aristas, que fue el modelo inicialmente introducido. Pocos años más tarde se introdujo otra clase de procesos de percolación llamados *site percolation* o percolación por sitios, donde en vez de declarar abiertas o cerradas las aristas del grafo se declara a los vértices abiertos o cerrados. Su definición es un poco menos intuitiva que en el caso *bond* pero es más general, en el sentido de que todo proceso de percolación independiente del tipo *bond* puede verse como un proceso de percolación por sitios.

Tal vez la pregunta inicial cuando se analizan estas dos clases de procesos de percolación independientes es si existe alguna relación entre sus parámetros críticos. Hay varios resultados en esa dirección para grafos conexos de grado acotado y grafos transitivos. Es por ello que la mayoría de la literatura se concentra en el caso *bond*, porque además de la cuestión histórica, existen comparaciones con el modelo *site* que permiten sacar conclusiones sobre éste a partir del caso *bond*. En [GS98] se prueba que si $d \ge 2$,

$$p_{cb}(\mathbb{L}^d) < p_{cs}(\mathbb{L}^d) \,,$$

donde p_{cb} indica el parámetro crítico del proceso en su modelo *bond* y p_{cs} en su modelo *site* en el retículo \mathbb{L}^d . En el mismo artículo se prueba también que si el grafo es conexo y su grado está acotado por Δ entonces:

$$p_{cs} \le 1 - (1 - p_{cb})^{\Delta - 1}$$

Estos apuntes esquemáticos serán suficiente para lo que nos interesa de los modelos de percolación habituales.

A nosotros nos interesará otra clase de procesos de percolación que son los procesos de percolación orientada por sitios (cabe destacar que también puede hablarse de percolación orientada en el caso *bond*), donde los caminos solo pueden ir en ciertas "direcciones". Las principales referencias sobre percolación orientada se encuentran también para el modelo *bond* y se encuentran en [Du84] y [Du88], así como en los libros de Grimmett [Gr99] y [Gr10].

Interesa el caso del grafo $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$ donde el conjunto de vértices es $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m+n \text{ es par}\}$ y los vértices vecinos de un sitio (m, n) son (m+1, n+1) y (m-1, n+1).



Figura 1.1: Representación de una parte de $\overline{\mathbb{L}}^2$.

En este caso el parámetro crítico cumple:

$$\frac{1}{2} \le p_{cs}(\overrightarrow{\mathbb{L}}^2) \le \frac{3}{4};$$

una demostración puede verse en [PF05].

Precisaremos también una visión menos tradicional del proceso de percolación orientada por sitios pero equivalente a la estándar. Para esta visión se sigue el breve resumen sobre percolación orientada del capítulo 0 (Background and Tools) del libro [Li99]. El proceso de percolación orientada por sitios B_n , en el subgrafo de $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$ donde la suma de las coordenadas es no negativa, se puede describir así: B_n es una cadena de Markov discreta sobre la colección de conjuntos finitos de \mathbb{Z} con la siguiente evolución: condicionado el proceso hasta tiempo n se tiene que los eventos { $x \in B_{n+1}$ } son independientes y sus probabilidades vienen dadas por:

$$\mathbb{P}(x \in B_{n+1} \mid B_0, \dots, B_n) = \begin{cases} p & \text{si } B_n \cap \{x - 1, x\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } B_n \cap \{x - 1, x\} = \emptyset. \end{cases}$$

Si bien no es inmediato que esta descripción del proceso de percolación por sitios coincide con la formulación habitual en el subgrafo de $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$, esta segunda forma hará más sencilla la comparación con el proceso de contacto.

El siguiente resultado sintetiza los hechos más importantes que utilizaremos del proceso de percolación por sitios B_k . Su prueba (que no incluimos aquí) resulta de adaptar los resultados del modelo *bond* demostrados en [Du84] con las sugerencias del libro de [Li99].

Teorema 1.4.1. Si p está suficientemente cerca de 1, existen constantes $C \ y \ \epsilon > 0$ tales que:

$$\inf_{n} \mathbb{P}^{\{0\}}(n \in B_{2n}) > 0, \qquad (1.1)$$

$$\mathbb{P}^{\{0\}}(n < \tau < \infty) \le Ce^{-\epsilon n}, \quad y \tag{1.2}$$

$$\mathbb{P}^A(\tau < \infty) \le C e^{-\epsilon |A|}, \tag{1.3}$$

donde $\tau = \inf\{n \ge 1 : B_n = \emptyset\}$ y \mathbb{P}^A indica la probabilidad respecto de la condición inicial $B_0 = A$.

1.5. Un teorema de dominación de medidas

Muchas veces no pueden utilizarse resultados de procesos de percolación (tanto en el modelo *bond* como por sitios) para comparar con sistemas de partículas por fallas vinculadas a la independencia que requiere la construcción de los modelos de percolación. Por ello se torna útil contar con un teorema que permita, como veremos más adelante, solucionar la falta de independencia. El siguiente resultado es un caso particular de un teorema más general probado por Liggett, Schonmann y Stacey en 1997 en el artículo [LSS97].

Consideremos $\|\cdot\|$ la norma del máximo en \mathbb{R}^d . Diremos que una colección de variables aleatorias $\{X_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ es *m*-dependiente cuando dados dos subconjuntos cualesquiera $A \neq B$ de \mathbb{Z}^d que distan entre sí más de *m*, es decir que $\|x - y\| > m$ para todo $x \in A$, $y \in B$, se tiene que las colecciones $\{X_x : x \in A\} \neq \{X_x : x \in B\}$ son independientes.

Sea $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. En Σ existe un orden parcial natural dado por: $\omega \leq \omega'$ si $\omega(x) \leq \omega'(x)$ para todo x en \mathbb{Z}^d . Se dice que una función real definida en Σ es creciente cuando respeta este orden parcial. Se dirá también que $\mu_1 \leq \mu_2$ cuando para toda función $f : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ creciente y continua (Σ con la topología producto y $C(\Sigma)$ con la norma infinito) se cumpla que:

$$\mu_1(f) = \int_{\Sigma} f \, d\mu_1 \le \int_{\Sigma} f \, d\mu_2 = \mu_2(f) \, .$$

Denotaremos con ν_p la medida Bernoulli producto en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ con parámetro p, es decir, ν_p definida en los cilindros vale:

$$\nu_p(\{\eta : \eta(x) = 1 \ \forall x \in G, \eta(x) = 0 \ \forall x \in H\}) = p^{\#G}(1-p)^{\#H}$$

donde G y H son subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d .

Teorema 1.5.1. Fijemos k > 0 y sea $\Delta = \# \{ y \in \mathbb{Z}^d : ||y|| \le k \}$. Entonces cuando $\{X_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ es una familia de variables aleatorias con distribución de Bernoulli que satisface:

$$\mathbb{P}(X_x = 1 \mid X_y, \|x - y\| > k) \ge 1 - (1 - \sqrt{p})^{\Delta}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, con $p \geq \frac{1}{4}$, se tiene que la distribución μ de la familia cumple $\mu \geq \nu_p$.

En el caso de que la colección de variables aleatorias $\{X_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ sea m-dependiente la condición sobre las probabilidades del teorema (1.5.1) se reduce a

$$\mathbb{P}(X_x = 1) \ge 1 - (1 - \sqrt{p})^{\Delta},$$

tomando k = m.

Demostración. Sea $\{x_n : n \ge 0\}$ una numeración de \mathbb{Z}^d . Escribiremos $X_{x_n} = X_n$.

Asumimos que todas las probabilidades de la forma $\mathbb{P}(X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n)$ son estrictamente positivas. Veamos que si vale

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_0 = \epsilon_0; \dots; X_n = \epsilon_n) \ge p \tag{1.4}$$

para todo n y toda elección de $\epsilon_j \in \{0, 1\}$ para $0 \le j \le n$, entonces es posible brindar un acoplamiento de forma que $\mu \ge \nu_p$. Construiremos el acoplamiento recursivamente.

Si las variables aleatorias $X \in Y$ tienen la misma distribución se escribirá $X \sim Y$. Sea $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$, una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo [0, 1], e independientes de $(X_n : n \ge 0)$. Es bien conocido que si $q \in [0, 1]$ entonces $\mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_i \in [0,q)\}}$ es una variable Bernoulli de parámetro q, y la sucesión $(\mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_i \in [0,q)\}} : i \ge 0)$ es una sucesión de variables aleatorias independientes.

Observar que si vale (1.4) para cualquier $\epsilon = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$ y $n \ge 0$ entonces se tiene que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^{n+1}} \mathbb{P}(X_{n+1} | X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n) \mathbb{P}(X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n) \\
\geq \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^{n+1}} p \mathbb{P}(X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n) = p.$$

Comencemos la construcción. Para X_0 se tiene $p' = \mathbb{P}(X_0 = 1) \ge p$, por lo que es sencillo dar una construcción acoplada usando que X_0 tiene distribución $\mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_0 \in [0,p')\}}$ y $\mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_0 \in [0,p')\}} \ge \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_0 \in [0,p)\}}$, por tanto se define $Y_0 = \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_0 \in [0,p)\}}$.

Ahora construyamos Y_1 . Sean $p_{01} = \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0)$ y $p_{11} = \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 1)$. Por (1.4) sabemos que $p_{01}, p_{11} \ge p$. Tomamos $X_1 \sim \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_1 \in [0, p_{01})\}}$ si $X_0 = 0$ y $X_1 \sim \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_1 \in [0, p_{11})\}}$ si $X_0 = 1$, o resumidamente:

$$X_1 \sim \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_1 \in [0, p_{01})\}} \mathbf{1}_{\{X_0 = 0\}} + \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_1 \in [0, p_{11})\}} \mathbf{1}_{\{X_0 = 1\}},$$

entonces definimos $Y_1 = \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_1 \in [0,p)\}}$. De esa manera $X_1 \in Y_1$ están acopladas de forma que $Y_1 \leq X_1$. En general, y con el permiso de un breve abuso de la notación, se tiene por (1.4) que para cualquier $\epsilon = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$ vale:

$$p_{\epsilon 1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n) \ge p,$$

por lo que se puede definir $Y_{n+1} = \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_{n+1}\in[0,p)\}}$ siendo que $X_{n+1} \sim \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_{n+1}\in[0,p_{\epsilon_1})\}}$ cuando ocurre $\{X_0 = \epsilon_0, \ldots, X_n = \epsilon_n\}$; o equivalentemente,

$$X_{n+1} \sim \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^{n+1}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{U}_{n+1} \in [0, p_{\epsilon_1})\}} \, \mathbf{1}_{\{X_0 = \epsilon_0, \dots, X_n = \epsilon_n\}}$$

y por tanto $X_{n+1} \in Y_{n+1}$ quedan acopladas de forma que $X_{n+1} \ge Y_{n+1}$. En definitiva, para demostrar el teorema alcanza con probar la desigualdad (1.4), y eso es lo que se hace a continuación.

Asumamos que para algún s positivo, vale para todo x la desigualdad:

$$\mathbb{P}(X_x = 1 \mid X_y, \, \|x - y\| > k) \ge s \,. \tag{1.5}$$

Sea $(Y_n: n \ge 0)$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli de parámetro r e independiente de $(X_n: n \ge 0)$. Definamos $Z_n = X_n Y_n$. Intentaremos probar que $(Z_n: n \ge 0)$ satisface una desigualdad similar a (1.4) y como $Z_n \le X_n$ será suficiente porque dominaremos por debajo a las Z_n con una medida producto de Bernoulli. Ahora bien:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=1 \mid Z_0=\epsilon_0,\ldots,Z_n=\epsilon_n)=r \mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid Z_0=\epsilon_0,\ldots,Z_n=\epsilon_n), \quad (1.6)$$

dado que Y_{n+1} es independiente de las variables aleatorias $X_0, \ldots, X_{n+1}, Y_0, \ldots, Y_n$. Fijemos n y definamos:

$$N_0 = \{i : 0 \le i \le n, ||x_i - x_{n+1}|| \le k, \epsilon_i = 0\}$$

$$N_1 = \{i : 0 \le i \le n, ||x_i - x_{n+1}|| \le k, \epsilon_i = 1\}$$

$$M = \{i : 0 \le i \le n, ||x_i - x_{n+1}|| > k\}.$$

Ahora realizamos la siguiente estimación:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid Z_0 = \epsilon_0, \dots, Z_n = \epsilon_n) \\
= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0; Z_i = 0, i \in N_0; Z_i = 1, i \in N_1; Z_i = \epsilon_i, i \in M)}{\mathbb{P}(Z_i = 0, i \in N_0; Z_i = 1, i \in N_1; Z_i = \epsilon_i, i \in M)} \\
= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0; Z_i = 0, i \in N_0; X_i = 1, i \in N_1; Z_i = \epsilon_i, i \in M)}{\mathbb{P}(Z_i = 0, i \in N_0; X_i = 1, i \in N_1; Z_i = \epsilon_i, i \in M)} \\
\leq \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0; Z_i = \epsilon_i, i \in M)}{\mathbb{P}(Y_i = 0, i \in N_0; X_i = 1, i \in N_1; Z_i = \epsilon_i, i \in M)} \\
= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid Z_i = \epsilon_i, i \in M)}{\mathbb{P}(Y_i = 0, i \in N_0; X_i = 1, i \in N_1 \mid Z_i = \epsilon_i, i \in M)} \\
\leq \frac{1 - s}{(1 - r)^{|N_0|} \mathbb{P}(X_i = 1, i \in N_1 \mid Z_i = \epsilon_i, i \in M)},$$
(1.7)

donde en la primera igualdad utilizamos la definición de probabilidad condicional, N_0 , N_1 y M, para lo que precisamos que $\mathbb{P}(Z_0 = \epsilon_0, \ldots, Z_n = \epsilon_n) > 0$; en la segunda igualdad usamos la independencia de las variables Y_i ; en la primera desigualdad utilizamos la monotonía de la probabilidad y que $Y_i = 0$ implica que $Z_i = 0$; en la tercera igualdad condicionamos a $\{Z_i = \epsilon_i, i \in M\}$; y finalmente volvemos a utilizar la independencia de las variables Y_i y la desigualdad (1.5). Utilizaremos (1.7), que se cumple para cualquier n, para probar por inducción que si r es elegido correctamente entonces vale:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid Z_0=\epsilon_0,\ldots,Z_n=\epsilon_n\right) \ge r\,,\tag{1.8}$$

para cualquier ordenamiento de \mathbb{Z}^d , para todo n y todo $\epsilon_i \in \{0,1\}$. Para n = -1 la desigualdad es cierta si $r \leq s$ por (1.5).

Se puede escribir $\mathbb{P}(X_i = 1, i \in N_1 | Z_i = \epsilon_i, i \in M)$ como el producto de $|N_1|$ probabilidades condicionales de la forma:

$$\mathbb{P}\left(X_{l}=1 \mid Z_{i}=\epsilon_{i}, i \in M; X_{j}=1, j \in N_{1}, j>l\right),$$

o lo que es lo mismo: $\mathbb{P}(X_l = 1 | Z_i = \epsilon_i, i \in M; Z_j = 1, j \in N_1, j > l)$, por la independencia de las Y_i .

En efecto, si $N_1 = \{j_1, \ldots, j_t\}$ con $j_1 < \ldots < j_t$ siendo $t = |N_1|$, se escribe lo siguiente:

$$\mathbb{P}\left(X_i=1, i \in N_1 \middle| Z_i=\epsilon_i, i \in M\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X_{j_1}=1, \dots, X_{j_t}=1; Z_i=\epsilon_i, i \in M\right)}{\mathbb{P}(Z_i=\epsilon_i, i \in M)},$$

luego condicionamos nuevamente y se tiene que:

$$\frac{\mathbb{P}\left(X_{j_1}=1 \mid X_{j_2}=1,\ldots,X_{j_i}; Z_i=\epsilon_i, i\in M\right) \mathbb{P}\left(X_{j_2}=1,\ldots,X_{j_t}=1; Z_i=\epsilon_i, i\in M\right)}{\mathbb{P}(Z_i=\epsilon_i, i\in M)}$$

y continuamos haciendo lo mismo para el suceso $\{X_{j_2} = 1, ..., X_{j_t} = 1; Z_i = \epsilon_i, i \in M\}$, hasta obtener:

$$\mathbb{P}(X_{i} = 1, i \in N_{1} \mid Z_{i} = \epsilon_{i}, i \in M) = \prod_{l=1}^{t} \mathbb{P}(X_{j_{l}} = 1 \mid Z_{i} = \epsilon_{i}, i \in M; X_{j_{i}} = 1, j_{i} \in N_{1}, i > l)$$
$$= \prod_{l=1}^{t} \mathbb{P}(X_{j_{l}} = 1 \mid Z_{i} = \epsilon_{i}, i \in M; Z_{j_{i}} = 1, j_{i} \in N_{1}, i > l).$$

Observemos que en cada uno de los factores se está condicionando a menos de n variables aleatorias Z_i (a lo sumo son $|M| + |N_1| - 1 < n$), por lo que vale la hipótesis inductiva y entonces tenemos que:

$$\mathbb{P}\left(X_i=1, i \in N_1 \mid Z_i=\epsilon_i, i \in M\right) \ge r^{|N_1|},$$

por tanto, combinando con (1.7) se prueba que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid Z_0 = \epsilon_0, \dots, Z_n = \epsilon_n) \le \frac{1-s}{(1-r)^{|N_0|} r^{|N_1|}}.$$

Ahora bien, probar (1.8) es equivalente a elegir r y s de forma que:

$$\frac{1-s}{(1-r)^{|N_0|}r^{|N_1|}} \le 1-r\,.$$

Como $|N_0| + |N_1| \leq \Delta - 1$, si $r \geq \frac{1}{2}$ es suficiente pedir que $1 - s \leq (1 - r)^{\Delta}$ y $s \geq r$ (esto último es necesario para el paso base de la inducción).

Tomando $r = \sqrt{p}$ y $s = 1 - (1 - \sqrt{p})^{\Delta}$ se cumplen (1.5), $s \ge r \ge \frac{1}{2}$, y $1 - s \le (1 - r)^{\Delta}$; y en consecuencia se prueba (1.8). Luego, por lo dicho al comienzo de la demostración y (1.6) se prueba el teorema.

Capítulo 2

Construcción del proceso de contacto

2.1. Introducción e historia

El proceso de contacto fue introducido inicialmente por Harris en 1974 en el artículo [Ha74]. En ese artículo se demostró la existencia de una transición de fase del proceso en \mathbb{Z}^d , con un enfoque básicamente analítico, que trabajaba con el proceso de contacto como un proceso de Markov particular, estudiando el semigrupo de Markov asociado y el generador del mismo.

En 1978 el propio Harris introduce en el artículo [Ha78] un enfoque constructivo para el estudio del proceso de contacto y otros procesos de Markov con características similares. Esta nueva forma permitía construir el proceso de contacto en \mathbb{Z}^d a través de una cantidad numerable de procesos de Poisson independientes, y a su vez abría la puerta al estudio del proceso de contacto sobre otros grafos, ya que su definición se podía brindar también en términos de procesos de Poisson. Esta construcción denominada representación gráfica proporcionó la posibilidad de trabajar con la noción de acoplamiento, permitiendo comparar procesos de contacto con diferentes parámetros y condiciones iniciales. Las ideas de la representación gráfica y sus consecuencias sobre el acoplamiento de los procesos fueron rápidamente generalizadas a otros sistemas de partículas más complejos, y se volvieron la metodología estándar para definirlos y trabajar en ellos, sin desmedro de la potencia del análisis aplicado a esta sub-área de la probabilidad.

Esta visión constructiva permitió también que se lo vinculara con los procesos de percolación orientada o dirigida que también fueron objeto de estudio en la década de los 80 y 90, lo cual trajo avances muy relevantes para el proceso de contacto.

Los principales progresos en materia del proceso de contacto en la década de los 70 y a comienzos de los 80 estaban formulados mayoritariamente desde un punto de vista analítico, a excepción del estudio del proceso en \mathbb{Z} . La principal referencia bibliográfica sobre ese enfoque es el libro [Li85] sobre sistemas de partículas que tiene un capítulo específico dedicado al proceso de contacto, y el review [?] The basic contact process publicado en 1981. Para el enfoque constructivo la principal referencia era el libro de Durrett [Du88] (y lo sigue siendo para el caso sobre \mathbb{Z}), que además de estudiar el proceso de contacto analiza otros procesos de partículas, así como diferentes procesos de percolación (entre ellos el de percolación orientada). Hacia mediados de los 80 ya se había caracterizado el proceso de contacto en \mathbb{Z} pero las herramientas utilizadas no eran generalizables a dimensiones mayores (ni a otros grafos). Hacia finales de esa década e inicios de los 90, Bezuidenhout y Grimmett publicaron una serie de trabajos que daban nuevas herramientas para el estudio del proceso de contacto en dimensiones mayores a 1. Estas herramientas se basan fuertemente en un acoplamiento entre el proceso de contacto en \mathbb{Z}^d con un proceso de percolación orientada por sitios en un subgrafo de $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$, así como en reiniciar periódicamente al proceso.

Resueltas a comienzos de los 90 las principales preguntas sobre el proceso de contacto en \mathbb{Z}^d se comienza a trabajar con el proceso en árboles y otros grafos. Allí se prueba que a diferencia del caso sobre \mathbb{Z}^d , donde el proceso de contacto tenía una única transición de fase, sobre árboles presenta dos transiciones. Este resultado (y otros vinculados a árboles) son publicados por Pemantle en el año 1992 en [Pem92]. Pocos años más tarde Salzano y Schonmann trabajan en un mirada más general del proceso de contacto en diferentes grafos que presentaban más de una transición de fase; estos trabajos se resumen en una serie de artículos de ambos y en la tesis de doctorado de Salzano [Sa03].

En 1999 Liggett publica un segundo libro sobre algunos sistemas de partículas específicos, donde incorpora y explota el enfoque constructivo de la representación gráfica, así como los trabajos de Bezuidenhout y Grimmett en \mathbb{Z}^d ([BG90] y [BG91]), y de Pemantle en árboles. Ya en la última década Durrett y otros matemáticos comienzan a estudiar el proceso de contacto en grafos del tipo *small worlds*, y demuestran que también hay dos transiciones de fase.

Para finalizar este breve *racconto* de la historia del proceso de contacto conviene citar a Liggett en sus palabras de homenaje a Ted Harris recogidas en [LiH]:

Contact processes constitute one of the two or three major classes of interacting particle systems. They play somewhat the same role in this area that Brownian motion plays in the theory of stochastic processes in Euclidean space: They are simple to describe, they have many of the useful properties that other systems in the field may or may not have - in this case, self-duality, attractiveness, and additivity - and they lead to challenging mathematical problems.

2.2. La construcción del proceso

Comencemos a construir el proceso de contacto. Consideremos G = (V, E) un grafo infinito de grado acotado por κ . En general supondremos que el grafo es conexo, de otra manera las características del proceso de contacto que nos interesan pueden ser estudiadas en cada componente conexa. El espacio de estados o de configuraciones es $\Sigma = \{0, 1\}^V$. Por tanto, un estado del proceso corresponderá a un vector $A = (A(x): x \in V)$, donde A(x) = 1 representa que el sitio x está infectado (u ocupado), y A(x) = 0 indica que el sitio x está sano (o vacante). Notar que el conjunto Σ es compacto y Hausdorff con la topología producto. Veamos informalmente cómo es la dinámica del proceso de contacto para luego ir a una construcción formal a través del método que se denomina representación gráfica.

El proceso tiene un parámetro λ que es la tasa de contagio de x a y cuando x está infectado e y es un vértice vecino de x que se encuentra sano. Cada sitio infectado se recupera a

tasa constante igual a 1 y de forma independiente del resto de los vértices. Supongamos que el estado del proceso a tiempo t es $A_t \in \Sigma$, entonces las transiciones a otros estados suceden de la siguiente manera:

- Si $A_t(x) = 1$, el sitio x está infectado y por tanto se recuperará con tasa 1 y de forma independiente de los otros sitios, es decir, $\mathbb{P}(A_{t+h}(x) = 0 | A_t(x) = 1) = h + o(h)$.
- Si $A_t(x) = 0$, el sitio x será contagiado con tasa λ y de forma independiente por cada uno de sus vecinos infectados, esto es, $\mathbb{P}(A_{t+h}(x) = 1 | A_t(x) = 0) = \lambda N_{A_t}(x)h + o(h)$, donde $N_{A_t}(x)$ indica la cantidad de vecinos de x que están infectados al tiempo t.

En lo que sigue nos dedicaremos a construir formalmente el proceso de contacto sobre un grafo como el señalado al comienzo de la sección (de grado acotado y conexo). Lo haremos a través de un método denominado representación gráfica, que utiliza una cantidad numerable de procesos de Poisson. Esta representación fue introducida por Harris en el año 1978 [Harris78]. La construcción es útil y sencilla, pues además de mostrar la evolución de la infección y su geometría, permite acoplar fácilmente procesos con diferentes estados iniciales, así como también procesos de distinto parámetro de contagio.

Para cada $x \in V$ consideramos un proceso de Poisson, $D^x = (D_t^x : t \ge 0)$, de parámetro 1 e independientes entre sí, es decir, independiente de D^y si $y \ne x$. Para cada par de vecinos x, y consideramos procesos de Poisson de intensidad λ , $N^{x,y} = (N_t^{x,y} : t \ge 0)$, independientes de los anteriores e independientes entre sí. A partir de ellos generaremos el proceso de contacto. Sean $(U_n^x : n \ge 1)$ y $(S_n^{x,y} : n \ge 1)$ los tiempos de salto de D^x y $N^{x,y}$ respectivamente.

Visualizamos la representación gráfica en $G \times [0, \infty)$. Sobre las rectas $\{x\} \times [0, \infty)$ dibujamos una \times en cada instante U_n^x , y una flecha de x hacia y en los instantes $S_n^{x,y}$, $n \ge 1$. Las primeras indicarán los tiempos de recuperación del sitio x, siempre que este se encuentre infectado; y las segundas señalan los instantes de contagio de x hacia y (que son vecinos) siempre que en ese instante x se encuentre infectado e y no lo esté.

Sean $(x, s), (y, t) \in G \times [0, \infty)$, con s < t. Diremos que hay un *camino activo* de (x, s) a (y, t), y escribimos $(x, s) \rightarrow (y, t)$, cuando exista una sucesión de puntos $(x_0, t_0) = (x, s)$, $(x_0, t_1), (x_1, t_1), (x_1, t_2), \ldots, (x_k, t_{k+1}) = (y, t)$ con $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1}$ y $x_i \sim x_{i+1}$, cumpliendo que:

- Cada segmento $\{x_i\} \times [t_i, t_{i+1}]$ no contiene ningún punto de la forma $(x_i, U_n^{x_i})$, es decir, no hay un instante de recuperación en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ (el proceso de Poisson D^{x_i} es constante en ese intervalo).
- t_i es igual a $S_n^{x_i,x_{i+1}}$ para algún n, esto significa que t_i es un tiempo de contagio de x_i a x_{i+1} señalado por el proceso de Poisson $N^{x_i,x_{i+1}}$.

Sea $A_0 \in \Sigma = \{0, 1\}^V$ la condición inicial del proceso de contacto, es decir, el conjunto de vértices que están inicialmente infectados. Se define $A_t \in \Sigma$ para $t \in (0, \infty)$ como sigue:

- $A_t(y) = 1$, si existe un camino activo de (x, 0) hasta (y, t) para algún $x \in V$ que cumpla $A_0(x) = 1$.
- $A_t(y) = 0$, en otro caso.

En adelante, muchas veces identificaremos sin hacer mención explícita a los elementos de Σ con subconjuntos de V a través de la biyección $A \in \Sigma \mapsto \{x \in V : A(x) = 1\}$.

Sea $A \subset V$, escribimos por A_t^A al proceso de contacto con configuración inicial A. En el caso de $A_t^{\{x\}}$ escribiremos solamente A_t^x .

 A_t^A es un elemento aleatorio de Σ , cuyo azar proviene de los procesos de Poisson que modelan las infecciones y las curas de éstas. Nos interesará por tanto estudiar la distribución que tiene A_t^A y específicamente qué sucede cuando t tiende a infinito.

En varias ocasiones nos interesará comenzar el proceso de contacto con una configuración inicial aleatoria bajo una ley μ sobre Σ ; de esa forma agregamos una nueva fuente de azar al proceso. Para el caso notaremos A_t^{μ} al proceso de contacto cuya distribución inicial es μ .

A veces también se utilizará \mathbb{P}^A y \mathbb{E}^A para escribir la probabilidad y la esperanza de un suceso respecto al proceso de contacto con condición inicial A.



Figura 2.1: Ejemplo de la representación gráfica en \mathbb{Z} . La configuración inicial es $\{0\}$ y a tiempo T es $\{-1, 0, 2\}$. En verde se señala la propagación del proceso, y los diferentes caminos activos.

Diremos también que hay un camino (no necesariamente activo) de (x, s) hasta (y, t) cuando exista una serie de puntos como en la definición de camino activo pero exigiendo que cumplan el segundo ítem, es decir que solamente nos interesará que los t_i sean tiempos de salto de los procesos de Poisson que marcan contagios. Cuando se habla simplemente de un camino se está ignorando a los tiempos de sanación de las infecciones. Por ejemplo, en el caso que representa la figura existe un camino (que no es activo) desde (0,0) hasta (-2,T): primero 0 infecta a -1, luego -1 infecta a -2, y como el recupero que sigue debe omitirse tendremos un camino hasta (-2,T).

Asimismo, observar que no todos los caminos activos tienen que ser efectivos, es decir,

no todos los caminos activos son fuente de infección. Por ejemplo, en la figura hay tres caminos activos que unen a (0,0) con (0,T).

2.3. Primeras propiedades del proceso de contacto

2.3.1. Aditividad, monotonía y continuidad en λ

Comencemos por mostrar algunas propiedades generales del proceso de contacto. Nos gustaría comparar los procesos A_t^A y A_t^B cuando $A \subset B$. Si construimos cada uno de los procesos utilizando familias de procesos de Poisson independientes entre sí, será difícil establecer una relación entre ambos procesos. Ahora bien, podríamos utilizar la misma familia de procesos de Poisson para generar tanto las infecciones como los recuperos en ambos procesos con diferente condición inicial. De esa forma, es inmediato a partir de la construcción gráfica que si $A \subset B$ entonces $A_t^A \subset A_t^B$ para todo t, ya que si existe un camino activo de (x, 0) hasta (y, t), con $x \in A$, ese mismo camino activo nos sirve para afirmar que $y \in A_t^B$ porque $x \in B$. Esta propiedad brinda una monotonía del proceso de contacto en relación al orden parcial natural en los subconjuntos de V dado por la inclusión.

La construcción anterior es el acoplamiento natural dado por la representación gráfica y lo utilizaremos siempre sin hacer mención explícita. En particular lo haremos cuando estemos trabajando con procesos con diferente condición inicial o cuando observemos el proceso que resulta de omitir los recuperos.

Sea $A \subset V$ y s > 0 fijo. No resulta difícil mostrar que es posible dar una construcción (a través de la representación gráfica) en la que para todo $t \ge 0$ se cumpla que:

$$A_t^{A_s^A} = A_{t+s}^A \,, \tag{2.1}$$

puesto que alcanza con reiniciar los procesos de Poisson a tiempo s utilizando la observación (1.3.8). De esta forma, si se reinicia el proceso de contacto a tiempo s se estará iniciando el proceso de contacto con condición inicial aleatoria A_s^A .

También se observa que el acoplamiento anterior implica que $A_t^{A\cup B} = A_t^A \cup A_t^B$, propiedad del proceso que se denomina *aditividad*. En efecto, se tiene que si $y \in A_t^{A\cup B}$ podemos encontrar un camino activo de (x, 0) hasta (y, t), donde x pertenece a A o B, y por tanto y pertenece a A_t^A o A_t^B . Por otra parte, se observa que A_t^A , $A_t^B \subset A_t^{A\cup B}$ para todo t, y entonces $A_t^A \cup A_t^B \subset A_t^{A\cup B}$ para cualquier $t \ge 0$; con lo que se prueba la afirmación. En particular se tiene que $A_t^A = \bigcup_{x \in A} A_t^x$.

Analicemos cómo construir procesos de contacto con diferentes parámetros pero dentro del mismo espacio de probabilidad. Para ello es necesario acoplar los procesos de Poisson que aparecen en la definición de ambos procesos de contacto. Sean A_t y B_t procesos de contacto de parámetros λ_A y λ_B , con $\lambda_A < \lambda_B$. La familia de procesos que indican los recuperos es la misma para ambos, es decir, $D_A^x = D_B^x$ para todo $x \in V$. Acoplemos entonces las flechas de infección. Consideremos $N_A^{x,y}$, el proceso de Poisson de parámetro λ_A asociado a dos vértices vecinos $x \in y$ ($x \sim y$). Definimos $N_B^{x,y}$ como:

$$N_B^{x,y} = N_A^{x,y} + M^{x,y}$$

donde $(M^{x,y}: x, y \in V \text{ tal que } x \sim y)$ es una familia de procesos de Poisson de parámetro $\lambda_B - \lambda_A$, independientes entre sí e independientes de $(N_A^{x,y}: x, y \in V \text{ tal que } x \sim y)$. Por lo visto en el capítulo anterior, para cada par de vecinos $x, y, N_B^{x,y}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ_B e independiente del resto.

Otra manera de acoplar los procesos de Poisson de parámetros λ_A y λ_B es la que sigue. Consideramos el proceso $N_B^{x,y}$ y $(S_n^{x,y}: n \ge 1)$ sus tiempos de salto. Para cada par de vecinos x, y, de manera independiente, tomamos $(X_n^{x,y}: n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli de parámetro $p = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} < 1$. Suprimimos el salto $S_n^{x,y}$ del proceso de Poisson $N_B^{x,y}$ cuando $X_n^{x,y} = 0$, y se mantiene cuando $X_n^{x,y} = 1$. La sucesión de tiempos de salto que nos queda definida corresponde a un proceso de Poisson de parámetro $p\lambda_B = \lambda_A$.

Estamos en condiciones de mostrar que si $A \subset B$, entonces $A_t^A \subset B_t^B$ para todo t, por lo que también existe monotonía respecto del parámetro de contagio. Sea t > 0. Ya sabemos que existe una construcción en la que $A_t^A \subset A_t^B$, por lo que comprobando que $A_t^B \subset B_t^B$ en la misma construcción se demuestra el resultado. Observemos que los recuperos son los mismos en ambos procesos. Si $y \in A_t^B$ entonces existe $(x, 0) \to (y, t)$ para algún $x \in B$, y gracias al acoplamiento de los procesos de Poisson cada flecha de infección del proceso A_t es también una flecha de infección en B_t , por tanto este camino también es activo para B_t , y entonces $y \in B_t^B$.

Ahora enunciaremos un resultado que nos permite comparar dos procesos de contacto, $A_t ext{ y } B_t$, de diferentes parámetros, cuando tienen la misma condición inicial, es decir, $A_t^0 = B_t^0$ para t fijo. Recordemos que el grafo G tiene grado acotado por κ , lo que implica que todo vértice tiene a lo sumo κ vecinos.

Sea Y_t un proceso de nacimiento puro (sin muertes) sobre los naturales, con $Y_0 = 1$ y transición de $n \mapsto n + 1$ a tasa $n\kappa\lambda$. Podemos acoplar Y_t al proceso de contacto A_t^A de tasa λ y |A| = 1, de forma que la cantidad de sitios que fueron infectados hasta tiempo t

es menor que Y_t , es decir, $\left| \bigcup_{0 \le s \le t} A_s^A \right| \le Y_t$.

En efecto, consideremos C_t el proceso que resulta de ignorar los recuperos en el proceso de contacto A_t (una vez que un sitio está infectado permanecerá en ese estado para todo tiempo posterior), por tanto se tiene que:

$$A^A_s \subset C^A_s \ \, \text{para todo} \ s \geq 0 \ \, \text{y} \ \ \, C^A_s \subset C^A_h \ \, \text{para todo} \ h \geq s \,,$$

y en consecuencia $\bigcup_{0\leq s\leq t}A^A_s\subset C^A_t.$

Observemos que un conjunto de n vértices en G puede infectar a lo sumo a $n\kappa$ vecinos, y que entonces $|C_t^A|$ crece hacia $|C_t^A| + 1$ a tasa menor o igual que $|C_t^A|\kappa\lambda$, de forma que es posible dar una construcción acoplada de los procesos de Poisson de C_t^A e Y_t tal que $|C_t^A| \leq Y_t$.

Sea $(\tau_n: n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que τ_n tiene distribución exponencial de parámetro $n\kappa\lambda$. Las mismas representan los tiempos de salto

entre los estados del proceso de nacimiento Y_t . Para $\theta > 0$ y N natural, se obtiene que:

$$\begin{split} \mathbb{P}(Y_t > N) &= \mathbb{P}(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_N \leq t) \\ &= \mathbb{E} \mathbf{1}_{\{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_N \leq t\}} \\ &\leq \mathbb{E} e^{\theta(t - \tau_1 - \tau_2 - \ldots - \tau_N)} \\ &= e^{\theta t} \prod_{n=1}^N \mathbb{E} e^{-\theta \tau_n} \\ &= e^{\theta t} \prod_{n=1}^N \frac{n \kappa \lambda}{n \kappa \lambda + \theta} \\ &\leq \exp \left[\theta t - \sum_{n=1}^N \frac{\theta}{n \kappa \lambda + \theta} \right], \end{split}$$

donde en el cuarto renglón utilizamos que las variables aleatorias son independientes, en el quinto calculamos las esperanzas correspondientes y en el último usamos la desigualdad $1 - x \leq e^{-x}$, con $x = \frac{\theta}{n\kappa\lambda + \theta}$.

Ahora tomamos $\theta = m\kappa\lambda$ con *m* entero positivo, y obtenemos:

$$\mathbb{P}(Y_t > N) \le e^{m\kappa\lambda t} \exp\left[-m\sum_{n=1}^N \frac{1}{m+n}\right] \le e^{m\kappa\lambda t} \left[\frac{m+1}{m+N+1}\right]^m$$

pues

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m+n} \ge \sum_{n=1}^{N} \int_{m+n}^{m+n+1} \frac{1}{x} \, dx = \int_{m+1}^{m+N+1} \frac{1}{x} \, dx = \log \frac{m+N+1}{m+1}$$

En definitiva, como $Y_t \ge 0$ y se puede tomar $m \ge 2$,

$$\begin{split} \mathbb{E} \left| \bigcup_{0 \le s \le t} A_s^A \right| \le \mathbb{E} Y_t &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_t > u) \, du &\le N + \int_N^\infty e^{m\kappa\lambda t} \left[\frac{m+1}{u+m+1} \right]^m \, du \\ &\le N + 3 \, e^{m\kappa\lambda t} \, \left[\frac{m+1}{m+N+1} \right]^{m-1} < \infty \,, \end{split}$$

para A tal que |A| = 1.

Es sencillo adaptar el resultado anterior y utilizar la aditividad del proceso de contacto para obtener:

$$\mathbb{E}\left|\bigcup_{0\leq s\leq t} A_s^A\right|^k < \infty \tag{2.2}$$

para todo A finito, t > 0 y $k \in \mathbb{N}$. Este resultado nos dice que la cantidad de sitios infectados hasta tiempo t cuando la configuración inicial es finita no es demasiado grande; lo que nos permite enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. Sea G un grafo de grado acotado por κ , y A un subconjunto finito de vértices. Consideremos A_t^A y B_t^A dos procesos de contacto sobre G de parámetros $\lambda_A < \lambda_B$ respectivamente. Para cada t fijo se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\lambda_B - \lambda_A| < \delta$ entonces

 $\mathbb{P}(B_s \neq A_s \text{ para algún } s \leq t) < \epsilon.$

Demostración. Fijemos t > 0. Acoplamos los procesos de Poisson que generan A_s^A y B_s^A como ya lo hemos hecho antes, tomando $N_B^{x,y}$ como

$$N_B^{x,y} = N_A^{x,y} + M^{x,y}$$

para cada par de vecinos, donde $(M^{x,y}: x \sim y)$ es una familia de procesos de Poisson independientes de parámetro $\lambda_B - \lambda_A$ e independientes de $(N_A^{x,y}: x \sim y)$. Las flechas que pueden dar lugar a infecciones del proceso B_s hasta tiempo t y que no son flechas de infección de A_s (que son las que eventualmente diferencian a los procesos) tienen su origen en los procesos $M^{x,y}$. Por lo tanto la tasa con la que aparece una flecha de estas (que no necesariamente será efectiva o formará parte de un camino activo) es $\lambda_B - \lambda_A$ por la cantidad de vecinos sanos que tiene cada sitio infectado. Usando esto y que G tiene grado acotado se tiene que:

$$(\lambda_B - \lambda_A) \int_0^t \sum_{\substack{y \sim x \\ x \in A_s^A \\ y \notin A_s^A}} 1 \, ds \le (\lambda_B - \lambda_A) \kappa \int_0^t |A_s^A| \, ds \,, \tag{2.3}$$

donde la tasa de la izquierda es la tasa con la que se diferencian los dos procesos de contacto.

Entonces, recordando que $B_0^A = A_0^A = A$ y usando la cota anterior se tiene que:

$$\mathbb{P}(B_s^A \neq A_s^A \text{ para algún } 0 < s \le t) = 1 - \mathbb{E} \exp \left[-(\lambda_B - \lambda_A) \int_0^t \sum_{\substack{y \sim x \\ x \in A_s^A \\ y \notin A_s^A}} 1 \ ds \right]$$
$$\le 1 - \mathbb{E} \exp \left[-(\lambda_B - \lambda_A) \kappa \int_0^t |A_s^A| \ ds \right]$$
$$\le (\lambda_B - \lambda_A) \kappa \int_0^t \mathbb{E}|A_s^A| \ ds$$
$$= (\lambda_B - \lambda_A) K,$$

donde en la primer desigualdad usamos (2.3), en la segunda $1 - e^{-x} \leq x$ y en el último paso la cota (2.2) para tiempo t. En resumen, si elegimos los parámetros de forma que $|\lambda_B - \lambda_A| < \delta$, siendo $\delta = \epsilon/K$, se tiene que para t fijo:

$$\mathbb{P}(B_s^A \neq A_s^A \text{ para algún } s \leq t) < \epsilon.$$

La expresión (2.3) no nos brinda información acerca de cómo crece $|A_t|$ cuando $t \to \infty$. A continuación veremos que para el proceso sobre \mathbb{Z}^d el crecimiento de $\mathbb{E}|A_t^0|$ es a lo sumo polinómico en t, a diferencia de lo que sucede cuando la cantidad de infecciones por sitio no está acotada, cuyo crecimiento es exponencial.

٦

2.3.2. Tasa de crecimiento en \mathbb{L}^d

Consideremos nuevamente C_t el proceso en \mathbb{Z}^d que resulta de omitir los recuperos en el proceso de contacto A_t . Sean $p_t(x, y)$ las probabilidades de transición de un paseo aleatorio simple en \mathbb{Z}^d cuyos saltos a un vecino ocurren a tasa λ .

Proposición 2.3.2. $\mathbb{P}(x \in C_t^0) \leq e^{2d\lambda t} p_t(0, x).$

Demostración. Sea ζ_t un proceso de ramificación sin muertes, donde $\zeta_t(x)$ aumenta en 1 a tasa $\lambda \sum_{y \sim x} \zeta_t(y)$. La media de ζ_t satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}\zeta_t(x) = \lambda \sum_{y \sim x} \mathbb{E}\zeta_t(y).$$

La solución a esta ecuación está dada por:

$$\mathbb{E}\zeta_t^{\zeta}(x) = e^{2d\lambda t} \sum_y p_t(x,y)\zeta(y),$$

donde $\zeta = \zeta_0$ es la condición inicial. Para ver ello calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{2d\lambda t} \sum_{y} p_t(x,y)\zeta(y) \right) &= 2d\lambda e^{2d\lambda t} \sum_{y} p_t(x,y)\,\zeta(y) + \\ &e^{2d\lambda t} \sum_{y} \left[\lambda \sum_{z \sim x} p_t(z,y) - 2d\lambda p_t(x,y) \right] \,\zeta(y) \\ &= \lambda \sum_{z \sim x} e^{2d\lambda t} \left[\sum_{y} p_t(z,y)\,\zeta(y) \right]. \end{aligned}$$

Fácilmente acoplamos C_t^0 con ζ_t^0 , donde $\zeta_0^0(0) = 1$ y $\zeta_0^0(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ (para acoplar basta dejar que cada ocurrencia del proceso de Poisson que genera un contagio de x a y sea efectivamente una infección, sin importar si y estaba infectado anteriormente). Se tiene entonces que $C_t^0 \subset \{x : \zeta_t(x) \geq 1\}$, y por tanto:

$$\mathbb{P}(x \in C_t^0) \le \mathbb{P}(\zeta_t^0(x) \ge 1) \le \mathbb{E}\zeta_t^0(x) = e^{2d\lambda t} p_t(0, x)$$

Notaremos por $\|\cdot\|$ la norma del supremo en \mathbb{Z}^d , es decir, $\|x\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Lema 2.3.3. Para todo a > 0, existe b > 0 tal que:

$$\sum_{\|x\| \ge bt} p_t(0, x) \le b \, e^{-at} \tag{2.4}$$

Demostración. Supongamos probada la desigualdad para d = 1. Tomemos a > 0. Sea $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$. Si un paseo al azar que partió del origen se encuentra a tiempo t en x, quiere decir que al menos se movió $|x_j|$ lugares en la dirección de la j-ésima coordenada

durante el tiempo t. Esto vale para todas las coordenadas del vector x, por tanto se deduce que:

$$p_t(0,x) \le p_t^1(0,x_j)$$
 para todo $j = 1, \dots, d$,

siendo p_t^1 la probabilidad de transición del paseo al azar en \mathbb{Z} .

Ahora bien, si $||x|| \ge bt$, entonces $|x_j| \ge bt$ para algún j. Por tanto, como existe $b_1 > 0$ tal que $\sum_{|x|\ge bt} p_t^1(0,x) \le b_1 e^{-at}$ se tiene que:

$$\begin{split} \sum_{\|x\| \ge b_1 t} p_t(0,x) &\leq \sum_{x: \ |x_1| \ge b_1 t} p_t(0,x) + \ldots + \sum_{x: \ |x_d| \ge b_1 t} p_t(0,x) \\ &\leq \sum_{x: \ |x_1| \ge b_1 t} p_t^1(0,x_1) + \ldots + \sum_{x: \ |x_d| \ge b_1 t} p_t^1(0,x_d) \\ &= d\left(\sum_{\|x_1| \ge b_1 t} p_t^1(0,x_1)\right) \\ &\leq db_1 e^{-at}, \end{split}$$

lo que culmina la prueba para el caso d > 1, ya que se elige $b = db_1$ y se observa que:

$$\sum_{\|x\| \ge b_1 t} p_t(0, x) \ge \sum_{\|x\| \ge db_1 t} p_t(0, x) \, .$$

Para la prueba del caso unidimensional podemos suponer por simetría que el x que indexa la suma es positivo. Sea X_t el paseo al azar en \mathbb{Z} que parte del origen y se mueve a un sitio vecino a tasa λ . Utilizando una desigualdad básica y asumiendo un cálculo que luego realizaremos se tiene que, para todo $\gamma > 0$ vale:

$$\mathbb{P}(X_t \ge bt) \le \mathbb{E}e^{\gamma(X_t - bt)} = \exp\left(\left[\lambda(e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2) - \gamma b\right]t\right),$$

por lo que si se eligen γ y *b* suficientemente grande concluimos la prueba (observar que si se cambia el valor de *b* en la desigualdad (2.4) por un valor más grande, la desigualdad sigue siendo válida, pues se quitan sumandos al término de la izquierda y se incrementa el lado derecho de la desigualdad).

Mostremos que efectivamente vale la igualdad: $\mathbb{E}e^{\gamma X_t} = \exp[\lambda t(e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2)]$. Consideramos N_t un proceso de Poisson de parámetro λ , e $(Y_n: n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli simétrica, e independientes del Poisson. A partir de ellas podemos escribir el proceso X_t como:

$$X_t = \sum_{k=0}^{N_t} Y_k.$$

Calculemos:

$$\mathbb{E}e^{\gamma X_t} = \mathbb{E}e^{\gamma \sum_{k=0}^{N_t} Y_k} = \sum_{n \ge 0} \mathbb{E}\left[e^{\gamma \sum_{k=0}^n Y_k} \mathbf{1}_{\{N_t=n\}}\right],$$

....

usando la independencia entre el proceso de Poisson y las variables Bernoulli, y luego que la sucesión $(Y_n: n \ge 1)$ es de variables aleatorias independientes:

$$\mathbb{E}e^{\gamma X_t} = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}(N_t = n) \mathbb{E}\left[e^{\gamma \sum_{k=0}^n Y_k}\right] = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}(N_t = n) \prod_{k=0}^n \mathbb{E}e^{\gamma Y_k}$$

Calculando la esperanza de $e^{\gamma Y_n}$ y usando la distribución de N_t se obtiene finalmente que:

$$\mathbb{E}e^{\gamma X_t} = \sum_{n \ge 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left(\frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}\right)^n = \exp\left[\frac{\lambda t}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2)\right].$$

Observación 2.3.4. En la siguiente proposición se precisará una cota para la siguiente suma:

$$\sum_{\|x\|>0} \|x\|^{(k-1)2d} p_t(0,x)$$

donde k es un entero positivo. Alcanza con probarlo para \mathbb{Z} en virtud del mismo argumento utilizado en la demostración del lema anterior (2.3.3).

Sea $(Y_n: n \ge 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli simétrica y $(N_t: t \ge 0)$ un proceso de Poisson de tasa λ independiente de la sucesión anterior. Llamamos X_t a la caminata al azar en \mathbb{Z} .

Asumiendo que
$$Y_0 = 0$$
, se tiene que $X_t = \sum_{n=0}^{N_t} Y_n$ y entonces $p_t(0, x) = \mathbb{P}(X_t = x)$.

Observemos que: $0 \le \sum_{x} x^{2d(k-1)} p_t(0, x) = \mathbb{E} \left[X_t^{2d(k-1)} \right]$. Ahora bien:

$$\mathbb{E}X_{t}^{2d(k-1)} = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N_{t}}Y_{n}\right]^{2d(k-1)}$$
$$= \sum_{l\geq 0}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N_{t}=l\}}\left(\sum_{n=0}^{l}Y_{n}\right)^{2d(k-1)}\right]$$
$$= \sum_{l\geq 0}\mathbb{P}(N_{t}=l)\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{l}Y_{n}\right]^{2d(k-1)},$$

donde en la última igualdad utilizamos que el proceso de Poisson es independiente de la sucesión de variables de Bernoulli. Es sencillo notar que:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{l} Y_{n}\right]^{2d(k-1)} = \sum_{i=0}^{l} (l-2i)^{2d(k-1)} \times \frac{1}{2^{l}} \times \frac{l!}{(l-i)!i!}$$
$$\leq 2 \times l^{2d(k-1)} \times \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{2^{l}} \times \frac{l!}{(l-i)!i!} = 2 \times l^{2d(k-1)}$$

Sustituyendo el cálculo anterior en la cuenta que estábamos realizando se obtiene:

$$\sum_{x \neq 0} x^{2d(k-1)} p_t(0,x) \le \sum_{l \ge 0} 2 \times l^{2d(k-1)} \mathbb{P}(N_t = l) \le K(\lambda t)^{2d(k-1)},$$
(2.5)

ya que es el momento de orden 2d(k-1) de una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λt .

Finalmente ya podemos enunciar y probar un resultado sobre la tasa de crecimiento del proceso de contacto en \mathbb{Z}^d .

Proposición 2.3.5. Para cada k entero positivo existe c, independiente de t, de forma que:

$$\mathbb{E}|A_t^0|^k \le c(1+t^{kd})$$

Demostración. Comencemos tomando γ de forma tal que:

$$#\{x \in \mathbb{Z}^d : ||x|| \le n\} \le \gamma n^d;$$

$$(2.6)$$

por ejemplo 3^d sirve como valor de γ . Nuevamente se escribirá por C_t al proceso que consiste en omitir los recuperos en el proceso de contacto A_t . Se tiene entonces que:

$$\mathbb{E}|A_t^0|^k \le \mathbb{E}|C_t^0|^k = \mathbb{E}\left(\sum_{x_1,\dots,x_k} \mathbf{1}_{\left\{x_1 \in C_t^0,\dots,x_k \in C_t^0\right\}}\right) = \sum_{x_1,\dots,x_k} \mathbb{P}\left(x_1 \in C_t^0,\dots,x_k \in C_t^0\right).$$

Separando la sumatoria según la norma de los x_i supero o no el valor de n, acotando algunas probabilidades por uno y usando (2.6), se tiene que:

$$\sum_{x_1,\dots,x_k} \mathbb{P}\left(x_1 \in C_t^0, \dots, x_k \in C_t^0\right) \leq \gamma^k n^{kd} + \sum_{\substack{x_1,\dots,x_k \\ \|x_i\| > n}} \mathbb{P}\left(x_1 \in C_t^0, \dots, x_k \in C_t^0\right)$$
$$= \gamma^k n^{kd} + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{\|x_j\| > n \\ \|x_i\| \ge \|x_j\| \ \forall j \neq i}} \mathbb{P}\left(x_1 \in C_t^0, \dots, x_k \in C_t^0\right).$$

Luego acotamos la probabilidad de la intersección por la de uno de los sucesos y volvemos a utilizar (2.6):

$$\mathbb{E}|A_t^0|^k \leq \gamma^k n^{kd} + \sum_{i=1}^k \sum_{\|x_i\|>n} \gamma^{k-1} \|x_i\|^{(k-1)d} \mathbb{P}\left(x_i \in C_t^0\right)$$

= $\gamma^k n^{kd} + k \sum_{\|x\|>n} \gamma^{k-1} \|x\|^{(k-1)d} \mathbb{P}\left(x \in C_t^0\right).$

Ahora se toma $a > 4d\lambda$ y el valor de *b* que nos asegura el lema (2.3.3) para ese valor de *a*. Luego se sustituye *n* por *bt* y se aplica la proposición (2.3.2), y se deduce que:

$$\mathbb{E} |A_t^0|^k \leq \gamma^k (bt)^{kd} + k \sum_{\|x\| > bt} \gamma^{k-1} \|x\|^{(k-1)d} \mathbb{P} \left(x \in C_t^0 \right)$$

$$\leq \gamma^k (bt)^{kd} + k \gamma^{k-1} \sum_{\|x\| > bt} \|x\|^{(k-1)d} p_t(0,x) e^{2d\lambda t} .$$

Para finalizar se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la cota del lema (2.3.3) para $\sum_{\|x\|>bt} p_t(0,x)$, logrando las siguientes desigualdades:

$$\begin{split} \mathbb{E}|A_{t}^{0}|^{k} &\leq \gamma^{k}(bt)^{kd} + k\gamma^{k-1}e^{2d\lambda t} \sum_{\|x\| > bt} \|x\|^{(k-1)d} \left[p_{t}(0,x) \right]^{1/2} \times \left[p_{t}(0,x) \right]^{1/2} \\ &\leq \gamma^{k}(bt)^{kd} + k\gamma^{k-1}e^{2d\lambda t} \Big[\sum_{\|x\| > bt} \|x\|^{(k-1)2d} p_{t}(0,x) \Big]^{1/2} \times \Big[\sum_{\|x\| > bt} p_{t}(0,x) \Big]^{1/2} \\ &\leq \gamma^{k}(bt)^{kd} + k\gamma^{k-1}\sqrt{b} e^{(4d\lambda - a)t/2} \Big[\sum_{\|x\| > bt} \|x\|^{(k-1)2d} p_{t}(0,x) \Big]^{1/2} \\ &\leq c \left(1 + t^{kd} \right) \,, \end{split}$$

porque el segundo sumando tiende a cero cuando $t \to +\infty$, ya que la cantidad que está entre corchetes tiene orden polinomial en t por la desigualdad (2.5) y la exponencial tiene exponente positivo por la elección de a.

2.3.3. La medida invariante superior

En cualquier sistema de partículas interesa estudiar las medidas invariantes del sistema y la convergencia hacia ellas. Para entrar en este tema detalladamente hay que introducir varios conceptos como el semigrupo de Feller-Markov del proceso y el generador infinitesimal del mismo. Por diferentes motivos no ingresamos en estos temas en la monografía más allá de algunas definiciones y el enunciado de ciertas propiedades básicas que realizamos en el apéndice, siguiendo el enfoque general de [Li85] y de la primera parte del capítulo 0 de [Li99].

Informalmente se puede interpretar a una medida invariante como una distribución de los sitios infectados que se mantiene en el tiempo; para la definición formal es necesario recurrir al proceso de Feller-Markov asociado al proceso en estudio: $\{S(t) : t \ge 0\}$. Una medida μ se dice invariante cuando $S(t)\mu = \mu$ para todo $t \ge 0$. Observar que esta definición es similar a la de medida invariante de una cadena de Markov, cumpliendo el semigrupo del proceso el rol de la matriz de transición.

Un resultado que utilizaremos aquí y que se presenta en el apéndice nos dice que una medida límite es invariante.

Existe en Σ un orden parcial natural dado por: $\omega \leq \omega'$ cuando $\omega(x) \leq \omega'(x)$ para todo x en V (este orden se corresponde en los subconjuntos de V con la inclusión). Naturalmente diremos que una función real definida en Σ es creciente cuando respeta este orden parcial. El orden anterior induce otro orden (también parcial) en el conjunto de medidas de probabilidad sobre Σ de la siguiente manera: si μ_1 y μ_2 son dos medidas sobre Σ se dirá que $\mu_1 \leq \mu_2$ cuando

$$\mu_1(f) = \int_{\Sigma} f \, d\mu_1 \le \int_{\Sigma} f \, d\mu_2 = \mu_2(f) \text{ para toda } f \in \mathcal{M},$$

donde \mathcal{M} es el conjunto de funciones continuas y crecientes en Σ . Σ tiene la topología producto (con la que a su vez es compacto y Hausdorff) y $C(\Sigma)$ está dotado con la norma infinito.

Escribimos δ_{\emptyset} a la medida de probabilidad en Σ que concentra su masa en \emptyset . Es sencillo advertir que δ_{\emptyset} es una medida invariante del proceso de contacto, pues si se comienza con la configuración inicial vacía (ningún sitio infectado) entonces se permanecerá en ella, puesto que los sitios infectados no se generan espontáneamente sino solamente a partir de otros sitios infectados. δ_{\emptyset} es la menor medida de probabilidad invariante en el sentido de que cualquier medida invariante es mayor a ella en el orden parcial antes establecido. En lo que sigue se construirá otra medida invariante que será la mayor en el sentido del orden parcial anterior, a la que llamaremos medida invariante superior y la notaremos $\bar{\nu}$. A priori esta medida podría no ser diferente de δ_{\emptyset} , pero más adelante veremos que para ciertos valores del parámetro λ estas medidas son diferentes en \mathbb{Z}^d y también en T_d .

Tomamos a V como condición inicial, es decir, comenzamos el proceso con todos los sitios infectados, y denotamos μ_t la distribución de A_t^V . Es claro que $\mu_t \leq \mu_0$, ya que $A_t^V \subset V$. Ahora bien, por la propiedad de Markov de pérdida de memoria y la monotonía de la primera sección se tiene que, $\mu_{t+s} \leq \mu_t$ para s, t cualesquiera, puesto que existe un acoplamiento (el mismo que usamos en la prueba de la monotonía) tal que:

$$A_{s+t}^V = A_t^{A_s^V} \subset A_t^V.$$

Se observa entonces que μ_t es decreciente con t, es decir, $\mu_t(f)$ es decreciente con t para toda función $f \in \mathcal{M}$. Pero $\mu_t(f)$ está acotada inferiormente; en efecto:

$$\mu_t(f) = \int f \, d\mu_t \ge \int m_f \, d\mu_t = m_f,$$

donde m_f es el mínimo de f en Σ , que existe por ser Σ un espacio compacto y f continua. Por tanto se puede afirmar que existe $\lim_{t\to+\infty} \mu_t(f)$ para toda $f \in \mathcal{M}$. Llamaremos a este límite T(f).

Nuestro objetivo será probar que existe el límite débil de μ_t cuando $t \to +\infty$ a partir de lo anterior. Comencemos por notar que si f es continua y decreciente entonces -f es creciente y por tanto sabemos que $\mu_t(f)$ converge también para funciones continuas decrecientes.

Si $x \in V$ se puede definir $p_x : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ tal que $p_x(\omega) = \omega(x)$. Es trivial deducir que p_x es una función creciente y continua; y que $1 - p_x$ es decreciente y continua; por lo que $p_x \in \mathcal{M}$ para todo $x \in V$. Notar también que las funciones constantes también están en \mathcal{M} .

Consideremos \mathcal{A} la sub-álgebra (sobre los reales) de $C(\Sigma)$ generada por la familia \mathcal{M} . No es difícil observar que las funciones de \mathcal{A} son de la forma f - g con f y $g \in \mathcal{M}$, puesto que estas funciones deben formar parte de la sub-álgebra pero al mismo tiempo son un subespacio vectorial cerrado por la multiplicación (el producto de funciones crecientes continuas es una función creciente y continua).

La sub-álgebra \mathcal{A} separa puntos, ya que si ω , $\omega' \in \Sigma$ son diferentes, entonces existe un vértice en el que las configuraciones deben diferir, es decir, existe $x \in V$ tal que $\omega(x) \neq \omega'(x)$ y por tanto $p_x(\omega) \neq p_x(\omega')$. Se tiene entonces que $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{\infty}}$ es una sub-álgebra cerrada de $C(\Sigma)$ que separa puntos y el teorema de Stone-Weierstrass afirma que $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C(\Sigma)$, puesto que \mathcal{A} contiene a las constantes.

En resumen \mathcal{A} es denso en $C(\Sigma)$ y toda función de \mathcal{A} se puede escribir como resta de funciones crecientes. Esto último implica que existe el límite en t de $\mu_t(f)$ para toda $f \in \mathcal{A}$.

Sea $g \in C(\Sigma)$ y $(g_n : n \ge 1) \subset \mathcal{A}$ tal que $g_n \to g$ (en $\|\cdot\|_{\infty}$); mostremos que existe el límite cuando $t \to +\infty$ de $\mu_t(g) = \int g \, d\mu_t$.

Comencemos por observar que $|T(g_n) - T(g_m)| \le ||g_n - g_m||$; en efecto:

$$\begin{aligned} |T(g_n) - T(g_m)| &= \left| \lim_{t \to +\infty} \mu_t(g_n) - \lim_{t \to +\infty} \mu_t(g_m) \right| \\ &= \left| \lim_{t \to +\infty} \left| \mu_t(g_n - g_m) \right| \\ &\leq \left| \lim_{t \to +\infty} \int |g_n - g_m| \, d\mu_t \right| \\ &\leq \left| \lim_{t \to +\infty} \int |g_n - g_m|_{\infty} \, d\mu_t \right| \\ &= \left| |g_n - g_m|_{\infty} \, , \end{aligned}$$

por lo que $(T(g_n): n \ge 1)$ es una sucesión de Cauchy y por tanto existe $\lim_n T(g_n)$. Sea $a = \lim_n T(g_n)$, veamos que $a = \lim_{t\to\infty} \mu_t(g)$. Observar que para cada $n \ge t$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |\mu_t(g) - a| &\leq |\mu_t(g) - T(g_n)| + |T(g_n) - a| \\ &\leq |\mu_t(g) - \mu_t(g_n)| + |\mu_t(g_n) - T(g_n)| + |T(g_n) - a| \\ &\leq ||g - g_n||_{\infty} + |\mu_t(g_n) - T(g_n)| + |T(g_n) - a| \end{aligned}$$

Entonces dado $\epsilon > 0$ se toma un *n* para el cual la suma del primer y último sumando es menor que $\epsilon/2$. Para ese *n* se elige *t'* tal que si t > t' entonces el término del medio es menor que $\epsilon/2$. En definitiva si t > t' se cumple que $|\mu_t(g) - a| < \epsilon$ y hemos probado lo que queríamos. Ahora llamamos $T(g) = \lim_{t \to +\infty} \mu_t(g)$ para toda $g \in C(\Sigma)$.

De esta forma queda definido $T : \Sigma \mapsto \mathbb{R}, T(g) = \lim_{t \to \infty} \mu_t(g)$, que es un funcional lineal continuo. Probemos la linealidad: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C(\Sigma)$, entonces:

$$T(\alpha f + \beta g) = \lim_{t \to +\infty} \mu_t (\alpha f + \beta g)$$

=
$$\lim_{t \to +\infty} \alpha \mu_t(f) + \beta \mu_t(g)$$

=
$$\alpha T(f) + \beta T(g).$$

La continuidad se prueba con argumentos similares a los que ya hicimos, en efecto se tiene que:

$$|T(g) - T(f)| = \lim_{t \to +\infty} |\mu_t(g) - \mu_t(f)| \le \lim_{t \to +\infty} |\mu_t(g - f)| \le ||g - f||_{\infty}$$

por lo que el funcional lineal T es continuo y de norma uno (T(1) = 1). Además T es positivo, porque si $g \ge 0$ entonces $\mu_t(g) \ge 0$ para todo t, y por tanto $T(g) \ge 0$.

Para definir el límite de μ_t vamos a aplicar el teorema de Representación de Riesz (5.1.1), pero para ello es necesario definir un funcional lineal en $C(\Sigma, \mathbb{C})$ y en nuestro caso Testá definido sobre \mathbb{R} . Procedemos de la siguiente forma.

Se define $\widehat{T} : C(\Sigma, \mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ como $\widehat{T}(f) = T(Re(f)) + iT(Im(f))$. \widehat{T} es claramente lineal y continuo en virtud de que T lo es. Mostremos que es positivo: si $f \ge 0$, f es real y por tanto $\widehat{T}(f) = T(f) \ge 0$.

Definido el funcional lineal continuo y positivo sobre \mathbb{C} , el teorema de Representación de Riesz nos dice que existe una única medida positiva $\bar{\nu}$, definida en una σ -álgebra que contiene a los borelianos, y tal que $T(g) = \bar{\nu}(g) = \int g \, d\bar{\nu}$ para toda $g \in C(\Sigma)$, que es límite débil de μ_t . $\bar{\nu}$ es una medida de probabilidad porque $T(1) = \bar{\nu}(\Sigma) = 1$.

La medida $\bar{\nu}$ es invariante por ser límite de medidas de probabilidad (ver [Li85] y apéndice); y la denominación de superior la hereda de que no existe una medida invariante mayor a ella en el orden parcial que establecimos. En efecto, si ν es otra medida invariante, $\nu \leq \mu_0$, donde μ_0 es la medida que coloca a todos los vértices como infectados. La monotonía del proceso de contacto afirma que:

$$\nu = \nu_t \le \mu_t,$$

tomando el límite débil en t se tiene que $\nu \leq \bar{\nu}$.

En virtud de ser comparable con cualquier otra medida invariante en el orden parcial y ser siempre mayor o igual en esa comparación es que se puede afirmar que $\bar{\nu}$ es extremal.

Como se mencionó anteriormente, la medida $\bar{\nu}$ no tiene por qué ser diferente de δ_{\emptyset} , pero si lo es, entonces se tiene que: $\bar{\nu}(\emptyset) = 0$. En efecto, supongamos que $\bar{\nu}(\emptyset) = p < 1$. Luego la medida $\nu(\cdot) = \bar{\nu}(\cdot |\{\emptyset\}^c)$, que tiene peso positivo, es también una medida invariante y satisface $\bar{\nu} \leq \nu$ ya que

$$\bar{\nu} = (1-p)\nu + p\delta_{\emptyset}$$

por lo tanto $\nu = \bar{\nu}$ y p = 0.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que si $\bar{\nu} \neq \delta_{\emptyset}$, entonces

$$\lim_{A\uparrow V} \bar{\nu}\left(\{B \subset V : B \cap A \neq \emptyset\}\right) = 1.$$

2.3.4. Dualidad

En esta subsección se probará un resultado válido en cualquier grafo y que diferencia bastante al proceso de contacto de otros sistemas de partículas.

Proposición 2.3.6. Sea G = (V, E) un grafo conexo de grado acotado y consideremos el proceso de contacto sobre él. Para $A, B \subset V$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(A_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}(A_t^B \cap A \neq \emptyset) \quad para \ todo \ t > 0.$$
(2.7)

Demostración. Fijemos t > 0. Por definición, el suceso $\{A_t^A \cap B \neq \emptyset\}$ implica que existe algún camino activo desde A hasta B, es decir:

$$\{y \in B \colon \exists x \in A \text{ tal que } (x,0) \to (y,t)\} \neq \emptyset.$$

Si se revierte el sentido del tiempo y la dirección de las flechas de infección del proceso A_s obtendremos una nueva versión del procesos de contacto para tiempos $s \in [0, t]$ a la que llamaremos \hat{A}_s .

De esa forma un camino activo en el proceso A_s que va desde $A \times \{0\}$ hasta $B \times \{t\}$ se convierte en un camino activo en el proceso \widehat{A}_s que conecta $B \times \{\widehat{0}\}$ con $A \times \{\widehat{t}\}$, donde \widehat{s} es el tiempo en el proceso revertido, esto es $\widehat{s} = t - s$ (en particular $\widehat{0} = t$ y $\widehat{t} = 0$). En resumen lo anterior muestra que $\{A_t^A \cap B \neq \emptyset\}$ y $\{\widehat{A}_t^B \cap A \neq \emptyset\}$ son el mismo evento. Demos ahora una construcción acoplada de ambos procesos utilizando la representación gráfica. Estudiemos la distribución de \widehat{A}_t .

Los procesos de Poisson revertidos que definen las infecciones y recuperos de \widehat{A}_s son:

$$\widehat{D}_{s}^{x} = D_{t}^{x} - D_{t-s}^{x} =_{d} D_{s}^{x}, \quad y \quad \widehat{N}_{s}^{x,y} = N_{t}^{y,x} - N_{t-s}^{y,x} =_{d} N_{s}^{y,x},$$

para $0 \le s \le t$; donde los procesos de Poisson D^x y $N^{y,x}$ son los de la representación gráfica de A_s . El símbolo $=_d$ indica la igualdad en distribución.

Ahora bien, lo anterior nos dice que podemos construir un proceso A_s con la misma distribución que \hat{A}_s y en la misma representación gráfica que A_s . En efecto, alcanza con definir $\tilde{D}_x = D_x$ y $\tilde{N}^{x,y} = N^{y,x}$. Luego las distribuciones de \hat{A}_s y \tilde{A}_s coinciden y como $\{A_t^A \cap B \neq \emptyset\}$ y $\{\hat{A}_t^B \cap A \neq \emptyset\}$ son el mismo evento se tiene que:

$$\mathbb{P}\Big(A_t^A \cap B \neq \emptyset\Big) = \mathbb{P}\Big(\widehat{A}_t^B \cap A \neq \emptyset\Big) = \mathbb{P}\Big(\widetilde{A}_t^B \cap A \neq \emptyset\Big) = \mathbb{P}\Big(A_t^B \cap A \neq \emptyset\Big).$$

A la igualdad (2.7) se le denomina propiedad de *auto-dualidad* o simplemente *dualidad* del proceso de contacto.

Veamos una aplicación inmediata que nos será útil más adelante. Si tomamos B = V en la igualdad (2.7) se obtiene que:

$$\mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset) = \mathbb{P}(A_t^V \cap A \neq \emptyset) \,.$$

Como $\mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset)$ es decreciente con t por el hecho que $\{A_{t+s}^A \neq \emptyset\} \subset \{A_t^A \neq \emptyset\}$, su límite existe. Entonces vale:

$$\begin{split} \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) &= \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset) \\ &= \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(A_t^V \cap A \neq \emptyset) \\ &= \bar{\nu}(\{B \subset V : B \cap A \neq \emptyset\}) \,. \end{split}$$

Por tanto si $\bar{\nu} \neq \delta_{\emptyset}$ se tiene que

$$\lim_{A\uparrow V} \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) = 1.$$
(2.8)

Esto nos dice que, siempre y cuando $\bar{\nu} \neq \delta_{\emptyset}$, si inicialmente hay muchos vértices infectados, entonces la probabilidad de que para todo tiempo siga habiendo sitios infectados es alta.

2.3.5. Convergencia completa

En este apartado comenzaremos a trabajar sobre el concepto de convergencia completa. Sea A un subconjunto finito de V. Si A es la configuración inicial del proceso, se escribe:

$$\alpha_A = \mathbb{P}^A (A_t \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0),$$

y μ_t^A la distribución de A_t^A .

La propiedad de convergencia completa significa que para toda configuración inicial finita A, vale:

$$\mu_t^A \Rightarrow \alpha_A \,\bar{\nu} + (1 - \alpha_A) \delta_{\emptyset} \,. \tag{2.9}$$

Si se supiese que hay a lo sumo dos medidas invariantes extremales, que serían $\delta_{\emptyset} \neq \bar{\nu}$, el teorema de Krein-Milman nos dice que todas las medidas invariantes son una combinación convexa de $\delta_{\emptyset} \neq \bar{\nu}$, y la propiedad de convergencia completa nos dice cómo hallarlas.

Se dice que el suceso $\{A_t \cap B \neq \emptyset\}$ ocurre infinitamente a menudo cuando $\{A_t \cap B \neq \emptyset$ i.o.} cuando $A_{t_k} \cap B \neq \emptyset$ para una sucesión de tiempos $(t_k : k \ge 1)$ creciente a infinito; en ese caso se escribe $\{A_t \cap B \neq \emptyset$ i.o.}.

Antes de enunciar la proposición que da origen a la subsección observaremos que la condición (2.9) es equivalente a la siguiente propiedad:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^A \cap B \neq \emptyset\right) = \alpha_A \alpha_B, \quad \text{para todo } B \subset V \text{ finito}.$$
 (2.10)

En virtud de (2.9) sabemos que la distribución de A_t^A converge débilmente a la medida $\alpha_A \bar{\nu} + (1 - \alpha_A) \delta_{\emptyset}$. Entonces se tiene que:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^A \cap B \neq \emptyset\right) = \alpha_A K_B,$$

donde K_B es una constante que depende solamente de B. Ahora bien, por la dualidad (2.7) se tiene que:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^A \cap B \neq \emptyset\right) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^B \cap A \neq \emptyset\right) = \alpha_B K_A,$$

donde K_A es una constante que depende solamente de A. Por tanto $K_B = \alpha_B K$, siendo K una constante que no depende de B. Para ver que K = 1 se toma B = V (el razonamiento anterior no depende de que B sea finito) y se asume que $\alpha_V = 1$ (cuestión que demostraremos al final del capítulo); se tiene entonces que:

$$\alpha_A = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^A \neq \emptyset\right) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_t^A \cap V \neq \emptyset\right) = \alpha_A \alpha_B K = \alpha_A K,$$

de lo que se deduce que K = 1 y se prueba (2.10).

Sea $A \subset V$ una configuración inicial finita y μ_t^A la distribución de A_t^A . Si $B \subset V$ es no vacío y finito, (2.10) afirma que:

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_t^A (\{ E \subset V \colon E \cap B \neq \emptyset \}) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(A_t^A \cap B \neq \emptyset)$$

$$= \alpha_A \alpha_B$$

$$= \alpha_A \bar{\nu} (\{ E \subset V \colon E \cap B \neq \emptyset \}).$$

Si B es infinito se puede escribir como unión creciente de conjuntos finitos, por lo que aplicando lo anterior se obtiene también que:

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_t^A(\{E \subset V \colon E \cap B \neq \emptyset\}) = \alpha_A \bar{\nu}(\{E \subset V \colon E \cap B \neq \emptyset\}).$$

Finalmente, si $B = \emptyset$, entonces $\mu_t^A(\emptyset) = \mathbb{P}(A_t^A = \emptyset) \to 1 - \alpha_A$, por tanto se obtiene (2.9).

La siguiente proposición es una herramienta que utilizaremos más adelante para probar un resultado de convergencia completa en \mathbb{Z}^d .

Proposición 2.3.7. Supongamos que para todo $x \in V$ y todo $A \subset V$ se cumple que

$$\mathbb{P}(x \in A_t^A \quad i.o.) = \alpha_A \,, \tag{2.11}$$

y que también vale:

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\liminf_{t \to +\infty} \mathbb{P}(A_t^{B(n)} \cap B(n) \neq \emptyset) \right] = 1, \qquad (2.12)$$

donde B(n) es una bola de centro fijo y radio n. Entonces se cumple (2.9).

Recíprocamente, si vale (2.9) para todo A y $\bar{\nu} \neq \delta_{\emptyset}$ entonces se cumplen (2.11) y (2.12).

Demostración. Se sabe que la condición (2.9) es equivalente a la afirmación (2.10), por lo que demostraremos la equivalencia con esta última.

Usando la representación gráfica y la independencia de los procesos de Poisson en regiones disjuntas de la misma se tiene que:

$$\mathbb{P}\left(A_{2t}^{A} \cap B \neq \emptyset\right) = \mathbb{P}\left(\exists \text{ un camino activo de } (x,0) \text{ a } (y,2t) \text{ para algún } x \in A, y \in B\right) \\
\leq \mathbb{P}\left(\exists \text{ un camino activo de } (x,0) \text{ a } (z,t) \text{ para algún } x \in A, z \in V\right) \\
\times \mathbb{P}\left(\exists \text{ un camino activo de } (z,t) \text{ a } (y,2t) \text{ para algún } z \in V, y \in B\right) \\
= \mathbb{P}\left(A_{t}^{A} \neq \emptyset\right) \mathbb{P}\left(A_{t}^{B} \neq \emptyset\right),$$

donde en la última igualdad usamos el mismo argumento de revertir el tiempo que en la propiedad de dualidad (2.7). Pasando al límite se tiene entonces que para todo $A, B \subset V$ vale:

$$\limsup_{t \to \infty} \mathbb{P}(A_t^A \cap B \neq \emptyset) \le \alpha_A \, \alpha_B \, .$$

Para mostrar la otra desigualdad se define el tiempo de parada $\tau^B = \inf\{t \ge 0 : A_t \supset B\}$. Ahora bien, usando la propiedad fuerte de Markov y la monotonía se tiene que:

$$\mathbb{P}^{A}(A_{s+t} \cap C \neq \emptyset) \geq \mathbb{P}^{A}(\tau^{B} \leq s) \mathbb{P}^{B}(A_{r} \cap C \neq \emptyset \text{ con } r \geq t) \\
\geq \mathbb{P}^{A}(\tau^{B} \leq s) \inf_{r \geq t} \mathbb{P}^{B}(A_{r} \cap C \neq \emptyset),$$
(2.13)

para A, B, $C \subset V$. Si ahora aplicamos (2.13) dos veces y usamos la dualidad (2.7) en el segundo renglón, obtenemos:

$$\mathbb{P}^{A}(A_{s+t+u} \cap D \neq \emptyset) \geq \mathbb{P}^{A}(\tau^{B} \leq s) \inf_{r \geq t+u} \mathbb{P}^{B}(A_{r} \cap D \neq \emptyset) \\
= \mathbb{P}^{A}(\tau^{B} \leq s) \inf_{r \geq t+u} \mathbb{P}^{D}(A_{r} \cap B \neq \emptyset) \\
\geq \mathbb{P}^{A}(\tau^{B} \leq s) \mathbb{P}^{D}(\tau^{C} \leq t) \inf_{r \geq u} \mathbb{P}^{C}(A_{r} \cap B \neq \emptyset),$$

para $A, B, C, D \subset V$.

Luego, tomando B = C = B(n), haciendo primero $u, s, t \to +\infty$ y luego $n \to +\infty$ se obtiene que:

$$\lim_{u \to +\infty} \inf \mathbb{P}^A (A_u \cap D \neq \emptyset) \geq \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}^A (\tau^{B(n)} < \infty) \mathbb{P}^D (\tau^{B(n)} < \infty),$$

ya que en virtud de (2.12) se sabe que:

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{u \to +\infty} \inf_{r \ge u} \mathbb{P}^{B(n)} (A_r \cap B(n) \neq \emptyset) \right] = 1.$$

Afirmamos que si $B \subset V$ es finito entonces

$$\mathbb{P}^A(\tau^B < \infty) \ge \alpha_A.$$

En efecto, sea $x \in B$. Entonces:

$$\alpha_A = \mathbb{P}(x \in A_t^A \text{ i.o.}) \geq \mathbb{P}(x \in A_t^A \text{ para algún } t)$$

$$\geq \mathbb{P}(A_t^A \supset B \text{ para algún } t) = \mathbb{P}^A(\tau^B < \infty)$$

Esto completa la prueba en una dirección, puesto que,

$$\alpha_A \alpha_D \ge \limsup_{u \to +\infty} \mathbb{P}^A (A_u \cap D \neq \emptyset) \ge \liminf_{u \to +\infty} \mathbb{P}^A (A_u \cap D \neq \emptyset) \ge \alpha_A \alpha_D.$$

Para probar el recíproco sabemos que (2.9) equivale a la afirmación (2.10), y de ésta se deduce la prueba: (2.12) es inmediata a partir de (2.10) tomando A = B = B(n) y utilizando (2.8).

Para chequear (2.11) se usa (2.10) para concluir que

$$\mathbb{P}\left(A_t^A \cap B \neq \emptyset \text{ i.o.}\right) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_s^A \cap B \neq \emptyset \text{ para algún } s \ge t\right) \ge \alpha_A \alpha_B.$$

Ahora bien, como $\mathbb{P}(x \in A_1^y) > 0$ para todo x, y se obtiene que

$$\mathbb{P}\left(x \in A_t^A \text{ i.o.}\right) \geq \alpha_A \alpha_B;$$

por lo que tomando B = B(n) y aplicando (2.8) se prueba (2.11).

Observación 2.3.8. Si V es conexo la condición (2.11) no depende de x.

2.4. La formulación del problema

Nuestro interés en el proceso de contacto se concentra en estudiar su evolución en el tiempo en función de los valores que toma la tasa de contagio dada por el parámetro λ . En particular nos interesa estudiar para qué valores del parámetro el proceso tiene una probabilidad positiva de persistir en el tiempo, y cuando esto sucede, cómo lo hace,

con qué velocidad crece, etc. De forma similar surgen preguntas análogas para cuando el proceso se extingue casi seguramente.

Se dirá que el proceso de contacto sobrevive cuando $\mathbb{P}(A_t^x \neq \emptyset)$ para todo t > 0) es positiva para cada $x \in V$. En caso contrario diremos que el proceso de contacto se extingue. Como consideramos grafos conexos la definición de la probabilidad de supervivencia no depende de x. Cuando sea necesario reafirmar que la probabilidad con la que se trabaja depende de λ se escribirá \mathbb{P}_{λ} . Se define el parámetro crítico del proceso de contacto como sigue:

 $\lambda_c = \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathbb{P}_{\lambda} \left(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0 \right) > 0 \right\}.$

Como veremos enseguida este parámetro distingue entre dos tipos de comportamiento: para valores menores que λ_c el proceso se extingue casi seguramente, y por encima de este valor crítico el proceso persiste con probabilidad positiva. A este comportamiento se lo llama transición de fase.

Proposición 2.4.1. Supongamos que λ_c es positivo y finito, entonces:

- 1. Si $\lambda < \lambda_c$, el proceso de contacto de parámetro λ se extingue casi seguramente.
- 2. Si $\lambda > \lambda_c$, el proceso de contacto de parámetro λ persiste con probabilidad positiva.

Demostración. La primera afirmación es obvia a partir de la definición del valor crítico.

Sea $\mu > \lambda > \lambda_c$. Notemos por A_t y B_t a los procesos de contacto asociados a λ y μ respectivamente. Sabemos, por lo probado en la primera parte de la sección anterior, que ambos procesos se pueden acoplar de forma que $A_t \subset B_t$ para todo t. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}_{\mu}(B_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0) \geq \mathbb{P}_{\lambda}(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0).$$

De manera que la probabilidad de supervivencia es monótona en los valores del parámetro. Esto prueba que, en el caso de existir, hay una única transición de fase, y por tanto si $\lambda > \lambda_c$ el proceso de contacto sobrevive con probabilidad positiva.

 \square

Un interrogante que surge inmediatamente de la proposición anterior es qué sucede con el proceso de contacto cuyo parámetro es λ_c . Esta pregunta, así como la existencia de la transición de fase en algunos grafos particulares, será contestada más adelante.

En una primera etapa nos importa el estudio de las dos fases que recién distinguíamos del proceso de contacto. También nos interesa diferenciar las formas en las que el proceso de contacto persiste. Decimos entonces que el proceso de contacto persiste fuertemente cuando $\mathbb{P}(A_t^x \cap \{x\} \neq \emptyset \ \text{ i.o.}) = \mathbb{P}(x \in A_t^x \ \text{ i.o.}) > 0$ para todo $x \in V$. Nuevamente como el grafo es conexo esta definición no depende de x.

La idea de que el proceso persista fuertemente es que un sitio es re infectado infinitas veces para una sucesión (creciente a infinito) de tiempos. Si el proceso de contacto sobrevive pero no sobrevive fuertemente diremos que sobrevive débilmente. Podemos entonces definir λ_2 como el ínfimo de los valores del parámetro para el cual el proceso de contacto persiste fuertemente. Esta idea fue introducida por Pemantle en 1992 ([Pem92]) tras observar este comportamiento en el proceso de contacto en árboles. El valor λ_2 podría definir a priori una nueva transición de fase, ya que el comportamiento del proceso es diferente en uno u otro caso a pesar de la persistencia en ambos. Es claro que $\lambda_2 \geq \lambda_c$. A veces también se escribirá a λ_c como λ_1 .

En resumen: en principio dividiremos el comportamiento del proceso de contacto según los siguientes ítems:

- el proceso se extingue casi seguramente $(0 \le \lambda < \lambda_1)$.
- el proceso sobrevive débilmente $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$.
- el proceso sobrevive fuertemente $(\lambda > \lambda_2)$.

Ahora bien, a partir de esta división tentativa surgen algunas preguntas naturales. Por ejemplo: ¿existe una transición de fase?, esto es: $j_0 < \lambda_1 < \infty$? $j_1 < \lambda_2 < \infty$?, ¿qué sucede con el proceso cuando $\lambda = \lambda_1$ o $\lambda = \lambda_2$?, ¿cómo es el crecimiento del proceso cuando se encuentra la fase supercrítica y cómo decrece en la fase subcrítica? En esta monografía intentaremos abordar estas cuestiones para el caso de los grafos \mathbb{L}^d y enunciaremos algunos resultados para \mathbb{T}_d .

La definición de que el proceso de contacto A_t persista refiere al proceso que al comienzo tiene solamente al origen infectado. Como el proceso de contacto es aditivo, en el sentido de que se puede dar una construcción tal que $A_t^A \cup A_t^B = A_t^{A \cup B}$, es sencillo observar que la persistencia del proceso de contacto con una cantidad finita de vértices infectados al comienzo, es equivalente a que A_t^0 sobreviva.

Ahora bien, ¿qué sucede cuando la configuración inicial tiene una cantidad infinita de sitios infectados? La respuesta es sencilla: independientemente del valor de λ , si la configuración inicial es infinita, el proceso no se extingue.La demostración resulta de aplicar el siguiente resultado de procesos de Poisson.

Lema 2.4.2. Sea T > 0 un real fijo. Consideremos una familia $(N_t^k : k \in \mathbb{N})$ de procesos de Poisson de parámetro λ e independientes entre sí.

Se define $U = \{N_T^k \ge 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathbb{P}(U) = 0$.

Demostración. Sean $U_k = \{N_T^1 \ge 1, \dots, N_T^k \ge 1\}$. Es inmediato que $U = \bigcap_{k \ge 1} U_k$ y que $U_{k+1} \subset U_k$, por tanto $\mathbb{P}(U) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(U_k)$.

Para calcular $\mathbb{P}(U_k)$ usamos la independencia de los procesos de Poisson:

$$\mathbb{P}(U_k) = \mathbb{P}(N_T^1 \ge 1) \dots \mathbb{P}(N_T^k \ge 1) = (1 - e^{-\lambda T})^k \to 0$$

cuando $k \to +\infty$.

Con este lema es sencillo mostrar que el proceso de contacto con una configuración inicial infinita sobrevive casi seguramente. En efecto, sea $A_0 = (x_n : n \ge 1)$ la configuración inicial infinita. Si el proceso se extingue quiere decir que al menos una vez los relojes Poisson que indican los recuperos de las infecciones de los x_n tuvieron un salto, esto es que:

$$\left\{A_t^{A_0} = \emptyset \text{ para algún } t\right\} \subset \left\{\exists T > 0 \colon D_T^{x_n} \ge 1 \text{ para todo } n\right\},$$
siendo D_t^x el proceso de Poisson que marca los recuperos en el sitio x. Por el lema anterior, el lado derecho de la inclusión tiene probabilidad nula, lo que muestra la afirmación.

Con alguna leve modificación de este argumento se puede deducir que si la configuración inicial es finita, fijo un tiempo, el proceso se desarrolla en una "caja" acotada, pues la probabilidad de que haya una cantidad infinita de saltos de los procesos de Poisson es nula y no hay generación espontánea de sitios infectados; recordemos que la tasa de contagio de cada sitio es a lo sumo λ por la cantidad de vecinos y por tanto la cantidad de sitios infectados es siempre finita.

2.5. Una desigualdad FKG

Empecemos definiendo algunos conceptos que son necesarios para formular resultados que serán de utilidad más adelante.

Definición 2.5.1. Diremos que una medida de probabilidad μ sobre Σ tiene correlación positiva si para $f, g \in \mathcal{M}$ cualesquiera se cumple que

$$\int_{\Sigma} fg \, d\mu \geq \int_{\Sigma} f \, d\mu \, \int_{\Sigma} g \, d\mu \, .$$

En particular, esta definición nos dice que si $A, B \subset \Sigma$ son eventos tales que sus indicatrices son funciones crecientes, entonces $\mu(A \cap B) \ge \mu(A)\mu(B)$. Esta última desigualdad, que se denomina desigualdad FKG, fue probada inicialmente por Harris en 1960 en el marco de los procesos de percolación, y posteriormente fue probada en contextos más generales. La denominación FKG debe su nombre a Fortuin, Kasteleyn y Ginibre, quienes generalizaron la desigualdad para varios conjuntos parcialmente ordenados. Las desigualdades del tipo FKG (o también de correlación) juegan un importante papel tanto en los procesos de percolación, como en mecánica estadística y en algunos sistemas de partículas.

El objetivo de esta sección es brindar condiciones para afirmar que una medida de probabilidad tiene correlación positiva, y en definitiva poder utilizar una desigualdad FKG. En nuestro caso utilizaremos básicamente el resultado para medidas producto u otros casos que se deducen a partir de ellas.

Para ahorrar espacio utilizaremos la notación $\mu(\eta) = \mu(\{x \in V : \eta(x) = 1\}).$

Teorema 2.5.2 (Holley). Sea $\Sigma = \{0, 1\}^V$ donde V es finito, y consideremos el orden parcial natural en Σ . Para $\eta, \xi \in \Sigma$, definimos:

$$(\eta \lor \xi)(x) = \max\{\eta(x), \xi(x)\}, \ (\eta \land \xi)(x) = \min\{\eta(x), \xi(x)\}.$$

Si μ_1 y μ_2 son medidas en Σ que le asignan una probabilidad positiva a cada elemento no nulo de Σ , y cumplen que:

$$\mu_1(\eta \wedge \xi)\mu_2(\eta \vee \xi) \ge \mu_1(\eta)\mu_2(\xi) \quad para \ todo \ \eta, \xi \in \Sigma \,, \tag{2.14}$$

entonces $\mu_1 \leq \mu_2$.

Demostración. Supongamos que se tiene una cadena de Markov de tiempo continuo (η_t, ξ_t) en $\{(\eta, \xi) \in \Sigma \times \Sigma : \eta \leq \xi\}$ tal que:

-
 ${\eta}_t$ es una cadena de Markov irreducible con medida estacionaria
 ${\mu}_1$
- ξ_t es una cadena de Markov irreducible con medida estacionaria μ_2 .

Recordemos que una cadena de Markov irreducible en un espacio de estados finitos tiene una única medida estacionaria, por lo que en el supuesto anterior, μ_1 y μ_2 son las únicas medidas invariantes de η_t y ξ_t respectivamente.

Luego, si $\eta = \eta_0 \leq \xi = \xi_0$ y $f \in \mathcal{M}$ se tiene que

$$\int f d[\eta \mathbb{P}_1(t)] \leq \int f d[\xi \mathbb{P}_2(t)] \quad \text{para todo} t.$$

Por tanto si tomamos límite en t y tenemos en cuenta las medidas invariantes de cada una de las cadenas se obtiene:

$$\int f \, d\mu_1 \leq \int f \, d\mu_2 \, ,$$

por lo que $\mu_1 \leq \mu_2$, lo que prueba el resultado.

Dada $\eta \in \Sigma$, se define $\eta_x(y) = \eta(y)$ si $y \neq x$, $\eta_x(x) = 1 - \eta(x)$. Construyamos cadenas de Markov η_t y ξ_t de forma que el par cumpla los ítems señalados. Para ello definimos las tasas de transición en cada vértice. Para η_t :

$$q(\eta, \eta_x)$$
: $\eta \to \eta_x$ a tasa 1 si $\eta(x) = 0$
 $\eta \to \eta_x$ a tasa $\frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)}$ si $\eta(x) = 1$

 $q(\eta, \zeta) = 0$ en otro caso.

Para ξ_t :

$$q(\xi, \xi_x): \quad \xi \to \xi_x \text{ a tasa } 1 \text{ si } \xi(x) = 0$$

 $\xi \to \xi_x \text{ a tasa } \frac{\mu_2(\xi_x)}{\mu_2(\xi)} \text{ si } \xi(x) = 1$

 $q(\xi,\zeta) = 0$ en otro caso.

La definición de las tasas de transición de cada estado tiene sentido porque μ_1 y μ_2 asignan, por hipótesis, probabilidades positivas a las configuraciones no nulas en Σ (si la configuración es nula, cada sitio varía su estado a tasa uno).

Ahora bien, a partir de la definición y del hecho que V sea finito, se observa que ambas cadenas son irreducibles, y por tanto existe una única medida invariante para cada una de la cadenas. Para ver que μ_1 y μ_2 son las medidas invariantes de η_t y ξ_t observemos las ecuaciones de balance respectivas.

$$\mu_1(\eta)q(\eta,\eta_x) = \mu_1(\eta) \left[\mathbf{1}_{\{\eta(x)=0\}} + \mathbf{1}_{\{\eta(x)=1\}} \frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} \right]$$

= $\mu_1(\eta)\mathbf{1}_{\{\eta(x)=0\}} + \mu_1(\eta_x)\mathbf{1}_{\{\eta(x)=1\}}.$

Por otro lado:

$$\mu_{1}(\eta_{x})q(\eta_{x},\eta) = \mu_{1}(\eta_{x}) \left[\mathbf{1}_{\{\eta_{x}(x)=0\}} + \mathbf{1}_{\{\eta_{x}(x)=1\}} \frac{\mu_{1}(\eta)}{\mu_{1}(\eta_{x})} \right]$$
$$= \mu_{1}(\eta_{x})\mathbf{1}_{\{\eta_{x}(x)=0\}} + \mu_{1}(\eta)\mathbf{1}_{\{\eta_{x}(x)=1\}}$$
$$= \mu_{1}(\eta_{x})\mathbf{1}_{\{\eta(x)=1\}} + \mu_{1}(\eta)\mathbf{1}_{\{\eta(x)=0\}}.$$

De lo anterior se deduce que: $\mu_1(\eta)q(\eta, \eta_x) = \mu_1(\eta_x)q(\eta_x, \eta)$ para una configuración η cualquiera. Finalmente, la ecuación de balance para la cadena η_t respecto de μ_1 :

$$\sum_{x \in V} \mu_1(\eta) q(\eta, \eta_x) = \sum_{x \in V} \mu_1(\eta_x) q(\eta_x, \eta)$$

se verifica para toda $\eta \in \Sigma$, y entonces μ_1 es la medida invariante de η_t . Análogamente se demuestra que μ_2 es la medida estacionaria de ξ_t .

Solo nos resta dar una construcción acoplada de ambas cadenas de forma tal que $\eta_t \leq \xi_t$ para todo t, si $\eta = \eta_0 \leq \xi_0 = \xi$. Para ello procedemos como sigue: si $\eta \leq \xi$,

$$(\eta, \xi) \to (\eta_x, \xi) \quad \text{a tasa} \qquad 1 \qquad \text{si } \eta(x) = 0 \quad \text{y } \xi(x) = 1$$

$$(\eta, \xi) \to (\eta, \xi_x) \quad \text{a tasa} \qquad \frac{\mu_2(\xi_x)}{\mu_2(\xi)} \qquad \text{si } \eta(x) = 0 \quad \text{y } \xi(x) = 1$$

$$(\eta, \xi) \to (\eta_x, \xi_x) \quad \text{a tasa} \qquad 1 \qquad \text{si } \eta(x) = \xi(x) = 0,$$

$$(\eta, \xi) \to (\eta_x, \xi_x) \quad \text{a tasa} \qquad \mu_2(\xi_x)\mu_2(\xi) \qquad \text{si } \eta(x) = \xi(x) = 1,$$

$$(\eta, \xi) \to (\eta_x, \xi) \quad \text{a tasa} \qquad \frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} - \frac{\mu_2(\xi_x)}{\mu_2(\xi)} \qquad \text{si } \eta(x) = \xi(x) = 1$$

Para que lo anterior tenga sentido debe cumplirse que:

$$\frac{\mu_1(\eta_x)}{\mu_1(\eta)} \geq \frac{\mu_2(\xi_x)}{\mu_2(\xi)} \text{ , cuando } \eta(x) = \xi(x) = 1 \text{ y } \eta \leq \xi.$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$\mu_1(\eta_x)\mu_2(\xi) \ge \mu_1(\eta)\mu_2(\xi_x)$$

con las mismas condiciones sobre η y ξ . Bajo estas últimas se tiene que $(\eta \land \xi_x) = \eta_x$ y $(\eta \lor \xi_x) = \xi$, por lo que la desigualdad se transforma en:

$$\mu_1(\eta \wedge \xi_x)\mu_2(\eta \vee \xi_x) \ge \mu_1(\eta)\mu_2(\xi_x),$$

la cual es cierta por la desigualdad (2.14) de la hipótesis aplicada a $\eta \neq \xi_x$.

Finalmente las tasas de transición de las cadenas marginales coinciden con las antes definidas y tenemos una construcción acoplada de las cadenas, lo que finaliza la prueba del teorema.

Corolario 2.5.3 (FKG). Sean $\Sigma = \{0,1\}^V$ donde V es finito, y μ una medida de probabilidad que le asigna un valor positivo a cada configuración no nula de Σ y que cumple la designaldad,

$$\mu(\eta \wedge \xi)\mu(\eta \vee \xi) \ge \mu(\eta)\mu(\xi) \text{ para todo } \eta, \xi.$$
(2.15)

Entonces μ tiene correlación positiva.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{M}$. Supongamos en principio que g > 0. Definimos dos medidas de probabilidad auxiliares: $\mu_1 = \mu \neq \mu_2(\eta) = \frac{\mu(\eta)g(\eta)}{\int g \, d\mu}$; esta última está bien definida pues g es positiva. Ahora bien, para $\eta, \xi \in \Sigma$:

$$\mu_1(\eta \wedge \xi)\mu_2(\eta \vee \xi) = \frac{\mu(\eta \wedge \xi) g(\eta \vee \xi) \mu(\eta \vee \xi)}{\int g \, d\mu}$$

$$\geq \mu(\eta) \frac{\mu(\xi)g(\xi)}{\int g \, d\mu} = \mu_1(\eta)\mu_2(\xi),$$

donde en la desigualdad utilizamos (2.15) para μ y que $g \in \mathcal{M}$ (y por tanto $g(\eta \lor \xi) \ge g(\xi)$). Luego $\mu_1 \le \mu_2$ por el teorema anterior, lo que equivale a:

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 \leq \int f d\mu_2 = \frac{\int f g \, d\mu}{\int g d\mu}, \quad \text{para } f \in \mathcal{M},$$

entonces $\left(\int f d\mu\right) \left(\int g d\mu\right) \leq \int f g d\mu.$

Finalmente sea $g \in \mathcal{M}$. Definiendo por ejemplo $\tilde{g} = g + K$, donde $K = \max_{x \in \Sigma} |g(x)| + 1$, y aplicando lo probado anteriormente a \tilde{g} se deduce el resultado.

Corolario 2.5.4. Sea ν una medida producto en $\Sigma = \{0,1\}^V$, donde V es finito, con

$$\nu\{\eta \colon \eta(x) = 1\} = \alpha(x), \ x \in V.$$

Entonces ν tiene correlación positiva.

Demostración. La probabilidad de un conjunto cilíndrico tiene la siguiente forma:

$$\nu\{\eta: \eta(x) = 1 \ \forall \ x \in G; \ \eta(x) = 0 \ \forall \ x \in H\} = \prod_{x \in G} \alpha(x) \ \prod_{x \in H} [1 - \alpha(x)] \ dx = 0 \ \forall \ x \in H\} = \prod_{x \in G} \alpha(x) \ dx = 0 \ dx =$$

La prueba consiste en aplicar el resultado del corolario anterior, observando que ambos lados de la desigualdad (2.15) del teorema de Holley se pueden expresar como:

$$\prod_{x \in V} \alpha(x)^{\eta(x) + \xi(x)} \left[1 - \alpha(x)\right]^{2 - \eta(x) - \xi(x)}.$$

Los resultados anteriores prueban la desigualdad FKG en el contexto de medidas producto Bernoulli, siempre con un conjunto de vértices finito. Veamos ahora cómo a partir de estos resultados se puede deducir una afirmación análoga para una medida que se obtiene a partir de procesos de Poisson independientes asociados a un conjunto finito de vértices.

Sea N un proceso de Poisson de tasa uno sobre [0, 1] (si N' es un proceso de Poisson de tasa λ consideramos $N'(t/\lambda)$ que es un proceso de Poisson de tasa uno; esencialmente la cuenta es la misma). Sea $A \subset [0, 1]$ un boreliano, N(A) es una variable aleatoria con distribución de Poisson de media m(A), donde m es la medida de Lebesgue en [0, 1]. Definimos la variable aleatoria M(A) como:

$$M(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(A) = 0\\ 1 & \text{si } N(A) \ge 1. \end{cases}$$

Advertir que si $(A_i: i \in \mathbb{N})$ es una sucesión de borelianos disjuntos de [0, 1], entonces $(N(A_i): i \in \mathbb{N})$ es una sucesión de variables independientes y $(M(A_i): i \in \mathbb{N})$ también. Observar también que cuando m(A) es pequeño, es sencillo estimar la probabilidad de que N(A) y M(A) sean diferentes, en efecto:

$$\mathbb{P}(N(A) \neq M(A)) = \mathbb{P}(N(A) \ge 2) = 1 - e^{-m(A)} [1 + m(A)] \simeq \frac{1}{2} [m(A)]^2$$

cuando $m(A) \to 0$.

Consideremos n un natural positivo y los intervalos $J_i^n = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ para $i = 1, \ldots, n$. Si definimos $A_i^n = J_i^n \cap A$, tenemos que para valores de n suficientemente grandes:

$$\mathbb{P}(N(A_i^n) \neq M(A_i^n) \text{ para algún } i) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\big(N(A_i^n) \neq M(A_i^n)\big) \le \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \, [m(A_i^n)]^2 \, \le \frac{1}{2n} \, ,$$

ya que $m(A_i^n) \le m(J_i^n)$.

Ahora bien, si $f, g \in \mathcal{M}$ y $\epsilon > 0$, tomemos n_0 tal que $1/2n < \epsilon$ para todo $n \ge n_0$. Sea μ la distribución de N(A) y μ_n la distribución de $\sum_{i=1}^n M(A_i^n)$; entonces $|\mu - \mu_n| < \epsilon$ para todo $n \ge n_0$. Por tanto $\mu_n \to \mu$ débilmente y por lo que se probó para medidas producto:

$$\mu(fg) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(fg) \ge \lim_{n \to \infty} \mu_n(f)\mu_n(g) = \mu(f)\mu(g).$$

Capítulo 3 El proceso de contacto en \mathbb{L}^d

En este capítulo se estudia el proceso de contacto en el retículo *d*-dimensional \mathbb{L}^d . En la primera sección se muestra la existencia efectiva de una transición de fase entre el comportamiento subcrítico (extinción casi segura) y el supercrítico (persistencia con probabilidad positiva). En la segunda sección se presentan imágenes de algunas simulaciones realizadas. La tercer sección de este capítulo apunta a establecer un acoplamiento entre el proceso de percolación por sitios en \mathbb{Z} con el proceso de contacto en \mathbb{L}^d , con el objetivo de mostrar que si el parámetro toma el valor crítico el proceso se extingue casi seguramente. A su vez se prueba que no existe una fase de supervivencia débil, es decir, $\lambda_2 = \lambda_1$. Luego se presentan resultados (algunos con demostración, otros solamente enunciados) sobre el crecimiento o decrecimiento en cada una de las fases y la convergencia a las medidas invariantes.

3.1. La transición de fase

El siguiente teorema permitirá reducir una de las cotas del parámetro crítico al caso unidimensional. Recordemos que el parámetro crítico λ_c se define como:

$$\lambda_c = \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathbb{P}_{\lambda} \left(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t > 0 \right) > 0 \right\}.$$

A veces se lo llama también λ_1 .

Teorema 3.1.1. Sea $\lambda_c(d)$ el valor crítico del proceso de contacto en \mathbb{L}^d . Se cumple que

$$d\lambda_c(d) \le \lambda_c(1).$$

Demostración. Consideremos $\Pi_d : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}$ tal que $\Pi_d(x_1, \ldots, x_d) = x_1 + \ldots + x_d$.

La prueba consiste en dar un acoplamiento entre A_t , el proceso de contacto de parámetro λ en \mathbb{L}^d con condición inicial A_0 finita, y B_t , un proceso de contacto en \mathbb{L} , de forma que,

$$B_t \subset \Pi_d(A_t)$$
 para todo $t \ge 0.$ (3.1)

Sean $A ext{ y } B$ subconjuntos de $\mathbb{Z}^d ext{ y } \mathbb{Z}$ respectivamente, tales que A es finito $ext{ y } B$ está incluido en $\Pi_d(A)$. Esto es, dado y en B, existe $x = (x_1, \ldots, x_d) \in A$ tal que $\Pi_d(x) = y$. A cada recupero del sitio x le asociamos una recuperación en el sitio y. Esto significa que los tiempos de recupero de x e y serán los mismos. Por tanto les asociamos el mismo proceso de Poisson, es decir, $D_t^x = D_t^y$.

Además asociamos un contagio de y hacia y - 1 (si y - 1 no está infectado) cuando existe un contagio de x hacia alguno de sus siguientes d vecinos:

$$\hat{x}_1 = (x_1 - 1, x_2, \dots, x_d); \dots; \hat{x}_d = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d - 1).$$

Formalmente se tiene que los procesos de Poisson que generan las infecciones de x hacia alguno de los \hat{x}_i son independientes entre sí, por tanto y contagiará a y - 1 a razón de un proceso de Poisson de tasa $d\lambda$ que es la suma de los d procesos de Poisson que indican los contagios de x a \hat{x}_i , es decir:

$$N^{y,y-1} = \sum_{i=1}^{d} N^{x,\hat{x}_i}$$

Observar que $\Pi_d(\hat{x}_i) = y - 1$ para todo *i*, por lo que se preserva la inclusión (3.1).

Análogamente diremos que existe una infección de y hacia y+1 (si y+1 no está infectado), cuando exista un contagio de x hacia alguno de los siguientes d vecinos:

$$\bar{x}_1 = (x_1 + 1, x_2, \dots, x_d); \dots; \bar{x}_d = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d + 1).$$

De esta forma se acopla el proceso de contacto A_t en \mathbb{L}^d de parámetro λ y condición inicial A_0 finito, con un proceso de contacto B_t en \mathbb{L} de parámetro $d\lambda$ y $B_0 \subset \Pi_d(A_0)$, con la propiedad (3.1), puesto que si se cumple inicialmente la transición descripta la mantiene.

El acoplamiento anterior permite afirmar que:

$$\mathbb{P}\left(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t\right) \geq \mathbb{P}\left(B_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t\right),$$

por lo que si se elige $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma tal que $\lambda < \lambda_c(d)$, el término de la izquierda es nulo, por tanto el proceso de contacto B_t se extingue casi seguramente, lo que muestra que $d\lambda < \lambda_c(1)$. Luego, la definición del parámetro crítico implica que $d\lambda_c(d) \leq \lambda_c(1)$.

El siguiente resultado prueba la existencia de la transición de fase en \mathbb{L}^d .

Teorema 3.1.2. Sea $\lambda_c(d)$ el valor crítico para el proceso de contacto en \mathbb{L}^d . Se cumple que:

$$\frac{1}{2d} \le \lambda_c(d) < \infty$$

Demostración. Comencemos por la cota inferior.

Sea $C_t = |A_t^0|$. Este proceso decrece en uno a tasa C_t , ya que cada vértice infectado se recupera a tasa 1 y de forma independiente del resto. Por otro lado crece (en uno) a tasa $\lambda N_{A_t^0}$, siendo $N_{A_t^0}$ la cantidad de vecinos del proceso de contacto a tiempo t que se encuentran susceptibles de ser infectados (esto es, el número de aristas de \mathbb{L}^d que tienen solamente uno de sus vértices infectados). Esta cantidad se acota por el número de vecinos de los sitios infectados, es decir, $N_{A_t^0} \leq 2dC_t$. Se considera un paseo al azar X_n sobre $\{0, 1, 2, ...\}$, con estado absorbente en 0, tal que $X_0 = 1$ y cuya probabilidad de moverse de k hacia k + 1 es $p = \frac{2d\lambda}{1 + 2d\lambda}$. Veamos que es posible acoplar este paseo al azar con C_t de forma que $X_n \ge C_t$; para ello analicemos la tasas de transición de C_t .

Supongamos que $C_t = k$. La probabilidad de que C_t pase a k + 1 es a lo sumo la probabilidad de que una variable aleatoria exponencial de parámetro $2d\lambda k$ sea menor que otra variable aleatoria exponencial (independiente de la primera) de parámetro k. Es decir que como máximo la probabilidad es $\frac{2d\lambda}{1+2d\lambda} = p$, puesto que la exponencial de media $2d\lambda k$ señala los contagios y la exponencial de media k indica los recuperos.

De forma similar, la probabilidad de que C_t decrezca hacia k - 1 es como mínimo la probabilidad de que la exponencial de parámetro k sea menor que la exponencial de parámetro $2d\lambda k$. Esto significa que es al menos $\frac{1}{1+2d\lambda} = 1 - p$.

Por tanto, puede darse una construcción en la que todo crecimiento de C_t puede ser visto como un movimiento de X_n hacia la derecha (habrá más movimientos a la derecha de los relacionados con C_t) y todo movimiento a la izquierda de X_n es un decrecimiento de C_t . Analizadas las tasas, para finalizar el acoplamiento hay que observar que $C_0 = X_0$, y que el tiempo discreto que utiliza el paseo al azar es el que resulta de numerar los saltos de C_0 (generados por los procesos de Poisson de la representación gráfica). Entonces $X_n \ge C_t$.

De esta forma es posible observar que:

$$\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t) = \mathbb{P}(C_t \neq 0 \text{ para todo } t) \leq \mathbb{P}(X_n \neq 0 \text{ para todo } n)$$

Ahora bien, es sabido que $\mathbb{P}(X_n \neq 0 \text{ para todo } n) = 0$ si $p \leq 1/2$, por lo que si se toma $\lambda \leq \frac{1}{2d}$ se tendrá que:

$$\mathbb{P}\left(A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t\right) = 0,$$

lo que implica que $\lambda_c(d) \ge \frac{1}{2d} > 0.$

Resta probar que el valor crítico es finito. El teorema anterior (3.1.1) nos dice que alcanza con probar que $\lambda_c(1) < \infty$. Para ello se utilizará un argumento de discretización del proceso de contacto y un resultado de percolación en $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$. La idea es definir una serie de variables aleatorias que nos permitan relacionar la sobrevivencia del proceso de contacto construido mediante la representación gráfica con un proceso de percolación por sitios sobre el semiplano positivo de $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$.

Sea $\mathcal{E} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + n \text{ es par y } n \geq 0\}$ el conjunto de vértices y $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ el subgrafo de $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$ cuyos vértices están en \mathcal{E} . Observar que si de la definición de \mathcal{E} quitamos la condición de que *n* sea no negativo, \mathcal{E} es una copia de \mathbb{Z}^2 rotada 45°.

Sea también $\Delta > 0$. Se definirá con auxilio de la representación gráfica una sucesión de variables aleatorias $(X_{m,n}: (m,n) \in \mathcal{E})$, que toman valores 0 o 1, con las que construiremos el proceso de percolación. La definición es la siguiente: $X_{m,n} = 1$ cuando en la representación gráfica del proceso de contacto en \mathbb{L} se cumplen los siguientes eventos:

- (a) no hay instantes de recupero en el segmento $\{m\} \times ((n-1)\Delta, (n+1)\Delta],$
- (b) existen flechas de infección desde el vértice m hacia sus dos vecinos en el segmento $\{m\} \times (n\Delta, (n+1)\Delta].$

(Las siguientes figuras relacionan según los ítems anteriores la representación gráfica en \mathbb{Z} y los sitios abiertos de $\vec{\mathcal{E}}$).



Figura 3.1: En verde se indica la propagación del proceso de contacto en \mathbb{Z} con condición inicial $\{0\}$ en el intervalo $[0, 6\Delta]$, lo que permite definir a las variables aleatorias $X_{m,n}$.

Afirmamos que las variables aleatorias $X_{m,n}$ son independientes entre sí. En efecto, la condición (a) de que no existan instantes de recupero en un intervalo depende sólo del sitio m, por la independencia entre los procesos de Poisson que señalan a estos; y como los intervalos $((n-1)\Delta, (n+1)\Delta]$ son disjuntos para los diferentes valores de n con m fijo (porque si m+n es par, entonces m+n+1 y m+n-1 no pueden ser pares, entonces los intervalos de largo 2Δ contiguos a $\{m\} \times ((n-1)\Delta, (n+1)\Delta]$ están centrados en $(n+2)\Delta$ y $(n-2)\Delta$), se tiene la independencia en la primera condición de la definición de las variables $X_{m,n}$.

Para ver la independencia de la condición (b) el argumento es similar al anterior, porque las flechas de infección son generadas por los procesos de Poisson $N^{m,m-1}$ y $N^{m,m+1}$ en el intervalo $\{m\} \times (n\Delta, (n+1)\Delta]$; y los procesos de Poisson son independientes entre sí e independientes del resto de los Poisson, y los intervalos $\{m\} \times (n\Delta, (n+1)\Delta]$ son disjuntos para los diferentes valores que *n* puede tomar.

Por tanto la sucesión $(X_{m,n}: (m,n) \in \mathcal{E})$ es de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sea $p = \mathbb{P}(X_{m,n} = 1)$. Vale entonces que:

$$p = p(\Delta) = e^{-2\Delta} \left(1 - e^{-\lambda\Delta}\right)^2$$
.



Figura 3.2: En verde se indican los sitios abiertos de $\vec{\mathcal{E}}$ según la definición de las variables $X_{m,n}$ en la figura anterior.

Se toma Δ de forma tal que maximice $p(\Delta)$. De esta manera se obtiene la relación:

$$e^{-\lambda\Delta} = \frac{1}{1+\lambda} \,,$$

y por tanto:

$$p = p(\lambda) = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^{2+2/\lambda}}$$

Diremos que el sitio $(m, n) \in \vec{\mathcal{E}}$ está abierto cuando $X_{m,n} = 1$; un camino abierto será una sucesión de puntos $(m_0, n_0), (m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k)$ tales que (m_i, n_i) y (m_{i+1}, n_{i+1}) son vecinos en $\vec{\mathbb{L}}^2$ y $X_{m_i,n_i} = 1$ para todo *i*.

Afirmamos que la percolación en $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ implica que el proceso de contacto en \mathbb{L} persiste con probabilidad positiva. Para probar ello veamos que el suceso $\mathcal{C}(m,n)$ de que existe un camino abierto de (0,0) a (m,n) en $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, implica que $m \in A_s^0$, donde $s = n\Delta$.

En efecto, como existe un camino abierto desde (0,0) hacia (m,n) en $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ existe una sucesión de puntos $(x_0,0) = (0,0), (x_1,1), \ldots, (x_n,n) = (m,n) \in \mathcal{E}$ tales que:

$$X_{x_{i},i} = 1$$
 para todo $i = 0, ..., n$.

Es sencillo notar que $|x_{i+1} - x_i| = 1$ pues los vecinos en $\overrightarrow{\mathbb{L}}^2$ de un sitio (x_i, i) son los puntos $(x_i + 1, i + 1)$ y $(x_i - 1, i + 1)$.

Como $X_{0,0} = 1$ se tiene que en $[0, \Delta]$ no hay recuperos, y además en este intervalo existen flechas de infección de 0 hacia sus dos vecinos, de lo que se deduce que ambos vecinos serán infectados en algún instante perteneciente a $[0, \Delta]$ (pues 0 estaba inicialmente infectado), y también 0 permenecerá infectado hasta tiempo Δ al menos; en particular queremos resaltar que 0 contagia a x_1 en algún instante perteneciente a $[0, \Delta]$.

Luego, como $X_{x_1,1} = 1$ sabemos que no ocurre un recupero en el sitio x_1 durante el intervalo $(0, 2\Delta]$, y que a su vez existen flechas de contagio hacia sus dos vecinos dentro

del intervalo $(\Delta, 2\Delta]$ y en particular alguna de estas flechas de contagio tiene como destino el sitio x_2 .

Ahora bien, analicemos la información anterior: como no existen recuperos en el intervalo $\{x_1\} \times (0, 2\Delta]$ y en algún instante de $(0, \Delta]$ x_1 es contagiado desde $x_0 = 0$, se puede afirmar que el vértice x_1 se encuentra infectado durante el intervalo $(\Delta, 2\Delta]$, por lo tanto las flechas de contagio que salen desde x_1 hacia sus vecinos transmiten efectivamente la infección, lo que implica que x_2 será infectado en algún instante de $(\Delta, 2\Delta]$. Seguidamente se puede continuar el razonamiento de forma análoga porque $X_{x_2,2} = \ldots = X_{x_n,n} = 1$, hasta obtener que el sitio $x_n = m$ se encuentra infectado durante el intervalo $(n\Delta, (n+1)\Delta]$.

Por tanto, cuando la probabilidad de que exista un camino de largo infinito sea positiva, también lo será la probabilidad de que el proceso de contacto persista. Entonces si λ se elige de forma tal que $p(\lambda) > p_{cs}(\vec{\mathbb{L}}^2)$, donde $p_{cs}(\vec{\mathbb{L}}^2)$ es el parámetro crítico del proceso de percolación por sitios en $\vec{\mathbb{L}}^2$, el proceso de contacto sobrevivirá con probabilidad positiva.

Para terminar la prueba basta con observar que la ecuación,

$$p_{cs} = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^{2+2/\lambda}}$$

tiene una única solución. En efecto calculando algunos límites se obtiene que:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^{2+2/\lambda}} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^{2+2/\lambda}} = 1 \,;$$

finalmente como

$$\left(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^{2+2/\lambda}}\right)' = \frac{2\log(1+\lambda)}{(1+\lambda)^{1+2/\lambda}} > 0\,,$$

existe un único λ_0 tal que $p(\lambda_0) = p_{cs}$, y si $\lambda > \lambda_0$, el proceso de contacto persistirá con probabilidad positiva.

Con cierto trabajo y muchas cuentas de por medio, la cota inferior puede mejorarse hasta obtener:

$$\lambda_c(d) \ge \frac{1}{2d-1} \,.$$

De hecho ésta es la cota que obtiene Harris en su artículo original [Ha74]. Para probarla es necesario utilizar la propiedad de submodularidad, que resulta interesante de enunciar más allá de su aplicación concreta a esta cota (que no probaremos aquí).

Observación 3.1.3. Sea $\tau_A = \inf\{t \ge 0 : A_t^A = \emptyset\}$ y α_A definida por:

$$\alpha_A = \mathbb{P}(\tau_A = \infty) = \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset \text{ para todo } t).$$

Por la propiedad de dualidad del proceso de contacto (2.7) se tiene que:

$$\alpha_A = \bar{\nu}(\{B \subset V \colon B \cap A \neq \emptyset\}) = \bar{\nu}(\{\eta \in \Sigma \colon \eta \neq 0 \text{ en } A\}).$$

La siguiente desigualdad se denomina propiedad de submodularidad: si $A,B\subset V,$ entonces

$$\alpha_{A\cup B} + \alpha_{A\cap B} \le \alpha_A + \alpha_B.$$

La prue ba resulta de integrar respecto de $\bar{\nu}$ la siguiente de sigualdad elemental: si $\eta \in \Sigma,$ entonces vale,

 $\mathbf{1}_{\{\eta \neq 0 \ \text{en} A \cup B\}} + \mathbf{1}_{\{\eta \neq 0 \ \text{en} A \cap B\}} \leq \mathbf{1}_{\{\eta \neq 0 \ \text{en} A\}} + \mathbf{1}_{\{\eta \neq 0 \ \text{en} B\}} \,.$

Volviendo al tema anterior de las cotas para $\lambda_c(d)$, es posible probar mediante comparaciones con caminatas al azar y procesos de ramificación que $\lim_{d\to\infty} d\lambda_c(d) = \frac{1}{2}$. Por tanto, asintóticamente $\lambda_c(d)$ se comporta de manera similar a un proceso de ramificación en el que cada individuo tiene descendencia a tasa $2d\lambda$ (donde el valor crítico es 1).

Observación 3.1.4. Es importante realizar algunos comentarios sobre el valor de $\lambda_c(1)$, ya que el teorema (3.1.1) acota los valores de $\lambda_c(d)$ por $\lambda_c(1)/d$. No se conoce exactamente el valor de $\lambda_c(1)$ aunque según la literatura hay razones físicas para decir que $\lambda_c(1) \approx 1,65$; las simulaciones computacionales confirman que el valor crítico está en ese entorno.

Históricamente la evolución de las cotas para $\lambda_c(1)$ se puede resumir de la siguiente manera: la cota inferior inicialmente encontrada fue 1, posteriormente Harris la mejoró obteniendo $\lambda_c(1) \geq 1,13$. Actualmente se tiene demostrado que $\lambda_c(1) \geq 1,53$. La cota superior que se obtiene en la prueba de la transición de fase es cercana a 20, mucho más allá del valor aproximado. Ya a mediados de los 80, Griffeath demostró que $\lambda_c(1) < 7$, y posteriormente Liggett y Holley probaron que $\lambda_c(1) < 2$. Ligget conjeturó que refinando la prueba de él y de Holley se podía obtener un valor más cercano al esperado, pero en la práctica solamente se logró llevar la cota superior a 1,942 (por el propio Liggett).

3.1.1. Simulaciones

En este apartado presentamos algunas simulaciones del proceso de contacto en \mathbb{Z} realizadas en SAGE; las imágenes se hicieron en Matlab.

Las imágenes muestran en cada caso la evolución del proceso de contacto tomando en cuenta solamente las interacciones que suceden en un intervalo discreto de la forma [-L, L], es decir, se ignoran los contagios o recuperos fuera de esa región. En cada caso el pie de la figura indica el valor del parámetro λ , el tiempo en el que se detuvo la simulación (al que llamamos T), y la cantidad de iteraciones que se realizaron. En todos los casos la región donde se simuló es el intervalo discreto [-35, 35] y la condición inicial es [-3, 3].

El programa construye una matriz con tantas columnas como vértices y en la que en cada fila se expresa el estado del proceso de contacto, por lo que la matriz que se utilizó para generar las imágenes tiene tantas filas como iteraciones y tantas columnas como vértices.



Figura 3.3: $\lambda = 2$; T = 60,45; 10.000 iteraciones.



Figura 3.4: $\lambda = 1,7; T = 77,30; 10.000$ iteraciones.

3.2. Una condición para la sobrevivencia

Nos encaminamos a probar que el proceso de contacto con parámetro igual al valor crítico se extingue casi seguramente y también que $\lambda_1 = \lambda_2$ en \mathbb{L}^d . Estos resultados fueron probados a comienzos de la década del 90 por Bezuidenhout y Grimmett en [BG90] y [BG91].



Figura 3.5: $\lambda = 1,6$; T = 75,19; 2.690 iteraciones.



Figura 3.6: $\lambda = 1,4$; T = 21,51; 504 iteraciones.

El núcleo de la prueba reside en hallar condiciones que sean equivalentes a la sobrevivencia del proceso de contacto pero que dependan solamente de procesos de Poisson utilizados en la construcción gráfica en cierta región acotada del espacio-tiempo, para luego buscar un acoplamiento con un proceso supercrítico de percolación orientada por sitios. La existencia de esta condición no es para nada obvia, puesto que la persistencia del proceso es un suceso que tiene un horizonte temporal (claramente) infinito. Informalmente la idea de la prueba es que bajo ciertas condiciones, se pueden encontrar con alta probabilidad "bloques" de sitios infectados que hagan las veces de vértices de un proceso de percolación orientada supercrítico.

 A_t siempre denotará al proceso de contacto de parámetro λ . Para empezar introducimos cierta notación. Para $L \geq 1$ se escribe ${}_{L}A_t$ al proceso que resulta de truncar el proceso de contacto definido por la representación gráfica, pero utilizando solamente los caminos cuyos segmentos verticales corresponden a sitios en $(-L, L)^d$ y con flechas de infección partiendo desde (x, \cdot) hacia (y, \cdot) con $x \in (-L, L)^d$. Notar que la definición anterior permite que dentro de ${}_{L}A_t$ haya sitios infectados que pertenecen al borde de la caja $(-L, L)^d$.

Observar que si L < L' entonces se puede brindar un acoplamiento tal que ${}_{L}A_t \subset {}_{L'}A_t$, en el sentido de que si un sitio está infectado a tiempo t en el proceso truncado en $(-L, L)^d$ estará también infectado en el proceso truncado en $(-L', L')^d$.

Eventualmente nos interesará mirar estos procesos truncados centrados en un sitio x cualquiera y no necesariamente el origen. Notaremos por $_{x,L}A_t$ a la versión análoga de $_LA_t$ pero utilizando solamente los caminos cuyos segmentos verticales corresponden a sitios en $(x - L, x + L)^d$. Observar que $_{x,L}A_t$ y $x + _LA_t$ tienen la misma distribución.

Comenzamos con una serie de proposiciones bastante técnicas que nos permitirán enunciar la condición de sobrevivencia que queremos.

Proposición 3.2.1. Supongamos que A_t sobrevive con probabilidad positiva. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_t^{[-n,n]^d} \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) = 1.$$

Demostración. Si A_t persiste con probabilidad positiva se tiene que $\bar{\nu} \neq \delta_{\emptyset}$ y por tanto vale (2.8). Luego como $[-n, n]^d \uparrow \mathbb{Z}^d$ se tiene la igualdad deseada.

Proposición 3.2.2. Para todo A finito y todo $N \ge 1$ se tiene que:

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{L \to \infty} \mathbb{P}(|_L A_t^A| \ge N) = \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset \quad para \ todo \ t \ge 0).$$

Observación 3.2.3. En el límite anterior es importante el orden de los límites puesto que el proceso de contacto dentro de un conjunto finito de vértices se extingue casi seguramente, entonces $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|_L A_t^A| \ge N) = 0$, para todo $L \ge 1$, y por tanto el otro límite iterado es siempre igual a 0.

Demostración. $A_t^A = \bigcup_{L \ge 0} {}_L A_t^A$, entonces se tiene que: $\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}(|{}_L A_t^A| \ge N) = \mathbb{P}(|A_t^A| \ge N) .$ (3.2)

Sea \mathcal{F}_s la σ -álgebra generada por la representación gráfica hasta tiempo s, es decir, por los procesos de Poisson hasta tiempo s de todos los sitios. Es sencillo observar que $(\mathcal{F}_s: s \ge 0)$ es una filtración. Sea $X = \mathbf{1}_{\{A_t = \emptyset \text{ para algún } t\}}$ y $X_s = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s)$.

Se define entonces una martingala $(X_s: s \ge 0)$ asociada a la filtración $(\mathcal{F}_s: s \ge 0)$. Como X está en L^1 podemos utilizar el teorema de convergencia de martingalas para afirmar que $X_s \to X$ casi seguramente cuando $s \to +\infty$.

Ahora bien, si la configuración A_s^A tiene *n* sitios infectados, la probabilidad de que todos los sitios se recuperen antes de que se origine una nueva infección es por lo menos la probabilidad de que *n* exponenciales independientes de parámetro 1 (que marcan los recuperos) sean menores que el mínimo de 2dn exponenciales independientes de parámetro λ (que indican los contagios). Este mínimo se distribuye como una exponencial de parámetro $2dn\lambda$, entonces:

$$X_s = \mathbb{P}(A_t = \emptyset \text{ para algún } t | \mathcal{F}_s) \ge \left(\frac{1}{1 + 2d\lambda |A_s|}\right)^{|A_s|}$$

Afirmamos que $|A_t| \to +\infty$ casi seguramente sobre $B = \{A_s \neq \emptyset \text{ para todo } s \ge 0\}$. En efecto, si $|A_t| \le k$ para todo t, se tiene que para todo s:

$$X_s \geq \left(\frac{1}{1+2d\lambda|A_s|}\right)^{|A_s|} \geq \left(\frac{1}{1+2d\lambda k}\right)^k > 0$$

Pero entonces sobre B se tiene que casi seguramente X > 0, puesto que $X_s \to X$ casi seguramente, lo que es absurdo porque sobre el conjunto B la variable aleatoria X debe valer cero. Por tanto $|A_t| \to +\infty$ casi seguramente en B. Utilizando este resultado se obtiene que:

$$\begin{split} \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(|A_t^A| \ge N\right) &= \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(|A_t^A| \ge N \mid B\right) \,\mathbb{P}(B) + \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(|A_t^A| \ge N \mid B^c\right) \,\mathbb{P}(B^c) \\ &= \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(|A_t^A| \ge N \mid B\right) \,\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}\left(A_s \ne \emptyset \text{ para todo } s \ge 0\right) \,, \end{split}$$

donde usamos que $\mathbb{P}(|A_t^A| \ge N | B^c)$ tiende a 0 con $t \to +\infty$. Finalmente, por la igualdad (3.2) concluimos la prueba de la proposición.

Observación 3.2.4. De la prueba anterior puede deducirse que si el proceso persiste entonces la cantidad de sitios infectados tiende a infinito.

Proposición 3.2.5. Para todo $n, N \ge 1$ y $L \ge n$ vale:

$$\mathbb{P}\left(\left|_{L}A_{t}^{[-n,n]^{d}}\cap[0,L)^{d}\right|\leq N\right)\leq\left[\mathbb{P}\left(\left|_{L}A_{t}^{[-n,n]^{d}}\right|\leq 2^{d}N\right)\right]^{2^{-d}}.$$
(3.3)

Demostración. Sea $X_1 = |_L A_t^{[-n,n]^d} \cap [0,L)^d|$. Se definen también X_2, \ldots, X_{2^d} de forma análoga pero intersecando ${}_L A_t^{[-n,n]^d}$ con los demás ortantes de \mathbb{Z}^d . Se tiene entonces que

$$|_{L}A_{t}^{[-n,n]^{d}}| \le X_{1} + \ldots + X_{2^{d}}$$

Es claro que X_1, \ldots, X_{2^d} son variables aleatorias idénticamente distribuidas. Además estas variables están correlacionadas positivamente puesto que son funciones crecientes de los procesos de Poisson que generan las infecciones y funciones decrecientes de los procesos que indican recuperos. Como estamos trabajando en una caja acotada y por tanto finita (el rectángulo de enteros centrado en el origen y lado 2L), se aplica el corolario (2.5.4) con la adaptación para medidas obtenidas a partir de procesos de Poisson.

Entonces:

$$\mathbb{P}(|_{L}A_{t}^{[-n,n]^{d}}| \leq 2^{d}N) \geq \mathbb{P}(X_{1} + \ldots + X_{2^{d}} \leq 2^{d}N)$$
$$\geq \mathbb{P}(X_{1} \leq N, \ldots, X_{2^{d}} \leq N)$$
$$\geq \mathbb{P}(X_{1} \leq N)^{2^{d}},$$

donde en la última desigualdad utilizamos la correlación positiva. Finalmente se obtiene la desigualdad (3.2.5).

El camino para hallar una condición de supervivencia precisa de otras definiciones auxiliares. Se usará la norma del supremo para los puntos de \mathbb{Z}^d . Por otro lado, diremos que $x \in \mathbb{Z}^d$ es positivo y se escribe $x \ge 0$, cuando $x_i \ge 0$ para todo $i = 1, \ldots, d$.

Se definen los siguientes conjuntos:

$$S(L,T) = \{(x,s) \in \mathbb{Z}^d \times [0,T] : ||x|| = L\},\$$

у

$$_{L}A^{A} = \bigcup_{t \ge 0} {}_{L}A^{A}_{t} \times \{t\} \subset \mathbb{Z}^{d} \times [0, \infty).$$

 $_{L}A^{A}$ es el conjunto de sitios que fueron infectados en algún tiempo (sin importar el tiempo que permanecieron infectados).

Se considera finalmente $N^A(L,T)$ el máximo número de puntos que pueden escogerse en el conjunto $S(L,T) \cap {}_{L}A^A$ con la siguiente propiedad: si (x, s_1) y (x, s_2) son dos puntos con la misma coordenada espacial en este conjunto entonces $|s_1 - s_2| \ge 1$.

Proposición 3.2.6. Supongamos que $L_j \uparrow \infty$ y $T_j \uparrow \infty$. Para M y N enteros positivos y $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, se tiene que:

$$\limsup_{j \to \infty} \mathbb{P}\left(N^A(L_j, T_j) \le M\right) \mathbb{P}\left(|_{L_j} A^A_{T_j}| \le N\right) \le \mathbb{P}\left(A^A_s = \emptyset \text{ para algún } s\right) \,.$$

Demostración. Sea $\mathcal{F}_{L,T}$ la σ -álgebra generada por la representación gráfica en $(-L, L)^d \times [0, T]$. El primer paso de la prueba consiste en demostrar que si $A \subset (-L, L)^d$ entonces se cumple que casi seguramente sobre el conjunto $\{N^A(L, T) + |_L A^A_T| \leq k\}$ vale la desigualdad:

$$\mathbb{P}(A_s^A = \emptyset \text{ para algún } s \,|\, \mathcal{F}_{L,T}) \ge \left[\frac{e^{-4d\lambda}}{1 + 2d\lambda}\right]^k.$$
(3.4)

Observar que para cada $x \in {}_{L}A_{T}^{A}$ la probabilidad de que ocurra un recupero antes de que se genere una infección es $\frac{1}{1+2d\lambda}$, ya que es la probabilidad de que una exponencial de parámetro 1 sea menor que el mínimo de 2d exponenciales independientes de parámetro λ e independientes de la exponencial anterior. Si ocurre un recupero antes que un intento de infección, no puede haber un camino (infinito) activo que pase por (x, T) y en consecuencia, con probabilidad de al menos $(1+2d\lambda)^{-1}$ el sitio x no contribuye a la persistencia del proceso.

Luego, por independencia de los procesos que señalan los recuperos en cada sitio, si $|_{L}A_{T}^{A}| = l$, la probabilidad de que ninguno de los sitios contribuya a que el proceso

sobreviva, condicionada al estado del proceso a tiempo T y en la caja $(-L, L)^d$, es como mínimo $(1 + 2d\lambda)^{-l}$.

Ahora consideremos el segmento vertical $\{x\} \times [0,T]$ de la representación gráfica con ||x|| = L.

Sean $(x, s_1), \ldots, (x, s_j)$, con $s_1 < s_2 < \ldots < s_j$, la mayor cantidad de puntos que se encuentran en el segmento $\{x\} \times [0, T]$ y en $S(L, T) \cap {}_L A^A$, con la propiedad de que $|s_{i+1} - s_i| \ge 1$ para todo *i*. Se asume que $j \ge 1$ puesto que de otra forma ningún punto del segmento contribuye a la persistencia del proceso. Sea entonces:

$$I = \bigcup_{i=1}^{j} \{x\} \times (s_i - 1, s_i + 1).$$

Observar que la unión es disjunta y que por la asunción de maximalidad todos los puntos del segmento $\{x\} \times [0,T]$ que también se encuentran en $S(L,T) \cap {}_{L}A^{A}$ están en I. Se deduce entonces que el tiempo que x permaneció infectado entre 0 y T es a lo sumo la longitud de I, es decir 2j. Por tanto la probabilidad de que no haya flechas activas de infección a cualquiera de los 2d vecinos de x es como mínimo $e^{-4dj\lambda}$, la probabilidad de que 2d procesos de Poisson independientes entre sí sean todos cero en un conjunto de medida 2j.

Para un intervalo de longitud u en el complemento de I sobre el segmento $\{x\} \times [0, T]$, calculamos la probabilidad de que no exista una flecha de infección a un vecino, o de que si se genera una esté precedida por un recupero (y por tanto no haya contagio).

La probabilidad de que no exista una flecha de infección de x hacia algún vecino es igual $e^{-2d\lambda u}$.

Si X_i son las variables exponenciales independientes que señalan los 2*d* posibles contagios que se originan desde *x*, e *Y* la variable aleatoria que indica los recuperos en *x*, entonces la probabilidad de que si existe una flecha de infección ella esté precedida por un recupero la calculamos de la siguiente forma:

$$\begin{split} \mathbb{P}(0 < Y < X = \min_{i} X_{i} \leq u) &= \int_{0}^{u} \left[\int_{0}^{x} e^{-y} \, dy \right] 2d\lambda e^{-2d\lambda x} \, dx \\ &= -e^{-2d\lambda u} + 1 - \int_{0}^{u} 2d\lambda e^{-(2d\lambda + 1)x} \, dx \\ &= -e^{-2d\lambda u} + 1 + \frac{2d\lambda}{2d\lambda + 1} e^{-(2d\lambda + 1)u} - \frac{2d\lambda}{2d\lambda + 1} \\ &\geq -e^{-2d\lambda u} + \frac{1}{1 + 2d\lambda} \end{split}$$

Por tanto, si se juntan ambos aportes, la probabilidad de que no exista una flecha de infección a un vecino o de que si se genera una esté precedida por un recupero es mayor que $(1 + 2d\lambda)^{-1}$.

Los eventos que transcurren en I y su complemento sobre $\{x\} \times [0, T]$ son independientes puesto que refieren a conjuntos disjuntos de la representación gráfica en el segmento.

Con los cálculos anteriores se puede estimar la probabilidad de que ninguno de los puntos del segmento $\{x\} \times [0, T]$ que estén también en $S(L, T) \cap {}_{L}A^{A}$ contribuya a la sobrevivencia

del proceso. Esta probabilidad es al menos:

$$\left[\frac{e^{-4d\lambda}}{1+2d\lambda}\right]^j,$$

ya que el numerador es aportado por los puntos de I, mientras que el denominador proviene de los puntos de I^c en el segmento.

Para finalizar la prueba de la desigualdad (3.4) resta considerar los aportes a la no sobrevivencia del proceso con la condición $\{N^A(L,T) + |_L A^A_T| \le k\}$:

$$\mathbb{P}(A_s^A = \emptyset \text{ para algún } s \mid \mathcal{F}_{L,T}) \ge \left[\frac{1}{1+2d\lambda}\right]^{|_LA_T^A|} \left[\frac{e^{-4d\lambda}}{1+2d\lambda}\right]^{N^A(L,T)} \ge \left[\frac{e^{-4d\lambda}}{1+2d\lambda}\right]^k$$

Ahora escribimos $G=\{A_s^A=\emptyset\;\; \text{para algún }s\}$ y $H_j=\{N^A(L_j,T_j)+|_{L_j}A_{T_j}^A|\leq k\}$ para kfijo.

Por el teorema de convergencia de martingalas se tiene que $\mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_{L_j,T_j})$ converge casi seguramente a $\mathbf{1}_G$ cuando $j \to \infty$, porque $(-L_j, L_j)^d \uparrow \mathbb{Z}^d$ y $[0, T_j] \uparrow [0, \infty]$. La desigualdad (3.4) nos dice que $\mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_{L_j,T_j})$ está acotada inferiomente por un número positivo (e independiente de j) sobre H_j , por lo tanto sucede que:

$$\{H_j \text{ i.o. }\} = \bigcap_{j \ge 1} \left[\bigcup_{i \ge j} H_i \right] \subset G;$$

y por consiguiente:

$$\limsup_{j \to +\infty} \mathbb{P}(H_j) \le \mathbb{P}(G) \,. \tag{3.5}$$

Si bien la forma en la que mostramos que $\{H_j \text{ i.o.}\} \subset G$ es bastante técnica, la afirmación en sí es intuitiva. Condicionar a H_j es limitar fuertemente la cantidad de sitios por los que el proceso de contacto puede salir de la caja $[-L_j, L_j]^d \times [0, T_j]$, ya que cuando tomamos límite en j el tamaño de la caja aumenta (porque $L_j \uparrow \infty$ y $T_j \uparrow \infty$) pero la cantidad de sitios por los que puede escapar permanece constante. En consecuencia al proceso le cuesta más llegar a los bordes de la caja (incluído el "techo" $[-L_j, L_j]^d \times \{T_j\}$) por lo que es más difícil que exista un camino activo suficientemente largo.

Continuando con la prueba, se tiene también que:

$$\mathbb{P}\left(N^A(L,T) + |_L A_T^A| \le M + N\right) \ge \mathbb{P}\left(N^A(L,T) \le M, |_L A_T^A| \le N\right) \\
\ge \mathbb{P}\left(N^A(L,T) \le M\right) \mathbb{P}\left(|_L A_T^A| \le N\right),$$

donde la segunda desigualdad es una consecuencia de la correlación positiva. Utilizando esta última desigualdad y (3.5) se tiene el resultado.

Para la próxima proposición necesitamos más definiciones.

Denotamos $S_+(L,T) = \{(x,s) \in \mathbb{Z}^d \times [0,T] : x_1 = L, x_i \geq 0 \text{ para todo } i \neq 1\}$. Sea $N_+^A(L,T)$ la mayor cantidad de puntos en $S_+(L,T) \cap {}_LA^A$ tales que: cada par de puntos con la misma coordenada espacial distan entre sí en al menos uno. Se pueden generalizar las definiciones anteriores para cualquiera de los 2^d ortantes de \mathbb{Z}^d .

Proposición 3.2.7. Para L, M, T y n < L,

$$\left[\mathbb{P}(N_{+}^{[-n,n]^{d}}(L,T) \leq M)\right]^{d2^{d}} \leq \mathbb{P}\left(N^{[-n,n]^{d}}(L,T) \leq Md2^{d}\right)$$

Demostración. Sea $X_1 = N_+^{[-n,n]^d}(L,T)$, y definimos también X_2, \ldots, X_{d2^d} de forma similar cambiando la primer coordenada en la definición de $S_+(L,T)$ por alguna de las d posibles y reemplazando el signo positivo por otro de las 2^d opciones de signos. Estas variables aleatorias son idénticamente distribuidas por su definición y están positivamente correlacionadas.

Además $N^{[-n,n]^d}(L,T) \leq X_1 + \ldots + X_{d2^d}$. Entonces:

$$[\mathbb{P}(X_1 \le M)]^{d2^a} = \mathbb{P}(X_1 \le M) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_{d2^d} \le M)$$

$$\leq \mathbb{P}(X_1 \le M, \ldots, X_{d2^d} \le M)$$

$$\leq \mathbb{P}(N^{[-n,n]^d}(L,T) \le Md2^d).$$

Con la ayuda de las proposiciones anteriores probaremos el siguiente resultado cuyas afirmaciones, veremos más adelante, son equivalentes a la sobrevivencia del proceso de contacto.

Teorema 3.2.8. Si A_t sobrevive con probabilidad positiva se tiene que: para todo $\epsilon > 0$ se pueden elegir L, T y n, con n < L, de forma tal que:

$$\mathbb{P}\left(_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \text{ para algún } x \in [0,L)^d\right) > 1-\epsilon,$$
$$\mathbb{P}\left(_{L+2n}A_{t+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \text{ para algún } t, \ 0 \le t < T$$
$$y \text{ algún } x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1}\right) > 1-\epsilon.$$

Demostración. Sea $\delta \in (0, 1)$; más adelante elegiremos un valor de δ adecuado. Dividimos la prueba en tres etapas. La primera permitirá acotar las probabilidades de ciertos sucesos que serán muy útiles para la prueba de las afirmaciones de la tesis del teorema; en la segunda y tercera etapa se demostrarán ambas afirmaciones.

Como el parámetro λ es tal que el proceso sobrevive con probabilidad positiva, en virtud de la proposición (3.2.1) se puede tomar n de forma que:

$$\mathbb{P}(A_t^{[-n,n]^d} \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) > 1 - \delta^2.$$

Elegimos N' suficientemente grande de forma tal que, en N' ensayos independientes con probabilidad de éxito igual a

$$\mathbb{P}(_n A_1^0 \supset [-n,n]^d) \,,$$

se tenga como mínimo una probabilidad $1 - \delta$ de obtener al menos un éxito; esto es que:

$$\left[1 - \mathbb{P}(_n A_1^0 \supset [-n, n]^d)\right]^{N'} \le \delta.$$

Luego se elije N de forma que cualquier subconjunto de \mathbb{Z}^d con N puntos contenga al menos N' puntos tales que cada par de ellos está separado por una distancia (en norma infinito) mayor a 2n + 1.

De forma similar a N^\prime se elige M^\prime tal que en M^\prime experimentos independientes con probabilidad de éxito

$$\mathbb{P}(_{2n}A_1^0 \supset [0, 2n] \times [-n, n]^{d-1}),$$

se tenga que la probabilidad de obtener por lo menos un éxito sea como mínimo $1 - \delta$. También tomamos M de manera que cualquier subconjunto de \mathbb{Z}^d de M puntos contenga M' puntos donde cada par de ellos está separado por una distancia mayor a 4n + 1.

Con las elecciones anteriores nos disponemos a comenzar propiamente la prueba del teorema.

La primera parte de la prueba consiste en mostrar que existen sucesiones $L_j \uparrow \infty$ y $T_j \uparrow \infty$ tales que:

$$\mathbb{P}\left(|_{L_j}A_{T_j}^{[-n,n]^d}| \ge 2^d N\right) = 1 - \delta \quad \text{para cada } j \,.$$

Se tiene que $0 < 1 - \delta < 1 - \delta^2$; y además $\mathbb{P}(|_L A_t^{[-n,n]^d}| \ge 2^d N)$ es una función continua de t porque estamos observando al proceso truncado en una caja de lado 2L y por tanto intervienen una cantidad finita de sitios (y de procesos de Poisson). Por la proposición (3.2.2) sabemos que:

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{L \to \infty} \mathbb{P}(|_L A_t^{[-n,n]^d}| \ge 2^d N) = \mathbb{P}(A_t^{[-n,n]^d} \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) \ge 1 - \delta^2 > 1 - \delta,$$

entonces existen $L_j \uparrow \infty$ y $T'_j \uparrow \infty$ tales que:

$$\mathbb{P}(|_{L_j} A_{T'_j}^{[-n,n]^d}| \ge 2^d N) > 1 - \delta.$$

Ahora bien, fijo L_j , la observación (3.2.3) inmediatamente posterior al enunciado de la proposición recién utilizada nos dice que: $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|_{L_j}A_t^{[-n,n]^d}| \geq 2^d N) = 0$; y como $\mathbb{P}(|_{L_j}A_t^{[-n,n]^d}| \geq 2^d N)$ es una función continua de t, existe $T_j > T'_j$ para cada j tal que:

$$\mathbb{P}\left(\left|_{L_j}A_{T_j}^{[-n,n]^d}\right| \ge 2^d N\right) = 1 - \delta .$$

$$(3.6)$$

Además $T_j \to +\infty$ y se pueden adecuar los índices de forma tal L_j y T_j sean crecientes.

Si aplicamos la proposición (3.2.6) reemplazando los números M y N de su enunciado por $Md2^d$ y $N2^d$ respectivamente, y usando las sucesiones antes definidas, se tiene que:

$$\limsup_{j \to \infty} \mathbb{P}(N^{[-n,n]^d}(L_j, T_j) \le Md2^d) \mathbb{P}(|_{L_j}A_{T_j}^{[-n,n]^d}| \le N2^d) \le \mathbb{P}(A_s^{[-n,n]^d} = \emptyset \text{ para algún } s).$$

Pasando a los complementos y utilizando (3.6), se obtiene que:

 $\limsup_{j \to \infty} \left[1 - \mathbb{P}(N^{[-n,n]^d}(L_j, T_j) > Md2^d) \right] \times \delta \le 1 - \mathbb{P}(A_t^{[-n,n]^d} \neq \emptyset \text{ para todo } t \ge 0) < \delta^2.$

Entonces:

$$\limsup_{j \to \infty} \mathbb{P}(N^{[-n,n]^d}(L_j,T_j) > Md2^d) > 1 - \delta.$$

Por lo tanto existe j tal que: $L_j > n$ (se precisa esta desigualdad para poder aplicar después la proposición (3.2.7)) y

$$\mathbb{P}\left(N^{[-n,n]^d}(L_j,T_j) > Md2^d\right) > 1 - \delta.$$
(3.7)

Para finalizar la primera parte de la prueba tomamos $L = L_j$ y $T = T_j$ y aplicamos las proposiciones (3.2.5) y (3.2.7) junto con (3.6) y (3.7), con lo que se prueban las siguientes dos desigualdades:

$$\mathbb{P}\left(|_{L}A_{t}^{[-n,n]^{d}} \cap [0,L)^{d}| > N\right) \ge 1 - \delta^{2^{-d}}, \qquad (3.8)$$

у

$$\mathbb{P}\left(N_{+}^{[-n,n]^{d}}(L,T) > M\right) \ge 1 - \delta^{\frac{2^{-d}}{d}} .$$
(3.9)

En la segunda parte de la demostración probaremos la primera afirmación de la tesis del teorema. Estimemos la probabilidad de que exista $x \in {}_{L}A_{T}^{[-n,n]^{d}} \cap [0,L)^{d}$ y tal que ${}_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^{d}} \supset x + [-n,n]^{d}$ condicionado al suceso $\{|_{L}A_{T}^{[-n,n]^{d}} \cap [0,L)^{d}| > N\}.$

La elección de N nos asegura que en ${}_{L}A_{T}^{[-n,n]^{d}} \cap [0,L)^{d}$ existen al menos N' sitios infectados separados por una distancia mínima de 2n + 1. Sean $x_{1}, \ldots, x_{N'}$ esos sitios. Recordar que ${}_{x,L}A_{t}^{A}$ denota el proceso de contacto truncado en la caja $(-L + x, L + x)^{d}$ y con condición inicial A.

La elección de N hace que los sucesos

$$\{x_{i,n}A_1^{x_i} \supset x_i + [-n,n]^d\}$$
 para $i = 1, \dots, N'$,

sean todos independientes entre sí, porque utilizan procesos de Poisson en regiones disjuntas de la representación gráfica, dada la separación entre $x_1, \ldots, x_{N'}$. Es sencillo notar que la probabilidad de cada uno de estos eventos coincide con $\mathbb{P}({}_nA_1^0 \supset [-n, n]^d)$, ya que es esencialmente el mismo evento pero trasladado x_i sitios en cada caso.

A su vez, si
$$x \in {}_{L}A_{T}^{[-n,n]^{d}}$$
, por la pérdida de memoria se tiene que ${}_{x,n}A_{1}^{x} \subset {}_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^{d}}$, por lo tanto si: ${}_{x,n}A_{1}^{x} \supset x + [-n,n]^{d}$ entonces ${}_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^{d}} \supset x + [-n,n]^{d}$.

Según nuestra elección de N', en N' experimentos independientes con probabilidad de éxito $\mathbb{P}({}_{n}A_{1}^{0} \supset [-n, n]^{d})$, existe un probabilidad de al menos $1 - \delta$ de que alguno de estos N' intentos sea un éxito; entonces con probabilidad de al menos $1 - \delta$ ocurrirá que:

$$_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^d} \supset x_i + [-n,n]^d$$
 para algún $i = 1, \dots, N'$,

condicionado al suceso $\left\{ |_L A_T^{[-n,n]^d} \cap [0,L)^d | > N \right\}.$

La probabilidad de $\left\{ L_{2n}A_{T+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \text{ para algún } x \in [0,L)^d \right\}$ es mayor que la probabilidad de ese mismo evento intersecado con $\left\{ |_L A_T^{[-n,n]^d} \cap [0,L)^d | > N \right\}$; pero esta última probabilidad se puede estimar utilizando la definición de probabilidad condicional ya que:

$$\mathbb{P}\left(_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \text{ para algún } x \in [0,L)^d \mid |_L A_T^{[-n,n]^d} \cap [0,L)^d| > N\right) \ge 1 - \delta,$$

por lo recién demostrado, y

$$\mathbb{P}\left(\left|_{L}A_{T}^{[-n,n]^{d}}\cap[0,L)^{d}\right|>N\right)\geq1-\delta^{2^{-d}},$$

en virtud de (3.8). Por lo tanto se tiene que:

$$\mathbb{P}\left(_{L+2n}A_{T+1}^{[-n,n]^{d}} \supset x + [-n,n]^{d} \text{ para algún } x \in [0,L)^{d}\right) \ge (1-\delta)(1-\delta^{2^{-d}}).$$

Al final de la demostración se elegirá adecuadamente el valor de δ en función de ϵ .

La tercera y última parte de la prueba de este teorema consiste en demostrar la segunda afirmación del mismo. Por un argumento análogo al anterior nos alcanzará con estimar la probabilidad del evento:

$$\left\{ {}_{L+2n}A_{t+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \text{ para algún } 0 \le t < T \text{ y algún } x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1} \right\} \,,$$

condicionado a $\{N_+^{[-n,n]^d}(L,T) > M\}$, ya que la probabilidad de este último suceso fue acotada en (3.9).

Sean entonces $(x_1, s_1), \ldots, (x_{M'}, s_{M'}) \in S_+(L, T) \bigcap_{t \ge 0} \left[{}_L A_t^{[-n,n]^d} \times \{t\} \right]$ y tales que cada par de ellos cumple lo siguiente:

- si tienen la misma coordenada espacial entonces la diferencia en la coordenada temporal es mayor que uno;
- si tienen distinta coordenada espacial entonces distan entre sí al menos 4n + 1.

La primera condición se asegura por la definición del número $N_{+}^{[-n,n]^d}(L,T)$ y la segunda por la elección de M, y ambas bajo la condición $N_{+}^{[-n,n]^d}(L,T) > M$. En definitiva los ítems anteriores nos dicen que los sucesos

$$\left\{ \left|_{x_{i},2n} A_{s_{i}+1}^{x_{i}} \supset x_{i} + [0,2n] \times [-n,n]^{d-1} \right| x_{i} \in \left|_{L} A_{s_{i}}^{[-n,n]^{d}} \right\} \text{ para todo } i$$

son independientes entre sí, porque pertenecen a regiones disjuntas de la construcción gráfica y utilizan por tanto procesos de Poisson independientes entre sí. Además todos estos sucesos tienen probilidad mayor o igual que $\mathbb{P}({}_{2n}A_1^0 \supset [0, 2n] \times [-n, n]^{d-1})$, puesto que son esencialmente el mismo evento, ya que es posible iniciar el proceso con condición inicial x_i acoplado al de distribución inicial ${}_{L+2n}A_t^{[-n,n]^d}$ dado que estamos condicionando a $\{x_i \in {}_{L}A_{s_i}^{[-n,n]^d}\}$.

Ahora bien, si $\{x_{i,2n}A_{s_i+1}^{x_i} \supset x_i + [0,2n] \times [-n,n]^{d-1} \mid x_i \in {}_{L}A_{s_i}^{[-n,n]^d}\}$ ocurre para algún *i*, entonces existirán $x = x_i + ne_1$ y $t = s_i$ tales que:

$$_{L+2n}A_{t+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \quad y \ x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1},$$

siendo e_1 el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^d .

Finalmente, como elegimos M' de forma tal de que la probabilidad de obtener un éxito en M' experimentos independientes con probabilidad de éxito $\mathbb{P}({}_{2n}A^0_1 \supset [0, 2n] \times [-n, n]^{d-1})$ es al menos $1 - \delta$, se prueba que la probabilidad del evento

$$\left\{ L_{t+2n} A_{t+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d, \text{ para algún } 0 \le t < T \text{ y algún } x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1} \right\},$$

condicionado a $\{N_{+}^{[-n,n]^{d}}(L,T) > M\}$ es al menos $1 - \delta$. Si juntamos esto con (3.9) se obtiene que:

$$\mathbb{P}\Big({}_{L+2n}A_{t+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d, \text{ para algún } 0 \le t < T$$
 y algún $x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1} \Big) \ge (1-\delta)(1-\delta^{\frac{2^{-d}}{d}}).$

Para terminar la prueba del teorema, dado ϵ debemos elegir $\delta > 0$ de forma que:

$$(1-\delta)(1-\delta^{2^{-d}}) > 1-\epsilon \quad y \quad (1-\delta)(1-\delta^{\frac{2^{-d}}{d}}) > 1-\epsilon;$$

para lo que alcanza con tomar δ suficientemente pequeño.

3.2.1. Acoplamiento con los procesos de percolación

El próximo paso consiste en probar que las afirmaciones que aparecen en la tesis del teorema (3.2.8) implican la sobrevivencia con probabilidad positiva del proceso de contacto. Para ello se realizará una construcción que permita vincular al proceso de contacto con un proceso de percolación orientada por sitios en el caso supercrítico. Resulta conveniente resumir las dos afirmaciones del teorema anterior (3.2.8) en una única condición. La siguiente proposición apunta en ese sentido.

Proposición 3.2.9. Supongamos que se cumplen las afirmaciones de la tesis del teorema (3.2.8). Entonces dado $\epsilon \in (0, 1)$ se pueden elegir n, L, T, con n < L tales que:

$$\mathbb{P}\Big(_{2L+3n}A_t^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d, \text{ para algún } t, T \le t < 2T$$
$$y \text{ algún } x \in [L+n, 2L+n] \times [0, 2L)^{d-1}\Big) > 1 - \epsilon. \quad (3.10)$$

Demostración. Sea $\epsilon \in (0, 1)$; tomemos ϵ' de forma que $1 - \epsilon = (1 - \epsilon')^2$. Trabajaremos hasta finalizar la prueba con ϵ' . Por hipótesis sabemos que existen n, L, T' tales que cumplen las afirmaciones de la tesis de (3.2.8) y n < L. En particular la segunda de esas afirmaciones dice que, con probabilidad al menos $1 - \epsilon'$, existen $s \in [0, T')$ y un punto $x \in \{L + n\} \times [0, L)^{d-1}$ con la propiedad de que $_{L+2n}A_{s+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d$.

Se define un tiempo de parada τ' de la siguiente forma:

$$\tau' = \inf \left\{ u > 0 \colon \exists x \in \{L+n\} \times [0,L)^{d-1} \text{ tal que }_{L+2n} A_{u+1}^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d \right\},$$

y luego $\tau = \tau' \wedge T'$. Es obvio que $\mathbb{P}(\tau < T') > 1 - \epsilon'$.

Ahora se reinicia el proceso a tiempo (aleatorio) $\tau + 1$ pero con estado inicial $x + [-n, n]^d$. Utilizando la propiedad fuerte de Markov y la monotonía del proceso de contacto se tiene que, condicionado a $\{\tau < T'\}$:

- es posible dar un acoplamiento de forma que: $A_u^{x+[-n,n]^d} \subset A_u^{A_{\tau+1}^{[-n,n]^d}} = A_{u+\tau+1}^{[-n,n]^d}$;
- por la primera afirmación del teorema (3.2.8), siempre condicionado a $\{\tau < T'\}$, se tiene que al menos con probabilidad $1 - \epsilon'$ existe y tal que $y - x \in [0, L)^d$ y el proceso reiniciado a tiempo T' + 1 contiene a $y + [-n, n]^d$.

Combinando las afirmaciones de ambos ítems se obtiene que:

$$\mathbb{P}\Big(_{2L+3n}A_t^{[-n,n]^d} \supset y + [-n,n]^d \text{ para algún } t, T'+1 \le t < 2T+2$$

y algún $y \in [L+n, 2L+n] \times [0, 2L)^{d-1}\Big) > (1-\epsilon')^2; \quad (3.11)$

por lo que para finalizar la prueba hay que elegir T = T' + 1 (*n* y *L* son los elegidos al comienzo) y reemplazar $(1 - \epsilon')^2$ por $1 - \epsilon$.

Siguiendo la notación de la proposición anterior, el tiempo t (aleatorio) que aparece en (3.11) es $T' + \tau + 2$.

Para introducir una comparación con los procesos de percolación se necesita la siguiente proposición.

Proposición 3.2.10. Supongamos que se cumplen las afirmaciones de la tesis del teorema (3.2.8). Entonces: para todo $\epsilon \in (0, 1)$, se pueden elegir, n, a y b, con n < a de modo que si $(x, s) \in [-a, a]^d \times [0, b]$ se tiene que:

$$\mathbb{P}\bigg(\exists (y,t) \in [-3a,-a] \times [-a,a]^{d-1} \times [5b,6b] \text{ tal que existen caminos activos}$$

dentro de la caja
$$[-5a, 5a]^d \times [0, 6b]$$
 que vayan desde (3.12)

$$(x,s) + \left([-n,n]^d \times \{0\}\right) \text{ hasta todo sitio de } (y,t) + \left([-n,n]^d \times \{0\}\right)\right) \ge 1 - \epsilon$$

Demostración. Dado ϵ , tomemos ϵ' de forma que $1 - \epsilon = (1 - \epsilon')^{10}$. Luego se toman n, L y T satisfaciendo la tesis de la proposición anterior (3.2.9) con $1 - \epsilon'$ como referencia. Definimos a = 2L + n y b = 2T. Para mostrar el resultado aplicaremos repetidamente la afirmación (3.2.9) para mover los sitios infectados espacial y temporalmente pero siempre dentro de la caja $[-5a, 5a] \times [0, 6b]$.

En la desigualdad (3.10), x pertenece a la caja $[L+n, 2L+n] \times [0, 2L)^{d-1}$, pero es sencillo observar que la afirmación sigue siendo válida si tenemos que x pertenece a una caja similar pero en otro ortante, por lo que podremos aplicarla con cualquier elección de signo en las coordenadas.

Las siguientes son las reglas con las que se aplicará repetidamente la proposición (3.2.9). Nos dirán cada vez en qué ortante aplicarla (eligiendo un signo en cada coordenada) y las veces que será necesario hacerlo. • Para $2 \leq i \leq d$: supongamos que (z, u), $z = (z_1, \ldots, z_d)$, es el centro del cubo de sitios infectados a mover (inicialmente será (x, s)). Si $z_i \geq 0$ entonces nos movemos en la dirección negativa en la *i*-ésima coordenada; si $z_i < 0$ nos movemos en la dirección positiva de la *i*-ésima coordenada.

Como $a \ge 2L$ y cada vez que aplicamos la proposición (3.2.9) para mover el centro del cubo de sitios infectados (de lado 2n) nos movemos a lo sumo 2L sitios en la dirección determinada por el signo de cada coordenada, estas d - 1 coordenadas permanecerán siempre en [-a, a] mientras se aplique la proposición (3.2.9) con este criterio.

• Moveremos la primer coordenada del centro (z_1) en la dirección negativa hasta que esté en el intervalo [-3a, -a]. Si alcanzado este intervalo es necesario aplicar la proposición (3.2.9) (moverse nuevamente), lo haremos según el siguiente criterio: en la dirección negativa de la primer coordenada si ésta es mayor o igual a -2a y en la dirección postiva en caso contrario.

Como cada vez que aplicamos la proposición (3.2.9) nos movemos como mínimo L+nunidades a la izquierda en la primer coordenada y $-4(L+n) \leq -(4L+2n) = -2a$, en a lo sumo cuatro pasos, es decir, luego de aplicar a lo sumo cuatro veces la proposición (3.2.9), tendremos que la primer coordenada del centro del cubo de sitios infectados estará en [-3a, -a]. Ahora bien, lo máximo que nos podemos mover en la dirección negativa de primer coordenada cada vez que aplicamos la proposición (3.2.9) es 2L + n = a, por tanto, luego de que suceda que $z_1 \in [-3a, -a]$, el centro permanecerá en ese intervalo según el criterio que se definió en el párrafo anterior.

• Movemos la coordenada temporal u del centro (z, u) hasta alcanzar un valor mayor o igual que 5b = 10T. Como siempre nos movemos un tiempo aleatorio entre T y 2T en a lo sumo diez pasos (y cuatro como mínimo) superaremos 5b.

Ahora bien, como alcanzar lo planteado en el segundo ítem se hace en a lo sumo cuatro pasos de aplicar la proposición (3.2.9), y alcanzar el tiempo que se requiere para cesar la iteración lleva al menos cuatro pasos, el tiempo final luego de aplicar la proposición (3.2.9) las veces necesarias para cumplir las condiciones de todos los ítems, no excederá el valor 12T = 6b.

Cuando aplicamos la primera vez la proposición (3.2.9), sabemos que con probabilidad al menos $1 - \epsilon'$ existen $t \in [T, 2T)$ y $x = (x_1, \ldots, x_d) \in [-(2L + n), -(L + n)] \times [0, 2L)^{d-1}$ tales que:

$$_{2L+3n}A_t^{[-n,n]^d} \supset x + [-n,n]^d$$
.

Ahora bien, si ocurre este sucesos se puede considerar por la propiedad fuerte de Markov el proceso de contacto reiniciado (a partir del tiempo aleatorio t) pero con condición inicial $x + [-n, n]^d$ de igual manera que en la proposición anterior. De esa forma se puede volver a aplicar la proposición (3.2.9) pero esta vez con $x + [-n, n]^d$ como condición inicial del proceso de contacto y con los ortantes adecuados a los signos de las coordenadas de x. Por tanto, si sucede el evento que nos permite reiniciar el proceso de contacto, con probabilidad al menos $1 - \epsilon'$ es posible encontrar $t' \in [T, 2T)$ y $x' \in I$ tales que:

$$_{x,2L+3n}A_{t'}^{[-n,n]^d} \supset x' + [-n,n]^d,$$

donde I es el conjunto:

$$[x_1 - (2L+n), x_1 - (L+n)] \times (x_2 - 2L, x_2] \times \cdots \times (x_d - 2L, x_d].$$

A la poco amigable expresión del conjunto I se llega aplicando las reglas establecidas en los ítems anteriores. Recordar que x tiene, a excepción de la primer coordenada, todas sus coordenadas positivas, con lo que el primer ítem nos dice cómo aplicar la proposición (3.2.9) y que $x_1 \ge -2a$.

Si ahora se mira el proceso desde el comienzo, es decir desde tiempo cero con condición inicial $[-n, n]^d$, sabemos que con probabilidad $(1 - \epsilon')^2$ existen: $t'' = t + t' \in [2T, 4T)$ y $x'' = x' \in I$ tales que:

$$_{4L+6n}A_{t''}^{[-n,n]^d} \supset x' + [-n,n]^d$$

ya que los sucesos ocurren en intervalos temporales aleatorios pero disjuntos y vale la propiedad fuerte de Markov.

Observar, a pesar de lo engorroso que puede resultar la notación detallada, que cada vez que se aplica la proposición (3.2.9) se utilizan los procesos de Poisson que están a una distancia máxima de 2L + 3n del centro del cubo de vértices infectados, por lo que en la construcción participan solamente los procesos de Poisson correspondientes a los puntos de $[-5a, 5a]^d$, puesto que el centro del cubo puede estar a lo sumo a una distancia 3a del origen y en efecto, como n < L: $3a + 2L + 3n = 4a + 2n \le 4a + L + n \le 5a$, por lo que todo transcurre dentro de la caja $[-5a, 5a]^d$.

Repitiendo este razonamiento las veces que sea necesario (que vimos que no eran más de diez) y reemplazando $(1 - \epsilon')^{10}$ por $1 - \epsilon$ se demuestra la afirmación (3.12).

Finalmente estamos en condiciones de probar que las dos afirmaciones de la tesis del teorema (3.2.8) implican la sobrevivencia del proceso de contacto. Como hemos anunciado, se comparará al proceso de contacto con un proceso de percolación orientada por sitios. Al proceso de percolación orientada por sitios lo notaremos por B_k siguiendo la caracterización y notación previa al teorema (1.4.1).

Teorema 3.2.11. Supongamos que se cumplen las afirmaciones de la tesis del teorema (3.2.8). Para todo $p \in (0,1)$ se pueden elegir n, a, b, con n < a, cumpliendo la siguiente propiedad:

si las configuraciones iniciales B_0 y A satisfacen que:

$$j \in B_0$$
 implica que $A \supset x + [-n, n]^d$,

para algún $x \in [a(4j-1), a(4j+1)] \times [-a, a]^{d-1}$, entonces el proceso $\{A_t^A : t \ge 0\}$ puede acoplarse con el proceso de percolación orientada por sitios de parámetro p, $\{B_k : k \ge 0\}$, de forma tal que:

$$j \in B_k \text{ implica que } A_t^A \supset x + [-n, n]^d,$$
 (3.13)

para algún $(x,t) \in [a(4j-2k-1), a(4j-2k+1)] \times [-a,a]^{d-1} \times [5bk, b(5k+1)].$

En particular A_t sobrevive con probabilidad positiva.

Demostración. Separemos la prueba en dos etapas. En la primera veremos cómo construir las variables aleatorias Bernoulli que se requieren para el proceso de percolación por sitios B_k pero sin preocuparnos por la independencia entre estas. En la segunda etapa atenderemos a esto último utilizando el teorema (1.5.1) del primer capítulo.

Sea $\epsilon \in (0, 1)$; a lo largo de la prueba se irán fijando las condiciones que deberá cumplir ϵ en función de p. Fijo un ϵ , la proposición (3.2.10) nos dice que existen n, $a \neq b$, con n < a, que cumplen la tesis (de ésta) para el valor del ϵ fijado. Notar que si trasladamos la primer coordenada espacial o la coordenada temporal manteniendo las longitudes de los intervalos del evento al que refiere la desigualdad (3.12), ésta seguirá valiendo en virtud del mismo argumento de la demostración que se realizó.

Para la construcción de B_k razonaremos en forma recursiva basados en la representación gráfica y la proposición anterior. Supongamos que se han construído $\{B_i: 0 \le i \le k\}$ con la propiedad que menciona la tesis del teorema (afirmación (3.13)); construyamos B_{k+1} (el paso base de la inducción está implícito en la suposición sobre B_0 y A).

Si $B_k \cap \{j, j-1\} \neq \emptyset$, sabemos que (3.13) se cumple para j o j-1. Pensemos que se cumple para j; esto es: existe $(x, s) \in [a(4j-2k-1), a(4j-2k+1)] \times [-a, a]^{d-1} \times [5bk, b(5k+1)]$ tal que $A_s^A \supset x+[-n, n]^d$. Observar que el conjunto donde se encuentra (x, s) es esencialmente, a menos de traslaciones en la primer coordenada espacial y en la coordenada temporal, el mismo que aparece en la hipótesis de (3.12) (observar los largos de los intervalos en los que varía cada coordenada). Ahora bien, j permanecerá abierto en el tiempo k+1 de acuerdo a una variable aleatoria Y_{k+1}^j con distribución Bernoulli de parámetro p, e independiente de las variables aleatorias que generaron el proceso de percolación hasta el paso k y de la evolución de k a k+1 de sus vecinos. Por tanto debemos dar un mecanismo para la construcción de esta variable aleatoria que nos dé el acoplamiento de ambos procesos.

Exijamos que $1 - \epsilon > p$. Sea \mathcal{C}_{k+1}^{j} el siguiente evento:

$$\mathcal{C}_{k+1}^{j} = \left\{ \exists (y,t) \in \left[a \left(4j - 2k - 3 \right), \, a \left(4j - 2k - 1 \right) \right] \times \left[-a, a \right]^{d-1} \times \left[5b(k+1), b \left(5(k+1) + 1 \right) \right], \right\} \right\}$$

tal que existen caminos activos dentro del conjunto

$$\left[a \left(4j - 2k - 5 \right), a \left(4j - 2k + 5 \right) \right] \times \left[-5a, 5a \right]^{d-1} \times \left[5bk, b \left(5k + 6 \right) \right]$$
 desde $(x, s) + \left([-n, n]^d \times \{0\} \right)$ hasta todo sitio de $(y, t) + \left([-n, n]^d \times \{0\} \right)$

Se puede advertir que el evento C_{k+1}^j es, a menos de traslaciones en la representación gráfica, el mismo que aparece en (3.12). Consideremos la variable aleatoria Bernoulli $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$. En virtud de lo anterior y de la proposición (3.2.10) esta variable aleatoria corresponderá a un éxito con probabilidad q, siendo $q \ge 1 - \epsilon > p$. Advertir que q puede depender de j y k pero siempre es mayor o igual que $1 - \epsilon$.

Para continuar, supongamos que es posible acoplar las variables aleatorias Y_{k+1}^j y $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$ de forma tal que toda vez que la primera sea un éxito la segunda lo sea; es decir, brindar una construcción donde $Y_{k+1}^j \leq \mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$.

Bajo este supuesto se tiene que: si $j \in B_{k+1}$, la variable aleatoria Y_{k+1}^j es un éxito y por tanto $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$ también; por lo que la definición de \mathcal{C}_{k+1}^j afirma que existe (y, t) tal que:

$$A^A_t \supset y + [-n,n]^d \,,$$

ya que $A_s^A \supset x + [-n, n]^d$ (porque $j \in B_k$) y existen los caminos activos que brinda la definición de \mathcal{C}_{k+1}^j que propagan la infección. A su vez sabemos que:

$$(y,t) \in [a(4j-2k-3), a(4j-2k-1)] \times [-a,a]^{d-1} \times [5b(k+1), b(5(k+1)+1)].$$

Observando que: a(4j-2k-3) = a(4j-2(k+1)-1) y a(4j-2k-1) = a(4j-2(k+1)+1) se probaría la afirmación (3.13); aunque resta generar las variables Y_k^j y ver que estas son independientes entre sí.

En la segunda etapa de la prueba se debe atender a la independencia de la variables aleatorias con las que se construye el proceso de percolación por sitios, para que verdaderamente sea un proceso de percolación por sitios. Las variables $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$ a partir de las que se construiyen las variables Y_{k+1}^j que generan el proceso de percolación por sitios no son independientes, puesto que la definición del evento \mathcal{C}_{k+1}^j se basa en la construcción de la proposición (3.2.10) que utiliza los procesos de Poisson en regiones de la representación gráfica que, a menos de traslaciones, son análogas a $[-5a, 5a] \times [0, 6b]$, y estas regiones no son todas disjuntas. Veremos que las variables $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$ son *m*-dependientes para cierto *m*.

Lo que es relativamente sencillo de observar es que la dependencia de las variables no se hereda por k sino a partir de las coordenadas espaciales. Para ser claros, la situación del proceso de percolación a tiempo k + 1 depende solamente del estado del proceso a tiempo k. Para cada punto (naturalmente un punto que esté abierto) en B_k sabemos que existen $x \in \mathbb{Z}^d$ y $s \in [5bk, 5b(k+1)]$ tales que $A_s^A \supset x + [-n, n]^d$; y en el caso de que el sitio permanezca abierto en la transición de k a k + 1 encontraremos $y \in \mathbb{Z}^d$ y $t \in [5b(k+1), 5bk+6b]$ tales que $A_t^A \supset y + [-n, n]^d$. Luego utilizamos a t en el rol de s y así sucesivamente para construir las variables aleatorias. Notar que se utilizan regiones disjuntas de la representación gráfica; en cada transición hay independencia de lo que sucedió en tiempos anteriores a 5bk (en la k-ésima transición nos encontramos con el proceso de contacto en la franja temporal [5bk, 5b(k+1)]).

Si $j \in B_k$, sabemos que existen $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ y s > 0 tales que $A_s^A \supset x + [-n, n]^d$, y $x_1 \in [a(4j+2k-1), a(4j+2k+1)]$. Ahora bien, para generar la variable $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}$ utilizamos los procesos de Poisson en la región espacial $R_j = [a(4j-2k-5), a(4j-2k+5)] \times [-5a, 5a]^{d-1}$ ya que nos restringimos a caminos dentro de ella. Por tanto, si j_1 y j_2 son dos sitios cualesquiera de B_k que se encuentran a una distancia tal que las regiones R_{j_1} y R_{j_2} son disjuntas, entonces $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^{j_1}}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^{j_2}}$ serán independientes. En nuestro caso las variables son 4-dependientes, ya que si comparamos R_j y R_{j+5} son regiones disjuntas.

Este razonamiento es extendible a una cantidad finita de variables aleatorias cuyos índices j estén debidamente separados.

Probada la *m*-dependencia se utiliza el teorema (1.5.1) para generar variables aleatorias independientes con distribución de Bernouilli de parámetro p a partir de la familia de variables Bernouilli *m*-dependientes $\{\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j}: j \in \mathbb{Z}\}$, de forma que exista un acoplamiento

donde se cumpla que: $\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{k+1}^j} \geq Y_{k+1}^j$. Para ello se debe elegir $\epsilon \in (0,1)$ de forma que, además de $1 - \epsilon > p$, cumpla $1 - \epsilon > 1/4$ y:

$$1 - \epsilon > 1 - (1 - \sqrt{p})^{\Delta},$$

donde $\Delta = \# \{ y \in \mathbb{Z} \colon |y| \le 4 \} = 9.$

Para ver que bajo estas condiciones A_t sobrevive con probabilidad positiva, lo que en definitiva es el recíproco del teorema (3.2.8), alcanza con tomar p suficientemente cercano a 1 de forma que se satisfagan las conclusiones del teorema (1.4.1), comparar el proceso con B_k (con $B_0 = \{0\}$) y aplicar la construcción de este teorema. En efecto, si con probabilidad positiva existen sitios abiertos en B_k para valores tan grandes de k como se quiera, entonces la condición (3.13) asegura que, con al menos la misma probabilidad, $A_t^{[-n,n]^d} \neq \emptyset$ para todo $t \ge 0$. Luego la sobrevivencia de $A_t^{[-n,n]^d}$ con probabilidad positiva es equivalente a la sobrevivencia de A_t^0 con probabilidad positiva.

Observación 3.2.12. Queda claro de la prueba del teorema anterior que este acoplamiento también es posible si en lugar del proceso de contacto A_t colocamos el proceso que resulta de utilizar solamente los procesos de Poisson de la representación gráfica correspondientes a sitios $x \in \mathbb{Z}^d$ con $|x_i| \leq 5a, 2 \leq i \leq d$.

Ahora sacaremos beneficio al teorema anterior para probar uno de los principales resultados de la monografía. Recordemos que los valores críticos λ_1 y λ_2 definidos en el segundo capítulo son a priori diferentes. En el caso particular de \mathbb{Z}^d sucede que $\lambda_1 = \lambda_2$ y eso es lo que se prueba en la primera parte del siguiente teorema. La segunda parte del teorema responde al comportamiento del proceso de contacto en el valor crítico para el caso sobre el grafo \mathbb{Z}^d . Este resultado fue probado por Bezuidenhout y Grimmett en 1990 en el artículo [BG90].

Teorema 3.2.13.

2. Para $\lambda = \lambda_1$ el proceso de contacto se extingue casi seguramente.

Demostración. Ítem 1.

Sea $\lambda > \lambda_1$ y A_t el proceso de contacto de parámetro λ . Como nos interesa probar que hay una probabilidad positiva de que el origen sea reinfectado infinitas veces debemos considerar en principio el proceso con estado inicial $\{0\}$. Ahora bien, sabemos que existe una probabilidad positiva de que A_t^0 cubra la región $[-n, n]^d$ en tiempo 1 por lo que se puede suponer que el proceso comienza con $[-n, n]^d$ en vez de $\{0\}$; en efecto, condicionado a $\{A_1^0 \supset [-n, n]^d\}$ se tiene que $A_t^{[-n,n]^d} \subset A_t^{A_1^0} = A_{t+1}^0$. Supondremos entonces que el estado inicial de sitios infectados es $[-n, n]^d$ para cierto n que se escogerá en los próximos párrafos.

Tomemos $p \in (0, 1)$ de forma que se cumpla el teorema (1.4.1) y en particular que:

$$\inf_{k\geq 0} \mathbb{P}(k\in B_{2k}) = \alpha > 0, \qquad (3.14)$$

^{1.} $\lambda_1 = \lambda_2$;

siendo $B_0 = \{0\}.$

Además para ese valor de p el proceso B_k está en la fase supercrítica. Recordemos que B_{k+1} depende solamente de B_k , por ende los sucesos $\{k \in B_{2k} : k \ge 0\}$ son independientes. Afirmamos que la probabilidad de que exista una sucesión creciente de naturales j_k para los cuales $j_k \in B_{2i_k}$ es positiva. En efecto:

$$\mathbb{P}(k \in B_{2k} \text{ i.o.}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{l \ge 1} \bigcup_{j \ge l} \{j \in B_{2j}\}\right)$$
$$= \lim_{l \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \ge l} \{j \in B_{2j}\}\right)$$
$$\ge \lim_{l \to \infty} \mathbb{P}(l \in B_{2l})$$
$$\ge \inf_{l \ge 0} \mathbb{P}(l \in B_{2l}) = \alpha > 0, \qquad (3.15)$$

donde en la segunda igualdad utilizamos que $\left(\bigcup_{j\geq l} \{j \in B_{2j}\}: l \geq 1\right)$ es una sucesión decreciente de eventos. Naturalmente $\mathbb{P}(k \in B_{2k} \text{ i.o.})$ está acotada superiormente por $\mathbb{P}(B_k \neq \emptyset$ para todo k).

Ahora bien, como $\lambda > \lambda_1$ el proceso sobrevive con probabilidad positiva y por tanto valen las afirmaciones de la tesis del teorema (3.2.8). Se puede entonces recurrir al teorema (3.2.11) que afirma que para el valor de p existen n, a y b, con n < a, tales que es posible acoplar el proceso de percolación por sitios B_k con el proceso de contacto $A_t^{[-n,n]^d}$ de forma tal que se cumpla la relación (3.13). Por lo que si $k \in B_{2k}$ existen $x_k \in [-a, a]^d$ y $t_k \in [10bk, b(10k + 1)]$ tales que $A_{t_k}^{[-n,n]^d} \supset x_k + [-n,n]^d$. Observemos que para diferentes valores de k, las regiones de la representación gráfica donde estamos mirando el proceso de contacto son disjuntas (los intervalos de tiempo son todos disjuntos).

Es sencillo advertir que para cualquier $x \in \mathbb{Z}^d$ y t > 0 fijo se tiene que:

$$\mathbb{P}\left(x \in A_t^{[-n,n]^d}\right) > 0\,.$$

Llamemos δ al mínimo de $\mathbb{P}\left(x \in A_1^{[-n,n]^d}\right)$ con $x \in [-2a, 2a]^d$. A cada tiempo s en el que exista una caja de sitios infectados de la forma $x + [-n, n]^d$, con $x \in [-a, a]^d$, hay una probabilidad positiva y acotada inferiormente por δ , de que una unidad de tiempo después alguno de estos sitios haya contagiado a 0.

En efecto, por un lado se sabe que $x + [-n, n]^d \subset [-2a, 2a]^d$, por otro que la probabilidad de que $0 \in A_{s+1}^{[-n,n]^d}$ dado que $A_s^{[-n,n]^d} \supset x + [-n, n]^d$, es mayor que la probabilidad de que exista un camino activo desde (y, s) hasta (0, s + 1) para algún $y \in x + [-n, n]^d \subset A_s^{[-n,n]^d}$. Esta última probabilidad, utilizando la propiedad fuerte de Markov para reiniciar el proceso de contacto pero con condición inicial $x + [-n, n]^d$, es igual a la probabilidad de que exista un camino activo de infección desde (y, 0) hasta (0, 1) para algún sitio $y \in x + [-n, n]^d$, la cual está acotada inferiormente por δ , ya que $x + [-n, n]^d \subset [-2a, 2a]^d$.

Se define el evento ${\mathcal C}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} = \left\{ \exists j_k \uparrow \infty : \exists (x_{j_k}, t_{j_k}) \in [-a, a]^d \times [10bj_k, b(10j_k + 1)], \ y \ A_{t_{j_k}}^{[-n, n]^d} \supset x_{j_k} + [-n, n]^d \right\}.$$

Por (3.15) y (3.13) se sabe que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq \alpha > 0$. Observar que la sucesión de tiempos t_{j_k} que aparece en la definición de \mathcal{C} es creciente.

Entonces se tiene que:

$$\mathbb{P}\left(0 \in A_{t}^{[-n,n]^{d}} \text{ i.o.}\right) = \mathbb{P}\left(\exists s_{k} \uparrow \infty : 0 \in A_{s_{k}}^{[-n,n]^{d}}\right) \\
= \mathbb{P}\left(\exists s_{k} \uparrow \infty : 0 \in A_{s_{k}}^{[-n,n]^{d}} \mid \mathcal{C}\right) \times \mathbb{P}\left(\mathcal{C}\right) \\
\geq \alpha \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{l \ge k} \{0 \in A_{t_{j_{l}}+1}^{[-n,n]^{d}}\} \mid \mathcal{C}\right) \\
\geq \alpha \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\left(0 \in A_{t_{j_{k}+1}}^{[-n,n]^{d}} \mid \mathcal{C}\right) > \alpha\delta > 0, \quad (3.16)$$

lo que significa que el proceso de contacto sobrevive fuertemente. En definitiva se ha probado que $\lambda > \lambda_1$ implica $\lambda > \lambda_2$, de lo que se deduce que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ítem 2.

Para probar la segunda afirmación del teorema tomamos λ de forma que A_t persista con probabilidad positiva. Nuevamente se puede afirmar que se cumplen las dos desigualdades de la tesis del teorema (3.2.8).

Ahora bien, la proposición (2.3.1) del segundo capítulo afirma que, fijo t y dado ϵ , existe $\delta' > 0$ tal que si $|\lambda' - \lambda| < \delta'$ entonces se tiene que:

 $\mathbb{P}(B_s \neq A_s \text{ para algún } s \leq t) < \epsilon \,,$

donde A_t^A y B_t^A son los procesos de contacto de parámetros λ y λ' respectivamente. Se puede entonces elegir un valor λ' , menor que λ , y de forma tal que las desigualdades del teorema (3.2.8) siguen valiendo. En consecuencia el teorema (3.2.11) nos permite acoplar el proceso de contacto de parámetro λ' con un proceso de percolación orientada supercrítico; ergo el proceso de contacto de parámetro λ' persistirá con probabilidad positiva. Se ha probado entonces que $\lambda' \geq \lambda_1$ y como corolario se tiene que $\lambda > \lambda' \geq \lambda_1$.

En definitiva se ha probado que si λ es un valor del parámetro tal que el proceso de contacto sobrevive con probabilidad positiva entonces $\lambda > \lambda_1$, lo que implica que para $\lambda = \lambda_1$ el proceso se extingue casi seguramente.

Como $\lambda_1 = \lambda_2$ denominaremos λ_c a este valor común por el resto del capítulo, que es en definitiva el valor crítico del proceso de contacto en \mathbb{Z}^d .

3.3. Resultados para la fase supercrítica

En esta sección se presentan algunos resultados de interés para la fase supercrítica del proceso de contacto, es decir para valores del parámetro λ mayores a λ_c .

3.3.1. El teorema de convergencia completa

Antes de enunciar el próximo teorema precisamos hacer dos recordatorios. Se utilizará \mathbb{P}^A y \mathbb{E}^A para notar la probabilidad y la esperanza de un suceso respecto al proceso de contacto con condición inicial A. El proceso A_t^A puede pensarse también como una medida de probabilidad en $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, que es en definitiva la distribución a tiempo t del proceso de contacto con condición inicial A.

Tiene sentido entonces plantearse el siguiente resultado de convergencia de medidas (denominado teorema de convergencia completa) que nos dice que si vemos A_t^A como una medida de probabilidad sobre Σ , entonces ésta converge con t a una combinación convexa de $\bar{\nu}$ y δ_{\emptyset} . Si $\lambda \leq \lambda_c$ el resultado es obvio porque el proceso se extingue casi seguramente y converge a δ_{\emptyset} , por lo que el resultado es interesante cuando $\lambda > \lambda_c$. Este resultado es cierto en cualquier dimensión pero la prueba que brindamos solo vale para $d \geq 2$. Para el caso d = 1 la prueba requiere de otro tipo de técnicas y resultados previos. Se puede consultar la demostración para \mathbb{Z} en la página 284 de [Li85].

Teorema 3.3.1. Sea $d \ge 2$ y supongamos que $\lambda > \lambda_c$. Entonces para todo $A \subset \mathbb{Z}^d$ se tiene que

$$A_t^A \Rightarrow \alpha_A \bar{\nu} + [1 - \alpha_A] \delta_{\emptyset} \quad cuando \ t \to +\infty$$

 $donde \Rightarrow denota \ la \ convergencia \ débil \ de \ medidas \ y \ \alpha_A \ la \ probabilidad \ de \ sobrevivencia$ $cuando \ comenzamos \ con \ los \ vértices \ del \ conjunto \ A \ como \ sitios \ infectados, \ es \ decir,$

$$\alpha_A = \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset \text{ para todo } t).$$

Demostración. Para probar el teorema utilizaremos la proposición (2.3.7) de equivalencias sobre la convergencia completa. Primero debemos chequar que $\alpha_A = \mathbb{P}(x \in A_t^A \text{ i.o.})$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ y $A \subset \mathbb{Z}^d$. Como el grafo es conexo alcanza con probarlo para x = 0.

Sea G el siguiente evento:

 $G = \{0 \in A_t \text{ para una sucessión de tiempos creciente a } + \infty\}.$

Aclaramos que cuando hablemos de $\mathbb{P}^{A}(G)$ nos referiremos al evento G involucrando al proceso de contacto con condición inicial A. Afirmamos que para todo $x \in \mathbb{Z}^{d}$ vale la desigualdad:

$$\mathbb{P}^{A}(G|\mathcal{F}_{s}) \geq \mathbb{P}(0 \in A_{t}^{x} \text{ para algún } t) \mathbb{P}^{\{0\}}(G) \mathbf{1}_{\{x \in A_{s}\}}, \qquad (3.17)$$

donde \mathcal{F}_s es la filtración generada por los procesos de Poisson de la representación gráfica hasta tiempo s.

G es claramente un suceso invariante por *shifts* (traslaciones) temporales, por tanto, utilizando la pérdida de memoria (2.1) para reiniciar el proceso a tiempo s se tiene que:

$$\mathbb{P}^A(G \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^{A_s^A}(G) \,.$$

Se define el tiempo de parada $\sigma = \inf\{t > 0 : 0 \in A_t\}$ y \mathcal{F}_{σ} la σ -álgebra asociada a este tiempo.

Sobre el evento $\{x \in A_s^A\}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}^{A_s^A}(G) \geq \mathbb{P}^{\{x\}}(G) \qquad (3.18)$$

$$= \mathbb{E}^{\{x\}} \left(\mathbb{E} \left(1_G \mid \mathcal{F}_{\sigma} \right) \right)$$

$$\geq \mathbb{E}^{\{x\}} \left(\mathbb{P} \left(G \mid \mathcal{F}_{\sigma} \right) \mathbf{1}_{\{\sigma < \infty\}} \right)$$

$$= \mathbb{E}^{\{x\}} \left(\mathbb{P}^{A_{\sigma}}(G) \mathbf{1}_{\{\sigma < \infty\}} \right)$$
(3.19)

$$\geq \mathbb{E}^{\{x\}} \left(\mathbb{P}^{\{0\}}(G) \mathbf{1}_{\{\sigma < \infty\}} \right) \tag{3.20}$$

$$= \mathbb{P}^{\{0\}}(G) \mathbb{P}^{\{x\}}(\sigma < \infty) \,,$$

donde en las desigualdades (3.18) y (3.20) utilizamos la monotonía del proceso de contacto y en la igualdad (3.19) aplicamos la propiedad fuerte de Markov: si se observa que vale $\mathbb{P}^{\{x\}}(\sigma < \infty) = \mathbb{P}(0 \in A_t^x \text{ para algún } t)$ se prueba (3.17).

Ahora bien, como $\mathbb{P}(x \in A_1^0) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, por la pérdida de memoria se tiene que:

$$\mathbb{P}(0 \in A_t^x \text{ para algún } t) = \mathbb{P}(x \in A_t^0 \text{ para algún } t) \ge \mathbb{P}^{\{0\}}(G).$$
(3.21)

Por tanto (3.17) se transforma en:

$$\mathbb{P}^A\left(G \mid \mathcal{F}_s\right) \ge [\mathbb{P}^{\{0\}}(G)]^2 \mathbf{1}_{\{x \in A_s^A\}},$$

y finalmente:

$$\mathbb{P}^{A}\left(G \mid \mathcal{F}_{s}\right) \geq \left[\mathbb{P}^{\{0\}}(G)\right]^{2} \mathbf{1}_{\left\{A_{s}^{A} \neq \emptyset\right\}}.$$
(3.22)

Como $\lambda > \lambda_c$, el primer ítem del teorema anterior (3.2.13) implica que $\mathbb{P}^{\{0\}}(G) > 0$; pero el teorema de convergencia de martingalas nos dice que $\mathbb{P}^A(G \mid \mathcal{F}_s)$ converge casi seguramente a $\mathbf{1}_{G^A}$ cuando $s \to +\infty$, donde G^A indica al evento G respecto el proceso de contacto con estado inicial A. Esto último implica que casi seguramente se tiene que:

$$\{A_s^A \neq \emptyset \text{ para todo } s\} \subset G^A$$
,

y como el evento $\{A_s^A \neq \emptyset$ para todo s $\}$ contiene claramente a G^A se prueba que:

$$\alpha_A = \mathbb{P}^A(G) = \mathbb{P}(0 \in A_t^A \text{ i.o.}).$$

Hasta aquí no hemos utilizado que $d \ge 2$; utilizaremos esto para probar la segunda condición equivalente a la convergencia completa.

Nuevamente nos apoyaremos en el proceso de percolación por sitios B_k . Tomemos p de forma que B_k sea supercrítico y se cumplan las afirmaciones de la tesis del teorema (1.4.1). Como ya se ha mencionado, el hecho de que el parámetro λ sea mayor a λ_c implica la sobrevivencia con probabilidad positiva del proceso de contacto y por tanto el cumplimiento de las desigualdades de la tesis del teorema (3.2.8), por lo que es posible acoplar al proceso de contacto con un proceso de percolación por sitios de parámetro p en virtud del teorema (3.2.11). Sean a, b y n < a los valores que brinda el teorema (3.2.11) y hacen que se cumpla la relación (3.13).

Para $j \in \mathbb{Z}$, sea $A_{t,j}$ el proceso que resulta de usar solamente los procesos de Poisson de la representación gráfica correspondientes a la región del espacio:

$$R_j = \{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \colon x_2 \in (6a(2j-1), 6a(2j+1)) \}.$$

Es claro que para diferentes valores de j las regiones R_j son disjuntas, por tanto los procesos $A_{t,j}$ son independientes entre sí. Notar que por la monotonía vale que:

$$A_t \supset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{t,j} \,,$$

y que la observación (3.2.12) permite que el acoplamiento que nos da el teorema (3.2.11) también valga si cambiamos A_t por $A_{t,j}$.

Sea $l \ge 1$ impar y $Q_j = R_j \cap (-6al, 6al)^d$. No es difícil observar que la construcción gráfica y la monotonía permiten afirmar que:

$$A_t^{(-6al,6al)^d} \supset \bigcap_{\frac{1-l}{2} \le j \le \frac{l-1}{2}} A_{t,j}^{Q_j} ,$$

por lo que entonces vale:

$$\mathbb{P}(A_t^{(-6al,6al)^d} \cap (-6al,6al)^d = \emptyset) \leq \mathbb{P}(A_{t,j}^{Q_j} \cap Q_j = \emptyset \text{ para todo } j)$$
$$= \prod_j \mathbb{P}(A_{t,j}^{Q_j} \cap Q_j = \emptyset)$$
$$= \left[\mathbb{P}(A_{t,0}^{Q_0} \cap Q_0 = \emptyset)\right]^l,$$

donde en la primer igualdad se usó la independencia. Nuevamente la monotonía permite advertir que $A_{t,0}^{Q_0} \supset A_{t,0}^{(-6a,6a)^d}$ ya que $Q_0 \supset (-6a, 6a)^d$, por lo que entonces vale también que:

$$\mathbb{P}(A_{t,0}^{Q_0} \cap Q_0 = \emptyset) \leq \mathbb{P}(A_{t,0}^{(-6a,6a)^d} \cap Q_0 = \emptyset)$$

$$\leq \mathbb{P}(0 \notin A_{t,0}^{(-6a,6a)^d}).$$

Juntando las desigualdades anteriores se obtiene:

$$\mathbb{P}\left(A_t^{(-6al,6al)^d} \cap (-6al,6al)^d = \emptyset\right) \le \left[\mathbb{P}\left(0 \notin A_{t,0}^{(-6a,6a)^d}\right)\right]^l.$$

En consecuencia para mostrar que en nuestro caso vale la condición (2.12) de la proposición (2.3.7) será suficiente con probar que:

$$\inf_{t \ge 0} \mathbb{P}\left(0 \in A_{t,0}^{(-6a,6a)^d}\right) > 0, \qquad (3.23)$$

y luego tomar el límite inferior en l.

Para mostrar (3.23) se recurre al acoplamiento con el proceso de percolación por sitios. Por la afirmación (1.1) del teorema (1.4.1) se sabe que:

$$\inf_{n} \mathbb{P}^{\{0\}}(n \in B_{2n}) = \alpha > 0.$$

Pero del acoplamiento del teorema (3.2.11) surge que, condicionado a $\{k \in B_{2k}\}$, es posible encontrar $(x_k, t_k) \in [-a, a]^d \times [10bk, b(10k+1)]$ de tal forma que $A_{t_k}^{[-n,n]^d} \supset x_k + [-n, n]^d$, para ciertos valores de $a, b \ge n$, con n < a. Ya se observó que el acoplamiento se realiza en la región donde está definido $A_{t,0}$ (3.2.12), y entonces como $(-6a, 6a)^d \supset [-n, n]^d$ se tiene por la monotonía del proceso de contacto que:

$$A_{t_k,0}^{(-6a,6a)^d} \supset x_k + [-n,n]^d.$$
(3.24)

Ahora bien, si se repara en que,

$$\min_{x\in [-a-n,a+n]^d} \mathbb{P}(0\in A_1^x) > 0\,,$$

y se acompaña la afirmación (3.24) de reiniciar el proceso $A_{t,0}^{(-6a,6a)^d}$ a tiempo $t = t_k$ (para lo que se utiliza la propiedad fuerte de Markov, porque t_k es un tiempo aleatorio), para todo k no negativo se tiene:

$$\mathbb{P}\left(0 \in A_{t_k+1,0}^{(-6a,6a)^d}\right) > \beta > 0.$$

Se ha visto que para todo $k \ge 0$, con probabilidad positiva y acotada inferiormente por β , es posible encontrar $s_k \in [10bk + 1, 10bk + b + 1]$ tal que: $0 \in A_{s_k,0}^{(-6a,6a)^d}$. De esto se deduce también que $|s_{k+1} - s_k|$ es menor o igual a 11*b*. Por otro lado:

$$\inf_{h \in [0,11b]} \mathbb{P}(0 \in A_{h,0}^0) \ge \inf_{h \in [0,11b]} e^{-h} = e^{-11b} > 0$$

ya que la probabilidad de que $0 \in A_{h,0}^0$ es mayor que la probabilidad de que el reloj Poisson que indica los recuperos sea constante igual a 0 en el intervalo [0, h]. Entonces finalmente se tiene que:

$$\inf_{h \in [0,11b]} \mathbb{P}(0 \in A_{s_k+h,0}^{(-6a,6a)^d} \mid 0 \in A_{s_k,0}^{(-6a,6a)^d}) \ge e^{-11b} > 0$$

y por tanto vale la afirmación (3.23), y se completa la prueba del teorema.

3.3.2. Cotas exponenciales para los tiempos de extinción

Pasamos directamente al resultado que da interés a esta sección.

Teorema 3.3.2. Supongamos que $\lambda > \lambda_c$. Sea $\tau_A = \inf\{t > 0 : A_t^A = \emptyset\}$ el tiempo de extinción del proceso de contacto con condición inicial A finita. Entonces existen constantes positivas C y ϵ , independientes de t y A, tales que:

$$\mathbb{P}(t < \tau_A < \infty) \le C e^{-\epsilon t} \,. \tag{3.25}$$

Demostración. La idea de esta demostración es utilizar varias veces el teorema (3.2.11) de acoplamiento y el resultado (1.4.1) de percolación por sitios. Tomemos $p \in (0, 1)$ de forma que el proceso de percolación orientada por sitios satisfaga las conclusiones del teorema (1.4.1). Luego, como $\lambda > \lambda_c$ se tiene que A_t sobrevive con probabilidad positiva y por tanto vale el teorema (3.2.8); en consecuencia se puede aplicar el teorema (3.2.11) que nos dice que existen elecciones de a, b y n, con n < a, de forma que se cumple la propiedad de acoplamiento (3.13).

Sea
$$\delta = \mathbb{P}(A_1^0 \supset x + [-n, n]^d$$
 para algún $x \in \mathbb{Z}^d) > 0$. Por monotonía se tiene que:
 $\mathbb{P}(A_1^A \supset x + [-n, n]^d$ para algún $x \in \mathbb{Z}^d) \ge \delta$,
para todo $A \neq \emptyset$.

Iniciemos el proceso de contacto con A finito y no vacío. Se construirá una variable aleatoria N con distribución tal que $\mathbb{P}(N = k) = \delta(1 - \delta)^k$ para $k \ge 0$ y de forma que se cumpla que: o bien $A_N^A = \emptyset$ ó $A_{N+1}^A \supset x + [-n, n]^d$ para algún $x \in \mathbb{Z}^d$;. En el primer caso el proceso se extinguió en un tiempo anterior a N y permanecerá en esa condición, y en el segundo caso nos permitirá reiniciar el proceso y aplicar el teorema (3.2.11).

Comencemos observando que el evento:

 $\{A_1^A \supset y + [-n, n]^d \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}^d\},\$

tiene probabilidad al menos δ . Tomamos $\{N = 0\}$ como un sub-evento del evento anterior con probabilidad δ . Esto es posible porque $A \neq \emptyset$ y por el acoplamiento que brinda la representación gráfica entre procesos con diferente condición inicial, ya que si $x \in A$ entonces $A_1^x \subset A_1^A$ y entonces $\{A_1^x \supset y + [-n, n]^d$ para algún $y \in \mathbb{Z}^d\}$ es un sub-evento que tiene probabilidad δ .

En el complemento de $\{N = 0\}$ se tiene que: o bien $A_1^A = \emptyset$ ó $A_1^A \neq \emptyset$. En el primer caso se tiene que $A_N^A = \emptyset$ si $N \ge 1$ y se consigue una de las dos opciones requeridas. En el segundo caso se repetirá el procedimiento anterior en un nuevo intervalo de longitud uno de la siguiente manera: condicionado a $\{N > 0, A_1^A \neq \emptyset\}$, sea $\{N = 1\}$ un sub-evento de

$$\{A_2^A \supset y + [-n, n]^d \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Utilizando la monotonía y la propiedad de pérdida de memoria (2.1) se tiene que:

$$A_2^A = A_1^{A_1^A} \supset A_1^x \text{ para algún } x \in \mathbb{Z}^d,$$

condicionado a $\{A_1^A \neq \emptyset\}$. Luego, como $\mathbb{P}(A_1^x \supset y + [-n, n]^d$ para algún $y \in \mathbb{Z}^d) = \delta$, se tiene el sub-evento que se buscaba. Continuando de esta manera se construye la variable aleatoria N como se quería.

Sobre el evento $\{A_{N+1}^A \supset x + [-n,n]^d$ para algún $x \in \mathbb{Z}^d\}$ se aplica la construcción del teorema (3.2.11) para comparar el proceso de percolación por sitios B_k con el proceso de contacto con tiempo y condición inicial N + 1 y A_{N+1}^A respectivamente, es decir, con el proceso de contacto $A_t^{A_{N+1}^A} = A_{N+1+t}^A$ para $t \ge 0$, en virtud de la pérdida de memoria.

No existe inconveniente en suponer que B_k comienza con un solo sitio abierto, es decir, $B_0 = \{x_0\}$ para algún x_0 en \mathbb{Z} .

Sea N + M + 1 el tiempo de extinción del proceso de percolación por sitios. Si $M = +\infty$, entonces el proceso de contacto sobrevive en virtud de la propiedad (3.13) que brinda el acoplamiento entre A_t y B_k . Si $M < +\infty$, se tiene que a tiempo N + M + 1 el proceso de contacto es o bien vacío ó distinto de vacío. En este último caso se repite nuevamente el procedimiento por el que se construyó N para generar N_2 con la misma distribución que N y cumpliendo la misma propiedad; luego se reinicia el proceso de contacto a tiempo N + M + 1 comparando con otro proceso de percolación por sitios según el teorema (3.2.11).

Continuando de esta forma se generan: una secuencia N_i de variables aleatorias independientes con la misma distribución que N; una secuencia M_i de variables aleatorias independientes con la misma distribución de $(M|M < +\infty)$; y una variable aleatoria L con distribución geométrica e independiente de las dos secuencias anteriores (L indica la cantidad de veces que el procedimiento de construcción de las N_i y M_i se realiza), tales que a tiempo:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{L} (N_i + M_i + 1) ,$$

se tiene que: o bien $A_{\sigma}^{A} = \emptyset$ ó $\tau_{A} = +\infty$, dada la construcción que se realizó. En otras palabras $\sigma \geq \tau_{A}$ sobre el evento { $\tau_{A} < +\infty$ }; entonces:

$$\mathbb{P}(t < \tau_A < +\infty) \leq \mathbb{P}(\sigma > t) \,.$$

Ahora bien, $L \ge N_i$ tienen decaimiento exponencial y por el teorema (1.4.1) sucede lo mismo con M. De lo anterior es posible afirmar que σ tiene también un decaimiento exponencial.

En efecto, sea $\epsilon_1 > 0$ tal que $\mathbb{E} e^{\epsilon_1 L} < +\infty$, y $\epsilon_2 > 0$ tal que $\mathbb{E} e^{\epsilon_2 (N_1 + M_1 + 1)} \leq e^{\epsilon_1}$. Luego:

$$\mathbb{E} e^{\epsilon_2 \sigma} = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(e^{\epsilon_2 \sigma} \mid L \right) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} e^{\epsilon_2 (N_1 + M_1 + 1)} \right]^L \le \mathbb{E} e^{\epsilon_1 L} < +\infty.$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(\sigma > t) \le \mathbb{E} e^{\epsilon_2(\sigma - t)} \le e^{-\epsilon_2 t} \mathbb{E} e^{\epsilon_1 L} = C e^{-\epsilon_2 t},$$

lo que demuestra el resultado.

Una de las razones por las que interesa este resultado es que de él se deduce una velocidad de convergencia exponencial a la medida invariante superior. Sea μ_t la distribución a tiempo t del proceso de contacto cuya condición inicial es \mathbb{Z}^d . Por la dualidad (2.7), para $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito se tiene que:

$$\mathbb{P}(t < \tau_A < \infty) = \mathbb{P}(A_t^A \neq \emptyset) - \lim_{s \to +\infty} \mathbb{P}(A_s^A \neq \emptyset)$$

= $\mu_t (\{B : B \cap A \neq \emptyset\}) - \bar{\nu} (\{B : B \cap A \neq \emptyset\})$
 $\leq C e^{-\epsilon t} .$

El siguiente resultado da una cota exponencial para el tiempo de extinción en función de la cantidad de sitios inicialmente infectados. Su demostración no se brinda aquí, puede encontrarse en [Li99].

Proposición 3.3.3. Si $\lambda > \lambda_c$ y $A \subset \mathbb{Z}^d$ finito, entonces existe una constante $\epsilon > 0$ tal que:

$$\mathbb{P}(\tau_A < \infty) \le e^{-\epsilon|A|} \,.$$

3.3.3. Otros resultados

Nos parece interesante enunciar algunos resultados que colaboran en la comprensión del comportamiento del proceso de contacto en \mathbb{Z}^d aunque no brindemos su demostración en la monografía. Para probarlos se precisaría un gran trabajo previo, ya que deben introducirse resultados análogos a la fórmula de Russo en los procesos de percolación independientes tipo *bond*. Como referencia se puede ver [Li99] en la página 70.

Sea $\alpha(\lambda) = \mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset$ para todo t), la probabilidad de persistencia. El siguiente resultado nos da una idea de cómo varía $\alpha(\lambda)$ cuando el parámetro se acerca al valor crítico por arriba.

Teorema 3.3.4. Si $\lambda > \lambda_c$,

$$\alpha(\lambda) \ge \frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda(3 + e + 2d\lambda e)}$$

La cota anterior tiene relevancia para valores de λ cercanos al valor crítico; fuera de ese rango no aporta información significativa.

El siguiente resultado refiere a la forma en la que crece el conjunto de sitios infectados en la fase supercrítica.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$ sea $t(x) = \inf\{t \colon x \in A^0_t\}$, es decir el primer tiempo de infección del sitio x. Sea también

$$H_t = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \colon \exists x \in \mathbb{Z}^d \text{ con } \|x - y\| \le \frac{1}{2} \text{ y } t(x) \le t \right\}.$$

Para $A \subset \mathbb{Z}^d$ y $x \in \mathbb{Z}^d$, introducimos la siguiente notación de coordenadas:

$$\begin{cases} A_t^A(x) = 1 & \text{si} \quad x \in A_t^A(x) \\ \\ A_t^A(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin A_t^A(x) . \end{cases}$$

Ya se ha visto que es posible acoplar dos procesos de contacto con diferente condición inicial, en particular se pueden acoplar los procesos que inician con las configuraciones $\{0\}$ y \mathbb{Z}^d de forma que: $A_t^0 \subset A_t^{\mathbb{Z}^d}$ para todo t. Llamamos K_t a la región acoplada donde los procesos coinciden coordenada a coordenada a tiempo t, es decir:

$$K_t = \Big\{ y \in \mathbb{R}^d \colon \exists x \in \mathbb{Z}^d \ \text{ con } \|x - y\| \le \frac{1}{2} \ y \ A_t^0(x) = A_t^{\mathbb{Z}^d}(x) \Big\}.$$

Muy informalmente se puede pensar que el proceso de contacto A_t^0 visto en K_t tiende a estar en "equilibrio", porque en K_t su distribución se asemeja a la distribución invariante $\bar{\nu}$ que se obtiene como límite débil de la distribución de $A_t^{\mathbb{Z}^d}$.

Teorema 3.3.5. Sea $\lambda > \lambda_c$. Entonces existe un conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^d$ tal que dado $\epsilon > 0$ existe un tiempo t_0 tal que, si $t \ge t_0$,

$$(1-\epsilon)U \subset \frac{1}{t}H_t \subset (1+\epsilon)U \quad y \quad (1-\epsilon)U \subset \frac{1}{t}(H_t \cap K_t) \subset (1+\epsilon)U$$

casi seguramente sobre el evento $\{A_t^0 \neq \emptyset \text{ para todo } t\}.$

Demostración. La prueba se encuentra esencialmente [DG88]. En [BG90] se hacen algunos comentarios sobre ella y sobre cómo adaptarla a las técnicas de reinicio del proceso de contacto.

3.4. Decaimiento en la fase subcrítica

El resultado que sigue resulta de aplicar algunas proposiciones y lemas del segundo capítulo de la monografía.

Proposición 3.4.1. Existen constantes $c_1 \ y \ c_2$, independientes de t, tales que:

$$\mathbb{E}\left|A_{t}^{0}\right| \leq c_{1}(1+t^{d})\sqrt{\mathbb{P}\left(A_{t}^{0}\neq\emptyset\right)},\tag{3.26}$$

y

$$\mathbb{P}\left(x \in A_s^0 \text{ para algún } s \ge 0 \text{ y algún } \|x\| \ge c_2 t\right) \le c_2 e^{-t} + \mathbb{P}\left(A_t^0 \ne \emptyset\right)$$
(3.27)

Demostración. Para (3.26) utilizamos primero la desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego la cota de la proposición (2.3.5) con k = 2. Se tiene entonces que:

$$\begin{split} \mathbb{E} \left| A_t^0 \right| &= \mathbb{E} \left(\left| A_t^0 \right| \ \mathbf{1}_{\{A_t^0 \neq \emptyset\}} \right) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left| A_t^0 \right|^2} \sqrt{\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset)} \\ &\leq \sqrt{c(1+t^{2d})} \sqrt{\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset)} \leq c_1(1+t^d) \sqrt{\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset)} \;. \end{split}$$

Para probar (3.27) tomamos en el lema (2.3.3) $a = 2d\lambda + 1$; se tiene entonces que existe b > 0 tal que:

$$\sum_{\|x\| \ge bt} p_t(0, x) \le b \, e^{-at} = b \, e^{-(2d\lambda + 1)t} \,, \tag{3.28}$$

donde $p_t(x, y)$ son las probabilidades de transición de un paseo aleatorio simple en \mathbb{Z}^d cuyos saltos a un vecino ocurren a tasa λ . Elegimos $c_2 = b$.

Sea C_t el proceso que resulta de ignorar los recuperos en el proceso de contacto A_t . Acoplamos ambos procesos de forma que $A_t \subset C_t$. Como C_t es creciente con el tiempo (porque sólo hay infecciones) afirmamos que la probabilidad del lado izquierdo de (3.27) es menor o igual que:

$$\mathbb{P}\left(x \in C_t^0 \text{ para algún } \|x\| \ge c_2 t\right) + \mathbb{P}\left(A_t^0 \ne \emptyset\right) .$$
(3.29)

En efecto, sea $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $||x|| \ge c_1 t$ y $x \in A_s^0$. Entonces: si $s \le t$ el acoplamiento de A_t y C_t nos dice que $x \in C_t^0$; si s > t observar que $\mathbb{P}(x \in A_s^0) < \mathbb{P}(A_t^0 \ne \emptyset)$.

Luego, usando la proposición (2.3.2) y (3.28) se tiene que el primer sumando de (3.29) se acota de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}\left(x \in C_t^0 \text{ para algún } \|x\| \ge c_2 t\right) \le e^{2d\lambda t} \sum_{\|x\| \ge c_2 t} p_t(0, x) \le c_2 e^{-t},$$

lo que completa la prueba.

La prueba de la proposición anterior no depende de la fase del proceso, pero adquiere sentido en la fase subcrítica donde los miembros de la derecha tiende a cero. Una lectura inmediata de la proposición anterior indica que no es descabellado pensar en la posibilidad de que dentro de la fase subcrítica $\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset)$ tienda a cero con velocidad exponencial,

al menos bajo la hipótesis de que las cotas no son groseras. Como $\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset) \to 0$ casi seguramente, el tiempo de extinción τ_0 es finito casi seguramente, por tanto para valores grandes de t, $\mathbb{E}|A_t^0|$ debería ser pequeño y tender a cero; por lo que si la cota no es grosera, $\sqrt{\mathbb{P}(A_t^0 \neq \emptyset)}$ debería controlar al factor t^d cuando $t \to +\infty$.

Claro, la cota podría no ser fina y el esbozo planteado en el párrafo anterior carecería de validez. Por fortuna, el siguiente teorema muestra el decaimiento exponencial en el caso subcrítico. La prueba de este resultado requiere de varios resultados técnicos para mostrar una fórmula análoga a la de Russo para procesos de percolación independiente; incluso la prueba para el caso d = 1 (en el que no es necesaria una fórmula similar a la de Russo) requiere caracterizar al valor crítico λ_c de una manera diferente a la que hemos usado aquí. Por tanto decidimos no incluir la prueba en la monografía; la misma puede encontrarse en [Li99] y [BG91].

Teorema 3.4.2. Para $\lambda < \lambda_c$, existe $\epsilon(\lambda) > 0$ tal que,

 $\mathbb{P}\left(A_t^0 \neq \emptyset\right) \le e^{-\epsilon(\lambda)t} \quad para \ todo \ t \ge 0.$

Capítulo 4 El proceso de contacto en \mathbb{T}_d

En el caso del proceso de contacto en \mathbb{Z}^d se demostró que existe una única transición de fase, es decir, el valor crítico λ_1 coincide con el valor crítico λ_2 . Por tanto, si el parámetro del proceso es tal que la probabilidad de sobrevivencia es positiva, cada sitio es re infectado infinitas veces. Estudiado solamente desde \mathbb{Z}^d , la definición del valor crítico λ_2 carece de mayor sentido. De hecho, hasta el artículo [Pem92] donde se brindan los primeros resultados del proceso de contacto en árboles no se había introducido la noción de que el proceso sobreviva fuertemente y por tanto no existía referencia a λ_2 .

En este breve capítulo se pretende dar cuenta de la existencia de este tipo de comportamiento en árboles regulares, más allá de su aparición en otros grafos. Para ello se muestra un resultado debido a Pemantle publicando en [Pem92], y también en [Gr10] y [Li99].

Se escribirá \mathbb{T}_d al árbol regular donde cada vértice tiene d+1 aristas; y se indentificará por $x_0 = 0$ a un vértice distinguido que será el origen. Ahora queremos definir la generación de un vértice cualquiera. Sea $l : \mathbb{T} \to \mathbb{Z}$ una función tal que para cada vértice x se tiene que l(y) = l(x) - 1 para exactamente un sólo vecino y de x, y l(y) = l(x) + 1 para los d vecinos restantes; en el primer caso se dice que y es el ancestro o padre de x, y el resto de los vecinos serán descendientes o hijos. Para que l quede bien definida tomamos $l(x_0) = 0$.

La siguiente proposición tiene una demostración análoga al caso de \mathbb{Z}^d y nos da una cota inferior para el valor crítico λ_1 .

Proposición 4.0.3. Para $d \ge 2$ se cumple:

$$\lambda_1 \ge \frac{1}{d+1} \,.$$

Demostración. Consideremos $C_t = |A_t^A|$. Si $C_t = n$, entonces pasa hacia n - 1 a tasa n porque los recuperos del proceso de contacto son de tasa 1 e independientes entre sí; y C_t pasa hacia n + 1 a tasa $\lambda N_A(t)$, donde $N_A(t)$ son las aristas con un sólo vértice infectado (los vecinos suceptibles de A_t^A contados con multiplicidad).

No es difícil notar que $N_A(t) \leq (d+1)|A_t^A|$.

Se puede entonces acoplar C_t con una caminata al azar X_n en $\{0, 1, ...\}$, con un estado de absorción en 0, que se mueve a la derecha con probabilidad $p = 1 - \frac{1}{1 + \lambda(d+1)}$, de forma que C_t esté mayorada por X_n .

Se sabe que la probabilidad de que X_n sea igual a 0 para algún n es 1 si $p \leq 1/2$, por tanto si $\lambda < \frac{1}{d+1}$ el proceso se extingue casi seguramente, lo que prueba que $\lambda_1 \geq \frac{1}{d+1}$.

Pasemos al resultado que da origen al capítulo.

Teorema 4.0.4. Sea $d \ge 2$.

$$\lambda_1 \le \frac{1}{d-1} , \qquad (4.1)$$

$$\lambda_2 \ge \frac{1}{2\sqrt{d}} \ . \tag{4.2}$$

Demostración. Comencemos probando la primera desigualdad. Sea $\rho \in (0, 1)$. Se define la función v_{ρ} sobre los conjuntos finitos de \mathbb{T}_d por:

$$v_{\rho}(A) = \rho^{|A|},$$

donde |A| indica el cardinal del conjunto A. Luego definimos $g^A(t) = \mathbb{E}^A_\lambda(v_\rho(A_t))$. Si $t \downarrow 0$ se tiene que:

$$g^{A}(t) = t|A|\rho^{|A|-1} + \lambda t N_{A} \rho^{|A|+1} + \rho^{|A|} (1 - |A|t - \lambda t N_{A}) + o(t)$$

= $t|A| \left[\frac{v_{\rho}(A)}{\rho} \right] + \lambda t N_{A} \left[\rho v_{\rho}(A) \right] + v_{\rho}(A) \left[1 - |A|t - \lambda t N_{A} \right] + o(t) ,$

donde N_A es la cantidad de vecinos del conjunto A que se encuentran suceptibles contados con multiplicidad, es decir:

$$N_A = \left| \{ (x, y) \colon x \in A, y \notin A, x \sim y \} \right|.$$

Ahora bien,

$$N_A \ge (d+1)|A| - 2(|A| - 1) = (d-1)|A| + 2$$

ya que a lo sumo pueden haber |A| - 1 aristas con ambos vértices en A (que es el caso donde A es conexo). Se tiene entonces que:

$$\frac{d}{dt}g^{A}(t)\Big|_{t=0} = (1-\rho)\left[\frac{|A|}{\rho} - \lambda N_{A}\right]v_{\rho}(A)$$

$$\leq (1-\rho)v_{\rho}(A)\left[\frac{|A|}{\rho}(1-\lambda\rho(d-1)) - 2\lambda\right]$$

$$\leq -2\lambda(1-\rho)v_{\rho}(A) < 0,$$

si $\lambda \rho(d-1) \geq 1$. Asumiendo esta condición y usando la propiedad de pérdida de memoria se observa que:

$$\frac{d}{du}g^{A}(u) = \frac{d}{du}\mathbb{E}^{A}_{\lambda}\left(v_{\rho}(A^{A}_{u})\right) = \mathbb{E}^{A}_{\lambda}\left(\frac{d}{dt}g^{A^{A}_{u}}(t)\Big|_{t=0}\right) < 0,$$

por tanto $g^A(u)$ es decreciente en u para todo A finito.

Elijamos $A = \{0\}$ y sea $g = g^{\{0\}}$. Como g es positiva y decreciente si $\lambda \rho(d-1) \ge 1$, asumiendo esta desigualdad, se tiene que existe el límite cuando $t \to +\infty$ y vale:

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) \le g(0) = \rho < 1.$$

Ahora bien, si λ es tal que la probabilidad de que el proceso de contacto sobreviva es nula, se tiene que casi seguramente $A_t^0 = \emptyset$ para valores grandes de t, por lo que el teorema de convergencia dominada nos dice que

$$\lim_{t\to+\infty}g(t)=1\,.$$

Por lo que si existe $\rho \in (0, 1)$ tal que $\lambda \rho(d - 1) \ge 1$ el proceso de contacto sobrevive con probabilidad positiva.

Finalmente, si $\lambda(d-1) > 1$ se puede elegir $\rho \in (0,1)$ tal que:

$$\frac{1}{\lambda(d-1)} \le \rho < 1 \,,$$

por lo tanto se tiene que $\lambda_1 \leq \frac{1}{d-1}$.

Para probar (4.2) tomemos nuevamente $\rho \in (0, 1)$. Para un conjunto finito de vértices A se define:

$$w_{\rho}(A) = \sum_{x \in A} \rho^{l(x)} ,$$

donde l(x) es la generación del vértice x que se definió al comienzo del capítulo. Asumimos la convención de que si el conjunto es vacío entonces la suma es 0. De forma similar a la prueba de la desigualdad anterior se define $h^A(t) = \mathbb{E}^A_\lambda(w_\rho(A_t))$.

Se tiene que:

$$\frac{d}{dt} h^{A}(t) \Big|_{t=0} = \sum_{x \in A} \left(-\rho^{l(x)} + \lambda \sum_{\substack{y \sim x \\ y \notin A}} \rho^{l(y)} \right)$$
$$\leq -w_{\rho}(A) + \lambda \sum_{x \in A} \rho^{l(x)}(d\rho + \rho^{-1})$$
$$= (\lambda d\rho + \lambda \rho^{-1} - 1)w_{\rho}(A).$$

Si tomamos $\rho = \frac{1}{\sqrt{d}}$ y $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$ tendremos que $\lambda d\rho + \lambda \rho^{-1} - 1 = 0$ y $\frac{d}{dt} h^A(0) \le 0$, por lo que h^A es no creciente en 0 para cualquier A finito.

Sea $(\mathcal{F}_t: t \ge 0)$ la filtración asociada a la representación gráfica del proceso de contacto. Veamos que $M_t = w_{\rho}(A_t^A)$ es una supermatingala. Claramente M_t es \mathcal{F}_t -medible y está en L^1 .

Observar que para t, h > 0, con h cercano a 0, vale:

$$\mathbb{E} (M_{t+h} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\lambda}^A (w_{\rho}(A_{t+h}) | \mathcal{F}_t)
= \mathbb{E}_{\lambda}^{A_t^A} (w_{\rho}(A_h) | \mathcal{F}_t)
\leq \mathbb{E}_{\lambda}^{A_t^A} (w_{\rho}(A_0) | \mathcal{F}_t) = w_{\rho}(A_t^A) = M_t,$$

ya que $w_{\rho}(A_t^A)$ es \mathcal{F}_t -medible, y entonces M_t es una \mathcal{F}_t supermartingala.

Ahora bien, el teorema de convergencia de martingalas afirma que $\lim_{t \to +\infty} w_{\rho}(A_t^A) = M$ existe casi seguramente (según \mathbb{P}^A_{λ}); pero sobre el evento $\{0 \in A_t^A \text{ i.o.}\}$ el proceso $w_{\rho}(A_t^A)$ casi seguramente modifica el valor que toma en un orden de al menos $\rho^0 = 1$ para una sucesión no acotada de tiempos, por lo que $w_{\rho}(A_t^A)$ no puede tener límite sobre este evento, y en consecuencia \mathbb{P}^A_{λ} $(0 \in A_t^A \text{ i.o.}) = 0$ y $\lambda_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{d}}$.

En particular el teorema anterior prueba que si $d \ge 6$ entonces $\lambda_1 < \lambda_2$ por lo que existe una transición entre las fases de sobrevivencia débil y sobrevivencia fuerte.

De todas formas es posible probar que si $d \ge 2$ entonces $\lambda_1 < \lambda_2$, por lo que existe otra transición de fase para los árboles regulares a excepción de \mathbb{T}_1 (que es \mathbb{Z} , y lo estudiamos en el capítulo anterior).

Los dos resultados anteriores prueban que el comportamiento asintótico de λ_1 a medida que d crece es como 1/d. Para λ_2 existe una desigualdad que afirma que:

$$\frac{1}{2} \le \liminf_{d \to +\infty} \sqrt{d\lambda_2(d)} \le \limsup_{d \to +\infty} \sqrt{d\lambda_2(d)} \le 1.$$

Una referencia para esta desigualdad se encuentra en la página 135 del capítulo 4 de [Li99].

El siguiente cuadro resume cotas para los valores de λ_1 y λ_2 para los primeros valores de d (la referencia es la página 80 de [Li99]).

$$d = 2 \qquad \lambda_1 \le 0,605 \qquad \lambda_2 \ge 0,609$$
$$d = 3 \qquad \lambda_1 \le 0,391 \qquad \lambda_2 \ge 0,425$$
$$d = 4 \qquad \lambda_1 \le 0,279 \qquad \lambda_2 \ge 0,354$$
$$d = 5 \qquad \lambda_1 \le 0,218 \qquad \lambda_2 \ge 0,309$$

Es conocido también que cuando el parámetro λ coincide con el valor crítico λ_1 el proceso se extingue casi seguramente. Asimismo, cuando el valor crítico es igual a λ_2 el proceso sobrevive débilmente. La demostración de ambos resultados se encuentra en el capítulo 4 de la primera parte de [Li99].

Para valores del parámetro mayores a λ_2 (en la fase de supervivencia fuerte) el proceso de contacto en \mathbb{T}_d tiene también la propiedad de convergencia completa (para valores del parámetro menores a λ_1 también es trivialmente cierto, porque la única medida invariante es δ_{\emptyset}); sin embargo para la fase de sobrevivencia débil el resultado no es cierto y se puede probar que existen otras medidas extremales invariantes que no son ni δ_{\emptyset} ni $\bar{\nu}$. La prueba de estas afirmaciones se encuentra también en el capítulo 4 de [Li99].

Capítulo 5

Apéndice

En este apéndice se incluyen algunos resultados bien conocidos que utilizamos a lo largo de la monografía y de los que no brindamos una demostración.

5.1. Teorema de Representación de Riesz

Enunciamos el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos, cuya prueba se estudia en el curso de Introducción al análisis real y se encuentra en [Fo84] u otros libros clásicos sobre el tema.

Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff (LCH). $C_c(X)$ es el espacio de las funciones de X en \mathbb{C} continuas y de soporte compacto.

Un funcional lineal $T: C_c(X) \mapsto \mathbb{C}$ se dice positivo cuando $T(f) \ge 0$ para todo $f \ge 0$.

Teorema 5.1.1 (Teorema de Representación de Riesz). Sea $T: C_c(X) \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una σ -álgebra \mathcal{N} que contiene a la σ -álgebra de Borel y una única medida positiva μ sobre \mathcal{N} que satisface que:

$$T(f) = \int_X f \, d\mu \quad para \ toda \ f \in C_c(X) \,.$$

El teorema establece también algunas propiedades de μ como la completitud y la regularidad. De todos modos a nosotros nos interesa aplicar este teorema en el contexto que estamos trabajando y sólo utilizamos que el funcional lineal positivo T queda representado por la medida μ .

En nuestro caso $X = \Sigma = \{0, 1\}^V$ con V numerable y la topología producto. Observar que Σ es compacto y Hausdorff por ser producto de compactos y Hausdorff, y en consecuencia Σ es LCH. También por la compacidad de Σ se cumple que $C_c(\Sigma) = C(\Sigma)$.

5.2. Semigrupos de procesos de Feller-Markov

Lo que aquí se presenta se basa principalmente en el libro [Li85].

 $\Sigma = \{0, 1\}^V$ es un espacio topológico compacto y como tal tiene asociada la σ -álgebra de Borel. Sea $D[0, +\infty]$ el conjunto de las funciones $\eta_{(\cdot)}$ sobre $[0, +\infty]$ con valores en Σ que son continuas por derecha y para las que existe el límite por izquierda. Para un $s \in [0, +\infty]$ se define el mapa evaluación $\pi_s \colon D[0, +\infty] \mapsto \Sigma$ por $\pi_s(\eta) = \eta_s$. Sea \mathcal{F} la menor σ -álgebra sobre $D[0, +\infty]$ respecto a la cual todas las funciones evaluación π_s son medibles.

Para $t \in [0, +\infty]$ se considera \mathcal{F}_t la menor σ -álgebra sobre $D[0, +\infty]$ respecto a la cual la familia de evaluaciones $\{\pi_s : s \leq t\}$ es medible. Es claro que la colección $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ es una filtración en $D[0, +\infty]$.

Definición 5.2.1. Un proceso de Markov sobre Σ es una colección $\{\mathbb{P}^{\eta}: \eta \in \Sigma\}$ de medidas de probabilidad sobre $D[0, +\infty]$ indexadas por Σ con las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbb{P}^{\eta}(\zeta_{(\cdot)} \in D[0, +\infty]: \zeta_0 = \eta) = 1$ para todo $\eta \in \Sigma$.
- (b) El mapa $\eta \mapsto \mathbb{P}^{\eta}(A)$ definido de Σ en [0,1] es medible para todo $A \in \mathcal{F}$.
- (c) $\mathbb{P}^{\eta}(\eta_{(s+\cdot)} \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^{\eta_s}(A)$ casi seguramente según \mathbb{P}^{η} para toda configuración $\eta \in \Sigma$ y todo $A \in \mathcal{F}$.

La esperanza respecto de la medida \mathbb{P}^{η} se denotará \mathbb{E}^{η} , esto es:

$$\mathbb{E}^{\eta}X = \int_{D[0,+\infty]} X \, d\mathbb{P}^{\eta}$$

para cualquier función X sobre $D[0, +\infty]$ que sea integrable respecto de \mathbb{P}^{η} .

Sea $C(\Sigma)$ el espacio de funciones reales continuas sobre Σ con la norma:

$$||f||_{\infty} = \sup_{\eta \in \Sigma} |f(\eta)| \,.$$

Por la compacidad de Σ el supremo puede sustituirse por un máximo. De esta forma el espacio $C(\Sigma)$ es un espacio de Banach.

Para $f \in C(\Sigma)$ se escribe:

$$S(t)f(\eta) = \mathbb{E}^{\eta}f(\eta_t) = \int_{D[0,+\infty]} f(\eta_t) \, d\mathbb{P}^{\eta} \, .$$

Observar que la aplicación $S(t) : C(\Sigma) \mapsto C(\Sigma)$ es lineal y que $||S(t)f||_{\infty} \le ||f||_{\infty}$.

Definición 5.2.2. Un proceso de Markov $\{\mathbb{P}^{\eta} : \eta \in \Sigma\}$ se dice un *proceso de Feller* cuando $S(t)f \in C(\Sigma)$ para todo $t \ge 0$ y toda $f \in C(\Sigma)$.

En caso de cumplir esta definición se dice que el proceso $\{\mathbb{P}^{\eta}: \eta \in \Sigma\}$ es de Feller-Markov.

Se tiene entonces la siguiente proposición que no demostraremos.

Proposición 5.2.3. Supongamos que $\{\mathbb{P}^{\eta}: \eta \in \Sigma\}$ es un proceso de Feller-Markov. Entonces la colección de operadores lineales sobre $C(\Sigma)$, $\{S(t): t \ge 0\}$, tiene las siguientes propiedades:

1. S(0) = I, el operador identidad.

- 2. El mapa: $t \mapsto S(t)f$ de $[0, +\infty]$ hacia $C(\Sigma)$ es continuo por la derecha para toda función $f \in C(\Sigma)$.
- 3. S(t+s)f = S(t)S(s)f para toda función $f \in C(\Sigma)$ y cualesquiera $s, t \ge 0$.
- 4. S(t)1 = 1 para todo $t \ge 0$.
- 5. $S(t) f \ge 0$ para toda función $f \in C(\Sigma)$ no negativa.

Definición 5.2.4. Una familia $\{S(t): t \ge 0\}$ de operadores lineales en $C(\Sigma)$ se denomina *semigrupo de Markov* si satisface la tesis de la proposición anterior.

El siguiente enunciado y los comentarios posteriores justifican las definiciones que se han realizado.

Teorema 5.2.5. Supongamos que $\{S(t): t \ge 0\}$ es un semigrupo de Markov en $C(\Sigma)$. Entonces existe un único proceso de Feller-Markov $\{\mathbb{P}^{\eta}: \in \Sigma\}$ tal que:

$$S(t)f(\eta) = \mathbb{E}^{\eta}f(\eta_t) \,,$$

para toda $f \in C(\Sigma), \eta \in \Sigma \ y \ t \ge 0.$

La proposición previa y el teorema anterior reducen el problema de construir el proceso de Feller-Markov a construir el semigrupo correspondiente; ello se realiza a través de la teoría de Hille-Yosida de semigrupos de operadores lineales en espacios de Banach. Además de [Li85] se puede consultar [Bob05].

Previo a la siguiente definición observemos lo siguiente: si μ es una medida de probabilidad en Σ y { \mathbb{P}^{η} : $\eta \in \Sigma$ } un proceso de Feller-Markov, el proceso de Feller-Markov que corresponde a iniciar con distribución μ es un proceso estocástico η_t cuya distribución está dada por:

$$\mathbb{P}^{\mu} = \int_{\Sigma} \mathbb{P}^{\eta} \, d\mu \, .$$

En vista de ello, para $f \in C(\Sigma)$ se tiene que:

$$\mathbb{E}^{\mu}f(\eta_t) = \int_{D[0,+\infty]} f(\eta_t) \, d\mathbb{P}^{\mu} = \int_{\Sigma} \left(\int_{D[0,+\infty]} f(\eta_t) \, d\mathbb{P}^{\eta} \right) \, d\mu = \int_{\Sigma} S(t) f \, d\mu$$

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 5.2.6. Sea $\{S(t): t \ge 0\}$ un semigrupo de Markov en $C(\Sigma)$. Dada una medida de probabilidad μ definimos una nueva medida de probabilidad $\mu S(t)$ mediante la relación:

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t) f d\mu$$

para toda $f \in C(\Sigma)$. La medida $\mu S(t)$ se encuentra bien definida como consecuencia del teorema de Representación de Riesz para funcionales lineales positivos, ya que el término de la izquierda se extiende a un funcional lineal y positivo sobre $C(\Sigma, \mathbb{C})$. La medida $\mu S(t)$ es intepretada como la distribución a tiempo t del proceso de Markov con distribución inicial μ .

Una medida μ se dice invariante para el proceso de Feller-Markov cuyo semigrupo asociado es $\{S(t): t \ge 0\}$, cuando $\mu S(t) = \mu$ para todo $t \ge 0$.

Proposición 5.2.7. Sea S el conjunto de medidas invariantes del proceso de Feller-Markov cuyo semigrupo es $\{S(t): t \ge 0\}$.

- 1. S es no vacío, compacto y convexo.
- 2. Sea S_e el conjunto de puntos extremales de S, entonces S es la clausura de la cápsula convexa de S_e .
- 3. Si $\nu = \lim_{t \to +\infty} \mu S(t)$ existe para alguna medida μ , se tiene que $\nu \in S$.

No haremos aquí la demostración; sin embargo quisiéramos decir que la prueba de la primera parte se puede hallar en las páginas 10 y 11 de [Li85]; resulta básicamente de aplicar la definición de medida invariante para construir funcionales lineales en $C(\Sigma)$, trabajar con ellos, y luego volver a las medidas. La segunda parte resulta de aplicar el teorema de Krein-Milman. Para la tercera afirmación (que es la que más nos interesa) se puede ver que si $s \ge 0$ y $f \in C(\Sigma)$:

$$\begin{split} \int S(s)f \,d\nu &= \lim_{t \to +\infty} \int S(s)f \,d[\mu S(t)] \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int S(t)S(s)f \,d\mu \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int S(t+s)f \,d\mu \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int S(t)f \,d\mu \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int f \,d[\mu S(t)] = \int f \,d\nu \,, \end{split}$$

por lo que vía el teorema de representación de Riesz se prueba que $\nu = \nu S(s)$ para $s \ge 0$.

5.3. La propiedad fuerte de Markov

Sobre la propiedad fuerte de Markov se pueden consultar varios textos avanzados de probabilidad como por ejemplo [Br99] y [Du95].

Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_t: t \ge 0)$ un proceso estocástico definido en ese espacio. Sea $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s: s \le t\})$ la σ -álgebra generada hasta tiempo t y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t: t \ge 0)$ la filtración natural del proceso. Denominemos por τ a un tiempo de parada asociado a \mathcal{F} y $\mathcal{F}_{\tau} = \{A \in \mathcal{B}: A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t \ge 0\}$ la σ -álgebra asociada al tiempo de parada τ .

Se dice que el proceso $(X_t: t \ge 0)$ cumple la *propiedad fuerte de Markov* cuando el proceso $X_{\tau+\cdot}$ es independiente de \mathcal{F}_{τ} y $X_{\tau+t} - X_{\tau}$ tiene la misma distribución que X_t para cualquier $t \ge 0$.

5.4. Un teorema de convergencia de martingalas

Varias veces en la monografía recurrimos a un teorema de convergencia de martingalas en tiempo continuo, en general aplicado a una función indicatriz y a la filtración dada por la representación gráfica. Para la prueba del siguiente teorema se requiere mostrar una buena cantidad de resultados previos que exceden el objetivo de la monografía, entre ellos la versión discreta del teorema de convergencia de martingalas y teoremas de regularización para martingalas en tiempo continuo. Las referencias son el capítulo 9 de [PM08] para el caso discreto y la segunda sección del capítulo 2 de [RY99] tanto para el caso discreto como continuo; en particular el siguiente resultado es el teorema 2.10 de [RY99].

Teorema 5.4.1. Sea $(X_t: t \ge 0)$ una (\mathcal{F}_t) -martingala continua por derecha, donde la filtración $(\mathcal{F}_t: t \ge 0)$ es completa.

 $Si \sup_{t \ge 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, entonces el límite de X_t cuando $t \to +\infty$ existe casi seguramente.

En particular es muy útil la siguiente aplicación: si $X \in L^1$ y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t: t \ge 0)$ es una filtración completa, se define la martingala asociada a \mathcal{F} por $X_t = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$. El teorema anterior nos dice que se cumple:

$$\lim_{t \to +\infty} X_t = \mathbb{E} \left(X \, | \, \mathcal{F}_{\infty} \right) \quad \text{casi seguramente,}$$

donde \mathcal{F}_{∞} es la σ -algebra generada por $\bigcup_{t \ge 0} \mathcal{F}_t$. En particular, si X es \mathcal{F}_{∞} -medible, entonces lím $X_t = X$ casi seguramente.

Bibliografía

- [BG90] Bezuidenhout, Carol; Grimmett, Geoffrey. The critical contact process dies out. The Annals of Probability, 18 (1990): 1462-1482.
- [BG91] Bezuidenhout, Carol; Grimmett, Geoffrey. Exponential decay for subcritical contact and percolation processes. *The Annals of Probability*, **19**, (1991): 984-1008.
- [Bol79] Bollobas, Bela. *Graph theory: an introductory course*. New York ; Berlin: Springer, 1979, 180 p.. Graduate Texts in Mathematics.
- [Bob05] Bobrowski, Adam. Functional analysis for probability and stochastic processes. New York: Cambridge University Press, 2005, 406 p..
- [Br99] Bremaúd, Pierre. Markov chains. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. New York: Springer, 1999, 444 p.. Texts in Applied Mathematics.
- [Du84] Durrett, Richard. Oriented percolation in two dimensions. The Annals of Probability, 12 (1984): 999-1040.
- [Du88] Durrett, Richard. Lecture notes on particle systems and percolation. Belmont (California): Wadsworth Publishing Company, 1988, 326 p..
- [Du95] Durrett, Richard. Probability theory and examples. 2a ed. Belmont (California): Duxbury Press, 1995, 528 p..
- [DG88] Durrett, Richard; Griffeath, David. Contact Processes in Several Dimensions. Probability theory and related fields, **59** (1982): 535-552.
- [Fo84] Folland, Gerald B. Real analysis, modern techniques and their applications. New York: John Wiley & Sons, 1984, 350 p..
- [Fr05] Fraiman, Nicolás. Procesos de percolación: el número de clusters infinitos. Trabajo monográfico de la Licenciatura en Matemática. Montevideo: UDELAR, 2005.
- [Grf81] Griffeath, David. The basic contact processes. Stochastic Processes and their Applications, 11 (1981): 151-185.
- [Gr99] Grimmett, Geoffrey. Percolation. Berlin: Springer, 1999, 444 p...
- [Gr10] Grimmett, Geoffrey. *Probability on graphs* [versión libre]. Abril de 2010. Disponible en http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/pgsUS.pdf.
- [GS98] Grimmett, Geoffrey; Stacey, Alan M. Critical probabilities for site and bond percolation models. The Annals of Probability, 26 (1998): 1788-1812.

- [Ha74] Harris, Theodore E. Contact interactions on a lattice. The Annals of Probability, 2 (1974): 969-988.
- [Ha78] Harris, Theodore E. Additive set-valued Markov processes and graphical methods. The Annals of Probability, 6 (1978): 355-378.
- [Li85] Liggett, Thomas M. Interacting particle systems. New York ; Berlin : Springer, 1985, 488 p..
- [Li99] Liggett, Thomas M. Stochastic interacting systems: contact, voter, and exclusion processes. Berlin: Springer, 1999, 329 p. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.
- T. [LiH] Liggett, Thomas М. E. Harris' contributions toInteracting andSystems Percolation. Junio 2009.Particle de Disponible en http://www.math.ucla.edu/~tml/Harris.pdf.
- [LSS97] Liggett, Thomas M; Schonmann, Roberto H; Stacey, Alan M. Domination by product measures. The Annals of Probability, 25 (1997): 71-95.
- [PF05] Pearce, Charles E.M.; Fletcher, Fiona K. Oriented site percolation, phase transitions and probability bounds. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6 (2005): artículo 135.
- [Pem92] Pemantle, Robin. The contact process on trees. The Annals of Probability, 20 (1992): 2089-2116.
- [Pen96] Penrose, Mathew D. Lectures on particle systems and epi-Theory Particle demics. Percolation and Systems ed. R.Roy. Uni-(India), 133-149. [Disponible versities Press Hyderabad (2000): en http://www.maths.bath.ac.uk/~masmdp/ab/delhi.ps]
- [PM08] Petrov, Valentín V.; Mordecki, Ernesto. Teoría de la probabilidad. Montevideo: DIRAC, 2008, 271 p..
- [RY99] Revuz, Daniel; Yor, Marc. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer, 1999, 602 p.. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293.
- [Sa03] Salzano, Marcia. *The contact process on graphs*. Rio de Janeiro: Publicações matemáticas no IMPA, 2003, 109 p..