TRABAJO MONOGRÁFICO

ESPACIOS DE OPERADORES

Damián Ferraro

Orientador: Fernando Abadie

31 de Octubre, 2008
Montevideo
Uruguay

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Resumen

Este trabajo es una breve introducción a la teoría de los espacios de operadores, también conocidos como espacios de Banach cuánticos.

Inicialmente se definen los espacios de operadores (concretos y abstractos), los mapas completamente acotados y los completamente isométricos. Además se prueban dos teoremas fundamentales: el Teorema de Ruan, el cual establece que todo espacio de operadores es completamente isométrico a uno concreto, y el Teorema de Arveson-Wittstock que es un análogo del Teorema de Hahn-Banach.

Posteriormente se presentan varias construcciones bien conocidas para espacios de Banach, pero esta vez realizadas con espacios de operadores, para obtener nuevos espacios de operadores. Por ejemplo: cocientes, productos, límites directos, espacios duales y el espacio de los mapas completamente acotados de un espacio de operadores en otro.

Finalmente se introduce la noción de cuantización, se presentan las cuantizaciones minimales y maximales en un espacio de Banach, y tres cuantizaciones en un espacio de Hilbert: el espacio fila, el espacio columna y el espacio de Pisier.

Abstract

This monograph is a brief introduction to the theory of operator spaces, also known as the quantic version of Banach spaces.

The abstract and concrete operator spaces are defined at the beginning, as well as the completely isometric and completely bounded maps. Besides, two fundamental theorems are proved: the Ruan Theorem, which states that every abstract operator space is completely isometric to a concrete one, and the Arveson-Wittstock's theorem, an analog to the Hahn-Banach's theorem.

Several well known constructions for Banach spaces are performed with operator spaces, in order to obtain new operator spaces. For example: quotients, products, direct limits, dual spaces, and the space of completely bounded maps from an operator space into another one.

Finally, the notion of quantization is introduced, the maximal and minimal quantizations on a Banach space are described, as well as three quantizatons on a Hilbert space: the row, the column, and the Pisier spaces.

Agradecimientos.

A mi familia, en especial a mis padres Diana y Willys, y hermanos Carlos y Anita. Aunque los tengo lejos los siento cerca.

A Patricia, porque la amo.

Índice general

Introducción.

A principios del siglo XX, las investigaciones en torno a los fenómenos cuánticos llevaron a cambios significativos en las nociones clásicas de estado, espacio de estados, evento, observables, etc. Heisenberg propuso sustituir las funciones dependientes del tiempo por matrices infinitas para representar los observables. Esta idea atrajo la atención de varios matemáticos, entre ellos von Neumann, quien señaló que tales matrices se correspondían con operadores autoadjuntos. Posteriormente el mismo von Neumann propuso que en matemática se debería comenzar a cuantizar los espacios, es decir, reemplazar las funciones por operadores.

Ilustremos más concretamente el círculo de ideas presentes, aunque sea muy brevemente[1].

En el caso clásico el espacio de estados es generalmente el fibrado tangente de alguna variedad. Supongamos por ejemplo que una partícula está restringida a moverse en una dimensión. El estado de la partícula se describe completamente por un par de valores (x, v) donde x es la posición y v es la velocidad. En este ejemplo un estado es un par (x, v) como el anterior, el espacio de estados es el conjunto de los pares (x, v) que representan estados posibles. Un evento es un subconjunto del espacio de estados. Por último, un observable es una función del espacio de estados en $\mathbb{R}$.

En el caso cuántico, en cambio, los estados están modelados por vectores de norma uno de cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (que suponemos es $\mathbb{C}^n$ para fijar ideas). El espacio de estados es, entonces, la esfera de centro cero y radio uno del espacio $\mathcal{H}$. Mientras tanto los eventos se modelan con subespacios de $\mathcal{H}$, y se dice que dos eventos son disjuntos si son ortogonales como subespacios[2]. Veamos que los observables se corresponden con los operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$. Si estuviéramos en el caso clásico y nuestro espacio de estados fuera el conjunto finito X, cada observable $f : X \to \mathbb{R}$ induciría una descomposición de X en eventos disjuntos $E_k =: \{x \in X : \ f(x) = \lambda_k\}$, siendo $\mathrm{Im}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. A cada estado E_k le corresponde un valor real λ_k. En analogía con lo anterior, descomponemos $\mathcal{H}$ como suma de espacios ortogonales $E_1, \dots, E_m$, y a cada evento E_k le asignamos un valor real λ_k. De acuerdo al teorema espectral (en dimensión finita para matrices autoadjuntas) sabemos que los operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$ son aquellos que descomponen a $\mathcal{H}$ de la manera antes descrita, siendo E_k el subespacio propio

[1] Es una exposición resumida de una parte del Capítulo 1 de [9].

[2] Ver [9] para más detalles

correpondiente al valor propio λ_k.

Supongamos que en nuestro modelo clásico el espacio de fases es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff X, por ejemplo: el fibrado tangente de una variedad, y admitamos que los observables son las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ que se anulan en infinito[3]. Denotemos por $C_0(X)$ al espacio de las funciones $g = f_1 + if_2$, donde f_1 y f_2 son observables. La versión cuántica de lo anterior sería la siguiente. En el espacio de los operadores acotados sobre un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, consideramos la subálgebra cerrada A generada por los operadores autoadjuntos que constituyen los observables del sistema. Este pasaje, de la C^*-álgebra conmutativa $C_0(X)$ a la C^*-álgebra no conmutativa A, es más profundo de lo que puede parecer en primera instancia y tiene más implicancias que las que podríamos describir aquí.

Tanto en el caso clásico como en el cuántico, las álgebras de observables $C_0(X)$ y A son C^*-álgebras. Los teoremas de Gelfand-Naimark muestran que las primeras corresponden exactamente a las C^*-álgebras conmutativas. En este marco, los subespacios vectoriales de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pueden verse como análogos cuánticos de los espacios normados. Más precisamente, para un espacio normado E, tenemos una inclusión isométrica de E en $C(X)$, el espacio de las funciones continuas sobre el espacio topológico compacto X, siendo X la bola unidad cerrada de E^* con la topología ω^*. Por lo tanto podemos pensar a E como un subespacio de la C^*-álgebra $C(X)$. Sustituimos $C(X)$ por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y definimos los espacios de operadores concretos como los subespacios de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Ésta es la primera noción de espacio de operadores y varios resultados importantes para el desarrollo de la teoría fueron establecidos en este contexto.

Es natural preguntarse si es que existe alguna caracterización abstracta de los espacios de operadores. Es decir, una definición que, siendo equivalente a la anterior, no tuviera en cuenta la inclusión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En 1988 Z. J. Ruan [8] dio una definición abstracta y probó que era equivalente a la existente, lo que se conoce como el Teorema de Ruan. Uno de los objetivos de este trabajo es probar este resultado (1.5.1).

La definición abstracta de los espacios de operadores es la siguiente. Para un $\mathbb{C}-$espacio vectorial V denotaremos por $\mathbb{M}_n(V)$ al espacio de las matrices $n \times n$ con entradas en V. Decimos que el $\mathbb{C}-$espacio vectorial V es un espacio de operadores abstracto si: para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos una norma $\| \ \|_n : \mathbb{M}_n(V) \to \mathbb{R}$, de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

- Si $T \in \mathbb{M}_n(V)$ y $S \in \mathbb{M}_m(V)$, entonces:
$$\left\| \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \right\|_{n+m} = \text{máx}\{\|T\|_n, \|S\|_m\}.$$
- Si $T \in \mathbb{M}_n(V)$, $\alpha \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\beta \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, en $\mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^p)$ consideramos la norma de operadores, y el producto $\alpha T \beta$ se define con las fórmulas usuales de producto

[3]Citamos a Marc A.Rieffel, en la página 68 de [10]: "It is easy to argue that, when convenient, one can restrict attention to functions which are continuous, or smooth, and also to ones which are bounded or vanish at infinity."

de matrices, entonces:
$$\|\alpha T\beta\|_m \leqslant \|\alpha\|\|T\|_n\|\beta\|.$$

Naturalmente, debemos probar que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un espacio de operadores abstracto. Con ello tendremos que todos los subespacios de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ lo son. Además está implícita en el teorema de Ruan la existencia de un "isomorfismo de espacios de operadores"φ del espacio de operadores abstracto V, al concreto $W \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tal isomorfismo debe ser lineal, biyectivo, y además debe preservar la información de la familia de normas en los espacios $\mathbb{M}_n(V)$. Claramente el mapa φ induce una familia de mapas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, tal que para cada n, $\varphi_n : \mathbb{M}_n(V) \to \mathbb{M}_n(W)$ está dado por $(v_{ij}) \mapsto (\varphi(v_{ij}))$, y para que V y W sean isomorfos como espacios de operadores, se exige que cada φ_n sea una isometría.

Continuando con la analogía espacios normados-espacios de operadores, nos preguntamos cuáles son los mapas que se corresponden con los mapas acotados para espacios normados. Podemos comenzar observando lo que hemos considerado como isomorfismos. Si φ es como antes, observamos que $\sup\{\|\varphi_n\| : \ n \in \mathbb{Z}^+\} = 1 < \infty$, donde $\|\varphi_n\|$ es la norma del operador φ_n entre los espacios normados $\mathbb{M}_n(V)$ y $\mathbb{M}_n(W)$. Entonces, al menos en principio, los morfismos que consideraremos entre los espacios de operadores V y W, son los completamente acotados, es decir, los mapas lineales $\psi : V \to W$ tales que $\|\psi\|_{cb} := \sup\{\|\psi_n\| : \ n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ (cb es la abreviatura de "completely bounded")[4].

Luego tenemos una categoría con los espacios de operadores como objetos y los mapas completamente acotados como morfismos. Volviendo a la analogía con los espacios normados nos planteamos algunas preguntas:

- Si W es un subespacio cerrado del espacio de operadores V, ¿hay alguna estructura de espacio de operadores en el cociente V/W?.
- Si V y W son espacios de operadores y $\mathcal{CB}(V,W)$ son los mapas completamente acotados de V en W, entonces ¿$\|\ \|_{cb}$ es una norma en $\mathcal{CB}(V,W)$? En caso afirmativo ¿$\mathcal{CB}(V,W)$ es un espacio de operadores?
- Si V^* es el espacio dual de $(V, \|\ \|_1)$ ¿es V^* un espacio de operadores?
- ¿existe algún análogo al teorema de Hahn-Banach para espacios de operadores?

También tenemos otra clase de preguntas que vinculan a los espacios de operadores con los normados (en principio, que un espacio de operadores V sea completo quiere decir que cada $\mathbb{M}_n(V)$ lo es):

- ¿Todo mapa acotado entre espacios de operadores es completamente acotado?
- ¿Hay alguna manera de dar a un espacio de Banach estructura de espacio de operadores?

[4]En [6] se encuentra otra justificación para considerar los mapas completamente acotados.

Todas estas preguntas y otras más tienen respuesta en la presente monografía.

El primer capítulo tiene tres objetivos. El primero es definir los espacios de operadores abstractos y los concretos (en parte ya lo hemos hecho). El segundo objetivo es introducir los morfismos que consideraremos válidos entre nuestros espacios: los mapas completamente acotados. Y el tercero es probar el teorema de Ruan, el cual establece que un espacio de operadores abstracto es completamente isométrico a uno concreto.

En el segundo capítulo probaremos un teorema debido a Wittstock y Arveson, el cual, en la analogía espacios normados-espacios de operadores, puede pensarse como el análogo al teorema de Hahn-Banach.

En el tercer capítulo se definen los sistemas de operadores como subespacios autoadjuntos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (decimos que el conjunto $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si dado $T \in S$ entonces $T^* \in S$, siendo T^* el adjunto de T). Además se prueba el teorema de Arveson, otro importante teorema de extensión.

Finalmente, en el último capítulo se presentan una serie de construcciones y ejemplos. Varias de las construcciones son bien conocidas para espacios de Banach y son posibles para los espacios de operadores (completos) gracias al teorema de Ruan. También veremos cómo dar estructura de espacio de operadores a un espacio de Banach, y veremos que entre todas las posibles hay una minimal y una maximal. Para cerrar el capítulo, se presentan tres estructuras distintas de espacio de operadores en un espacio de Hilbert.

Capítulo 1

Espacios de operadores.

Comenzaremos considerando los subespacios de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para llegar a la definición de un espacio de operadores. Luego definiremos los morfismos que consideraremos entre nuestros espacios y probaremos una serie de resultados que, además de ayudar a entender las diferencias entre un espacio normado y un espacio de operadores, permiten probar el teorema de Ruan.

1.1. Espacios concretos y abstractos.

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Por $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ simbolizaremos el espacio de los operadores acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$. Si $n, m \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^n)$ es linealmente isomorfo a $\mathbb{M}_{n,m}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, el espacio de matrices $n \times m$ con entradas en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Con este isomorfismo inducimos una norma en $\mathbb{M}_{n,m}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Al espacio normado que obtenemos lo denotamos $M_{n,m}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ y $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ si $n = m$. Para el caso $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ con el producto interno usual usaremos la notación $M_{n,m}(\mathbb{C}) = M_{n,m}$ y $M_n(\mathbb{C}) = M_n$.

Si $T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ y $S \in M_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ definimos $T \oplus S \in M_{m+n}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como:

$$T \oplus S = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Calculemos la norma de $T \oplus S$. Sea $x \in \mathcal{H}^{n+m}$ tal que $\|x\| = 1$. Podemos pensar que $x = (x_1, x_2)$ con $x_1 \in \mathcal{H}^n$, $x_2 \in \mathcal{H}^m$ tales que $\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 1$. Entonces:

$$\|(T \oplus S)x\|^2 = \|(Tx_1, Sx_2)\|^2 \leqslant \|T\|^2\|x_1\|^2 + \|S\|^2\|x_2\|^2 \leqslant \max\{\|T\|, \|S\|\}^2$$

Tomando vectores de la forma $(x_1, 0)$ y $(0, x_2)$ se deduce que:

$$\|T \oplus S\| = \max\{\|T\|, \|S\|\} \tag{1.1}$$

Ahora si $\alpha \in M_{n,m}$, $\beta \in M_{m,n}$ y $T \in M_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, usando las fórmulas usuales de producto de matrices podemos definir $\alpha T\beta \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, y nos interesa poder dar una cota para $\|\alpha T\beta\|$.

Primero observamos que $\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ se identifica con $\mathcal{H}^n$ mediante el isomorfismo isométrico $i : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ (ver Apéndice):

$$(h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes h_i$$

donde $e_i \in \mathbb{C}^n$ es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. A continuación observamos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}^n \arrow[r, "\alpha T\beta"] \arrow[dl, "i"'] & \mathcal{H}^n \arrow[dr, "i"] & \\
\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H} \arrow[r, "\beta\otimes I"'] & \mathbb{C}^m \otimes \mathcal{H} \arrow[r, "I\otimes T"'] \arrow[u, phantom, "\#"] & \mathbb{C}^m \otimes \mathcal{H} \arrow[r, "\alpha\otimes I"'] & \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Como i es un isomorfismo isométrico deducimos que:

$$\|\alpha T\beta\| = \|(\alpha \otimes I)(I \otimes T)(\beta \otimes I)\| \leqslant \|\alpha \otimes I\|\|I \otimes T\|\|\beta \otimes I\| \leqslant \|\alpha\|\|T\|\|\beta\|$$

Por lo tanto tenemos la siguiente

Proposición 1.1.1. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert se cumple que:*

1. *Si $T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ y $S \in M_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ entonces:* $\|T \oplus S\| = \text{máx}\{\|T\|, \|S\|\}$
2. *Si $T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\alpha \in M_{m,n}$ y $\beta \in M_{n,m}$ entonces:* $\|\alpha T\beta\| \leqslant \|\alpha\|\|T\|\|\beta\|$

Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Decimos que un espacio vectorial W es un *espacio de operadores concreto* si es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, siendo $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert.

Observación 1.1.3. Como $\mathbb{M}_{n,m}(W)$ es un espacio vectorial y además $\mathbb{M}_{n,m}(W) \subset M_{n,m}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tenemos una norma en $\mathbb{M}_{n,m}(W)$. A este espacio normado lo denotamos $M_{n,m}(W)$. Por otra parte observamos también que como consecuencia de la Proposición 1.1.1 tenemos las siguientes propiedades en un espacio de operadores concreto:

(M1) Si $T \in M_n(W)$ y $S \in M_m(W)$ se cumple que:

$$\|T \oplus S\| = \text{máx}\{\|T\|, \|S\|\}$$

(M2) Si $T \in M_n(W)$, $\alpha \in M_{m,n}$ y $\beta \in M_{n,m}$ entonces:

$$\|\alpha T\beta\| \leqslant \|\alpha\|\|T\|\|\beta\|$$

Con lo anterior en mente tenemos la siguiente

Definición 1.1.4. Dados un $\mathbb{C}-$espacio vectorial V y una familia de normas $(\| \ \|_n)_{n\in N}$ $\| \ \|_n : M_n(V) \to [0,+\infty)$ decimos que V, o el par $(V,(\| \ \|_n)_{n\in N})$, es un *espacio de operadores* (abstracto) si valen las propiedades (M1) y (M2) de la observación anterior (en la cual entendemos $W = V$).

De aquí en más omitiremos el subíndice n en $\| \ \|_n$, cuando no haya lugar a confusión. Simplemente escribiremos $\| \ \|$.

Observación 1.1.5. Todo espacio de operadores concreto es un espacio de operadores y todo subespacio vectorial de un espacio de operadores es un espacio de operadores (con las normas restringidas).

Veamos algunas propiedades de las normas en un espacio de operadores.

Afirmación 1.1.6. *Dado un espacio de operadores V, se cumple que:*

1. *Si $v \in M_n(V)$ y $\alpha, \beta \in M_n$ son unitarias entonces:* $\|v\| = \|\beta v\alpha\| = \|v\alpha\| = \|\alpha v\|$
2. *Si $v = (v_{ij})$ entonces:* $\|v_{ij}\| \leqslant \|v\| \ \forall i,j = 1, \ \ldots, \ n$ *y* $\|v\| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_{ij}\|$

Demostración. Para probar 1. usamos la propiedad (M2) para deducir que: $\|\beta v\alpha\| \leqslant \|v\| \leqslant \|\beta^{-1}\|\|\beta v\alpha\|\|\alpha^{-1}\| = \|\beta v\alpha\|$. Las igualdades restantes se deducen de lo anterior sustituyendo α o β por la matriz identidad.

Para 2. definimos la matriz $E_i \in M_n$ como aquella que tiene un 1 en la entrada i, i y ceros en el resto. Luego $E_i v E_j$ es la matriz que tiene a v_{ij} en la entrada i, j y ceros en el resto. Para i, j dados consideramos la matriz unitaria que resulta de cambiar la columna i con la j en la matriz identidad $n \times n$ y la llamamos $U_{i,j}$. En consecuencia $(E_i v E_j)U_{i,j}$ tiene a v_{ij} en la entrada i, i de la diagonal y ceros en el resto, o sea $E_i v E_j U_{i,j} = 0 \oplus v_{ij} \oplus 0$. Usando la definición de espacio de operadores y la parte anterior: $\|v_{ij}\| = \|E_i v E_j U_{ij}\| = \|E_i v E_j\| \leqslant \|E_i\|\|v\|\|E_j\| \leqslant \|v\|$. La otra desigualdad se deduce inmediatamente usando la desigualdad triangular y lo que acabamos de probar en $v = \displaystyle\sum_{i,j} E_i v E_j$. □

1.2. $M_n(V)$ como espacio de operadores.

Dados un espacio de operadores V y $p \in \mathbb{Z}^+$ hay una estructura natural de espacios de operadores en $M_p(V)$ que viene dada por la identificación $\mathbb{M}_n(M_p(V)) \cong M_{np}(V)$ $(v_{ij})_{i,j=1}^n \mapsto \widetilde{v}$ definiendo $\widetilde{v}_{kp+r,lp+q} = (v_{k+1,l+1})_{r+1,q+1}$, donde $k, l = 0, \ \ldots, \ n-1$ y $1 \leqslant r, q \leqslant p$

O sea:

$$\widetilde{v} = \begin{bmatrix} (v_{11})_{11} & \dots & (v_{11})_{1p} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ (v_{11})_{p1} & \dots & (v_{11})_{pp} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & (v_{nn})_{11} & \dots & (v_{nn})_{1p} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & (v_{nn})_{p1} & \dots & (v_{nn})_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

A través de este isomorfismo lineal damos una norma a $\mathbb{M}_n(M_p(V))$. Veamos que esta familia de normas le da estructura de espacio de operadores a $M_p(V)$.

Para probar (M1) tomamos $v \in M_n(M_p(V))$ y $w \in M_m(M_p(V))$. Como: $\widetilde{v \oplus w} = \widetilde{v} \oplus \widetilde{w}$ se tiene que $\|v \oplus w\| = \|\widetilde{v \oplus w}\| = \max\{\|\widetilde{v}\|, \|\widetilde{w}\|\} = \max\{\|v\|, \|w\|\}$.

Para probar (M2) haremos una construcción y probaremos un lema.

El isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\mathbb{M}_n \otimes V \cong \mathbb{M}_n(V)$$

dado por $\alpha \otimes v \mapsto (\alpha_{ij} v)_{i,j}$ permite dar una norma a $\mathbb{M}_n \otimes V$. Al espacio normado obtenido lo denotamos $M_n \otimes V$.

Lema 1.2.1. *Si V es un espacio de operadores, dados $v \in M_n(V)$ y $\alpha \in M_p$ se cumple que $\|\alpha \otimes v\| = \|\alpha\|\|v\|$.*

Demostración. Observamos que la norma de $\alpha \otimes v$ viene dada por la identificación $M_p \otimes M_n(V) \cong M_p(M_n(V)) \cong M_{np}(V)$. La matriz α puede descomponerse como $\alpha = \mu|\alpha|$, donde μ es unitaria y $|\alpha| = (\alpha^*\alpha)^{1/2}$ es positiva. Por el teorema espectral (en dimensión finita) existe una matriz unitaria λ y escalares $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_p \geqslant 0$ tales que $\|\alpha\| = a_1$ y $|\alpha| = \lambda^*(a_1 \oplus \cdots \oplus a_p)\lambda$. Definimos $\widetilde{v} = (a_1 \oplus \cdots \oplus a_p) \otimes v$, que bajo el isomorfismo $M_p \otimes M_n(V) \cong M_p(M_n(V))$ corresponde a $(a_1 v) \oplus \cdots \oplus (a_p v)$. Luego:

$$\begin{aligned} \|\alpha \otimes v\| &= \|\mu(\lambda^*(a_1 \oplus \cdots \oplus a_p)\lambda) \otimes v\| = \|\mu(\lambda^*(a_1 \oplus \cdots \oplus a_p)) \otimes v.(\lambda \otimes I_n)\| \\ &= \|(\mu\lambda^* \otimes I_n).(a_1 \oplus \cdots \oplus a_p) \otimes v.(\lambda \otimes I_n)\| = \|(a_1 \oplus \cdots \oplus a_p) \otimes v\| = \|\widetilde{v}\| \\ &= \|a_1 v \oplus \cdots \oplus a_p v\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|a_i v\| = |a_1|\|v\| = \|\alpha\|\|v\| \end{aligned}$$

En la cuarta igualdad hemos usado que $\mu\lambda^* \otimes I_n$ y $\lambda \otimes I_n$ se corresponden con matrices unitarias y la Afirmación 1.1.6. $\square$

Ahora para probar (M2) observamos que si $\alpha \in M_{n,m}$, $\beta \in M_{m,n}$ y $v \in M_m(V)$ entonces: $\widetilde{\alpha v \beta} = (\alpha \otimes I_n)\widetilde{v}(\beta \otimes I_n)$ siendo $I_n \in M_n$ la matriz identidad. Usando el lema previo:

$$\|\alpha v \beta\| = \|(\alpha \otimes I_n)\widetilde{v}(\beta \otimes I_n)\| \leqslant \|\alpha \otimes I_n\|\|\widetilde{v}\|\|\beta \otimes I_n\| \ = \|\alpha\|\|v\|\|\beta\|$$

La siguiente proposición cierra esta sección y nos será útil más adelante, además de ser interesante en sí misma.

Proposición 1.2.2. *Si V es un espacio vectorial y tenemos funciones $\| \ \|_n : \mathbb{M}_n(V) \to [0, +\infty)$ tales que se cumplen las siguientes propiedades:*

(M1)' Dados $v \in \mathbb{M}_n(V)$ y $w \in \mathbb{M}_m(V)$ se cumple que $\|v \oplus w\|_{n+m} \leqslant \text{máx}\{\|v\|_n, \|w\|_m\}$.

(M2) Dados $v \in \mathbb{M}_m$, $\alpha \in M_{n,m}$ y $\beta \in M_{m,n}$ se cumple que $\|\alpha v \beta\|_n \leqslant \|\alpha\|\|v\|_m\|\beta\|$.

Entonces $(\| \ \|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de seminormas que cumplen las propiedades M1 y M2. Si además $\| \ \|_1$ es una norma entonces $(\| \ \|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de normas que le dan a V estructura de espacio de operadores.

Demostración. Para probar que $\| \ \|_n$ cumple la desigualdad triangular tomamos $v, w \in \mathbb{M}_n(V)$, $\varepsilon > 0$, y definimos $\alpha = \|v\|_n + \varepsilon$ y $\beta = \|w\|_n + \varepsilon$. Tomamos $\widetilde{v}, \widetilde{w} \in \mathbb{M}_n(V)$ tales que $v = \alpha\widetilde{v}$ y $w = \beta\widetilde{w}$; luego tenemos que $\|\widetilde{v}\| < 1$ y $\|\widetilde{w}\| < 1$. Si definimos

$$\gamma = \begin{bmatrix} \alpha^{1/2} I_n & \beta^{1/2} I_n \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ v + w = \gamma(\widetilde{v} \oplus \widetilde{w})\gamma^*$$

Observamos que $\|\gamma\gamma^*\| = \|(\alpha+\beta)I_n\| = \alpha + \beta = \|\gamma\|\|\gamma^*\|$ y usamos M1' y M2 para deducir que:

$$\|v + w\|_n = \|\gamma(\widetilde{v} \oplus \widetilde{w})\gamma^*\| \leqslant \|\gamma\|\|\gamma^*\| \,\text{máx}\{\|\widetilde{v}\|_n, \|\widetilde{w}\|_n\} < \alpha + \beta = \|v\|_n + \|w\|_n + 2\varepsilon$$

y concluimos que $\| \ \|_n$ cumple la desigualdad triangular.

Veamos que se cumple la homogeneidad: sean $c \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{M}_n(V)$. Si $c = 0$ es inmediato que $\|cv\|_n = |c|\|v\|_n$ (M2 implica que $\|0\|_n = 0$). En otro caso por M2 tenemos que $\|cv\|_n = \|(cI_n)v(I_n)\|_n \leqslant \|cI_n\|\|v\|_n = |c|\|v\|_n$ de lo que se deduce que $\|cv\|_n \leqslant |c|\|v\|_n$ y por lo tanto $\|cv\|_n \leqslant |c|\|v\|_n = |c|\|\frac{1}{c}cv\|_n \leqslant \frac{|c|}{|c|}\|cv\|_n$.

Para ver que se cumple M1 tomemos $v \in \mathbb{M}_n(V)$ y $w \in \mathbb{M}_m(V)$. Como: $v = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} (v \oplus w) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ usando M2 tenemos que $\|v\| \leqslant \|v \oplus w\|$. Análogamente se tiene que $\|w\| \leqslant \|v \oplus w\|$. Usando ahora M1' deducimos M1.

Supongamos finalmente que $\| \ \|_1$ es una norma. Hay que probar que dado $v \in \mathbb{M}_n(V)$ tal que $\|v\|_n = 0$ entonces $v = 0$. A partir de M1', M2, y de lo que hemos probado, las mismas manipulaciones que nos permitieron establecer la validez de la Afirmación 1.1.6 implican que $\text{máx}_{i,j} \|v_{ij}\|_1 \leqslant \|v\|_n \ \forall v \in M_n(V)$, y por lo tanto $\|v\|_n = 0$ implica que $\|v_{ij}\|_1 = 0 \ \forall i, j$, es decir, $v = 0$. $\square$

1.3. Mapas entre espacios de operadores.

Habiendo definido los espacios de operadores nos ocuparemos ahora de los mapas lineales entre ellos.

Supongamos que V y W son espacios de operadores, y que tenemos un mapa lineal $\varphi : V \to W$. Este mapa induce una familia de mapas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\varphi_n : M_n(V) \to M_n(W) \qquad (v_{ij})_{ij} \mapsto (\varphi(v_{ij}))_{ij}$$

Recuérdese que φ es acotado si $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(v)\| : \ v \in V,\ \|v\| = 1\} < \infty$.

La siguiente proposición resume algunas propiedades de los mapas φ_n.

Proposición 1.3.1. *Si V y W son espacios de operadores y $\varphi : V \to W$ es lineal acotado se cumple que:*

1. *φ_n es acotado y $\|\varphi_n\| \leqslant n^2\|\varphi\|$*
2. *$\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_{n+1}\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$*

Demostración. De acuerdo a la Afirmación 1.1.6 tenemos que:

$$\|\varphi_n(v)\| = \|(\varphi(v_{ij}))\| \leqslant \sum_{i,j} \|\varphi(v_{ij})\| \leqslant \|\varphi\| n^2 \|v\|$$

Por último: $\|\varphi_n(v)\| = \text{máx}\{\|\varphi_n(v)\|, \|0\|\} = \|\varphi_n(v) \oplus 0\| = \|\varphi_{n+1}(v \oplus 0)\| \leqslant \|\varphi_{n+1}\|\|v\|$. □

La proposición anterior no asegura que si $\|\varphi\| < \infty$ entonces $\sup\{\|\varphi_n\| : \ n \in N\} < \infty$. Como veremos más adelante este supremo puede ser ∞.

Definición 1.3.2. Si V y W son espacios de operadores y $\varphi : V \to W$ es lineal decimos que:

- φ es completamente acotado si $\|\varphi\|_{cb} := \sup\limits_{n\in N} \|\varphi_n\| < \infty$
- φ es una contracción completa si $\|\varphi\|_{cb} \leqslant 1$
- φ es completamente isométrico si φ_n es una isometría $\forall n \in \mathbb{N}$. Diremos que los espacios V y W son completamente isométricos si existe un mapa sobreyectivo y completamente isométrico entre ellos. Por isometría entre espacios normados entendemos un mapa lineal que preserva la norma.
- $\mathcal{CB}(V, W) := \{\varphi \text{ tal que } \varphi : V \to W \text{es lineal y } \|\varphi\|_{cb} < \infty\}$

De la teoría de espacios normados sabemos que si X e Y son espacios normados e Y es completo entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado completo. Veamos el resultado análogo para espacios de operadores.

Afirmación 1.3.3. *Si V y W son espacios de operadores entonces $(\mathcal{CB}(V,W), \| \ \|_{cb})$ es un espacio normado. Si además W es completo (con $\| \ \|_1 : M_1(W) = W \to [0,+\infty)$) entonces $\mathcal{CB}(V,W)$ es completo.*

Demostración. La primera afirmación se verifica fácilmente.

Para ver que $\mathcal{CB}(V,W)$ es completo si W lo es, tomemos una sucesión de Cauchy, $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$, en $\mathcal{CB}(V,W)$. Como $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_{cb}$ $\forall \varphi \in \mathcal{CB}(V,W)$ tenemos que $(\varphi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(V,W)$, y como éste es completo, tenemos un mapa $\phi \in \mathcal{B}(V,W)$ tal que $\lim_k \|\phi - \varphi^k\| = 0$. Usando la Afirmación 1.3.1 se deduce que $\lim_k \|\phi_n - (\varphi^k)_n\| = 0$, $\forall\, n$, y por lo tanto

$$\|\phi_n\| = \lim_k \|(\varphi^k)_n\| \leqslant \lim_k \|(\varphi^k)\|_{cb} < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\phi \in \mathcal{CB}(V,W)$. Por otro lado:

$$\|\phi - \varphi^k\|_{cb} = \lim_n \|(\phi - \varphi^k)_n\| = \lim_n \lim_l \|(\varphi^l - \varphi^k)_n\| \leqslant \lim_n \lim_l \|\varphi^l - \varphi^k\|_{cb} = \lim_l \|\varphi^l - \varphi^k\|$$

De lo anterior se deduce que $\lim_k \|\phi - \varphi^k\|_{cb} = 0$, ya que la sucesión (φ^k) es $\| \ \|_{cb}$ de Cauchy. □

A pesar de lo observado antes de la Definición 1.3.2 hay casos en los que $\|\varphi\| < \infty$ asegura que $\sup\{\|\varphi_n\| : \ n \in N\} < \infty$. Antes de ver un resultado al respecto veamos un lema.

Lema 1.3.4. *Si $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$ y $\eta \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ entonces existen una isometría $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ y un vector $\widetilde{\eta} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ tales que: $(\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta}) = \eta$.*

Demostración. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, entonces existen vectores $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{C}^m$ tales que $\eta = \sum_i \eta_i \otimes e_i$. Si definimos $F = \operatorname{span}\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, se cumple que $\dim F \leqslant n$ y por lo tanto se puede encontrar una isometría $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ tal que $F \subseteq Im(\beta)$. Como consecuencia de lo anterior existen vectores $\widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_n \in \mathbb{C}^n$ tales que $\beta(\widetilde{\eta}_j) = \eta_j$ $\forall j = 1 \ldots n$. Para obtener la tesis definimos: $\widetilde{\eta} = \sum_j \widetilde{\eta}_j \otimes e_j$. □

Proposición 1.3.5. *Si V es un espacio de operadores y $\varphi : V \to M_n$ es un mapa lineal, entonces $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi_n\|$. En particular φ es acotado si y sólo si es completamente acotado.*

Demostración. Si φ es acotado, cada φ_m lo es también por 1.3.1. Para ver que φ es completamente acotado basta probar que si $m \geqslant n$ entonces $\|\varphi_m\| \leqslant \|\varphi_n\|$. Dado $\epsilon > 0$ sea $v \in M_m(V)$ tal que $\|v\| \leqslant 1$ y $\|\varphi_m\| - \epsilon < \|\varphi_m(v)\|$.

Ahora elegimos vectores unitarios $\eta, \gamma \in (\mathbb{C}^n)^m \cong \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ tales que $\|\varphi_m\| - \epsilon \leqslant |\langle(\varphi_m)(v)\eta, \gamma\rangle|$. Por el lema anterior existen isometrías $\alpha, \beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ y vectores unitarios $\widetilde{\eta}, \widetilde{\gamma} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ tales que $\eta = (\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta})$ y $\gamma = (\alpha \otimes I_n)(\widetilde{\gamma})$. Luego

$$\begin{aligned}\|\varphi_m\| - \epsilon &\leqslant |\langle \varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta}), (\alpha \otimes I_n)(\widetilde{\gamma})\rangle| = |\langle(\alpha \otimes I_n)^* \varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta}), \widetilde{\gamma}\rangle| = \\ &= |\langle(\alpha^* \otimes I_n)\varphi_m(v)(\beta \otimes I_n)(\widetilde{\eta}), \widetilde{\gamma}\rangle| = |\langle \varphi_n(\alpha^* v \beta)\widetilde{\eta}, \widetilde{\gamma}\rangle| \leqslant \|\varphi_n\| \|\alpha^* v \beta\| \leqslant \|\varphi_n\|\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario deducimos que $\|\varphi_m\| \leqslant \|\varphi_n\|$. □

Corolario 1.3.6. *Si V y W son espacios de operadores donde uno de ellos tiene dimensión finita n y $\varphi : V \to W$ es lineal entonces $\|\varphi\|_{cb} \leqslant n\|\varphi\|$.*

Demostración. Dado $v \in V$ tal que $\|v\| = 1$ consideremos el mapa $\theta_v : \mathbb{C} \to V$ dado por $\theta_v(z) := zv$. Es inmediato que θ es una isometría. Es más, dado $\alpha \in M_n$, se tiene que $\|(\theta_n)(\alpha)\| = \|(\alpha_{ij}v)_{ij}\| = \|\alpha \otimes v\| = \|\alpha\|\|v\| = \|\alpha\|$, de donde concluimos que θ es completamente isométrico.

Para la demostración podemos suponer que $\dim(W) = n$. Tomamos una base, $\{w_1, \dots, w_n\}$, de vectores de norma 1 de W y $g_1, \dots, g_n \in W^*$ tales que $g_i(w_j) = \delta_{i,j}$ $\forall i, j = 1 \dots n$. Entonces tenemos que

$$Id_W = \sum_{j=1}^{n} \theta_{w_j} \circ g_j \quad \Rightarrow \quad \varphi = \sum_{j=1}^{n} \theta_{w_j} \circ g_j \circ \varphi$$

Luego $\|\varphi\|_{cb} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\theta_{w_j}\|_{cb}\|g_j \circ \varphi\|_{cb} \leqslant n\|\varphi\|$, donde hemos usado que $\|\theta_{w_j}\|_{cb} = 1$ y la proposición anterior para deducir que $\|g_j \circ \varphi\|_{cb} = \|g_j \circ \varphi\| \leqslant \|g_j\|\|\varphi\| \leqslant \|\varphi\|$. □

1.4. Un mapa que no es completamente acotado.

El mapa con el que trabajaremos será el que a una matriz le asocia su traspuesta. Lo denotaremos $\mathbf{t} : M_n \to M_n$. Veamos que es una isometría:

Si dado $x \in \mathbb{C}^n$, $\overline{x}$ es el vector que resulta de conjugar las entradas de x, entonces $\|\overline{x}\| = \|x\|$. Tomemos $A \in M_n$. Con la notación anterior: $\langle Ax, y\rangle = \langle \mathbf{t}(A)\overline{y}, \overline{x}\rangle$ y como

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \ x, y \in \mathbb{C}^n \ \ \|x\| = \|y\| = 1\}$$

$$\|\mathbf{t}(A)\| = \sup\{|\langle \mathbf{t}(A)z, w\rangle| : \ z, w \in \mathbb{C}^n \ \ \|z\| = \|w\| = 1\}$$

deducimos que $\|A\| = \|\mathbf{t}(A)\|$.

De acuerdo a 1.3.5, el mapa $\mathbf{t}$ visto como mapa de M_n en sí mismo es completamente acotado. Pero consideraremos $\mathbf{t}$ actuando en el siguiente espacio:

$$K_\infty = \{(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > n_0 \text{ o } j > n_0\},$$

con la norma de operadores que da la inclusión $K_\infty \hookrightarrow \mathcal{B}(\ell^2_{\mathbb{C}})$, dada por $\left((a_{i,j})(\lambda_k)\right)_r = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{rn}\lambda_n$.

Observamos que la inclusión $M_n \hookrightarrow K_\infty$ es una isometría.

Proposición 1.4.1. *Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, el mapa $\boldsymbol{t} : M_n \to M_n$ es una isometría, y cumple que $\|\boldsymbol{t}\|_{cb} = n$. Por otro lado, el mapa*

$$\boldsymbol{t} : K_\infty \to K_\infty$$

es una isometría pero no es completamente acotado.

Demostración. Consideremos el mapa $D_n : M_n \to M_n$ dado por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = (e_1 A e_1^t) \oplus \cdots \oplus (e_n A e_n^t)$$

Primero veamos que $\|D_n\|_{cb} \leqslant 1$.

Supongamos que V es un espacio de operadores, y tomemos un par de matrices $\alpha \in M_{m,n}$ y $\beta \in M_{n,m}$, que cumplen la condición: $\|\alpha\| \leqslant 1$, $\|\beta\| \leqslant 1$. Con ellas construimos la función $\eta_{\alpha,\beta} : M_n(V) \to M_m(V)$ $v \mapsto \alpha v \beta$, probemos que $\|\eta_{\alpha,\beta}\|_{cb} \leqslant 1$. Sea $w \in M_r(M_n(V))$, entonces:

$$\left(\eta_{\alpha,\beta}\right)_r(w) = \left(\alpha w_{i,j}\beta\right)_{i,j} = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \ddots & \\ & & \beta \end{bmatrix} = (\alpha \otimes I_r)\, w\, (\beta \otimes I_r)\,,$$

por lo tanto (por 1.2.1):

$$\|(\eta_{\alpha,\beta})_r(w)\| \leqslant \|\alpha \otimes I_r\| \|w\| \|\beta \otimes I_r\| \leqslant \|\alpha\| \|w\| \|\beta\| \leqslant 1.$$

Usando lo anterior, para $\alpha = e_i$, $\beta = e_i^t$ y $V = M_n$, tenemos un mapa completamente contractivo $\varphi_i : M_n \to \mathbb{C}$, definido por $\varphi_i(A) = e_i A e_i^t$. Dada una matriz $A \in M_n$, vale lo siguiente: $D_n(A) = \varphi_1(A) \oplus \cdots \oplus \varphi_n(A)$. Por lo tanto, dada $B \in M_r(M_n)$:

$$\begin{aligned} \|(D_n)_r(B)\| &= \left\|\big(\varphi_1(B_{i,j}) \oplus \cdots \oplus \varphi_n(B_{i,j})\big)_{i,j=1}^r\right\| \\ &\qquad \text{(usamos 1.1.6 para deducir que cambiar filas o columnas no cambia la norma)} \\ &= \left\|\big(\varphi_1(B_{i,j})\big)_{i,j} \oplus \cdots \oplus \big(\varphi_n(B_{i,j})\big)_{i,j=1}^r\right\| = \|(\varphi_1)_r(B) \oplus \cdots \oplus (\varphi_n)_r(B)\| \\ &\leqslant \text{máx}\{\|\varphi_1\|_{cb}\|B\|, \dots, \|\varphi_n\|_{cb}\|B\|\} \leqslant \|B\|. \end{aligned}$$

Hemos probado que $\|D_n\|_{cb} \leqslant 1$. El segundo objetivo es ver que $\|\mathbf{t}\|_{cb} = n$, para ello tomemos $\alpha \in M_n$, descomponemos α de la siguiente manera:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \alpha_{1,2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,1} & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \alpha_{1,3} & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & \alpha_{n-2,n} \\ \alpha_{n-1,1} & & & \\ 0 & \alpha_{n,2} & & \end{bmatrix} +$$

Ahora consideremos la matriz de permutación:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicar a la derecha e izquierda por π permuta las filas y columnas respectivamente y por lo tanto π es una matriz ortogonal (unitaria real). Obsérvese que la descomposición de α puede escribirse como:

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} D_n(\alpha\pi^k)\pi^{-k}$$

Ahora, como π es ortogonal: $\mathbf{t}(\pi^{-k}) = (\pi^{-k})^t = \pi^k$, y como $\mathbf{t}$ es antimultiplicativo, tenemos:

$$\mathbf{t}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi^k D_n(\alpha\pi^k) \tag{1.2}$$

Veamos que el mapa $\alpha \mapsto \pi^k D_n(\alpha\pi^k)$, es completamente contractivo. Para ello observemos que $\pi^k D_n(\alpha\pi^k) = \eta_{\pi^k,I} \circ D_n \circ \eta_{I,\pi^k}(\alpha)$. Por lo tanto el mapa $\alpha \mapsto \pi^k D_n(\alpha\pi^k)$ es igual a $\eta_{\pi^k,I} \circ D_n \circ \eta_{I,\pi^k}$. Luego $\|\eta_{\pi^k,I} \circ D_n \circ \eta_{I,\pi^k}\|_{cb} \leqslant \|\eta_{\pi^k,I}\|_{cb}\|D_n\|_{cb}\|\eta_{I,\pi^k}\|_{cb} \leqslant 1$.

Retomamos (1.2) y tenemos que $\|\mathbf{t}\|_{cb} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|\eta_{\pi^k,I} \circ D_n \circ \eta_{I,\pi^k}\|_{cb} \leqslant n$.

Para ver que $\|\mathbf{t}\| = n$, tomemos la matriz $E = (E_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(M_n)$. Definiendo:

$$\widetilde{E} := \mathbf{t}_n(E) = \begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{2,1} & \dots & E_{n,1} \\ E_{1,2} & E_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ E_{1,n} & & & E_{n,n} \end{pmatrix}$$

tenemos que $\widetilde{E}$ es una matriz que tiene sólo un uno por fila y columna y por lo tanto es ortogonal, en consecuencia $\|\widetilde{E}\| = 1$. Por otro lado, si e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$, visto como columna, tenemos que $e_i e_j^* = E_{i,j}$, y por lo tanto:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^* & \dots & e_n^* \end{bmatrix}, \quad \text{lo que nos lleva a:} \quad \|E\| = \left\| \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \right\|^2 = n$$

Para terminar de ver que $\|\mathbf{t}\|_{cb} = n$ observemos que $\|\widetilde{E}\| = 1$ y $\|\mathbf{t}_n(\widetilde{E})\| = \|E\| = n$.

Por último, usamos lo probado hasta aquí y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\mathbf{t}"] \arrow[d] & M_n \arrow[d] \\ K_\infty \arrow[r, "\mathbf{t}"'] & K_\infty \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

donde las flechas en vertical representan las inclusiones canónicas, que son completamente isométricas, y concluimos que $\|\mathbf{t}\|_{cb} = \infty$ (actuando en K_∞), mientras que $\mathbf{t} : K_\infty \to K_\infty$ es una isometría. $\square$

1.5. El teorema de representación.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema:

Teorema de Representación (Ruan) 1.5.1. *Si V es un espacio de operadores, entonces existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un espacio de operadores concreto $W \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y una isometría completa y sobreyectiva $\Phi : V \to W$.*

El resultado clave para la demostración es el que enunciamos a continuación:

Lema 1.5.2. *Si V es un espacio de operadores, entonces dado $v \in M_n(V)$ existe una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ tal que $\|\varphi_n(v)\| = \|v\|$.*

Veamos primero la prueba del teorema de Ruan usando el lema y posteriormente una serie de resultados que nos permiten probar 1.5.2.

Demostración del teorema de Representación. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $s_n(V) = \mathcal{CB}(V, M_n)_{\| \|_{cb} \leqslant 1}$ y $S = \bigcup_{n \geqslant 1} s_n(V)$. Sea ahora $\mathcal{H} = \bigoplus_{\varphi \in S} \mathbb{C}^{n(\varphi)}$ con el producto interno $\langle (h_\varphi), (g_\varphi) \rangle = \sum_\varphi \langle h_\varphi, g_\varphi \rangle_{\mathbb{C}^{n(\varphi)}}$ donde $n(\varphi)$ es tal que $\varphi \in s_{n(\varphi)}(V)$.

Definimos el mapa $\Phi_V : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como $v \mapsto (\varphi(v))_{\varphi \in S}$ o sea $(\Phi_V(v))\,(h_\varphi)_{\varphi \in S} = (\varphi(v) h_\varphi)_{\varphi \in S}$.

Calculemos $\|\Phi_V(v)\|$:

$$\begin{aligned} \| (\Phi_V(v))\,(h_\varphi)_{\varphi \in S} \|^2 &= \sum_\varphi \|\varphi(v) h_\varphi\|^2 \leqslant \sum_\varphi \|\varphi\|_{cb}^2 \|v\|^2 \|h_\varphi\|^2 \leqslant \|v\|^2 \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2 \\ &\leqslant \|v\|^2 \|(h_\varphi)_{\varphi \in S}\|^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Luego hemos probado que $\|\Phi_V(v)\| \leqslant \|v\|$. Por otra parte tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_n(V) \arrow[r, "(\Phi_V)_n"] \arrow[d, "Id_V"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{B}(\mathcal{H}^n) \arrow[d, "\approx"] \\ M_n(V) \arrow[r, "\Phi_{M_n(V)}"'] & \mathcal{B}\left(\bigoplus_{\varphi\in S}(\mathbb{C}^{n(\varphi)})^n\right) \end{tikzcd}$$

en el que el mapa de la columna derecha está dado por la identificación $\mathcal{H}^n \cong \bigoplus_{\varphi\in S}(\mathbb{C}^{n(\varphi)})^n$ a través de la isometría (sobreyectiva) $((h^1_\varphi)_{\varphi\in S},\ldots,(h^n_\varphi)_{\varphi\in S}) \mapsto (h^1_\varphi,\ldots,h^n_\varphi)_{\varphi\in S}$. Y el mapa $\Phi_{M_n(V)}$ está dado por $w \mapsto ((\varphi_n)(w))_\varphi$. A partir de (1.4) deducimos que $\|\Phi_{M_n(V)}\| \leqslant 1$ lo que implica que $\|(\Phi_V)_n\| \leqslant 1$. Es decir que Φ_V es completamente contractivo.

Por último, dado $v \in M_n(V)$, por el Lema 1.5.2 existe $\varphi_0 \in s_n(V)$ tal que $\|(\varphi_0)_n(v)\| = \|v\|$, y como $\|\left(\Phi_V\right)_n(v)\| \geqslant \|(\varphi_0)_n(v)\|$ se deduce que $\|\left(\Phi_V\right)_n(v)\| = \|v\|$, lo que prueba que Φ_V es completamente isométrico. Para terminar el teorema basta elegir $W = \Phi(V)$. $\square$

Comencemos con los resultados y definiciones necesarias para probar 1.5.2.

Definición 1.5.3. Sean V un espacio vectorial y $K \subset V$ un conjunto convexo. Una función $f : K \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si $f(tx+(1-t)y) = tf(x)+(1-t)f(y)\ \forall x, y \in K\ t \in [0,1]$.

Definición 1.5.4. Si V es un espacio vectorial y $C \subset V$, decimos que C es un cono si $C+C \subset C$ y $tC \subset C\ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Lema 1.5.5. *Sean E un espacio vectorial topológico (EVT), $K \subset E$ un conjunto convexo, compacto y no vacío, y ε un cono de funciones afines reales y continuas sobre K. Supongamos que para todo $e \in \varepsilon$ existe $k_e \in K$ tal que $e(k_e) \geqslant 0$. Entonces existe $k_0 \in K$ tal que $e(k_0) \geqslant 0$, $\forall e \in \varepsilon$.*

Demostración. Dado $e \in \varepsilon$ consideremos $K(e) := \{k \in K\ :\ e(k) \geqslant 0\}$. Lo que tenemos que probar es que $\bigcap_{e\in\varepsilon} K(e) \neq \emptyset$. Como cada $K(e)$ es compacto, (además convexo y no vacío) basta ver que $\{K(e)\}_{e\in\varepsilon}$ tiene la propiedad de intersección finita. Por absurdo supongamos que no la tiene. Entonces deben existir $e_1,\ldots,e_n \in K$ tales que $K(e_1)\cap\cdots\cap K(e_n) = \emptyset$. Ahora definimos $\theta : K \to \mathbb{R}^n$ como $\theta(k) = (e_1(k),\ldots,e_n(k))$, que es una función afín y continua. Luego $\theta(K)$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Si $(\mathbb{R}^n)^+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n\}$, por la suposición hecha se tiene que $\theta(K)\cap(\mathbb{R}^n)^+ = \emptyset$. Por el teorema de Hahn-Banach existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f((\mathbb{R}^n)^+) \subset [0,+\infty)$ y $f(\theta(K)) \subset (-\infty,0)$. Por lo anterior debe ser $f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ con $c_1,\ldots,c_n \geqslant 0$. Ahora observamos que $f\circ\theta(v) = c_1e_1(v)+\cdots+c_ne_n(v)$, y como ε es un cono $f\circ\theta \in \varepsilon$. Por lo tanto $K(f\circ\theta) \neq \emptyset$, lo que contradice $f(\theta(K)) \subset (-\infty,0)$. $\square$

Definición 1.5.6. Un estado en M_n es una función $p : M_n \to \mathbb{C}$ lineal, positiva, y tal que $p(I) = 1$. Por positiva entendemos: $p(A^*A) \geqslant 0$ para toda matriz $A \in M_n$

Lema 1.5.7. *Si V es un espacio de operadores y $F \in M_n(V)^*$ satisface que $\|F\| = 1$ entonces exsisten estados p_0, q_0 de M_n tales que*

$$|F(\alpha v\beta)| \leqslant p_0(\alpha\alpha^*)^{1/2}\|v\|q_0(\beta^*\beta)^{1/2},$$

para todos $\alpha \in M_{n,r}$, $\beta \in M_{r,n}$, $v \in M_r(V)$ y $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. Basta probar la desigualdad para $\|v\| = 1$. Si S_n es el conjunto de estados en M_n basta encontrar $p_0, q_0 \in S_n$ tales que $Re(F(\alpha v\beta)) \leqslant p_0(\alpha\alpha^*)^{1/2}q_0(\beta^*\beta)^{1/2}$, para lo cual basta mostrar que

$$Re(F(\alpha v\beta)) \leqslant \frac{1}{2}(p_0(\alpha\alpha^*) + q_0(\beta^*\beta)). \tag{1.5}$$

Veamos la última afirmación del párrafo anterior: si en (1.5) sustituimos α por $t^{1/2}\alpha$ y β por $t^{-1/2}\beta$, con $t > 0$, tenemos $Re(F(\alpha v\beta)) \leqslant \frac{1}{2}(tp_0(\alpha\alpha^*)+\frac{1}{t}q_0(\beta^*\beta))$. Ahora: si $p_0(\alpha\alpha^*)q_0(\beta^*\beta) \neq 0$ tomamos $t = \left(\frac{q_0(\beta^*\beta)}{p_0(\alpha\alpha^*)}\right)^{1/2}$; si $p_0(\alpha\alpha^*) = 0$ y $q_0(\beta^*\beta) \neq 0$ hacemos $t \to +\infty$; y en el caso $p_0(\alpha\alpha^*) \neq 0$ y $q_0(\beta^*\beta) = 0$ hacemos $t \to 0$.

Si $K := S_n \times S_n$ tenemos que K es compacto y convexo como subconjunto de $(M_n \oplus M_n)^*$ con la inclusión $(p, q)(a\oplus b) = p(a)+q(b)$. Sea $A(K)$ el conjunto de las funciones reales continuas afines en K. Para $\alpha \in M_{n,r}$, $\beta \in M_{r,n}$, $v \in M_r(V)$, con $\|v\| = 1$, y $r \in \mathbb{N}$ definimos

$$e_{\alpha,v,\beta}(p, q) = p(\alpha\alpha^*) + q(\beta^*\beta) - 2Re(F(\alpha v\beta)).$$

Afirmamos que $\varepsilon = \{e_{\alpha,v,\beta} :\ \alpha \in M_{n,r},\ \beta \in M_{r,n},\ v \in M_r(V),\ \|v\| = 1 \text{ y } r \in \mathbb{N}\}$ es un cono (incluido en $A(K)$).

Veamos que es un cono: si $c \geqslant 0$ se verifica que $ce_{\alpha,v,\beta} = e_{c^{1/2}\alpha,v,c^{1/2}\beta}$. Por otro lado, dados $e_{\alpha,v,\beta}$ y $e_{\alpha',v',\beta'}$ tenemos que

$$e_{\alpha,v,\beta}(p, q) + e_{\alpha',v',\beta'}(p, q) = p(\alpha\alpha^* + \alpha'(\alpha')^*) + q(\beta^*\beta + (\beta')^*\beta) - 2Re(F(\alpha v\beta + \alpha'v'\beta'))$$

Definiendo: $\alpha'' = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha'\end{bmatrix}$, $\beta'' = \begin{bmatrix}\beta \\ \beta'\end{bmatrix}$ y $\widetilde{v} = v \oplus v' = \begin{bmatrix}v & 0 \\ 0 & v'\end{bmatrix}$, observamos que

$$\alpha\alpha^* + \alpha'(\alpha')^* = \alpha''(\alpha'')^* \quad \beta^*\beta + (\beta')^*\beta' = (\beta'')^*\beta \quad \|\widetilde{v}\| = \max\{\|v\|, \|v'\|\} = 1$$

y además $\alpha v\beta + \alpha'v'\beta' = \alpha''\widetilde{v}\beta''$. De esto se deduce que $e_{\alpha,v,\beta} + e_{\alpha',v',\beta'} = e_{\alpha'',\widetilde{v},\beta''} \in \varepsilon$. Usando el lema anterior concluimos la prueba. □

Observación 1.5.8. A partir de un estado p en M_n podemos definir un semi-producto interno $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ en M_n por la fórmula $[A, B] = p(B^*A)$.

Si $E = \{A \in M_n :\quad [A, A] = 0\}$ y $M_n \to M_n/E$ $A \mapsto \overline{A}$ es la proyección canónica sobre M_n/E, se tiene que $\mathcal{H} := M_n/E$ con el producto interno $\langle\overline{A}, \overline{B}\rangle = [A, B]$ es un espacio de Hilbert. Hay un mapa lineal de M_n en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $\pi : M_n \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(A)(\overline{B}) = \overline{AB}$ y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\pi(AB^*) = \pi(A)\pi(B)^*$

2. $p(A) = \langle \pi(A)\overline{I}, \overline{I} \rangle$ con $A \in M_n$ e I la matriz identidad de M_n.

Lema 1.5.9. *Si V es un espacio de operadores, dado $F \in M_n(V)^*$ con $\|F\| = 1$ existen una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ y vectores unitarios $\xi, \eta \in (\mathbb{C}^n)^n$ tales que: $F(v) = \langle \varphi_n(v)\eta, \xi \rangle$ para todo $v \in M_n(V)$.*

Demostración. La funcional F satisface las hipótesis del Lema 1.5.7. Sean entonces p_0 y q_0 estados cuya existencia asegura dicho lema para F. A continuación hacemos para cada uno de ellos la construcción de la Observación 1.5.8, y obtenemos: espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, mapas $\pi : M_n \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\theta : M_n \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$, y vectores unitarios $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $\eta_0 \in \mathcal{K}$, tales que $p_0(\alpha) = \langle \pi(\alpha)\xi_0, \xi_0 \rangle$ y $q_0(\beta) = \langle \theta(\beta)\eta_0, \eta_0 \rangle$.

Dado $\alpha \in M_{1,n}$, $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, definimos $\widetilde{\alpha} \in M_n$ como

$$\widetilde{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \quad \widetilde{M_{1,n}} = \{\widetilde{\alpha} : \ \alpha \in M_{1,n}\}$$

Sean $\mathcal{H}_0 = \pi(\widetilde{M_{1,n}})\xi_0 \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{K}_0 = \theta(\widetilde{M_{1,n}})\eta_0 \subset \mathcal{K}$. Dado $v \in V$, se define $B_v : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$B_v(\theta(\widetilde{\beta})\eta_0, \pi(\widetilde{\alpha})\xi_0) = F((\widetilde{\alpha})^* v \widetilde{\beta}).$$

En realidad B_v depende sólo de F y de v. En efecto, supongamos que $\theta(\widetilde{\beta})\eta_0 = \theta(\widetilde{\beta'})\eta_0$ y $\pi(\widetilde{\alpha})\xi_0 = \pi(\widetilde{\alpha'})\xi_0$. Entonces $q_0((\widetilde{\beta} - \widetilde{\beta'})^*(\widetilde{\beta} - \widetilde{\beta'})) = \langle \theta(\widetilde{\beta} - \widetilde{\beta'})^* \theta(\widetilde{\beta} - \widetilde{\beta'})\eta_0, \eta_0 \rangle = 0$. Análogamente con p_0. Usando esto último y el lema anterior se deduce:

$$|F(\widetilde{\alpha}^* v\beta) - F(\widetilde{\alpha'}^* v\beta')| \leqslant |F((\widetilde{\alpha} - \widetilde{\alpha'})^* v\beta)| + |F(\widetilde{\alpha'}^* v(\beta - \beta'))| = 0.$$

Por otro lado B_v es sesquilineal y $|B_v(u, h)| \leqslant \|u\|\|v\|\|h\|$. Por lo tanto existe un único mapa lineal acotado $\varphi_0 : \mathcal{K}_0 \to \mathcal{H}_0$ tal que $\|\varphi_0\| \leqslant 1$ y $F(\widetilde{\alpha}^* v\beta) = \langle \varphi_0(v)\theta(\widetilde{\beta})\eta_0, \pi(\widetilde{\alpha})\xi_0 \rangle$.

Si h, k son las dimensiones de $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{K}_0$ respectivamente tenemos que $h, k \leqslant \dim(\widetilde{M_{1,n}}) \leqslant n$ y podemos identificar $\mathcal{H}_0 \cong \mathbb{C}^h \oplus 0_{n-h}$ y $\mathcal{K}_0 = \mathbb{C}^k \oplus 0_{n-k}$. Ahora definimos $E : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ como la proyección ortogonal sobre $\mathcal{K}_0$ y $\varphi : V \to M_n$ como $\varphi(v) = \varphi_0(v)E$. Se tiene pues que $F(\alpha^* v\beta) = \langle \varphi(v)\theta(\widetilde{\beta})\eta_0, \pi(\widetilde{\alpha})\xi_0 \rangle$.

Falta todavía encontrar los vectores de la tesis y probar que $\|\varphi\|_{cb} \leqslant 1$. Primero encontremos los vectores: dado $v \in M_n(V)$ tenemos que $v = \sum_{i,j} e_i^* v_{ij} e_j$ siendo $e_1, \ldots, e_n$ los vectores fila de la base canónica; luego $F(v) = \sum_{i,j} \langle \varphi(v_{ij})\theta(\widetilde{e_j})\eta_0, \pi(\widetilde{e_i})\xi_0 \rangle = \langle \varphi_n(v)\eta, \xi \rangle$, siendo $\eta = \begin{bmatrix} \theta(\widetilde{e_1})\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\widetilde{e_n})\eta_0 \end{bmatrix}$

y $\xi = \begin{bmatrix} \pi(\widetilde{e_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\widetilde{e_1})\xi_0 \end{bmatrix}$. Ahora

$$\|\eta\|^2 = \sum_j \|\theta(\widetilde{e_j})\eta_0\|^2 = \sum_j \langle \theta(\widetilde{e_j})\eta_0, \theta(\widetilde{e_j})\eta_0\rangle = \sum_j \langle \theta(\widetilde{e_j}^*\widetilde{e_j})\eta_0, \eta_0\rangle = \sum_j q_0(\widetilde{e_j}^*\widetilde{e_j}) = q_0(I) = 1$$

Análogamente: $\|\xi\|^2 = 1$. Para probar que $\|\varphi\|_{cb} \leqslant 1$ basta probar que $\|\varphi_n\| \leqslant 1$, y para ello que $|\langle(\varphi_0)_n\eta_1, \xi_1\rangle| \leqslant \|v\|\|\eta_1\|\|\xi_1\|$, con η_1 y ξ_1 arbitrarios en $\mathcal{H}_0^n$ y $\mathcal{K}_0^n$ respectivamente.

Si $\xi_1 = \begin{bmatrix} \pi(\widetilde{\alpha_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\widetilde{\alpha_n})\xi_0 \end{bmatrix}$, $\eta_1 = \begin{bmatrix} \theta(\widetilde{\beta_1})\eta_0 \\ \vdots \\ \theta(\widetilde{\beta_1})\eta_0 \end{bmatrix}$, $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, y $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, se tendrá que:

$$\|\xi_1\|^2 = \sum_i \|\pi(\widetilde{\alpha_1})\xi_0\|^2 = \sum_i p_0(\alpha_i^*\alpha_i) = p_0(\alpha\alpha^*) \text{ y } \|\eta_1\|^2 = q_0(\beta^*\beta).$$

Por último:

$$\langle(\varphi_0)_n(v)\eta_1, \xi_1\rangle = \sum_{i,j} \langle \varphi_0(v_{ij})\theta(\widetilde{\beta_j})\theta_0, \pi(\widetilde{\alpha_i})\xi_0\rangle = \sum_{i,j} F(\alpha_i^* v_{ij}\beta_j) = F(\alpha^* v\beta),$$

y deducimos que $\langle(\varphi_0)_n(v)\eta_1, \xi_1\rangle \leqslant p_0(\alpha\alpha^*)^{1/2}\|v\|q_0(\beta^*\beta)^{1/2} \leqslant \|\xi_1\|\|v\|\|\eta_1\|$ □

Demostración del Lema 1.5.2. Por el teorema de Hahn-Banach existe $F \in M_n(V)^*$ tal que $|F(v)| = \|v\|$ y $\|F\| = 1$. Por el lema anterior existen una contracción completa $\varphi : V \to M_n$ y vectores unitarios $\eta, \xi \in (\mathbb{C}^n)^n$ tales que $F(v) = \langle\varphi_n(v)\eta, \xi\rangle$. Por un lado sabemos que $\|\varphi_n(v)\| \leqslant \|v\|$ por ser φ una contracción, y por otro: $\|\varphi_n(v)\| \geqslant |\langle\varphi_n(v)\eta, \xi\rangle| = |F(v)| = \|v\|$. Luego tenemos que $\|\varphi_n(v)\| = \|v\|$. □

Capítulo 2

Mapas completamente acotados y el teorema de extensión.

Una primera formulación del teorema de Hahn-Banach para espacios de operadores sería la siguiente: dados un espacio de operadores V, un subespacio $W \subset V$, y una funcional completamente acotada $f : W \to \mathbb{C}$, existe una funcional completamente acotada $g : V \to \mathbb{C}$ tal que g extiende a f y $\|g\|_{cb} = \|f\|_{cb}$. La demostración de este enunciado es inmediata a partir del teorema de Hahn-Banach y de la Proposición 1.3.5 (toda funcional f acotada lo es completamente y además $\|f\| = \|f\|_{cb}$, lo mismo para g).

En la búsqueda de un teorema de extensión, en el caso anterior sustituimos $\mathbb{C}$ por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y en analogía con el teorema de Hahn-Banach nos planteamos la pregunta siguiente: dados un espacio de operadores V, un subespacio $W \subset V$, y un mapa completamente contractivo $\varphi : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ¿existe una extensión de φ, $\widetilde{\varphi} : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ completamente contractiva? La respuesta es afirmativa, y para probarlo usaremos el teorema de Hahn-Banach.

Para un espacio de operadores V denotamos al espacio dual de $(V, \| \, \|_1)$ como V^*. Comenzaremos por dar una norma a $\mathbb{M}_n(V^*)$ (más adelante veremos que de esa manera se obtiene una familia de normas que cumplen M1 y M2). Consideremos el isomorfismo lineal:

$$\mathbb{M}_n(V^*) \cong \mathcal{CB}(V, M_n) \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$$

donde $(\widehat{\varphi}(v))_{ij} := \varphi_{ij}(v)$. Observamos que en efecto $\widehat{\varphi} \in \mathcal{CB}(V, M_n)$, pues por un lado

$$\|\widehat{\varphi}(v)\| = \|(\varphi_{ij}(v))\| \leqslant \sum_{i,j} \|\varphi_{ij}(v)\| \leqslant \|v\| \sum_{i,j} \|\varphi_{ij}\|$$

y por otro el Corolario 1.3.6 nos permite afirmar que $\|\widehat{\varphi}\|_{cb} \leqslant n^2 \|\widehat{\varphi}\|$.

Recíprocamente, tenemos el mapa $\mathcal{CB}(V, M_n) \to \mathbb{M}_n(V^*)$ dado por $\psi \mapsto \widetilde{\psi}$, donde $\widetilde{\psi}_{ij}(v) = (\psi(v))_{ij}$, y aquí usamos 1.1.6 para deducir que $\|\widetilde{\psi}_{ij}\| \leqslant \|\psi\|_{cb}$. Además es claro que

$$\widetilde{\widehat{\varphi}} = \varphi \quad \text{y} \quad \widehat{\widetilde{\psi}} = \psi.$$

Definición 2.0.10. Con el isomorfismo lineal $\mathbb{M}_n(V^*) \cong \mathcal{CB}(V, M_n)$ inducimos una norma en $\mathbb{M}_n(V^*)$ dada por: $\|\varphi\| := \|\widehat{\varphi}\|_{cb}$. Al espacio normado resultante lo denotamos $M_n(V^*)$.

2.1. Una nueva norma en $M_n(V)$.

Queremos construir una norma en $\mathbb{M}_n(V)$, que llamaremos $\| \; \|_1$, de manera que $(\mathbb{M}_n(V), \| \; \|_1)^* = \mathcal{CB}(V, M_n)$. Una vez construida esta norma veremos que es útil para probar el teorema de extensión en el caso en que la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita.

De acuerdo a la última definición, si $f \in M_n(V^*)$ tenemos que

$$\|f\| = \|\widehat{f}\|_{cb} = \sup\{\|(\widehat{f})_r(v)\| : \; v \in M_r(V), \; \|v\| < 1 \text{ y } r \in \mathbb{N}\} \tag{2.1}$$

Definimos un "par dual"(con valores en matrices):

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : M_q(V^*) \times V \to M_q \quad (f, v) \to \langle f|v\rangle := (f_{ij}(v))_{i,j=1}^{q}$$

Observamos que $\langle f|v\rangle = \widehat{f}(v)$. A partir de lo anterior definimos

$$\langle\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle\rangle : M_q(V^*) \times M_r(V) \to M_{qr} \cong M_r(M_q) \quad (f, v) \to \langle\langle f|v\rangle\rangle := (\langle f|v_{ij}\rangle)_{i,j=1}^{r}.$$

Entonces tenemos que $(\widehat{f})_r(v) = \langle\langle f|v\rangle\rangle$, y por lo tanto, de acuerdo con 2.1:

$$\|f\| = \sup\{\|\langle\langle f|z\rangle\rangle\| : \; z \in M_r(V), \; \|z\| < 1 \text{ y } r \in \mathbb{N}\}$$

Si D_{rn} es la bola unidad cerrada en $\mathbb{C}^{rn}$ con $\| \; \|_2$ entonces

$$\|f\| = \sup\{|\langle\langle\langle f|z\rangle\rangle\xi, \eta\rangle| : \; z \in M_r(V), \; \xi, \eta \in D_{rn}, \; \|v\| < 1 \text{ y } r \in \mathbb{N}\}.$$

Dados vectores $\xi, \eta \in D_{rn}$, escribimos: $\xi = (\xi_{(1,1)}, \ldots, \xi_{(n,1)}, \ldots, \xi_{(1,r)}, \ldots, \xi_{(n,r)})$; análogamente con η. Entonces

- $\langle\langle f|z\rangle\rangle\xi = \left(\sum_{i=1}^{r} \langle f|z_{1i}\rangle \begin{bmatrix} \xi_{(1,i)} \\ \vdots \\ \xi_{(n,i)} \end{bmatrix}, \ldots, \sum_{i=1}^{r} \langle f|z_{ri}\rangle \begin{bmatrix} \xi_{(1,i)} \\ \vdots \\ \xi_{(n,i)} \end{bmatrix} \right)$
- $\langle\langle\langle f|z\rangle\rangle\xi, \eta\rangle = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} \langle f|z_{ji}\rangle \begin{bmatrix} \xi_{(1,i)} \\ \vdots \\ \xi_{(n,i)} \end{bmatrix} \right) (\eta_{(1,j)}, \ldots, \eta_{(n,j)})$
- $\langle f|z_{ji}\rangle \begin{bmatrix} \xi_{(1,i)} \\ \vdots \\ \xi_{(n,i)} \end{bmatrix} = \left(\sum_{t=1}^{n} f_{1t}(z_{ji})\xi_{(t,i)}, \ldots, \sum_{t=1}^{n} f_{nt}(z_{ji})\xi_{(t,i)} \right)$, y por lo tanto

$$\langle\ \langle\langle f|z\rangle\rangle\xi,\eta\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n} f_{kt}(z_{ji})\xi_{(t,i)}\right)\overline{\eta_{(k,j)}} = \sum_{k,t=1}^{n} f_{kt}\left(\sum_{i,j=1}^{r}\xi_{(t,i)}z_{ji}\overline{\eta_{(k,j)}}\right)$$

Si definimos dos matrices $\alpha \in M_{n,r}$ y $\beta \in M_{r,n}$ de acuerdo a: $\alpha_{kj} = \overline{\eta_{(k,j)}}$ y $\beta_{it} = \xi_{(t,i)}$, éstas cumplirán que $\|\alpha\|_2 = \|\eta\|_2 \leqslant 1$ y $\|\beta\|_2 = \|\xi\|_2 \leqslant 1$. Además

$$\sum_{i,j=1}^{r}\xi_{(t,i)}z_{ji}\overline{\eta_{(k,j)}} = \sum_{j=1}^{r}\overline{\eta_{(k,j)}}\sum_{i=1}^{r} z_{ji}\xi_{(t,i)} = \sum_{j=1}^{r}\alpha_{kj}\sum_{i=1}^{r} z_{ji}\beta_{it} = (\alpha z\beta)_{kt}$$

Con un último par dual:

$$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle : M_n(V^*)\times M_n(V) \to \mathbb{C} \quad (f,v)\mapsto \langle f,v\rangle := \sum_{i,j=1}^{n}\langle f_{ij},v_{ij}\rangle$$

$$\text{deducimos que } \langle\ \langle\langle f|z\rangle\rangle\xi,\eta\rangle = \sum_{k,t=1}^{n}\langle f_{kt},(\alpha z\beta)_{kt}\rangle = \langle f,\alpha z\beta\rangle.$$

Con lo que acabamos de definir tenemos que:

$$\begin{aligned}\|f\| = \sup\{|\langle f,v\rangle| :\ v = \alpha z\beta \text{ con: } \alpha\in M_{n,r},\ \beta\in M_{r,n},\ z\in M_r(V),\\ r\in\mathbb{N},\ \|\alpha\|_2,\|\beta\|_2\leqslant 1 \text{ y } \|z\|<1\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Queremos construir una nueva norma en $M_n(V)$, llamémosla $\|\ \|_1$, para que

$$\|f\| = \sup\{|\langle f,v\rangle| :\ v\in M_n(V),\ \|v\|_1<1\} \tag{2.3}$$

Para definir $\|\ \|_1$ identifiquemos el conjunto sobre el cual tomamos el supremo en (2.2). Para $r,n\in\mathbb{Z}^+$ definimos: $X_n^r := \{(\alpha,z,\beta) :\ \alpha\in M_{n,r},\ \beta\in M_{r,n},\ z\in M_r(V),\ \|\alpha\|_2,\|\beta\|_2<1\}$, y $X_n = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_n^r$. Entonces reescribimos (2.2) como:

$$\|f\| = \sup\{|\langle f,v\rangle| :\ v=\alpha z\beta :\ (\alpha,z,\beta)\in X_n,\ \|z\|<1\} \tag{2.4}$$

Observando la igualdad anterior, $\|\ \|_1$ debería estar dada por:

$$\|v\|_1 = \text{ínf}\{\|\alpha\|_2\|z\|\|\beta\|_2 :\ v=\alpha z\beta \ \text{ y } (\alpha,z,\beta)\in X_n\} \tag{2.5}$$

Veamos esto con cuidado, probemos que:

$$\{v :\ v=\alpha z\beta :\ (\alpha,z,\beta)\in X_n \text{ y } \|z\|<1\} = \{v\in M_n(V) : \|v\|_1<1\}$$

Llamemos A al conjunto de la derecha y B al de la izquierda. Que $A \subset B$ se deduce de que para cualquier matriz $\alpha \in M_{p,q}$ vale que $\|\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_2$.

Para la otra inclusion, si $\|v\|_1 < 1$ existen $r \in \mathbb{Z}^+$, y $(\alpha, z, \beta) \in X_n^r$ tales que $\|\alpha\|_2 \|z\| \|\beta\|_2 < 1$, y $v = \alpha z \beta$. Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ hemos probado la inclusión que queríamos. En otro caso definimos $\alpha' = \frac{1}{\|\alpha\|_2}\alpha$, $\beta' = \frac{1}{\|\beta\|_2}\beta$ y $w = \|\alpha\|_2 \|\beta\|_2 z$; luego $v = \alpha' w \beta'$ con $\|\alpha\|_2 = \|\beta\|_2 = 1$ y $\|w\| < 1$. O sea $v = \alpha' w \beta'$, con $(\alpha', w, \beta') \in X_n$ tal que $\|w\| < 1$.

Ahora ciertamente tenemos que (2.3) es verdadera, y dirigimos nuestros esfuerzos a probar que $\| \ \|_1$ es una norma.

Afirmación 2.1.1. $\| \ \|_1$ *es homogénea y se cumple que dado* $v \in M_n(V)$

$$\|v\| \leqslant \|v\|_1 \leqslant n\|v\|.$$

Demostración. La homogeneidad se verifica fácilmente a partir de (2.5).

Por otro lado, si $v \in M_n(V)$ y $(\alpha, w, \beta) \in X_n$ son tales que $v = \alpha w \beta$, entonces se cumple que $\|v\| = \|\alpha w \beta\| \leqslant \|\alpha\| \|w\| \|\beta\| \leqslant \|\alpha\|_2 \|w\| \|\beta\|_2$. De esto se deduce que:

$$\|v\| \leqslant \text{ínf}\{\|\alpha\|_2 \|z\| \|\beta\|_2 : \ v = \alpha z \beta \ \text{ y } (\alpha, z, \beta) \in X_n\} = \|v\|_1.$$

La desigualdad $\|v\|_1 \leqslant n\|v\|$ sale de escribir $v = I_n v I_n$, luego $\|v\|_1 \leqslant \|I_n\|_2^2 \|v\| = n\|v\|$. □

Lema 2.1.2. *Si* V *es un espacio de operadores y* $n \in \mathbb{Z}^+$, *entonces la función* $\| \ \|_1 : \mathbb{M}_n(V) \to [0, +\infty)$ *dada por* (2.5) *es una norma. Denotamos por* $T_n(V)$ *al espacio normado* $(\mathbb{M}_n(V), \| \ \|_1)$. *Además el par dual:*

$$\mathbb{M}_n(V) \times M_n(V^*) \to \mathbb{C} \qquad ((v_{ij}), (f_{ij})) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(v_{ij}) = \langle f, v \rangle$$

determina el isomorfismo isométrico: $T_n(V)^* \cong M_n(V^*)$

Demostración. Probemos la desigualdad triangular. Sean $v_1, v_2 \in M_n(V)$, $\varepsilon > 0$ tales que $\|v_1\|_1 + \|v_2\|_1 + 2\varepsilon < 1$. De acuerdo a (2.5) existen matrices complejas $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, y $z_1 \in M_{r_1}(V)$, $z_2 \in M_{r_2}(V)$ tales que $\|\alpha_i\|_2 \|z_i\| \|\beta_i\|_2 < \|v_i\|_1 + \varepsilon$ para $i = 1, 2$. Siempre se puede suponer que las matrices (α y β) son no nulas y por ello haciendo el cambio $\alpha_i = \frac{1}{\|\alpha_i\|_2}\alpha_i$, análogamente con β, se puede suponer que $\|\alpha_i\|_2 = \|\beta_i\|_2 = 1$ y $\|z_i\| < \|v_i\|_1 + \varepsilon$, para $i = 1, 2$. Ahora hacemos el cambio $\alpha_i = (\|v_i\|_1 + \varepsilon)^{1/2}\alpha_i$, $\beta_i = (\|v_i\|_1 + \varepsilon)^{1/2}\beta_i$ y $z_i = \frac{1}{\|v_i\|_1 + \varepsilon} z_i$, para $i = 1, 2$. Finalmente podemos suponer que: $\|\alpha_i\|_2, \|\beta_i\|_2 \leqslant (\|v_i\|_1 + \varepsilon)^{1/2}$ y $\|z_i\| \leqslant \|v_i\|_1 + \varepsilon$, para $i = 1, 2$.

Ahora definimos: $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ y $z = z_1 \oplus z_2 = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$ (observamos que α_1 y α_2 tienen la misma cantidad de filas y lo mismo para las columnas de las matrices β_i).

De acuerdo a lo anterior tenemos que:
$v_1 + v_2 = \alpha z \beta$, $\|z\| = \text{máx}\{\|z_1\|, \|z_2\|\} \leqslant 1$, $\|\alpha\|^2 = \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 \leqslant \|v_1\| + \|v_2\| + 2\varepsilon \leqslant 1$, y de la misma forma $\|\beta\| \leqslant 1$.

Luego por (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\|v_1 + v_2\|_1 &\leqslant \|\alpha\|_2 \|z\| \|\beta\|_2 \leqslant \|\alpha\|_2 \|\beta\|_2 \leqslant \frac{1}{2}(\|\alpha\|_2^2 + \|\beta\|_2^2) \leqslant \frac{1}{2}(2\|v_1\|_1 + 2\|v_2\|_1 + 4\varepsilon) \\ &\leqslant \|v_1\|_1 + \|v_2\|_1 + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario deducimos que: si $\|v_1\|_1 + \|v_2\|_1 < 1$ entonces $\|v_1 + v_2\|_1 \leqslant \|v_1\|_1 + \|v_2\|_1$. Para el caso general basta tomar $t > \|v_1\|_1 + \|v_2\|_1$ y ver que vale lo siguiente:

$$\|v_1 + v_2\|_1 = t \left\| \frac{1}{t} v_1 + \frac{1}{t} v_2 \right\|_1 \leqslant t \left(\left\| \frac{1}{t} v_1 \right\|_1 + \left\| \frac{1}{t} v_1 \right\|_1 \right) = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_1$$

Para teminar de probar que $\| \ \|_1$ es norma: de acuerdo a la afirmación anterior a este lema si $\|v\|_1 = 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Por último observamos que el par dual del enunciado induce un mapa $M_n(V^*) \hookrightarrow T_n(V)^*$ que es isométrico por (2.3), y que el mapa es sobreyectivo se ve fácilmente. $\square$

Lema 2.1.3. *Si V es un espacio de operadores y $v \in \mathbb{M}_n(V)$ entonces se cumple que:*

$$\|v\|_1 < 1 \quad \textit{si y sólo si} \quad v = \alpha \widetilde{v} \beta$$

donde $\widetilde{v} \in M_n(V)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_n$ satisfacen que $\|\widetilde{v}\| < 1$, $\|\alpha\|_2 < 1$ y $\|\beta\|_2 < 1$. Es más: se puede suponer que α y β son matrices invertibles.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $v = \alpha w \beta$ con $\alpha \in \mathbb{M}_{n,m}$, $\beta \in \mathbb{M}_{m,n}$ y $w \in M_m(V)$ con $\|w\|, \|\alpha\|_2, \|\beta\|_2 < 1$. Viendo a β como mapa de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}^n$ tenemos la descomposición polar: $\beta = \tau|\beta|$ con $\| \, |\beta| \, \| = \|\beta\|_2 < 1$. Sea P es la proyección de $\mathbb{C}^n$ sobre $Ran(|\beta|)$.

Para $\varepsilon > 0$ consideramos la matriz $\beta_\varepsilon = |\beta| + \varepsilon(I - P)$, que es invertible (es sobreyectiva), y como además $\tau(I - P) = 0$ tenemos que $\beta = \tau|\beta_\varepsilon|$. Para ε suficientemente pequeño podemos suponer que $\|\beta_\varepsilon\|_2 < 1$, y para tal ε ponemos $\beta_1 := \beta_\varepsilon$. De manera análoga, tomando el adjunto de la descomposición polar de α^* podemos descomponer: $\alpha = \alpha_1 \rho$ con ρ una isometría parcial y α_1 una matriz invertible $n \times n$ y $\|\alpha_1\|_2 < 1$.

Definiendo $\widetilde{v} = \rho w v$ tenemos que: $v = \alpha_1 \widetilde{v} \beta_1$. El recíproco es inmediato. $\square$

2.2. El teorema de extensión.

Al principio de este capítulo enunciamos el teorema de extensión para mapas completamente contractivos, nuestro objetivo ahora es probarlo. Supongamos que V es un subespacio de un espacio de operadores W. Primero veremos que podemos extender a W los mapas completamente contractivos $\varphi : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cuando la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita. La idea para probar el teorema de extensión es la siguiente: a partir de una contracción completa $\varphi : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tomaremos una red de contracciones completas $(\varphi_i) \subset \mathcal{CB}(V, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, de modo que cada uno de sus elementos tiene una extensión completamente contractiva $\psi_i : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Colocando una topología en $\mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, de modo que su bola unidad resulte compacta, tomaremos una subred convergente de (ψ_i) y veremos que el límite es una extensión de φ.

Recordemos que hemos construido una norma en $M_n(V)$ de manera que si llamamos $T_n(V)$ al espacio normado que obtenemos, entonces $T_n(V)^* \cong M_n(V^*)$. Si bien sabemos que $T_n(W)$ y $T_n(V)$ son espacios normados, aún no sabemos que dado un elemento $v \in M_n(V)$, la norma de v visto como elemento de $T_n(V)$ coincide con la norma como elemento de $T_n(W)$. Lo anterior es importante pues en el caso en que $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, para extender un mapa completamente acotado $\varphi : V \to M_n$, queremos formalizar el siguiente razonamiento: φ puede verse como elemento de $T_n(V)^*$. Como $T_n(V)$ puede verse como subespacio de $T_n(W)$, existe una extensión $\widetilde{\varphi} \in T_n(W)^*$ tal que $\|\widetilde{\varphi}\| = \varphi$. Como $T_n(W) \cong \mathcal{CB}(W, M_n)$ podemos ver a $\widetilde{\varphi}$ como una extensión de φ, tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$.

Corolario 2.2.1. *Si V es un subespacio de un espacio de operadores W entonces la inclusión $T_n(V) \hookrightarrow T_n(W)$ es una isometría para todo $n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Como $V \subset W$, de acuerdo a (2.5) tenemos que dado $v \in T_n(V)$ se cumple que $\|v\|_{T_n(W)} \leqslant \|v\|_{T_n(V)}$. Por otro lado, si $\|v\|_{T_n(W)} < 1$, de acuerdo al Lema 2.1.3 podemos suponer que $v = \alpha w \beta$ con α y β invertibles y $w \in M_n(W)$. Pero entonces $w = \alpha^{-1} v \beta^{-1} \in M_n(V)$ y de acuerdo a 2.1.3 tenemos que $\|v\|_{T_n(W)} < 1$. □

Definición 2.2.2. Si X e Y son espacios normados y $\varphi : X \to Y$ es un mapa lineal acotado decimos que φ es un cociente exacto si $\varphi\left(\overline{B_X(0,1)}\right) = \overline{B_Y(0,1)}$

En términos de la definición anterior, para el caso en que $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, queremos probar que el mapa restricción $\rho : \mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathcal{CB}(V, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ es un cociente exacto. La siguiente proposición nos permitirá probar lo anterior.

Afirmación 2.2.3. *Si $\varphi : X \to Y$ es un mapa lineal acotado entre espacios normados, entonces φ es isométrico si y sólo si $\varphi^* : Y^* \to X^*$ es un cociente exacto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Considerando $\varphi : (X, \| \|_X) \to (Ran(\varphi), \| \|_Y)$ tenemos un isomorfismo de espacios normados y podemos considerar $\varphi^{-1} : Ran(\varphi) \to X$, que es una isometría. Ahora dada $\eta \in \overline{B_{X^*}(0,1)}$, tenemos $\eta \circ \varphi^{-1} : Ran(\varphi) \to \mathbb{C}$ tal que $\|\eta \circ \varphi^{-1}\| = \|\eta\| \leqslant 1$. Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\widetilde{\eta} \in Y^*$ de η con $\|\widetilde{\eta}\| = \|\eta\| \leqslant 1$. Ahora observamos que $\varphi^*(\widetilde{\eta}) = \widetilde{\eta} \circ \varphi = \eta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \eta$ y por lo tanto φ^* es un cociente exacto.

($\Leftarrow$) Dado $x \in X$, por el teorema de Hahn-Banach existe $\eta \in X^*$ tal que $\|\eta\| = 1$ y $|\eta(x)| = \|x\|$. Como φ^* es un cociente exacto, existe $\rho \in \overline{B_{Y^*}(0,1)}$ tal que $\eta = \rho \circ \varphi$. Luego $\|x\| = |\eta(x)| = |\rho(\varphi(x))| \leqslant \|\varphi(x)\|$. Por otra parte, como $1 = \|\varphi^*\| = \|\varphi\|$, se tiene que $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$. Por lo tanto φ es una isometría. □

Corolario 2.2.4. *Sean W un espacio de operadores y $V \subset W$ un subespacio. Entonces todo mapa completamente acotado $\varphi : V \to M_n$ tiene una extensión $\widetilde{\varphi} : W \to M_n$ tal que $\|\widetilde{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$*

Demostración. Consideremos el mapa inclusión $T_n(V) \hookrightarrow T_n(W)$, que es una isometría por 2.2.1. Luego, de acuerdo a la Afirmación 2.2.3, tenemos que su mapa dual $T_n(W)^* \to T_n(V)^*$ (que es el mapa restricción) es un cociente exacto. De acuerdo a 2.1.2 tenemos identificaciones isométricas $T_n(W)^* \cong M_n(W^*) \cong \mathcal{CB}(W, M_n)$, y además el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_n(W)^* \arrow[r, "inc^*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & T_n(V)^* \arrow[d] \\ \mathcal{CB}(W, M_n) \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{CB}(V, M_n) \end{tikzcd}$$

siendo ρ el mapa restricción y las flechas verticales isomorfismos isométricos. Por lo tanto ρ es un cociente exacto. Dado un mapa $\varphi \in \mathcal{CB}(V, M_n)$, como ρ es un cociente exacto, existe $\Phi \in \mathcal{CB}(W, M_n)_{\|\varphi\|}$ tal que $\rho(\Phi) = \varphi$. Por otro lado ρ es contractivo y por lo tanto: $\|\varphi\| = \|\rho(\Phi)\| \leqslant \|\Phi\| \leqslant \|\varphi\|$. □

2.2.1. Topología débil de operadores.

Definición 2.2.5. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, la topología débil de operadores en $\mathcal{H}$ es la topología localmente convexa, en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, generada por la familia de seminormas $(p_{g,h})_{g,h \in \mathcal{H}}$ tales que $p_{g,h}(T) = |\langle Tg, h \rangle|$.

Notación 2.2.6.

- *$\tau_{\mathcal{H}}$ se llama topología débil de operadores en $\mathcal{H}$.*
- *Si X es un espacio normado y $r > 0$, sea $X_r = \{x \in X : \ \|x\| \leqslant r\}$*

Queremos probar que $(\mathcal{B}(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathcal{H}})$ es compacto. Para ello probaremos el siguiente resultado.

Lema 2.2.7. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos, $A \subset X$ un subconjunto convexo absorbente, y $K \subset Y$ un subconjunto compacto. Si $(T_i)_{i \in I}$ es una red de operadores lineales $T_i : X \to Y$ tales que $T_i(A) \subset K$, $\forall\ i \in I$, entonces existen una subred (T_{i_j}) de (T_i), y un operador $T : X \to Y$ tales que: $\lim\limits_j T_{i_j}(x) = T(x)$, $\forall\ x \in X$, y $T(A) \subset K$.*

Demostración. Para cada $a \in A$ sea $K_a = K$, y sea $K_A = \prod\limits_{a \in A} K_a$, que es compacto con la topología producto. Dado $i \in I$, sea $f_i \in K_A$ tal que $f_i(a) = T_i(a)$. La red $(f_i)_i$ tiene una subred $(f_{i_j})_j$ convergente a cierta $f \in K_A$.

Veamos que para cualquier $x \in X$ la red $(T_{i_j}(x))_j$ es convergente. Dado $x \in X$, como A es absorbente, existe $t_x > 0$ tal que $t_x x \in A$. Entonces $T_{i_j}(x) = (t_x)^{-1} T_{i_j}(t_x x) = (t_x)^{-1} f_{i_j}(t_x x)$, como $(f_{i_j}(t_x x))_j$ es convergente, concluimos que $(T_{i_j}(x))_j$ también lo es.

Definimos $T(x) = \lim_j T_{i_j}(x)\ \forall\ x \in X$. Veamos que T es lineal: sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ (el cuerpo de X e Y). Entonces:

$$T(\lambda x + y) = \lim_j T_{i_j}(\lambda x + y) = \lim_j \lambda T_{i_j}(x) + T_{i_j}(y) = \lambda \lim_j T_{i_j}(x) + \lim_j T_{i_j}(y) = \lambda T(x) + T(y).$$

Por otro lado, si $a \in A$, como $T(a)$ es el límite de la red $(f_{i,j}(a))_j \subset K$ y K es compacto, entonces $T(a) \in K$.

$\square$

Afirmación 2.2.8. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert entonces $(\mathcal{B}(\mathcal{H})_1, \tau_{\mathcal{H}})$ es compacto.*

Demostración. Usemos el Lema 2.2.7 con: $X = Y = \mathcal{H}$, $A = K = \mathcal{H}_1$, y K con la topología ω^*. Entonces, dada una red $(T_i)_i \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$, tenemos una sured $(T_{i_j})_j$ y un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que: $T(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$, y $\lim_j T_{i_j}(h) = T(h)$ en $(\mathcal{H}, \omega^*)$, o sea $\lim_j \langle T_{i_j} h, k\rangle = \langle T(h), k\rangle$ $\forall\ h, k \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\|T\| \leqslant 1$, y $T_{i_j} \to T$ en la topología $\tau_{\mathcal{H}}$.

$\square$

Definición 2.2.9. Si W es un espacio de operadores, en $\mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ definimos la topología punto-débil, y la denotamos $p\omega$, a la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas $q_{w,g,h}$: $w \in W,\ g, h \in \mathcal{H}$, donde $q_{w,g,h}(\phi) = |\langle \phi(w)g, h\rangle|$.

Afirmación 2.2.10. *Si W es un espacio de operadores y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $(\mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1, p\omega)$ es compacto.*

Demostración. Nuevamente, usaremos el Lema 2.2.7. Esta vez $X = W$, $Y = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A = W_1$, $K = \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$, e Y con la topología $\tau_{\mathcal{H}}$. Por la Afirmación anterior K es compacto. Entonces, dada una red $(\phi_i)_i \subset \mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, existen una subred $(\phi_{i_j})_j$, y un mapa lineal $\phi : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que: $\phi(W_1) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_1$, y $\lim_j \phi_{i_j}(w) = \phi(w)$ en $\tau_{\mathcal{H}}\ \forall\ w \in W$. O sea $\|\phi\| \leqslant 1$ (no es la norma completamente acotada), y $\lim_j |\langle \left(\phi_{i_j} - \phi\right)(w)\big|_g, h\rangle| = 0\ \forall\ w \in W$ y $g, h \in \mathcal{H}$. Por lo tanto basta probar que ϕ es completamente contractivo.

Primero observamos que dada una red $(T_k) \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ son equivalentes:

1. La red (T_k) converge a $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ en la topología $\tau_{\mathcal{H}^n}$
2. La red $((T_k)_{ij})$ converge a $S_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en la topología $\tau_{\mathcal{H}}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Dados $x, y \in \mathcal{H}$, basta considerar $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{H}^n$ definidos por $\widetilde{x} = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ con x en el lugar j, lo mismo: $\widetilde{y}$ con y en el lugar i, y observar que $\langle (T_k)_{ij} x, y\rangle = \langle (T_k)\widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{H}^n$ se tiene que:

$\langle T_k(x), y\rangle = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \langle (T_k)_{ij}(x_j), y_i\rangle$ y basta tomar límite.

Ahora probemos que dada una red $(T_k)_k$, en $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, tal que $(T_k)_{ij}$ converge a $S_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ en $\tau_{\mathcal{H}}$ entonces: $\|S\| \leqslant \sup_k \|T_k\|$.

De acuerdo a lo que vimos antes basta ver el caso $n = 1$. Se tiene

$$\begin{aligned}\|S\| &= \sup\{|\langle Sx, y\rangle| : \ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} = \sup\{\lim_k |\langle (T_k)x, y\rangle| : \ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{\sup_k \|T_k\|\|x\|\|y\| : \ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} = \sup_k \|T_k\|\end{aligned}$$

Ahora podremos probar que $\|\phi_n\| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $w \in M_n(W)$. Usamos lo observado hasta ahora para deducir que:

$$\begin{aligned}\|(\phi_n)(w)\| &= \|(\phi(w_{rs}))_{rs}\| = \|(\lim_j \phi_{i_j}(w_{rs}))_{rs}\| \leqslant \sup_j \|(\phi_{i_j})_n(w)\| \leqslant \sup_j \|(\phi_{i_j})_n\|\|w\| \\ &\leqslant \sup_j \|\phi_{i_j}\|_{cb}\|w\| \leqslant \|w\|\end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de este capítulo:

Teorema de Arveson-Wittstock-Hahn-Banach 2.2.11. *Si V es un subespacio de un espacio de operadores W y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces toda contracción completa $\varphi : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene una extensión completamente contractiva $\Phi : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

Demostración. Denotamos $\mathcal{F}$ a la familia de todos los subespacios vectoriales de dimensión finita de $\mathcal{H}$, y los ordenamos por inclusión.

Dado $F \in \mathcal{F}$ definimos $P_F : \mathcal{H} \to F$ como la proyección ortogonal sobre F. Vemos $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mediante el mapa $T \mapsto (P_F)^* T P_F$. A cada F le asociamos $\varphi_F : V \to \mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definida de acuerdo a: $\varphi_F(v) = P_F\varphi(v)\,(P_F)^*$. Afirmamos que φ_F es una contracción completa. En efecto, dado $v = (v_{ij})_{i,j} \in M_n(V)$, tenemos que:

$$\|(\varphi_F)_n(v)\| = \|\,(P_F\varphi(v_{ij})\,(P_F)^*)_{i,j}\,\| = \|P_{F^n} \circ \varphi_n(v) \circ (P_{F^n})^*\| \leqslant \|P_{F^n}\|^2\|\varphi\|_{cb}\|v\| \leqslant \|v\|$$

Por otro lado, como F es de dimensión finita podemos identificar isométricamente $M_n \cong \mathcal{B}(F)$, y por 2.2.4 tenemos una extensión completamente contractiva $\Phi_F : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de φ_F. Luego $(\Phi_F)_{F\in\mathcal{F}}$ es una red en $\mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$ y por 2.2.10 tenemos una subred $(\Phi_{F_j})_{j\in J}$ (J un conjunto dirigido con un orden $\succcurlyeq$) convergente a un mapa $\Phi \in \mathcal{CB}(W, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$, que como veremos es una extensión de φ. Dados $v \in V$ y $h \in \mathcal{H}$ consideramos $F_0 = \mathbb{C}.h + \mathbb{C}.\varphi(v)h$. Como $F_0 \in \mathcal{F}$ tenemos un $j_0 \in J$ tal que si $j \succcurlyeq j_0$ entonces $F_j \supseteq F_0$. Luego si $j \succcurlyeq j_0$ se tiene que:

$$\Phi_{F_j}(v)h = P_F \circ \varphi(v) \circ (P_F)^*h = \varphi(v)h$$

Además Φ_{F_j} converge en la topología $p\omega$ a Φ, lo que implica que $\langle \Phi_{F_j}(v)h - \Phi(v)h, x\rangle \to 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Con la igualdad anterior se deduce que:

$$\langle \varphi(v)h - \Phi(v)h, x\rangle = \lim_j \langle \Phi_{F_j}(v)h - \Phi(v)h, x\rangle = 0$$

y por lo tanto $\varphi(v)h = \Phi(v)h$ para todo $h \in \mathcal{H}$ y $v \in V$, lo que prueba que Φ extiende a φ. $\square$

Capítulo 3

Sistemas de Operadores.

Ahora trataremos los sistemas de operadores que, en particular, son espacios de operadores concretos. Con respecto a los espacios de operadores, los sistemas de operadores toman en cuenta una porción mayor de la estructura de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ya que contienen a la identidad y son autoadjuntos. Esto permite tener una noción de orden y hablar de positividad y de positividad completa. Análogamente a 2.2.11 probaremos otro teorema de extensión, también debido a Arveson, que permite extender mapas completamente positivos a mapas del mismo tipo.

De ahora en más $(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ será un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert.

Definición 3.0.12. Un *sistema de operadores* es un subespacio vectorial $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, que verifica las siguientes condiciones:

1. $I \in S$, donde I es la identidad en $\mathcal{H}$ (en algunos casos escribiremos I_S).

2. S es cerrado por adjuntos, esto es: si $T \in S$ entonces $T^* \in S$ siendo T^* el adjunto de T.

Comentario 3.0.13. *Existe una caracterización abstracta para los sistemas de operadores debida a Choi y Effros [2]. Puede encontrarse en [9].*

Definición 3.0.14. Si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un sistema de operadores decimos que $T \in S$ es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Notación 3.0.15. *Si T es positivo escribimos $T \geqslant 0$ y $S^+ = \{T \in S : \ T \geqslant 0\}$. Obsérvese que S^+ es un cono.*

Observación 3.0.16. Si identificamos $\mathbb{C} = \mathcal{B}(\mathbb{C})$ mediante $\lambda(z) = \lambda z$, entonces tenemos a $\mathbb{C}$ como un sistema de operadores y observamos que $\mathbb{C}^+ = [0, +\infty)$. Recordemos las siguientes propiedades de los operadores sobre un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert.

1. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{H}$.

2. Para un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotamos el espectro de T como $\mathrm{sp}(T)$, y se cumple que $\mathrm{sp}(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle : \ \|x\| = 1\}}$.

3. Para todo operador autoadjunto $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se cumple que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \ \|x\| \leqslant 1\}$

Veamos algunas equivalencias para mapas positivos.

Lema 3.0.17. *Si T es un operador acotado en un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces son equivalentes:*

1. $T \geqslant 0$.

2. Existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T = S^*S$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) por 5.3 tenemos un operador positivo S tal que $T = S^2$, de la observación anterior deducimos que $T = S^*S$.

(2) $\Rightarrow$ (1) tenemos que $\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = \|Sx\|^2 \geqslant 0$ □

Identificando $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$, tenemos un mapa $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ que corresponde a tomar adjuntos en $\mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$, es fácil ver que coincide con el mapa $(T_{ij})_{i,j} \to (T_{ji}^*)_{i,j}$. Como además $I_{\mathcal{H}^n} = I_{\mathcal{H}} \oplus \cdots \oplus I_{\mathcal{H}} \in M_n(S)$, concluimos que $M_n(S)$ es un sistema de operadores si pensamos $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$.

3.1. Mapas Positivos.

Definición 3.1.1. Si $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $W \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$ son sistemas de operadores y $\varphi : S \to W$ es un mapa lineal, decimos que φ es positivo si $\varphi(S^+) \subset W^+$, es n-positivo si φ_n es positivo y es completamente positivo si es n-positivo para todo $n \in \mathbb{N}$

Notación 3.1.2. *$\mathcal{CP}(S, W)$ son los mapas completamente positivos de S a W.*

Observamos que $\mathcal{CP}(S, W)$ es un cono pero no un espacio vectorial. Veamos qué relación hay entre los operadores positivos y los acotados.

Proposición 3.1.3. *Todo mapa positivo $\varphi : S \to W$ entre sistemas de operadores es acotado y además $\|\varphi\| \leqslant 2\|\varphi(I_S)\|$.*

Demostración. Primero observamos que si $P, Q \geqslant 0$ se cumple que:

1. Si $P - Q \geqslant 0$ entonces $\|P\| \geqslant \|Q\|$.

2. $\|P - Q\| \leqslant \max\{\|P\|, \|Q\|\}$

3. $\|P\| - P \geqslant 0$

Para 1. observamos que $\langle Px, x\rangle \geqslant \langle Qx, x\rangle$ y recurrimos a 3.0.16. Para 2., por 3.0.16 tenemos que $P - Q$ es autoadjunto, y por lo tanto $\|P - Q\| = \sup\{|\langle (P-Q)x, x\rangle| : \ \|x\| = 1\}$. Por otro lado, como $P, Q \geqslant 0$ entonces $|\langle (P-Q)x, x\rangle| = |\langle Px, x\rangle - \langle Qx, x\rangle| \leqslant \text{máx}\{|\langle Px, x\rangle|, |\langle Qx, x\rangle|\}$; tomando supremo en $\|x\| = 1$ tenemos 2. Por último $\langle (\|P\| - P)x, x\rangle = \|P\|\|x\|^2 - \langle Px, x\rangle \geqslant 0$.

Sea $T \in S^+$, tenemos que $\varphi(\|T\| - T) \geqslant 0 \Rightarrow \|T\|\varphi(I_S) - T \geqslant 0$. Como $\|T\|I_S$, T, $\|T\|I_S - T$ son positivos y φ es positiva, de las afirmaciones anteriores se deduce que $\|T\|\|\varphi(I)\| \geqslant \|\varphi(T)\|$.

Ahora dado $T \in S$ autoadjunto, escribimos $T = \frac{1}{2}(\|T\| + T) - \frac{1}{2}(\|T\| - T)$, lo que descompone a T como diferencia de positivos. Luego usando lo anterior:

$$\begin{aligned}\|\varphi(T)\| &\leqslant \frac{1}{2}\,\text{máx}\{\|\varphi(\|T\| + T)\|, \|\varphi(\|T\| - T)\|\} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,\text{máx}\{\big\|\|T\| + T\big\|\|\varphi(I_S)\|, \big\|\|T\| - T\big\|\|\varphi(I_S)\|\} \leqslant \|T\|\|\varphi(I_S)\|\end{aligned}$$

Por último, dado $T \in S$, escribimos $T = Re(T) + iIm(T)$, donde $Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*) \in S$ y $Im(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*) \in S$ son autoadjuntos y además $\|Re(T)\|, \|Im(T)\| \leqslant \|T\|$. Entonces $\|\varphi(T)\| \leqslant \|Re(T)\|\|\varphi(I_S)\| + \|Im(T)\|\|\varphi(I_S)\| \leqslant 2\|T\|\|\varphi(I_S)\|$. □

Corolario 3.1.4. *En las hipótesis de la proposición anterior se cumple lo siguiente:*

1. *Si $\varphi : S \to W$ es un mapa n-positivo entonces $\|\varphi_n\| \leqslant 2\|\varphi(I_S)\|$.*
2. *Si φ es completamente positivo entonces $\|\varphi\|_{cb} \leqslant 2\|\varphi(I_S)\|$*

Demostración. Aplicamos el lema anterior a φ_n observando que

$$\|(\varphi_n)(I_{M_n(S)})\| = \|\varphi_n(I_S \oplus \cdots \oplus I_S)\| = \|\varphi(I_S) \oplus \cdots \oplus \varphi(I_S)\| = \|\varphi(I_S)\|$$

□

Observación 3.1.5. Por el corolario anterior tenemos que $\mathcal{CP}(S, W) \subset \mathcal{CB}(S, W)$.

3.2. El mapa t es positivo pero no completamente.

Sabemos que el mapa $\mathbf{t} : K_\infty \to K_\infty$ no puede ser completamente positivo pues no es completamente acotado. Por otro lado dada una matriz $A \in M_n$ positiva sabemos que $\langle Ax, y\rangle = \langle \mathbf{t}(A)\overline{y}, \overline{x}\rangle$ y por lo tanto $\langle A^t x, x\rangle = \langle A\overline{x}, \overline{x}\rangle \geqslant 0$.

3.3. El teorema de extensión para mapas completamente positivos.

Supongamos que tenemos un sistema de operadores $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un mapa completamente positivo $\varphi : S \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo que acabamos de ver y por el Teorema 2.2.11, tenemos un mapa completamente acotado que extiende a φ. Nos preguntamos si es posible extender φ de manera completamente positiva.

Primero veamos que podemos extender los mapas positivos de S a $\mathbb{C}$ (teorema de Krein). Para ello veamos unos resultados.

Afirmación 3.3.1. *Si $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es normal, esto es $N^*N = NN^*$, entonces $r(N) = \|N\|$.*

Demostración. Primero probemos que si $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ conmutan entonces $r(AB) \leqslant r(A)r(B)$. Por la fórmula de Beurling-Gelfand (del radio espectral):

$$r(AB) = \lim_n \|(AB)^n\|^{1/n} = \lim_n \|A^n B^n\|^{1/n} \leqslant \lim_n \|A^n\|^{1/n} \|B^n\|^{1/n} = r(A)r(B)$$

Como segundo paso: si $A^* = A$ tenemos que $r(A) = \|A\|$. En efecto: $\|A^{2n}\| = \|(A^*)^n A^n\| = \|A^n\|^2$, y por inducción completa tenemos que $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. Por lo tanto deducimos que: $r(A) = \lim_n \|A^{2^n}\|^{1/2^n} = \|A\|$.

Para terminar: $\|N\|^2 = \|N^*N\| = r(N^*N) \leqslant r(N^*)r(N) = r(N)^2 \leqslant \|N\|^2$ donde hemos usado el hecho conocido de que $r(N) = r(N^*)$. $\square$

Lema 3.3.2. *Si $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un sistema de operadores y $f : S \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal tal que $f(I_S) = 1$ y $\|f\| = 1$, entonces dado $A \in S$ normal se tiene que $f(A) \in \overline{co(sp(A))}$ (la clausura de la envolvente convexa del espectro).*

Demostración. Recordamos que: si $K \subset \mathbb{C}$ es un compacto entonces $\overline{\text{co}(K)} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$ donde $\mathcal{D}$ es la familia de discos abiertos que contienen a K. Hagamos la prueba por absurdo: suponemos que existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que $\text{sp}(A) \subset \overline{D(\lambda, r)}$ y $|f(A) - \lambda| > r$. Para el λ anterior:

$$\begin{aligned}\text{sp}(A - \lambda) &= \{\eta : \ A - (\lambda + \eta) \text{ no es invertible}\} = \{\xi - \lambda : \ A - \xi \text{ no es invertible}\} \\ &= -\lambda + \text{sp}(A) \subset \overline{D(0, r)}\end{aligned}$$

Como $A - \lambda$ es normal: $\|A - \lambda\| = r(A - \lambda)$, y por lo tanto $\|A - \lambda\| \leqslant r$. Pero $r < |f(A) - \lambda| \leqslant \|f\| \|A - \lambda\| \leqslant r$, lo que es absurdo. $\square$

Corolario 3.3.3. *En las hipótesis del lema anterior f es positiva.*

Demostración. Si $A \geqslant 0$ entonces A es normal, y por lo tanto $f(A) \subset \overline{co\,(\text{sp}(A))} \subset [0, +\infty) = \mathbb{C}^+$. $\square$

Proposición 3.3.4. *Si S es un sistema de operadores y $\Phi : S \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un mapa lineal contractivo (i.e. $\|\Phi\| \leqslant 1$), tal que $\Phi(I_S) = I_{\mathcal{H}}$, entonces Φ es positivo.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| = 1$. Definimos el mapa $f : S \to \mathbb{C}$ como $f(A) = \langle \Phi(A)x, x\rangle$. Entonces f es una funcional lineal tal que $f(I_S) = 1$ y $\|f\| \leqslant 1$, y por el corolario anterior f es positiva. Por lo tanto, dados $A \geqslant 0$ y $x \in \mathcal{H}$, se tiene que: si $x = 0$ entonces $\langle \Phi(A)x, x\rangle = 0$, y si $\|x\| \neq 0$, entonces $\langle \Phi(A)x, x\rangle = \|x\|^2 \langle \Phi(A)\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|x\|}x\rangle \geqslant 0$. □

Afirmación 3.3.5. *Dados un sistema de operadores S y un mapa positivo $\Phi : S \to \mathbb{C}$ se cumple que $\|\Phi\| \leqslant \Phi(I_S)$.*

Demostración. Supongamos que $A \in S$ es autoadjunto. De acuerdo a la prueba de 3.1.3 tenemos que $|\Phi(A)| \leqslant \Phi(I_S)\|A\|$. Ahora tomemos $A \in S$. Sabemos que existe $\eta \in \mathbb{C}$ con $|\eta| = 1$ tal que $\eta\Phi(A) = \Phi(\eta A) = |\Phi(A)|$. Luego: $|\Phi(A)| = \Phi(\eta A) = \Phi(Re(\eta A)) + i\Phi(Im(\eta A)) = \Phi(Re(\eta A))$ lo que usamos para deducir que:

$$|\Phi(A)| = |\Phi(Re(\eta A))| \leqslant \Phi(I_S)\|Re(\eta A)\| \leqslant \Phi(I_S)\|\eta A\| \leqslant \Phi(I_S)\|A\|.$$

□

Teorema de Krein 3.3.6. *Dados un sistema de operadores $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un mapa positivo $\phi : S \to \mathbb{C}$, existe un mapa positivo $\Psi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ que extiende a ϕ.*

Demostración. Si $\phi(I_S) = 0$ entonces por 3.1.3 $\phi = 0$ y se extiende trivialmente.

Ocupémonos del caso $\phi(I_S) = \eta \neq 0$, para el cual tenemos que $\eta^{-1}\phi$ es positivo, $(\eta^{-1}\phi)(I_S) = 1$ y además por 3.3.5 $\|\eta^{-1}\phi\| \leqslant (\eta^{-1}\phi)(I_S) = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach $(\eta^{-1}\phi)$ tiene una extensión $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ tal que $\|\Phi\| = \|\eta^{-1}\phi\| \leqslant 1$. Además $\Phi(I_S) = (\eta^{-1}\phi)(I_S) = 1$, y usando 3.3.4 se deduce que Φ es positivo y por lo tanto $\eta\Phi$ es positivo y además $(\eta\Phi)\big|_S = \eta(\Phi\big|_S) = \eta(\eta^{-1}\phi\big|_S) = \phi$. Concluimos que $\Psi := \eta\Phi$ es una extensión positiva de ϕ. □

Queremos usar el teorema de Krein para obtener extensiones completamente positivas de mapas $\phi : S \to M_n$. La idea es la siguiente: a cada mapa positivo ϕ le asociamos un mapa completamente positivo $s_\phi : M_n(S) \to \mathbb{C}$, y extendemos s_ϕ a un mapa positivo $r : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}$. Suponiendo que: la asociación $\phi \to s_\phi$ es sobreyectiva, lleva extensiones y mapas completamente positivos en extensiones y positivos respectivamente, y viceversa, tomamos $\psi : S \to M_n$ tal que $s_\psi = r$. La extensión de ϕ será ψ.

Notación 3.3.7. *Denotaremos a la base canónica de $\mathbb{C}^n$ mediante $\{e_1^n, \dots, e_n^n\}$ y omitiremos el supraíndice en algunos casos, especialmente cuando $n = m$. Si $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tendremos que $A_{ij} = \langle Ae_j^n, e_i^m\rangle$ y escribiremos simplemente $A_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$*

Si $1 \leqslant i \leqslant n$ y $1 \leqslant j \leqslant m$, denotamos por E_{ij} a la matriz de $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ que tiene un 1 en el lugar j de la fila i.

Para espacios vectoriales V y W, sobre un mismo cuerpo, $L(V, W)$ denotará el conjunto de las transformaciones lineales de V a W con la suma y el producto por escalares punto a punto.

Supongamos que S es un sistema de operadores y $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que tenemos un isomorfismo lineal $L(S, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \cong L(\mathbb{M}_n(S), \mathbb{C})$.

Dado $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ lineal, le asociamos el mapa $s_\phi : \mathbb{M}_n(S) \to \mathbb{C}$ definido por:

$$s_\phi\left((a_{ij})\right) = \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \phi(a_{kl})_{kl} = \frac{1}{n} \langle \phi_n(a_{ij})(e_1, \ldots, e_n), (e_1, \ldots, e_n) \rangle \tag{3.1}$$

donde $(e_1, \ldots, e_n)$ es el vector de $\mathbb{C}^{n^2}$ que resulta de escribir consecutivamente las coordenadas de los vectores $e_1, \ldots, e_n$.

Hemos construido un mapa $L(S, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \to L(\mathbb{M}_n(S), \mathbb{C})$, dado por $\phi \mapsto s_\phi$; además observamos que si $1_n = I_S \oplus \cdots \oplus I_S \in \mathbb{M}_n(S)$ entonces

$$s_\phi(1_n) = \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \phi((1_n)_{kl})_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \phi(I_S) = \phi(I_S)$$

Por otro lado, si $s : \mathbb{M}_n(S) \to \mathbb{C}$ es lineal definimos $\phi_s : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ como

$$\phi_s(A)_{ij} = ns\left(A \otimes E_{ij}\right) \quad \text{con la identificación} \quad \mathbb{M}_n(S) \cong S \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}). \tag{3.2}$$

Ahora tenemos $L(\mathbb{M}_n(S), \mathbb{C}) \to L(S, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$, dado por $s \mapsto \phi_s$, y es fácil verificar que:

$$r = s_{\phi_r} \quad \text{y} \quad \psi = \phi_{s_\psi}$$

El isomorfismo $L(\mathbb{M}_n(S), \mathbb{C}) \cong L(S, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ también sirve como isomorfismo entre $\mathcal{B}(M_n(S), \mathbb{C})$ y $\mathcal{B}(S, M_n)$, pues si $\phi \in \mathcal{B}(S, M_n)$ y $A \in M_n(S)$ entonces:

$$|s_\phi(A)| = |\frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \phi(A_{kl})_{kl}| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{n} |\phi(A_{kl})_{kl}| \leqslant \frac{\|\phi\|}{n} \sum_{k,l=1}^{n} \|A_{kl}\| \leqslant \frac{\|\phi\|}{n} n^2 \|A\| = \|\phi\| n \|A\|$$

donde hemos usado 1.1.6 y concluimos que $\|s_\phi\| \leqslant n\|\phi\|$.

Recíprocamente si $r \in \mathcal{B}(M_n(S), \mathbb{C})$ y $v \in S$, usando 1.1.6 y 1.2.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}\|\phi_r(v)\| &= \|n\left(r(v \otimes E_{ij})\right)_{ij}\| = n\|\left(r(v \otimes E_{ij})\right)_{ij}\| \leqslant n \sum_{i,j=1}^{n} \|r(v \otimes E_{ij})\| \leqslant n \sum_{i,j=1}^{n} \|r\| \|(v \otimes E_{ij})\| \\ &\leqslant n^3 \|r\| \|v\|\end{aligned}$$

Concluimos que $\|\phi_r\| \leqslant n^3 \|r\|$, y por lo tanto $\mathcal{B}(M_n(S), \mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(S, M_n)$ como espacios normados (es decir: son isomorfos linealmente por un mapa acotado con inversa acotada).

Lema 3.3.8. *Si $\mathcal{H}$ es un $\mathbb{C}$ espacio de Hilbert, entonces todo elemento positivo $P \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ es suma de n elementos positivos, cada uno de la forma $(a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$ para algunos $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Denotaremos R_k a un elemento de $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ cuyas entradas son todas nulas a no ser, eventualmente, en la fila k. Escribiremos

$$R_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y tendremos} \quad (R_k)^*(R_k) = (a_i^* a_j)_{i,j}$$

y por el Lema 3.0.17 $(a_i^* a_j)_{i,j}$ es positivo.

Ahora tomemos $P \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ positivo. Por 3.0.17 existe $B \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ tal que $P = B^*B$ y descomponemos $B = R_1 + \cdots + R_n$ donde los R_i son como arriba. Además observamos que $(R_i)^*(R_j) = 0$ si $i \neq j$ y por lo tanto $P = (R_1)^*(R_1) + \cdots + (R_n)^*(R_n)$. $\square$

Teorema 3.3.9. *Si $\mathcal{H}$ es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un sistema de operadores y $\varphi : S \to M_n$ es lineal, entonces son equivalentes:*

1. *φ es completamente positivo.*
2. *φ es n-positivo.*
3. *s_φ es positivo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Trivial.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si $x = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{C}^{n^2}$ como en (3.1), entonces $s_\varphi(A) = \langle (\varphi)_n(A)x, x\rangle$. Como φ es n-positivo: $s_\varphi(A) \geqslant 0$, $\forall A \geqslant 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Tenemos que $s_\varphi : M_n(S) \to \mathbb{C}$ es positivo y $M_n(S) \subset M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Por 3.3.6 s_φ se extiende a una funcional positiva $r : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}$. Ahora definimos $\Psi = \phi_r$ de acuerdo a (3.2). Es inmediato que Ψ extiende a φ, y por lo tanto alcanza con probar que Ψ es positivo. Para ello, de acuerdo a 3.3.8 basta ver que dado $P = (a_i^* a_j)_{i,j=1}^m \in M_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ se cumple que $(\Psi)_m(P) \geqslant 0$, para $m \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario.

Fijemos $m \in \mathbb{Z}^+$, tomemos $P \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ como en el párrafo anterior, y sea $x \in \mathbb{C}^{nm}$ un vector que escribiremos $x = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{C}^m$. A continuación escribimos $x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jk} e_k$.

Veamos que $\langle \Psi_m(P)x, x\rangle \geqslant 0$, usando (3.2):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_m(P)x, x\rangle &= \sum_{i,j} \langle \Psi(a_i^* a_j)x_j, x_i\rangle = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{i,j}} \langle \Psi(a_i^* a_j)e_k, e_l\rangle = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{i,j}} \left(\Psi(a_i^* a_j)\right)_{lk} = \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{jk}\overline{\lambda_{il}} r\left((a_i^* a_j) \otimes E_{lk}\right) \end{aligned}$$

Definiendo $A_i \in M_n$ como

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{in} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{tendremos que} \quad A_i^* A_j = (\overline{\lambda_{ik}}\lambda_{j,l})_{k,l=1}^n = \textstyle\sum_{k,l=1}^n \overline{\lambda_{ik}}\lambda_{j,l} E_{kl}. \text{ Luego:}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(P)x, x\rangle &= \sum_{i,j=1}^n r\left((a_i^* a_j) \otimes (A_i^* A_j)\right) = r\left(\sum_{i,j=1}^n (a_i^* a_j) \otimes (A_i^* A_j)\right) = \\ &= r\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes A_i\right)^* \left(\sum_{j=1}^n a_j \otimes A_j\right)\right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.10. *Dados un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un sistema de operadores $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y un mapa completamente positivo $\varphi : S \to M_n$, existe un mapa completamente positivo $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to M_n$ que extiende a ϕ.*

Demostración. Si s_φ es la funcional asociado a φ como en (3.1), por 3.3.9 s_φ es positiva. Usando 3.3.6 extendemos s_φ a una funcional positiva $s : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}$. Si $\Phi = \phi_s$, definido por (3.2), entonces por 3.3.9 se tiene que Φ es positivo, y que Φ extiende a ϕ es consecuencia de que s es extensión de s_φ y de (3.2). □

Debido a la inclusión $\mathcal{CP}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{CB}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, siendo S un sistema de operadores, tenemos la norma $\|\ \|_{cb}$ en $\mathcal{CP}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

En forma análoga a lo visto en 2.2.1 probaremos que:

Afirmación 3.3.11. $\left(\mathcal{CP}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_{\|\ \|_{cb} \leqslant 1}, p\omega\right)$ *es compacto.*

Demostración. Por 2.2.10, basta probar que $\mathcal{CP}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$ es cerrado en $\mathcal{CB}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$ con la topología $p\omega$.

Tomemos una red $(\varphi_k)_k$ en $\mathcal{CP}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$ convergente a $\varphi \in \mathcal{CB}(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$. Sean $m \in \mathbb{Z}^+$, $A \in M_m(S)$ positivo y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^m$. Entonces:

$$\langle \varphi_m(A)x, x\rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle \varphi(A_{ij})x_j, x_i\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lim_k \langle \varphi_k(A_{ij})x_j, x_i\rangle = \lim_k \langle (\varphi_k)_m x, x\rangle \geqslant 0$$

Hemos probado que φ es completamente positivo. □

Teorema de Arveson 3.3.12. *Dados un sistema de operadores $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$, un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y un mapa completamente positivo $\varphi : S \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe un mapa completamente positivo $\Psi : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que extiende a φ.*

Demostración. Simplemente señalaremos los puntos en donde esta demostración difiere de la demostración de 2.2.11. Definimos $\mathcal{F}$ igual que en la demostración antes citada, lo mismo con P_F para $F \in \mathcal{F}$. También definimos $\varphi_F : S \to \mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como $\varphi_F(v) = P_F \circ \varphi(v) \circ (P_F)^*$. Veamos φ_F que es completamente positivo: dado $v \in M_n(S)$ positivo, $\varphi_n(v)$ es positivo. Por 5.3 tenemos que $\varphi_n(v) = T^*T$ con $T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ positivo. Entonces

$$(\varphi_F)_n(v) = P_{F^n}\varphi_n(v)(P_{F^n})^* = P_{F^n}T^*T(P_{F^n})^* = (TP_{F^n})^*\,(TP_{F^n}) \geqslant 0$$

Por otra parte si $\Psi_F : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una extensión positiva de φ_F, en virtud de 3.1.4 tenemos $\|\Psi_F\|_{cb} \leqslant 2\|\Psi_F(I)\| = 2\|\varphi_F(I)\| \leqslant 2\|\varphi\|_{cb}$. Hemos probado que $(\Psi_F)_F$ es una red en $\mathcal{CP}(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{H}))_{2\|\varphi_{cb}\|}$. Para terminar usamos 3.3.11 y seguimos la demostración de 2.2.11 $\square$

Capítulo 4

Construcciones y ejemplos.

En este capítulo se presentarán algunos ejemplos y construcciones que pueden realizarse con los espacios de operadores. Comenzaremos con los cocientes. En esta construcción el teorema de Ruan se vuelve importante, tratemos de justificar el por qué. Queremos probar que el cociente de un espacio de operadores por un subespacio cerrado es un espacio de operadores. Pensemos un momento a los espacios de operadores, solamente, como espacios de operadores concretos. Supongamos que tenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y dos subespacios cerrados $E \subset F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ¿cómo se construye un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y una inclusión isométrica $\iota : F/E \to \mathcal{B}(K)$? Alternativamente: tenemos $F/E \subset \mathcal{B}(H)/E$, y el problema es ver a $\mathcal{B}(H)/E$ como un subespacio de $\mathcal{B}(K)$, para algún espacio de Hilbert $\mathcal{K}$. Con el teorema de Ruan, solamente es necesario equipar a cada $M_n(F/E)$ con una norma adecuada.

Otra forma de utilizar el teorema de Ruan, que puede apreciarse en la construcción de los productos, es probar que basta hacer la construcción en cuestión cuando cada espacio de operadores es un $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Análogamente a lo que sucede con espacios normados, veremos que si V y W son espacios de operadores, entonces los espacios V^* y $\mathcal{CB}(V, W)$ tienen una estructura natural de espacio de operadores.

Se presentan varias construcciones más, en particular veremos cómo inducir una estructura de espacio de operadores en un espacio de Banach y en el dual de un espacio de operadores.

En las últimas cinco secciones se presentan las construcciones y los ejemplos más propios de la categoría de los espacios de operadores. Entre ellos está el espacio de Pisier, que es el análogo cuántico de espacio de Hilbert.

4.1. Cocientes.

Para empezar con las construcciones, veamos que si hacemos el cociente de un espacio de operadores por un subespacio cerrado, obtenemos un espacio de operadores.

Sea W un subespacio cerrado de un espacio de operadores V. Por 1.1.6 tenemos que $M_n(W)$, con la restricción de $\| \|_n$, es un subespacio cerrado de $M_n(V)$, por lo tanto tenemos un espacio normado $M_n(V)/M_n(W)$.

Si $\pi : V \to V/W$ es el mapa cociente, y $\nu_n : M_n(V) \to M_n(V)/M_n(W)$ es el mapa cociente descrito en el párrafo anterior, entonces $Ker(\pi_n) = M_n(W)$, y tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M_n(V) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\nu_n"'] & \mathbb{M}_n(V/W) \\ M_n(V)/M_n(W) \arrow[ur, "\overline{\pi_n}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

donde $\overline{\pi_n}$ queda definido para que el diagrama conmute. A través de $\overline{\pi_n}$ trasladamos la norma de $M_n(V)/M_n(W)$ a $M_n(V/W)$. Veremos luego que la sucesión de normas así obtenidas hace de V/W un espacio de operadores.

Dado $\pi_n(v) \in \mathbb{M}_n(V/W)$ por la construcción: $\|\pi_n(v)\|_n = \|\nu_n(v)\|$, y por la definición de norma cociente:

$$\|\nu_n(v)\| = \text{ínf}\{\|v + w\| : \ w \in M_n(W)\} = \text{ínf}\{\|z\| : \ \pi_n(z) = \pi_n(v)\}$$

Luego:

$$\|\pi_n(v)\|_n = \text{ínf}\{\|z\| : \ \pi_n(z) = \pi_n(v)\}. \tag{4.2}$$

Proposición 4.1.1. *Si W es un subespacio cerrado de un espacio de operadores V, entonces V/W es un espacio de operadores con la norma dada por* (4.2). *Además la proyección $\pi : V \to V/W$ es un mapa completamente acotado, tal que $\|\pi\|_{cb} = 1$ si $W \neq V$, y $\|\pi\|_{cb} = 0$ en otro caso.*

Demostración. Usemos 1.2.2. Probemos M2, sean $\alpha \in M_{n,m}$, $\beta \in M_{m,n}$, $\widetilde{v} \in M_m(V/W)$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $v \in M_n(V)$, tal que $\pi_m(v) = \widetilde{v}$ y $\|v\| < \|\widetilde{v}\| + \varepsilon$. Por la linealidad de π_n es inmediato que $\pi_n(\alpha v \beta) = \alpha \widetilde{v} \beta$. Luego $\|\alpha \widetilde{v} \beta\|_n \leqslant \|\alpha v \beta\| \leqslant \|\alpha\| \|v\| \|\beta\| < \|\alpha\|(\|\widetilde{v}\|_m + \varepsilon)\|\beta\|$. Haciendo $\varepsilon \to 0$ probamos M2.

Para probar M1', tomemos $\widetilde{w} \in M_n(V/W)$, $\widetilde{v} \in M_m(V/W)$ y $\varepsilon > 0$. Como antes, existen $w \in M_n(V)$ y $v \in M_m(V)$, tales que $\pi_n(v) = \widetilde{v}$, $\pi_n(w) = \widetilde{w}$, $\|v\| < \|\widetilde{v}\| + \varepsilon$ y $\|w\| < \|\widetilde{w}\| + \varepsilon$. Es inmediato que $\pi_{n+m}(v \oplus w) = \widetilde{v} \oplus \widetilde{w}$, por lo tanto

$$\|\widetilde{v} \oplus \widetilde{w}\|_{n+m} \leqslant \|v \oplus w\|_{n+m} = \text{máx}\{\|v\|, \|w\|\} \leqslant \text{máx}\{\|\widetilde{v}\|_m, \|\widetilde{w}\|_n\} + \varepsilon.$$

Por lo tanto V/W es un espacio de operadores.

En el caso $W \neq V$, probemos que $\|\pi_n\| = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$. De la definición de las normas en $M_n(V/W)$ a través de $\overline{\pi_n}$, es obvio que $\|\pi_n\| = \|\nu_n\|$. Como el mapa ν_n es la proyección, tenemos que $\|\nu_n\| = 1$. $\square$

Ahora probemos que el cociente V/W satisface la propiedad universal esperada en la categoría de espacios de operadores y mapas completamente acotados.

Proposición 4.1.2. *Sean W un subespacio cerrado de un espacio de operadores V, $W \neq V$, y $\pi : V \to V/W$ la proyección canónica. Entonces dado un mapa completamente acotado, $\varphi : V \to N$, entre espacios de operadores, tal que $W \subset Ker(\varphi)$, existe un único mapa completamente acotado, $\widetilde{\varphi} : V/W \to N$, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M_n(V) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\pi_n"'] & M_n(N) \\ M_n(V/W) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_n"'] & \end{tikzcd}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Además $\|\varphi_n\| = \|\widetilde{\varphi}_n\|$ para todo n y por lo tanto $\|\varphi\|_{cb} = \|\widetilde{\varphi}\|_{cb}$.

Demostración. Observemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_n(V) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\nu_n"'] & M_n(N) \\ M_n(V)/M_n(W) \arrow[ur, "\overline{\varphi_n}"] \arrow[r, "\overline{\pi_n}"] & M_n(V/W) \arrow[u, "\widehat{\varphi_n}"'] \end{tikzcd}$$

donde hemos construido $\overline{\varphi_n}$ como el único mapa tal que el triángulo superior del diagrama conmuta, y $\widehat{\varphi_n}$ es el único que hace conmutar al triángulo inferior (es único pues $\overline{\pi_n}$ es una isometría sobreyectiva). Por construcción tenemos que $\|\varphi_n\| = \|\overline{\varphi_n}\| = \|\widehat{\varphi_n}\|$. Definamos $\widetilde{\varphi} = \widehat{\varphi_1}$ y veamos que $(\widetilde{\varphi})_n = \widehat{\varphi_n}$.

Tomemos $u \in M_n(V/W)$; podemos suponer que $u = \overline{\pi_n}(\nu_n(v)) = \pi_n(v)$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_n}(u) &= \overline{\varphi_n}(\nu_n(v)) = \varphi_n(v) = (\varphi(v_{i,j}))_{i,j} = (\overline{\varphi}(\nu(v_{ij})))_{i,j} \\ &= (\widetilde{\varphi}\overline{\pi_1}(\nu(v_{ij})))_{i,j} = (\widetilde{\varphi}(\pi_1(v_{ij})))_{i,j} = \widetilde{\varphi}_n(u) \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $\|\widetilde{\varphi}_n\| = \|\varphi_n\|$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\|\varphi\|_{cb} = \|\widetilde{\varphi}\|_{cb}$. ☐

4.2. Productos.

Tomemos una familia de espacios de operadores $(V_s)_{s\in S}$. Con ellos construimos el espacio normado:

$$l_\infty(S, V_s) = \{f : \ f \in \prod_{s\in S} V_s \ , \ \|f\|_\infty := \sup_{s\in S} \|f(s)\| < \infty\}$$

Para dar una norma a $\mathbb{M}_n(l_\infty(S,V_s))$ tomamos el isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\iota_{V_s}:\mathbb{M}_n(l_\infty(S,V_s))\to l_\infty(S,M_n(V_s))\quad (f_{ij})_{i,j}\mapsto \widetilde{(f_{ij})}\quad \text{siendo}\ \widetilde{(f_{ij})}(s)=(f_{i,j}(s))_{i,j}$$

El mapa está bien definido pues $\|\widetilde{(f_{i,j})}\|_\infty \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\|f_{i,j}\|_\infty$, además el mapa inverso también es acotado.

Hemos construido una familia de normas $\|\ \|_\infty : M_n(l_\infty(S,V_s))\to[0,\infty)$ y queremos ver que ellas cumplen M1 y M2. La manera en que lo haremos será la siguiente: construiremos un espacio de operadores W, y un mapa $\psi : l_\infty(S,V_s)\to W$, de manera que cada ψ_n sea una isometría.

De acuerdo al Teorema de Ruan, 1.5.1, para cada $s\in S$ tenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_s$, y un mapa completamente isométrico $\psi_s : V_s\to\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)$. Construimos un mapa isométrico:

$$\psi_{V_s}: l_\infty(S,V_s)\to l_\infty(S,\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))\quad (v_s)\mapsto \big(\psi_s(v_s)\big)_s.$$

Veamos que para cada $n\in\mathbb{Z}^+$, $\big(\psi_{V_s}\big)_n$ es isométrico. Considerando la isometría $\psi_{M_n(V_s)}$: $l_\infty(S,M_n(V_s))\to l_\infty(S,M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)))$ $(v_s)_s\mapsto\big((\psi_s)_n(v_s)\big)_s$, deducimos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_n(l_\infty(S,V_s)) \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\iota_{V_s}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & M_n(l_\infty(S,\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))) \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}"] \\
l_\infty(S,M_n(V_s)) \arrow[r, "\psi_{M_n(V_s)}"'] & l_\infty(S,M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)))
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior, y porque ι_{V_s}, $\iota_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}$ son isometrías, deducimos que $\big(\psi_{V_s}\big)_n$ es una isometría.

De acuerdo a lo que acabamos de ver, si podemos probar que $l_\infty(S,\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)$ es un espacio de operadores podremos concluir que $l_\infty(S,V_s)$ lo es.

Definamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}=\bigoplus_{s\in S}\mathcal{H}_s$, con el producto interno $\langle(h_s),(g_s)\rangle = \sum_{s\in S}\langle h_s,g_s\rangle_{\mathcal{H}_s}$.

Observación 4.2.1. Si $(T_s)_{s\in S}\in\prod_s\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)$ es tal que $\sup_s\|T_s\|<\infty$ entonces el operador $\widetilde{(T_s)}$ de $\mathcal{H}$ definido por $\widetilde{(T_s)}(h_s)_s=(T_sh_s)_s$ es acotado y $\|\widetilde{(T_s)}\|=\sup_s\|T_s\|$.

De acuerdo a la observación anterior podemos definir un mapa isométrico

$$J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}: l_\infty(S,\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))\to\mathcal{B}(\mathcal{H})\quad (T_s)_s\mapsto\widetilde{(T_s)_s}$$

El mapa $\big(J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}\big)_n$ induce un mapa isométrico $\big(\widehat{J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}}\big)_n$ que hace conmutar a

$$\begin{tikzcd}
M_n(l_\infty(S,\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))) \arrow[r, "\left(J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}\right)_n"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \arrow[d] \\
l_\infty(S, M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))) \arrow[r, "\left(\widehat{J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}}\right)_n"'] & \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)
\end{tikzcd}$$

donde el mapa de la columna derecha es la identificación natural.

Por un lado, definimos $\mathcal{K} = \bigoplus_{s\in S} \mathcal{H}_s^n$, y tenemos una isometría sobreyectiva entre K y $\mathcal{H}^n$, que usamos para construir el isomorfismo isométrico $\nu : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Por otro, introducimos dos isomorfismos isométricos:

- $l_\infty(S, M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))) \to l_\infty(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n))$, identificando, para cada $s \in S:\ M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)$
- $J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)} : l_\infty(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$

Con los mapas que acabamos de definir, tenemos el diagrama que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
l_\infty(S, M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}_s))) \arrow[r, "\left(\widehat{J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}}\right)_n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{B}(\mathcal{H}^n) \\
l_\infty(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)) \arrow[r, "J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)}"'] & \mathcal{B}(\mathcal{K}) \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s^n)}$ es isométrico, por lo tanto $\left(\widehat{J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}}\right)_n$ es isométrico, entonces $\left(J_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_s)}\right)_n$ es una isometría. Con esto concluimos que $l_\infty(S, \mathcal{B}(\mathcal{H}_s))$ es un espacio de operadores (y por lo tanto $l_\infty(S, V_s)$ también).

4.3. Límites directos.

Definición 4.3.1. Supongamos que tenemos una familia de espacios de operadores $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que suponemos completos, y que tenemos mapas completamente isométricos

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \longrightarrow \cdots . \tag{4.3}$$

Diremos que un espacio de operadores V_∞ y una familia de mapas $\varphi_{n,\infty} : V_n \to V_\infty$ es un límite directo de (4.3) si:

1. V_∞ es completo.
2. $\varphi_{n,\infty}$ es completamente isométrico $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $\varphi_{n,\infty} = \varphi_{n+1,\infty} \circ \varphi_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

4. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{n,\infty}(V_n)$ es denso en V_∞.

Notación 4.3.2. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, a la composición $\varphi_{m-1} \circ \cdots \circ \varphi_n : V_n \to V_m$ la denotamos $\varphi_{n,m}$.*

En esta sección queremos probar la existencia de un límite directo de (4.3), y la unicidad a menos de mapas completamente isométricos.

Observación 4.3.3. Si V es un sistema de operadores completo entonces $M_n(V)$ también es completo: esto se deduce fácilmente de 1.1.6.

Comenzamos por definir $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n = \big\{(v_n) \in l_\infty(\mathbb{N}, V_n) : \lim_n \|v_n\| = 0\big\}$.

Afirmación 4.3.4. *Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios de operadores completos entonces $l_\infty(\mathbb{N}, V_n)$ es completo y $\sum_n V_n$ es cerrado.*

Demostración. Tomemos una sucesión de Cauchy $(v^m)_m \subset l_\infty(\mathbb{N}, V_n)$. Si denotamos $v^m = (v_n^m)_n$, donde $v_n^m \in V_n$, entonces se tiene que $\|v_n^m - v_n^r\| \leqslant \|v^m - v^r\|$, y por lo tanto $(v_n^m)_m$ es una sucesión de Cauchy en V_n. En consecuencia podemos definir $w_n = \lim_m v_n^m$ y deseamos que: por un lado $w := (w_n)_n \in l(\mathbb{N}, V_n)$, y por otro $\lim_m \|v^m - w\| = 0$. Para ver que $w = (w_n)_n \in l_\infty(\mathbb{N}, V_n)$, observamos que $\|w_n\| = \|\lim_m v_n^m\| = \lim_m \|v_n^m\| \leqslant \limsup_m \|v^m\| < \infty$, porque (v^m) es de Cauchy.

Por otro lado:

$$\|w - v^m\| = \sup_n \|w_n - v_n^m\| = \sup_n \lim_r \|v_n^r - v_n^m\| \leqslant \sup_n \limsup_r \|v^r - v^m\| = \limsup_r \|v^r - v^m\|,$$

de lo que se concluye que $\|w - v^m\| \to 0$, pues (v^m) es de Cauchy (con la norma $\| \ \|_\infty$).

Para la afirmación sobre $\sum_n V_n$, si ahora la sucesión $(v^m)_m$ está en $\sum_n V_n$ y converge a $w \in l_\infty(\mathbb{N}, V_n)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|w - v^m\| < \varepsilon$, y con ello:
$\|w_n\| \leqslant \|v_n^m\| + \|w_n - v_n^m\| \leqslant \|v_n^m\| + \varepsilon$. Por lo tanto: $\limsup_n \|w_n\| \leqslant \limsup_n \|v_n^m\| + \varepsilon \leqslant \varepsilon$. □

Corolario 4.3.5. *Si $\pi_\infty : l_\infty(\mathbb{N}, V_n) \to l_\infty(\mathbb{N}, V_n)/\sum_n V_n$ es la proyección sobre el cociente y a este último le damos la estructura de espacio de operadores definida en 4.1, obtenemos un espacio de operadores completo, y $\|\pi_\infty\|_{cb} = 1$ si para algún n se tiene $V_n \neq \{0\}$.*

Comenzamos a definir el límite directo de (4.3) definiendo, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el mapa:
$\varphi_{n,\infty} : V_n \to l(\mathbb{N}, V_n)/\sum_n V_n \ \ v_n \mapsto \pi_\infty((0, \ldots, 0_{n-1}, v_n, \varphi_{n,n+1}(v_n), \varphi_{n,n+2}(v_n), \ldots))$.

Veamos que estos mapas cumplen (4.3.1) (3). Tomemos $v \in V_n$. Por un lado:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1,\infty}(\varphi_n)(v) &= \pi_\infty((0,\ldots,0_n,\varphi_n(v),\varphi_{n+1,n+2}(\varphi_n(v)),\varphi_{n+1,n+3}(\varphi_n(v)),\ldots)) = \\ &= \pi_\infty((0,\ldots,0_n,\varphi_n(v),\varphi_{n,n+2}(v),\varphi_{n,n+3}(v),\ldots)),\end{aligned}$$

Por otro lado: $\varphi_{n,\infty}(v) = \pi_\infty((0,\ldots,0_{n-1},v_n,\varphi_{n,n+1}(v_n),\varphi_{n,n+2}(v_n),\ldots))$, y deducimos lo que queríamos observando que

$$(0,\ldots,0_n,\varphi_n(v),\varphi_{n,n+2}(v),\varphi_{n,n+3}(v),\ldots)-(0,\ldots,0_{n-1},v_n,\varphi_{n,n+1}(v_n),\varphi_{n,n+2}(v_n),\ldots) \in \sum_n V_n$$

Las propiedades (1) y (4) de (4.3.1) se satisfacen si $V_\infty = \overline{\bigcup_n \varphi_{n,\infty}(V_n)}$.

Necesitamos unos resultados para probar la propiedad (2) de 4.3.1.

Lema 4.3.6. *Si $(v_n) \in l(\mathbb{N}, V_n)$ entonces $\|\pi_\infty((v_n))\| = \limsup_p \|v_p\|$.*

Demostración. Dado $p \in \mathbb{N}$, definimos $v^p \in l(\mathbb{N}, V_n)$ como: $v_k^p = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$, y $v_k^p = v_k$ en otro caso. Es claro que $v^p - v \in \sum V_n$, y por ello $\|\pi_\infty(v)\| = \|\pi_\infty(v^p)\|$. En consecuencia $\|\pi_\infty(v)\| \leqslant \|v^p\| = \sup\{\|v_k\| : k \geqslant p\}$, de lo que se deduce $\|\pi_\infty(v)\| \leqslant \limsup_k \|v_k\|$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $(h_n) \in \sum V_n$ tal que $\|v + h\|_\infty \leqslant \|\pi_\infty(v)\| + \varepsilon$. Como $\|h_n\| \to 0$:

$$\limsup_n \|v_n\| = \limsup_n \|v_n + h_n\| \leqslant \sup_n \|v_n + h_n\| \leqslant \|\pi_\infty(v)\| + \varepsilon$$

□

Proposición 4.3.7. *Si $v \in M_m(l(\mathbb{N}, V_n))$, y mediante el isomorfismo $M_m(l(\mathbb{N}, V_v)) \cong l(\mathbb{N}, M_m(V_n))$ escribimos $v = (v_n)$ entonces*

$$\|(\pi_\infty)_m(v)\| = \limsup_p \|v_p\|$$

Demostración. Si denotamos por $\widehat{\pi_\infty}$ a la proyección $l(\mathbb{N}, M_n(V_n)) \to l(\mathbb{N}, M_m(V_n))/\sum_n M_m(V_n)$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} l(\mathbb{N}, M_n(V_n)) \arrow[r, "\widehat{\pi_\infty}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & l(\mathbb{N}, M_m(V_n))/\sum_n M_m(V_n) \arrow[d] \\ M_m(l(\mathbb{N}, V_n)) \arrow[r, "(\pi_\infty)_m"'] & M_m\left(l(\mathbb{N}, V_n)/\sum_n V_n\right) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, siendo las flechas en vertical mapas isométricos, y basta usar el lema anterior. □

Corolario 4.3.8. *Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el mapa*

$$\varphi_{n,\infty} : V_n \to l(\mathbb{N}, V_n) \Big/ \sum_n V_n \qquad v_n \mapsto \pi_\infty((0, \dots, 0_{n-1}, v_n, \varphi_{n,n+1}(v_n), \varphi_{n,n+2}(v_n), \dots)),$$

entonces $\varphi_{n,\infty}$ es completamente isométrico.

Demostración. Es inmediato a partir de la proposición anterior y de que los mapas $\varphi_{m,n}$ son completamente isométricos. ☐

En vista de lo expuesto hasta aquí tenemos:

Proposición 4.3.9. *Dada la sucesión de espacios de operadores completos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y los mapas completamente isométricos*

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \longrightarrow \cdots \tag{4.4}$$

existe un límite directo para (4.4).

4.3.1. Mapas entre límites directos.

Ahora queremos probar que el límite directo es único a menos de isomorfismos completamente isométricos.

Proposición 4.3.10. *Supongamos que tenemos dos sucesiones de espacios de operadores completos y mapas completamente isométricos:*

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \longrightarrow \cdots \tag{4.5}$$

$$W_1 \xrightarrow{\psi_1} W_2 \xrightarrow{\psi_2} W_3 \longrightarrow \cdots \tag{4.6}$$

y además tenemos:

- *Una familia de mapas completamente isométricos (acotado) $\theta_k : V_k \to W_k$, con $k \in \mathbb{N}$, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\theta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V_{n+1} \arrow[d, "\theta_{n+1}"] \\ W_n \arrow[r, "\psi_n"'] & W_n \end{tikzcd} \quad \text{conmuta para cualquier } n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

- *$(V_\infty, (\varphi_{n,\infty})_n)$ un límite directo de (4.5)*
- *$(W_\infty, (\psi_{n,\infty})_n)$ un límite directo de (4.6).*

Entonces existe un único mapa completamente isométrico (acotado) $\theta_\infty : V_\infty \to W_\infty$, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo;

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "\varphi_{n,\infty}"] \arrow[d, "\theta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & V_\infty \arrow[d, "\theta_\infty"] \\ W_n \arrow[r, "\psi_{n,\infty}"'] & W_\infty \end{tikzcd} \quad \textit{para cualquier } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que existe un mapa, θ_∞, que cumple la tesis. Entonces dado $u = \varphi_{n,\infty}(v)$ debería ser $\theta_\infty(u) = \psi_{n,\infty}(\theta_n(v))$. Esto prueba la unicidad y la conmutatividad del diagrama de la tesis en caso de existencia. El mapa θ_∞ está bien definido en $\overline{\bigcup_n \varphi_{n,\infty}(V_n)}$ por (4.7) y es una isometría (está acotado) allí, por ello lo podemos extender a un mapa isométrico (acotado) $\theta_\infty : V_\infty \to W_\infty$. Usando lo que hemos probado y que el diagrama de isometrías

$$\begin{tikzcd} M_k(V_n) \arrow[r, "(\varphi_{n,\infty})_k"] \arrow[d, "(\theta_n)_k"'] & M_k(V_\infty) \arrow[d, "(\theta_\infty)_k"] \\ M_n(W_n) \arrow[r, "(\psi_{n,\infty})_k"'] & M_k(W_\infty) \end{tikzcd}$$

es conmutativo (el mapa $(\theta_\infty)_k$ es único) deducimos que $(\theta_\infty)_k$ es una isometría. $\square$

Corolario 4.3.11. *Si tenemos espacios de operadores completos, y mapas completamente isométricos*

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \longrightarrow \cdots \tag{4.8}$$

Entonces dos límites directos de la sucesión anterior son completamente isométricos (hay una isometría completa y sobreyectiva entre ellos).

Demostración. Usar la proposición anterior con $W_n = V_n$ y $\theta_n = id_{V_n}$. $\square$

4.4. Espacio conjugado.

Definición 4.4.1. Dado un espacio vectorial V, llamamos conjugado de V, y lo denotamos $\overline{V}$, al espacio vectorial que obtenemos de considerar en V la suma de V y el producto: $\mathbb{C} \times \overline{V} \to \overline{V}$ $(\lambda, \overline{v}) \mapsto \overline{\overline{\lambda} v}$ donde $\overline{\lambda}$ es el conjugado en $\mathbb{C}$. Y, dado un elemento w de V escribimos $\overline{w}$ para representar a w como un elemento de $\overline{V}$.

Queremos ver que dado un espacio de operadores V, entonces $\overline{V}$ tiene estructura de espacio de operadores. Para ello, si $(\overline{v_{ij}})_{i,j} \in M_n(\overline{V})$ definimos

$$\|(\overline{v_{ij}})_{i,j}\| = \|(v_{ij})_{i,j}\|$$

la cual resulta una norma en $M_n(\overline{V})$.

La propiedad (M1) es casi inmediata para esta familia de normas. En cambio para (M2) debemos observar que la transformación *conj* : $M_{n,m} \to M_{n,m}$ que conjuga cada entrada es una isometría.

Otra forma de ver esto es definiendo en $\overline{\mathcal{H}}$ (con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert) un producto interno dado por: $\langle \overline{h}, \overline{g} \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \langle g, h \rangle$, y para un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ otro operador $\overline{T} \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}})$ como $\overline{T}(\overline{h}) = \overline{T(h)}$. Luego tomamos una isometría completa $\pi : V \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y a partir de ella definimos un mapa completamente isométrico $\overline{\pi} : \overline{V} \to \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}})$, dado por $\overline{v} \mapsto \overline{\pi(v)}$. Por último deducimos que las normas en $\overline{V}$ cumplen M1 y M2 usando el mapa $\overline{\pi}$.

4.5. Espacios duales y espacios de mapas.

En esta sección daremos estructura de espacio de operadores a V^* y a $\mathcal{CB}(V, W)$. Además probaremos que la identificación $\mathcal{T}(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es una identificación por mapas completamente isométricos.

4.5.1. V^* como espacio de operadores.

En la sección 2.1 dimos una norma en $M_n(V^*)$ que venía dada por la identificación $M_n(V^*) \cong \mathcal{CB}(V, M_n)$. Probaremos que con ellas damos estructura de espacio de operadores a V^*.

Observación 4.5.1. La norma en $M_n(V)$ determina la norma en $M_n(V^*)$, pues por 1.3.5:

$$\|f\| = \sup\{\|\langle\langle f|z\rangle\rangle\| : \ z \in M_n(V), \ \|z\| \leqslant 1\}.$$

Recíprocamente, por 1.5.2:

$$\|v\| = \sup\{\|\langle\langle f|v\rangle\rangle\| : \ f \in M_n(V^*) \ \|f\| \leqslant 1\}.$$

Proposición 4.5.2. *Si consideramos la familia de normas* $\| \ \| : M_n(V^*) \to [0, +\infty)$*, dadas por la observación anterior entonces éstas determinan una estructura de espacio de operadores en* V^**.*

Demostración. Probemos M2. Sean $\alpha \in M_{n,m}$, $\beta \in M_{m,n}$ y $f \in M_m(V^*)$. Para $r \in \mathbb{N}$ queremos dar una cota de la norma del mapa $(\alpha f \beta)_r : M_r(V) \to M_{rn}$. Para ello observamos que, si $(v_{ij}) \in M_r(V)$, entonces

$$\langle\langle (\alpha f \beta)_r | (v_{ij}) \rangle\rangle = ((\alpha f \beta)(v_{ij}))_{i,j} = (\alpha \langle\langle f|v_{ij}\rangle\rangle \beta)_{i,j} = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{bmatrix} (\langle\langle f|v_{ij}\rangle\rangle)_{i,j} \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \ddots & \\ & & \beta \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha \otimes I_r) \, \langle\langle f|v\rangle\rangle \, (\beta \otimes I_r)$$

Luego, $\|\langle\langle(\alpha f\beta)_r|(v_{ij})\rangle\rangle\| \leqslant \|\alpha\otimes I_r\|\|\langle\langle f|v\rangle\rangle\|\|\beta\otimes I_r\| \leqslant \|\alpha\|\|f\|\|v\|\|\beta\|$, lo que concluye la prueba de M2.

Para M1' tomemos $g \in M_n(V^*)$, y v como antes tal que $\|v\| \leqslant 1$, entonces

$$\|(f\oplus g)(v)\| = \|(f(v_{ij})\oplus g(v_{ij}))_{i,j}\| = \|(f_r(v))\oplus(g_r(v))\| \leqslant \text{máx}\{\|f\|,\|g\|\}$$

donde hemos usado que cambiar filas y columnas no cambia la norma, por 1.1.6, para la segunda igualdad.

Además $\| \ \| : V^* \to [0,+\infty)$ es en efecto una norma (coincide con la usual). □

Si V es un espacio de operadores, tenemos en V^{**} una estructura de espacio de operadores, y el mapa

$$\iota_V : V \to V^{**} \quad \langle\iota_V(v), f\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Proposición 4.5.3. *Si V es un espacio de operadores, y en V^{**} tomamos la estructura de espacio de operadores que tiene por ser un espacio dual, entonces el mapa $\iota_V : V \to V^{**}$ es completamente isométrico.*

Demostración. Dado $v \in M_n(V)$, queremos calcular $\|(\iota_V)_n(v)\|_{cb}$. Para ello tomemos $f \in M_n(V^*)$. Luego

$$(\iota_V)(v)(f) = \Big((\iota_V(v_{ij})(f_{kl}))_{i,j}\Big)_{k,l} = \Big((f_{kl}(v_{ij}))_{i,j}\Big)_{k,l} = \langle\langle f|v\rangle\rangle$$

En vista de esto y de la observación 4.5.1 tenemos que $\|(\iota_V)(v)\| = \|v\|$. □

Como en la teoría de espacios normados, si tenemos espacios de operadores y un mapa completamente acotado $\varphi : V \to W$, entonces tenemos un mapa dual $\varphi^* : W^* \to V^*$, dado por $\varphi^*(\eta) = \eta\circ\varphi$. Observemos que dados $g \in M_m(W^*)$ y $v \in M_n(V)$:

$$\langle\langle g|\varphi_n v\rangle\rangle = (g_{k,l}(\varphi(v_{i,j}))) = (\varphi^*(g_{k,l})(\varphi(v_{i,j}))) = \langle\langle(\varphi^*)_n(g)|v\rangle\rangle. \tag{4.9}$$

Proposición 4.5.4. *Si V y W son espacios de operadores y $\varphi : V \to W$ es un mapa completamente acotado, entonces se cumple que:*

1. $\|\varphi_n\| = \|(\varphi^*)_n\|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
2. $\|\varphi^*\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$

Demostración. 2. es inmediato a partir de 1. Probemos 1. : usando (4.9)

$$\begin{aligned}\|(\varphi^*)_n\| &= \sup\{\|\langle\langle(\varphi^*)_n(g)|v\rangle\rangle\| : \ g \in M_n(W^*) \ \ v \in M_n(V) \ \ \|g\|,\|v\| \leqslant 1\} = \\ &= \sup\{\|\langle\langle g|\varphi_n(v)\rangle\rangle\| : \ g \in M_n(W^*) \ \ v \in M_n(V) \ \ \|g\|,\|v\| \leqslant 1\} = \|\varphi_n\|\end{aligned}$$

□

4.5.2. Topologías débiles.

Definición 4.5.5. Decimos que la red $(f_i)_{i\in I} \subset M_n(V^*)$, converge ω^* a $f \in M_n(V^*)$, si y sólo si

$$\lim_i \|\langle\langle f_i|v\rangle\rangle - \langle\langle f|v\rangle\rangle\| = 0 \quad \text{para todo } \ v \in M_k(V)\ k \in \mathbb{N}.$$

Observación 4.5.6. Como consecuencia de 1.1.6, la red $(f_i)_{i\in I} \subset M_n(V^*)$ converge ω^* a $f \in M_n(V^*)$, si y sólo si la red $((f_i)_{k,l})_{i\in I} \subset M_n(V^*)$, converge en la topología ω^* a $f_{k,l} \in M_n(V^*)$, para todo $k, l = 1, \ldots, n$, (en la segunda ocasión la convergencia débil es la usual en espacios duales).

Como consecuencia de la observación, tenemos que la topología ω^* en V^* determina la topología ω^* en $M_n(V^*)$. Si $F = (F_{i,j}) : V^* \to M_n$ es ω^*-continuo, entonces cada $F_{i,j}$ lo es, y por lo tanto $F = (\iota_V)_n(v)$ para un $v \in M_n(V)$.

Notación 4.5.7. *$\mathcal{CB}^\sigma(V^*, W^*)$ son los mapas de $\mathcal{CB}(V^*, W^*)$ que además son $(\omega * -\omega *)$ continuos. Tenemos entonces que $\mathcal{CB}^\sigma(V^*, M_n) = (\iota_V)_n(M_n(V))$.*

4.6. Un ejemplo de dualidad en espacios de operadores: operadores de tipo traza - compactos - acotados.

Diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ es de tipo traza si existe alguna base ortonormal de $\mathcal{H}$, (e_i), tal que $\sum_i \langle Te_i, e_i\rangle < \infty$. De acuerdo a un Lema del apéndice, 5.2.1, se tiene que la suma anterior no depende de la base. Por ello, para un operador positivo, se puede definir $tr(T) := \sum_i \langle Te_i, e_i\rangle$. Para un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotaremos $|T|$ a la raíz positiva de T^*T (ver 5.3).

Definición 4.6.1. $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) :\ tr(|T|) < +\infty\}$.

El espacio $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ tiene estructura de espacio de Banach si definimos $\|T\|_1 = tr(|T|)$. Para un operador T diremos que la traza está bien definida si la suma $\sum_i \langle Te_i, e_i\rangle$ es finita y no depende de la base ortonormal (e_i). En tal caso escribiremos $tr(T) = \sum_i \langle Te_i, e_i\rangle$. Se puede probar que si $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ entonces la traza de T está bien definida (ver por ejemplo [9]).

En esta sección daremos estructura de espacio de operadores a $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, y veremos que $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ es completamente isométrico a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Igualmente veremos que, si denotamos a los operadores compactos de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, y consideramos la estructura de espacio de operadores que da la inclusión $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ es completamente isométrico a $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. Para lo anterior, y lo que resta de la sección, nos basaremos en los resultados sobre operadores compactos, de tipo traza y acotados que se encuentran en la sección 6.3 de [9], mencionando cada resultado que de allí tomemos.

Observación 4.6.2. Como lo hicimos con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, uno puede identificar $M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{T}(\mathcal{H}^n)$, y con ello dar una norma en $M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$. Pero esta construcción no llevaría a un espacio de operadores pues (M1) no se cumple: (pensemos en dimensión finita, para otro caso también vale) dados $T \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ y $S \in M_m(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ tenemos que $|T| \oplus |S| \in M_{n+m}(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ es positivo; por otro lado: $(|T| \oplus |S|)^2 = |T|^2 \oplus |S|^2 = T^*T \oplus S^*S$, y en consecuencia

$$\|T \oplus S\|_1 = tr(|T| \oplus |S|) = tr(|T|) + tr(|S|) = \|T\|_1 + \|S\|_1$$

Por lo tanto con la familia de normas antes construidas no tenemos un espacio de operadores en $\mathcal{T}(\mathcal{H})$.

De acuerdo a [9] tenemos un par dual:

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \quad (A, B) \mapsto tr(AB), \tag{4.10}$$

a partir del cual definiremos $\omega : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H})^*$ tal que $B \mapsto \omega_B$, siendo $\omega_B(A) = tr(AB)$.

Enunciamos dos teoremas que se encuentran en [9].

Teorema 4.6.3. *Para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el mapa ω_B define una funcional acotada sobre $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. El mapa $B \mapsto \omega_B$ es una isometría sobreyectiva que permite una identificacíon isométrica*

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{T}(\mathcal{H})^*.$$

En subconjuntos acotados de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la topología ω^* coincide con la topología débil de operadores. Además la convergencia en la topología ω^* implica la convergencia en la topología débil de operadores. O sea, si WOT es la topología débil de operadores entonces $WOT \subset \omega^*$.

Teorema 4.6.4. *Para todo $A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ el mapa $\omega_A : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ define un funcional acotado sobre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Además el mapa $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ dado por $A \mapsto \omega_A$ es una isometría lineal sobreyectiva que permite la identificación*

$$\mathcal{K}(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

Los resultados anteriores dan una inclusión isométrica $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^*$, con lo cual podemos dotar a $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ con una estructura de espacio de operadores (viéndolo como subespacio de $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$). Veamos explícitamente cómo calcular la norma en $M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$. La inclusión $M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \subset M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})^*) \cong \mathcal{CB}(\mathcal{B}(\mathcal{H}), M_n)$ viene dada por el par dual:

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \quad (A, B) \mapsto \langle A|B\rangle = \left(tr(A_{i,j}B)\right)_{i,j} \tag{4.11}$$

a partir del cual definimos otro par dual, que permitirá calcular la norma en $M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$. Teniendo en cuenta lo anterior, la Proposición 1.3.5 y el par dual:

$$\langle\langle \cdot \mid \cdot \rangle\rangle : M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \times M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C} \quad \text{dado por} \quad \langle\langle A|B\rangle\rangle = \left(\langle A|B_{kl}\rangle\right)_{k,l}, \tag{4.12}$$

tenemos que dada $A \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$, la norma viene dada por

$$\|A\| = \sup\{\|\langle\langle A|T\rangle\rangle\| : \ T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \ \|T\| \leqslant 1\} \tag{4.13}$$

Teorema 4.6.5. *Dado un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tenemos mapas conmpletamente isométricos y sobreyectivos:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H})^* \quad B \mapsto \omega_B$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})^* \quad B \mapsto \omega_B.$$

Demostración. Sabemos que ambos mapas son sobreyectivos, veamos que el primero es completamente isométrico:

Dado $B = (B_{ij}) \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, hay que probar que

$$\|B\| = \sup\{\|\langle\langle T|B\rangle\rangle\| : \ T \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \ \|T\| = 1\} \tag{4.14}$$

Sea $T \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ con $\|T\| = 1$. Viendo T como elemento de $\mathcal{CB}(\mathcal{B}(\mathcal{H}), M_n)$ (que es lo que da la norma a T):

$$\|\langle\langle T|B\rangle\rangle\| = \|(T_n)(B)\| \leqslant \|T\|\|B\| \leqslant \|B\|$$

de lo que deducimos que $\|B\| \geqslant \sup\{\|\langle\langle T|B\rangle\rangle\| : \ T \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})) \ \|T\| = 1\}$.

Para la otra desigualdad tomemos $\varepsilon > 0$. Tenemos vectores unitarios, $\eta, \xi \in \mathcal{H}^n$, tales que $|\langle B\eta, \xi\rangle| > \|B\| - \varepsilon$. Definamos $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{\eta_i : \ i = 1, \ldots, n\}$, $\mathcal{H}_2 = \text{span}\{\xi_i : \ i = 1, \ldots, n\}$ y $m = \text{máx}\{dim(\mathcal{H}_1), dim(\mathcal{H}_2)\}$. Fijemos isometrías $S_i : \mathcal{H}_i \to \mathbb{C}^m$, y definamos $P_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_i$, ambas para $i = 1, 2$. A partir de lo anterior definimos: $r_i = S_i \circ P_i$ y

$$\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to M_m \quad B \mapsto r_2 B r_1^*$$

Como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es isomorfo a $\mathcal{T}(\mathcal{H})^*$, tenemos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ una topología ω^*. Queremos probar que la función φ es ω^*-continua y completamente acotada. En tal caso por 4.5.7 sabremos que $\varphi \in (\iota_V)_n(M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})))$, y con ello veremos cómo probar (4.14).

Primero veamos que φ es ω^*-continua: sea (C_j) una red en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que converge ω^* a $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir que:

$$\lim_j tr(C_j A) = tr(CA) \quad \forall\ A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

Sean $x, y \in \mathbb{C}^m$ vectores unitarios, entonces:

$$\langle (r_2 C_j r_1^* - r_2 C r_1^*)x, y\rangle = \langle r_2(C_j - C)r_1^* x, y\rangle = \langle S_2 P_2 (C_j - C) P_1 S_1^* x, y\rangle = \langle (C_j - C)(S_1^* x), S_2^* y\rangle$$

Por otro lado por 4.6.3 se tiene que $\lim_j \langle (r_2 C_j r_1^* - r_2 C r_1^*)x, y\rangle = \lim_j \langle (C_j - C)(S_1^* x), S_2^* y\rangle = 0$.

Por lo tanto $\lim_j \langle (r_2 C_j r_1^* - r_2 C r_1^*)e_i, e_k\rangle = 0 \ \forall i, k = 1, \ldots, n$. Como la topología débil de operadores coincide con la topología de la norma en M_m, tenemos que φ es ω^* continua.

Además $\varphi_n : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \to M_n(M_m)$, viene dada por

$$(\varphi_n)(B_{ij}) = (r_2 B_{ij} r_1^*)_{i,j} = \begin{bmatrix} r_2 & & \\ & \ddots & \\ & & r_2 \end{bmatrix} (B_{ij}) \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_1 \end{bmatrix}^* = (r_2 \oplus \cdots \oplus r_2)(B_{ij})(r_1 \oplus \cdots \oplus r_1)^*$$

Definiendo $r_1^{(n)} = r_1 \oplus \cdots \oplus r_1$ y $r_2^{(n)} = r_2 \oplus \cdots \oplus r_2$, tenemos que $\|r_1^{(n)}\| = \|r_1\|$ y $\|r_2^{(n)}\| = \|r_2\|$, y deducimos que φ es completamente acotada.

Como lo mencionábamos antes, concluimos que $\varphi \in (\iota_V)_n(M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H})))$. Como $\eta \in \mathcal{H}_1^n = Ran(S_1^*)$ y $\xi \in \mathcal{H}_2^n$, entonces $\eta = (r_1^{(n)})^*(x)$ y $\xi = (r_2^{(n)})^*(y)$, siendo x, y vectores de norma no mayor a uno, y con ello tenemos lo siguiente: (que prueba (4.14))

$$\|\langle\langle \varphi | B \rangle\rangle\| = \|\varphi_n(B)\| = \|(r_2^{(n)}) B (r_1^{(n)})^*\| \geqslant |\langle B(r_1^{(n)})^* x, (r_2^{(n)})^* y \rangle| = |\langle B\eta, \xi \rangle| \geqslant \|B\| - \varepsilon$$

Para ver la segunda parte de la tesis, sabemos que como espacios de Banach $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = \mathcal{T}(\mathcal{H})$, y en consecuencia $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cualquier espacio de Hilbert. En particular $\mathcal{K}(\mathcal{H}^n)^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$. Es un resultado de espacios de Banach que el mapa $\iota : X \to X^{**}$ (si X es un espacio de Banach) cumple que $\iota(\overline{B_X(0,1)})$ es ω^*-densa en $\overline{B_{X^{**}}(0,1)}$; de ello deducimos que la bola unidad cerrada de $M_n(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathcal{K}(\mathcal{H}^n)$ es ω^*-densa en la bola unidad cerrada de $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$.

Entonces dado $T \in M_n(\mathcal{T}(\mathcal{H}))$ tenemos que

$$\|T\| = \sup\{\|\langle\langle B|T \rangle\rangle\| : \ \|B\| \leqslant 1 \ B \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))\} = \sup\{\|\langle\langle B|T \rangle\rangle\| : \ \|B\| \leqslant, 1 \ B \in M_n(\mathcal{K}(\mathcal{H}))\},$$

y concluimos que el mapa $\mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ es completamente isométrico. $\square$

Veremos ahora un teorema de representación para espacios de operadores que son espacios duales.

Definición 4.6.6. Si W es un espacio de operadores tal que $W = V^*$, siendo V un espacio de operadores completo, y si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, decimos que el mapa $\pi : W \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación dual de W en $\mathcal{H}$ si π es un ω^*-homeomorfismo sobre su imagen y es completamente isométrico.

Proposición 4.6.7. *Si V es un espacio de operadores completo, entonces V^* tiene una representación dual en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $s_n^\sigma = M_n(V)_1$. Por 1.3.5 sabemos que si $f \in M_n(V^*) = \mathcal{CB}(V, M_n)$ entonces $\|f\| = \sup\{\|\langle \varphi | f \rangle\| : \ \varphi \in s_n^\sigma\}$. Definimos $s^\sigma = \bigcup_n s_n^\sigma$. Como en 1.5.1 $\mathcal{H} = \bigoplus_{\varphi \in s^\sigma} \mathbb{C}^{n(\varphi)}$ y $\Phi : V^* \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $f \mapsto (\varphi(f))_{\varphi \in s^\sigma}$ donde $\varphi(f) = \langle \varphi | f \rangle$. Con el mismo argumento usado en 1.5.1 pueba que Φ es completamente isométrico.

Veamos las afirmaciones correspondientes a las topologías débiles. Tomemos una red $(f_\lambda) \subset V^*$ que tiene como ω^*-límite a $f \in V^*$. Por el Teorema 5.4.1 podemos suponer que $(f_\lambda) \subset V_1^*$ y que $f \in V_1^*$. Ahora la red $(\Phi(f_\lambda)) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es acotada, de acuerdo a 4.6.3 basta ver que $\Phi(f_\lambda)$ converge a $\Phi(f)$ en la topología débil de operadores.

Tomemos $(h_\varphi), (g_\varphi) \in \mathcal{H}$, entonces $\langle \Phi(f_\lambda)(h_\varphi), (g_\varphi)\rangle = \sum_{\varphi \in s^\sigma} \langle \varphi(f_\lambda)h_\varphi, g_\varphi\rangle$.

Además $\sum_{\varphi \in s^\sigma} \|h_\varphi\|\|g_\varphi\| \leqslant \left(\sum_{\varphi \in s^\sigma} \|h_\varphi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\varphi \in s^\sigma} \|g_\varphi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(h_\varphi)\|\|(g_\varphi)\|$.

Tomemos F, un subconjunto finito de s^σ, y un $\varepsilon > 0$. Calculemos

$$|\langle \Phi(f_\lambda)(h_\varphi), (g_\varphi)\rangle - \langle \Phi f(h_\varphi), g_\varphi\rangle| \leqslant \sum_{\varphi \in s^\sigma} |\langle \varphi(f_\lambda - f)h_\varphi, g_\varphi\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varphi \in F} \|\langle\langle \varphi | f_\lambda - f\rangle\rangle\|\|h_\varphi\|\|g_\varphi\| + \sum_{\varphi \in s^\sigma \setminus F} \|f_\lambda - f\|\|h_\varphi\|\|g_\varphi\|$$

Acotemos el segundo sumando: usando Cauchy-Schwarz y el hecho de que la red (f_λ), y f estan acotadas (en norma) por 1, tenemos que:

$$\sum_{\varphi \in s^\sigma \setminus F} \|f_\lambda - f\|\|h_\varphi\|\|g_\varphi\| \leqslant 2 \left(\sum_{\varphi \in s^\sigma \setminus F} \|h_\varphi\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\varphi \in s^\sigma \setminus F} \|g_\varphi\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lo anterior nos permite elegir F lo suficientemente grande para que

$$\sum_{\varphi \in s^\sigma \setminus F} \|f_\lambda - f\|\|h_\varphi\|\|g_\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Acotemos el primer sumando: como $\lim_\lambda \|\langle\langle \varphi | f_\lambda - f\rangle\rangle\| = 0$ podemos elegir λ_0 tal que si $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$ entonces $\sum_{\varphi \in F} \|\langle\langle \varphi | f_\lambda - f\rangle\rangle\|\|h_\varphi\|\|g_\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, para el F elegido, si $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$, se tiene que $|\langle \Phi(f_\lambda)(h_\varphi), (g_\varphi)\rangle - \langle \Phi f)(h_\varphi), (g_\varphi)\rangle| < \varepsilon$.

En el siguiente párrafo usamos sin mencionar los resultados expuestos en 5.4.

Como V_1^* es ω^*-compacto entonces también lo es $\Phi(V_1^*)$; como Φ es una isometría $\Phi(V^*)_1$ es ω^*-compacto y por lo tanto ω^*-cerrado. Por otro lado, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de Banach y $\Phi(V^*)$ es cerrado (por ser completo) entonces $\Phi(V^*)$ es ω^*-cerrado. Por último Φ es uno a uno sobre $\Phi(V^*)$ y es un homeomorfismo restringido a V_1^*. Luego $\Phi^{-1}\big|_{\Phi(V^*)_1}$ es continua, y por lo tanto $\Phi^{-1} : \Phi(V^*) \to V^*$ es ω^*-continua. $\square$

4.7. $\mathcal{CB}(V,W)$ como espacio de operadores.

Empecemos con una identificación entre $\mathbb{M}_n(\mathcal{CB}(V,W))$ y un espacio normado que servirá para dar una norma a $\mathbb{M}_n(\mathcal{CB}(V,W))$.

A cada $\varphi \in \mathbb{M}_n(\mathcal{CB}(V,W))$, le asociamos $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{CB}(V, M_n(W))$ de acuerdo a $\widetilde{\varphi}(v) = (\varphi_{ij}(v))_{i,j}$ con lo que definimos

$$\|\varphi\| := \|\widetilde{\varphi}\| \quad \text{y por ello no distinguimos entre } \varphi \text{ y } \widetilde{\varphi} \tag{4.15}$$

Observación 4.7.1. $\widetilde{\varphi}$ es completamente acotada pues dado $v \in M_m(V)$:

$$\|\widetilde{\varphi}_m(v)\| = \|\left((\varphi_{ij}(v_{kl}))_{i,j}\right)_{k,l}\| = \|\left((\varphi_{ij}(v_{kl}))_{k,l}\right)_{i,j}\| = \|\left((\varphi_{ij})_m(v)\right)_{i,j}\| \leqslant \|v\| \sum_{i,j=1}^{m} \|\varphi_{ij}\|_{cb}$$

donde en la segunda igualdad hemos recurrido a 1.1.6, en la última desigualdad usamos que $M_m(M_{mn}(V))$ es un espacio de operadores y por lo tanto se aplica 1.1.6.

Notación 4.7.2. *$M_n(\mathcal{CB}(V,W))$ es $\mathbb{M}_n(\mathcal{CB}(V,W))$ con la norma que acabamos de definir.*

Proposición 4.7.3. *Si V, W son espacios de operadores, entonces $\mathcal{CB}(V,W)$ es un espacio de operadores (con las normas definidas arriba).*

Demostración. Sean $\varphi \in M_m(\mathcal{CB}(V,W))$, $\psi \in M_n(\mathcal{CB}(V,W))$, y $v \in M_r(V)_1$. Usando los mismos argumentos que en la observación anterior:

$$\|(\varphi \oplus \psi)_r(v)\| = \|(\varphi_r(v)) \oplus (\psi_r(v))\| = \text{máx}\{\|(\varphi_r(v))\|, \|(\psi_r(v))\| \leqslant \text{máx}\{\|\varphi\|, \|\psi\|\}$$

lo que prueba (M1)'. Por otro lado dadas $\alpha \in M_{n,m}$, $\beta \in M_{m,n}$ y $v \in M_r(V)$

$$\|\left(\alpha\varphi\beta\right)_r(v)\| = \|\left(\alpha\varphi(v_{ij})\beta\right)\| = \|(\alpha \otimes I_r)(\varphi_r(v))(\beta \otimes I_r)\| \leqslant \|\alpha\|\|\varphi\|\|\beta\|$$

Donde hemos usado 1.2.1. ☐

Proposición 4.7.4. *$\mathcal{CB}(V,W)$ es completo si W lo es.*

La prueba de esto se encuentra en 1.3.3.

4.7.1. $\mathcal{B}(E,W)$ como espacio de operadores.

Ahora la situación es la siguiente: tenemos un espacio normado E y un espacio de operadores W y queremos dar estructura de espacio de operadores a $\mathcal{B}(E,W)$.

Con lo visto al inicio de esta sección tenemos una identificación:

$$\mathbb{M}_n(\mathcal{B}(E,W)) = \mathcal{B}(E, M_n(W)) \tag{4.16}$$

A través de dicha identificación tenemos el espacio normado $M_n(\mathcal{B}(E,W))$. Una manera de ver que obtuvimos un espacio de operadores es la siguiente: definamos $\sigma_1 = E_1$, y para $v \in \sigma_1$ sea $W_v := W$, con lo cual tenemos un espacio de operadores $l_\infty(\sigma_1, W_v)$ y una inclusión isométrica

$$\iota : \mathcal{B}(E,W) \to l_\infty(\sigma_1, W_v) \quad v \mapsto (v(x))_{x\in\sigma_1}.$$

Con esto último, identificando $M_n(W_v) = M_n(W)_v$, y con el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathcal{B}(E,W)) \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\#"] & M_n(l_\infty(\sigma_1, W_v)) \arrow[d] \\ \mathcal{B}(E, M_n(W)) \arrow[r, "\widetilde{\iota}"'] & l_\infty(\sigma_1, M_n(W_v)) \end{tikzcd}$$

donde las columnas son mapas isométricos y sobreyectivos, y $\widetilde{\iota}$ es el análogo a ι, tenemos que ι_n es una isometría. Por lo tanto $\mathcal{B}(E,W)$ es completamente isométrico a un espacio de operadores.

4.8. Cuantizaciones minimales y maximales.

Así como tenemos la categoría de los espacios normados completos con los mapas acotados como morfismos, y la denotamos $\mathfrak{N}$, podemos definir la categoría de los espacios de operadores completos con los mapas completamente acotados como morfismos, y la denotaremos $\mathfrak{D}$. Con ello tenemos un functor de olvido, $N : \mathfrak{D} \to \mathfrak{N}$, que a un espacio de operadores lo ve simplemente como espacio normado, y que a un mapa completamente acotado como un mapa acotado.

Un functor $Q : \mathfrak{N} \to \mathfrak{D}$ es una cuantización estricta si:

1. Para cada espacio normado y completo E, se tiene que $E = N \circ Q(E)$.
2. Para cada mapa $\varphi : E \to F$, el mapa correspondiente $Q(\varphi) : Q(E) \to Q(F)$, cumple que $\|Q(\varphi)\|_{cb} = \|\varphi\|$.

En parte vimos un ejemplo de cómo asociarle una estructura de espacio de operadores 4.7.1 al espacio normado $\mathcal{B}(E,W)$. Veremos dos cuantizaciones más, pero esta vez de un espacio de Banach cualquiera.

Dado un espacio de Banach E, denotamos por $b_r(E) = \mathcal{B}(E, M_r)_1$ y $b(E) = \bigcup_r b_r(E)$ (donde la unión es sobre los naturales) y definimos las normas de matrices: si $x \in M_n(E)$

$$\|x\|_{\text{mín}} = \sup\{\|f_n(x)\| : f \in b_1(E)\} \tag{4.17}$$

$$\|x\|_{\text{máx}} = \sup\{\|f_n(x)\| : f \in b(E)\} \tag{4.18}$$

Para ver que, en efecto, obtuvimos un espacio normado, consideramos la inclusión isométrica:

$$E \to l_\infty(b_1(E)) \quad x \mapsto (f(x))_{f\in b_1(E)}$$

Por otro lado considerando $M_n(E) \to M_n(l_\infty(B_1(E)))$, tenemos una isometría si en $M_n(E)$ colocamos la norma $\| \|_{\text{mín}}$, y con ello concluimos que E con la familia de normas $\| \|_{\text{mín}}$ es un espacio de operadores.

En cuanto a la otra norma, tomemos la inclusión isométrica:

$$E \to l_\infty\left(\mathbb{N}, l_\infty(b_n(E), M_n)\right) \quad x \mapsto \Big((f(x))_{f \in b_r(E)} \Big)_{r \in \mathbb{N}}. \tag{4.19}$$

Probemos que es un mapa completamente isométrico si en E tomamos la familia de normas $\| \|_{\text{máx}}$, para un $x \in M_n(E)$

$$\left\| \Big(\big((f(x_{ij}))_{f \in b_r(E)} \big)_{r \in \mathbb{N}} \Big)_{i,j} \right\| = \left\| \Big((f_n(x))_{f \in b_r(E)} \Big)_{r \in \mathbb{N}} \right\| = \sup_{r \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_r(E)} \|f_x(x)\| = \|x\|_{\text{máx}}$$

La primera igualdad es por la definición de la norma en los espacios producto, y la segunda es por construcción. Por lo tanto tenemos que E con la familia de normas $\| \|_{\text{máx}}$ es un espacio de operadores.

Definición 4.8.1. Para un espacio de Banach, E, definimos mín E, como el espacio de operadores, completo, que resulta de considerar en E la norma (4.17). Asimismo definimos máx E como el espacio de operadores que obtenemos de considerar en E la norma dada por (4.18).

Observación 4.8.2. Para un espacio de operadores completo, V, se tiene que para todo $v \in M_n(V)$ se cumple

$$\|v\|_{\text{mín}} \leqslant \|v\| \leqslant \|v\|_{\text{máx}}$$

Demostración. Denotamos $s_n(V) = M_n(V^*)_1 = \mathcal{CB}(V, M_n)_1$. Sabemos que $\|v\| = \sup\{\|f_n(v)\| : f \in s_n(V)\}$. Por otra parte mediante el mapa $b_1(V) \to s_n(V)$, dado por $f \mapsto f \oplus O_{n-1}$, podemos pensar $b_1(V) \subset s_n(V)$ y $s_n(V) = \mathcal{CB}(V, M_n)_1 \subset \mathcal{B}(V, M_n)_1 = b_n(V) \subset b(V)$ □

4.8.1. Cuantización Minimal.

Afirmación 4.8.3. *Para un espacio de operadores completo V y un espacio de Banach E tenemos una isometría sobreyectiva:*

$$\mathcal{CB}(V, \textit{mín } E) \cong \mathcal{B}(V, E)$$

Demostración. La demostración consiste en tomar un mapa $\varphi : V \to E$ y ver que $\|\varphi : V \to E\| = \|\varphi : V \to \text{mín } E\|_{cb}$. La desigualdad ($\leqslant$) es trivial. Para la otra, tomemos $v \in M_n(V)_1$. De acuerdo a 4.17 $\|\varphi_n(v)\|_{\text{mín}} = \sup\{\|f_n \circ \varphi_n(v)\| : f \in b_1(E)\} = \sup\{\|(f \circ \varphi)_n(v)\| : f \in b_1(E)\}$. Pero $\|(f \circ \varphi)_n\| \leqslant \|f \circ \varphi\|_{cb} = \|f \circ \varphi\| \leqslant \|\varphi\|$ $sif \in b_1(E)$. Con todo esto concluimos que $\|\varphi_n(v)\| \leqslant \|\varphi\|$. □

Definimos el functor min como aquel que a un espacio de Banach E le asocia mín E, y a un mapa $\varphi : E \to F$ le asocia mín φ, que como función es igual a φ.

Proposición 4.8.4. *mín es una cuantización estricta.*

Demostración. Empezamos observando que, si E es un espacio de Banach, entonces la norma de éste coincide con $\| \ \|_{\text{mín}} : E \to [0, \infty)$. Ahora tomemos un mapa acotado entre espacios de Banach $\varphi : E \to F$, a partir del cual tenemos $\varphi : \text{mín } E \to F$ (aún visto como mapa entre espacios de Banach) con la misma norma de φ, de acuerdo a la afirmación anterior deducimos que $\|\varphi : E \to F\| = \|\text{mín } \varphi : \text{mín } E \to \text{mín } F\|_{cb}$ ☐

No sólo tenemos lo anterior sino que:

Proposición 4.8.5. *Si $\varphi : E \to F$ es un mapa isométrico entre espacios de Banach entonces mín φ : mín $E \to$ mín F es un mapa completamente isométrico.*

Demostración. Usar (4.17) y que, como φ es una isometría, entonces por 2.2.3 $\varphi^*(b_1(F)) = b_1(E)$. ☐

4.8.2. Cuantización Maximal.

Afirmación 4.8.6. *Dados un espacio de operadores W y un espacio de Banach E, tenemos una identificación isométrica $\mathcal{CB}(\text{máx } E, W) \cong \mathcal{B}(E, W)$.*

Es decir que dado un mapa lineal $\varphi : E \to W$, se cumple que

$$\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\|.$$

Demostración. Con la notación del enunciado, la desigualdad ($\geqslant$) es trivial. Para probar la restante basta ver que $\|\varphi\| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ \|\varphi\|_{cb} \leqslant 1$.

Para ver lo último tomemos $v \in M_n(\text{máx } E)$. De acuerdo a (4.18) tenemos que $\|\varphi_n(v)\| = \sup\{\|f_n \circ \varphi_n(v)\| : \ \|f : W \to M_r\| \leqslant 1 \ r \in \mathbb{N}\} \leqslant \sup\{\|g_n(v)\| : \ \|g : E \to M_r\| \leqslant 1 \ r \in \mathbb{N}\} = \|v\|_{\text{máx}}$, donde hemos usado que $\|f_n \circ \varphi_n\| = \|(f \circ \varphi)_n\| \leqslant \|f \circ \varphi\|_{cb} = \|f \circ \varphi\| \leqslant \|f\|\|\varphi\| \leqslant 1$. Con lo anterior se concluye que $\|\varphi_n\| \leqslant 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. ☐

Con esto podemos probar que:

Proposición 4.8.7. *máx es una cuantización estricta.*

Demostración. Para ver que la norma de un espacio de Banach, E, coincide con la norma maximal, basta tener en cuenta (4.18), recordando que en la presente situación $n = 1$, y la Proposición 1.3.5.

Por otra parte, dado un mapa acotado $\varphi : E \to F$ entre espacios de Banach, podemos ver el mismo mapa como $\varphi : E \to \text{máx } F$ conservando la norma. Usamos la afirmación anterior (con $W = \text{máx } F$) y deducimos que $\|\text{máx } \varphi : \text{máx } E \to \text{máx } F\|_{cb} = \|\varphi : E \to \text{máx } F\| = \|\varphi : E \to F\|$. ☐

A diferencia de la cuantización minimal, si tenemos un mapa isométrico $\varphi : E \to F$ no necesariamente el mapa máx φ es completamente isométrico. Sin embargo:

Afirmación 4.8.8. *Si $\varphi : E \to F$ es un mapa isométrico entre espacios de Banach, y tenemos un mapa contractivo $\psi : F \to E$, tal que $\psi \circ \varphi = Id_E$ entonces* máx φ *es completamente isométrico.*

Demostración. Como consecuencia de las hipótesis y de la proposición anterior, tenemos el diagrama conmutativo de mapas completamente contractivos:

$$\begin{tikzcd} \text{máx } E \arrow[r, "\text{máx } \varphi"] \arrow[dr, "\text{máx } Id_E"'] & \text{máx } F \arrow[d, "\text{máx } \psi"] \\ & \text{máx } E \end{tikzcd}$$

Del cual podemos deducir que $(\text{máx } \psi) \circ (\text{máx } \varphi) = \text{máx } Id_E = Id_{\text{máx } E}$. Tomemos $v \in M_n(\text{máx } E)$; sabemos que $\|(\text{máx } \varphi)_n(v)\| \leqslant \|v\|$. Supongamos que la desigualdad es estricta: en tal caso tendríamos que $\|v\| = \|(\text{máx } \psi)_n \circ (\text{máx } \varphi)_n(v)\| \leqslant \|\text{máx } \psi\|_{cb} \|(\text{máx } \varphi)_n(v)\| < \|v\|$, lo que es absurdo. $\square$

Corolario 4.8.9. *Si E es un espacio de Banach y consideramos la inclusión canónica $J : E \to E^{**}$, o sea $J_x(f) = f(x)$, entonces máx J : máx $E \to$ máx E^{**}, es completamente isométrico.*

Demostración. Primero veamos que la tesis vale si $E = M_n$. En este caso el mapa J es una biyección (por las dimensiones). En consecuencia tiene un mapa inverso e isométrico. Por lo tanto estamos en condiciones de aplicar la afirmación anterior.

Para el caso general, tomamos $v \in M_n(\text{máx } E)$. De acuerdo a (4.18): $\|v\|_{\text{máx}} = \sup\{\|f_n(v)\| : f \in b(E)\}$. Pero dado un mapa contractivo $f : E \to M_r$ tenemos un mapa $f^{**} : E^{**} \to M_r^{**}$ con $\|f\| = \|f^{**}\|$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "J_E"'] & M_r \arrow[d, "J_{M_r}"] \\ E^{**} \arrow[r, "f^{**}"'] & M_r^{**} \end{tikzcd}$$

Entonces $\|v\|_{\text{máx}} = \sup\{\|f_n(v)\| : f \in b(E)\} = \sup\{\|(\text{máx } J_{M_r})_n \circ f_n(v)\| : f \in b_r(E)\ r \in \mathbb{N}\} = \sup\{\|(f^{**})_n\big((\text{máx } J_E)_n(v)\big)\| : f \in b_r(E)\ r \in \mathbb{N}\} \leqslant \sup\{\|g_n\big((\text{máx } J_E)_n(v)\big)\| : g \in b_r(E^{**})\ r \in \mathbb{N}\} = \|(\text{máx } J_E)_n(v)\|_{\text{máx}}$. Pero además por ser J_E contractiva, se tiene que $\|(\text{máx } J_E)_n\| \leqslant 1$ y por lo tanto se tiene que $\|v\|_{\text{máx}} \leqslant \|(\text{máx } J_E)_n(v)\|_{\text{máx}} \leqslant \|v\|_{\text{máx}}$. $\square$

4.9. Cuantizaciones y dualidad.

Supongamos que tenemos un espacio de Banach E. Sabemos que los mapas $E^* \to M_n$ que son ω^*-continuos son de la forma $f \to f_n(v)$ para un $v \in \mathbb{M}_n(E)$. Por la construcción de la norma en $M_n(\text{mín } E)$, tenemos una identificación isométrica $M_n(\text{mín } E) \cong \mathcal{B}^\sigma(E^*, M_n)$ (usaremos esto con E^* en lugar de E). Por otro lado, por la construcción de la norma en $M_n(\text{máx } E)$ tenemos la identificación isométrica $M_n((\text{máx } E)^*) \cong \mathcal{CB}(\text{máx } E, M_n) \cong \mathcal{B}(E, M_n) \cong \mathcal{B}^\sigma(E^{**}, M_n)$. La penúltima identificación es por 4.8.6, y la última a través del mapa $\mathcal{B}(E, M_n) \to \mathcal{B}^\sigma(E^{**}, M_n)$, dado por $f \mapsto f^{**}$, que es un isomorfismo isométrico por 5.4.1. Con lo que deducimos que tenemos una identificación isométrica $M_n((\text{máx } E)^*) \cong M_n(\text{mín } (E^*))$. Observar que, si $\iota : (\text{máx } E)^* \to \text{mín } (E^*)$ es la identificación para $n = 1$, entonces las demás vienen dadas por ι_n y por lo tanto tenemos que:

$$(\text{máx } E)^* \text{ es completamente isométrico a mín } (E^*)$$

Veamos ahora qué es lo que sucede con máx (E^*). Primero veamos que si tenemos una C^*-álgebra conmutativa, $\mathcal{Z}$, ésta tiene una estructura natural de espacio de operadores (dada por el teorema de Gelfand-Naimark) y que ésta coincide con su cuantización minimal.

Por el teorema de Gelfand-Naimark tenemos un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto (Ω, τ) y un isomorfismo isométrico $\iota : \mathcal{Z} \to C_0(\Omega)$.

Definición 4.9.1. Mediante la inclusión isométrica $C_0(\Omega) \hookrightarrow l_\infty(\Omega, \mathbb{C})$ tenemos una estructura de espacio de operadores en $C_0(\Omega)$, la cual trasladamos a $\mathcal{Z}$ a través de ι y por ello suponemos $\mathcal{Z} = C_0(\Omega)$. Para la C^*-álgebra conmutativa, $\mathcal{Z}$, tomamos la estructura de espacios de operadores recién definida.

Para ver que la cuantización minimal coincide con la estructura de espacio de operadores anterior, basta probar que dado $v \in \mathbb{M}_n(\mathcal{Z})$ se cumple que

$$\|v\|_{\text{mín}} = \sup_{x \in \Omega} \|v(x)\| \quad \text{donde} \quad v(x) := \big(v_{ij}(x)\big)_{i,j}$$

Consideremos la función $\delta : \Omega \to \mathcal{Z}^*$ $x \mapsto \delta_x$, y $\delta_x(f) = f(x)$. Con ello $\sup\{\|v(x)\| : \ x \in \Omega\} = \sup\{\|(\delta_x)_n(v)\| : \ x \in \Omega\}$ con lo cual deducimos que vale ($\geqslant$).

Para terminar de probar lo que queremos, basta ver que: $(\delta_x)_n(v) \leqslant 1 \ \forall x \in \Omega \Rightarrow \|v\|_{\text{mín}} \leqslant 1$. Por el teorema de Krein-Milman sabemos que $\mathcal{Z}_1^* = \overline{\text{co}\,(\text{ext}(\mathcal{Z}_1^*))}^{\omega^*}$, y por otro lado $\text{ext}(\mathcal{Z}_1^*) = \{\lambda\delta_x : \ \lambda \in \mathbb{C} \ |\lambda| = 1 \ x \in \Omega\}$. Si tomamos $g = \sum_{i=1}^r c_i(\delta_{x_i})$, con $x_1, \ldots, x_r \in \Omega$, y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, tales que $\sum_i |c_i| = 1$, entonces tendremos que $\|g_n(v)\| \leqslant \sum_i |c_i| \|(\delta_{x_i})_n(v)\| \leqslant 1$. De acuerdo a lo dicho antes, dada $f \in \mathcal{Z}_1^*$, tenemos una red (g_λ), tal que cada elemento de ella es de la forma descripta para g y la red converge débil* a f. Por ello: $\|f_n(v)\| = \|\text{lím}_\lambda (g_\lambda)_n(v)\| = \text{lím}_\lambda \|(g_\lambda)_n(v)\| \leqslant 1$.

Hemos hecho esto porque para el espacio de Banach E tenemos una inclusión isométrica $\iota : E \to \mathcal{Z} = C_0(\Omega)$ (por ejemplo $(\Omega, \tau) = (E_1^*, \omega^*)$). Por 4.8.5 tenemos un mapa completamente isométrico mín ι : mín $E \to$ mín $\mathcal{Z}$, es decir que la estructura de mín E es determinada por la de mín $\mathcal{Z}$. Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "J_E"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathcal{Z} \arrow[d, "J_{\mathcal{Z}}"] \\ E^{**} \arrow[r, "\iota^{**}"'] & \mathcal{Z}^{**} \end{tikzcd}$$

Que ι^{**} es una isometría se deduce de que ι es isometría, y por lo tanto ι^* es un cociente exacto. Con esto, y usando que la cuantización minimal es estricta, tenemos que mín ι^{**} : mín $E^{**} \to$ mín $\mathcal{Z}^{**}$ es completamente isométrico.

Por otro lado, podemos ver el mapa ι^{**} como mapa de (mín $E)^{**}$ a mín $\mathcal{Z}^{**}$. Veamos que ι^{**} es completamente isométrico para este caso. Dada $\eta \in M_n((\text{mín } E)^{**}) \cong \mathcal{CB}((\text{mín } E)^*, M_n)$, queremos calcular la norma de $(\iota^{**})_n(\eta) \in M_n((\text{mín } \mathcal{Z})^{**}) \cong \mathcal{CB}((\text{mín } \mathcal{Z})^*, M_n)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \|(\iota^{**})_n(\eta)\| &= \sup\{\|\big(\eta_{ij} \circ \iota^*\big)_n(h)\| : \ h \in M_n((\text{mín } \mathcal{Z})^*)_1\} \\ &= \sup\{\|\eta_n \circ \big((\iota^*)_n(h)\big)_n\| : \ h \in M_n((\text{mín } \mathcal{Z})^*)_1\} \\ &= \sup\{\|\eta_n(g)\| : \ g \in M_n((\text{mín } E)^*)_1\} = \|\eta\| \end{aligned}$$

Para la penúltima igualdad hemos usado que ι_n es una isometría, y por lo tanto $(\iota^*)_n = (\iota_n)^*$ es un cociente exacto.

Concluimos que (mín $E)^{**}$ es completamente isométrico a $\iota^{**}((\text{mín } E)^{**}) \subset (\text{mín } \mathcal{Z})^{**}$. Por otro lado, como $\mathcal{Z}^{**}$ es una C^*-álgebra (ver [3] Corollary 12.1.3), su cuantización minimal es igual a la natural. Por lo tanto las identidades de espacios de operadores: $\mathcal{Z}^{**} = (\text{mín } \mathcal{Z})^{**} = \text{mín } \mathcal{Z}^{**}$. Con lo visto antes:

$$\iota^{**}((\text{mín } E)^{**}) \subseteq \text{mín } \mathcal{Z}^{**} = \text{mín } \mathcal{Z}^{**} \supseteq \text{mín } \iota^{**}\big(\text{mín } E^{**}\big)$$

Deducimos, observando que ι^{**} y mín ι^{**} tienen la misma imagen:

(mín $E)^{**}$ es completamente isométrico a mín (E^{**})

En consecuencia tenemos isometrías completas $(\text{máx } (E^*))^* = \text{mín } E^{**} = (\text{mín } E)^{**}$, que son compatibles con la dualidad (recordar que podemos definir la norma en $M_n(V)$ si conocemos la estructura de V^* como espacio de operadores) y finalmente:

máx (E^*) es completamente isométrico a (mín $E)^*$.

En los argumentos usados antes teníamos en $\mathcal{Z}$ una estructura de espacio de operadores que coincidía con la minimal.

Definición 4.9.2. Para un espacio de operadores completo V decimos que es *minimal* si $V = \text{mín}\, V$, y *maximal* si $V = \text{máx}\, V$.

Proposición 4.9.3. *Si V es un espacio de operadores, entonces V es minimal si y sólo si es completamente isométrico a un subespacio de una C^*-álgebra conmutativa.*

Demostración. Si V es minimal y $\mathcal{Z} = C(V_1^*, \omega^*)$, tenemos una isometría $\iota : V \to \mathcal{Z}$ dada por $\iota(x)\big|_v = v(x)$, que, por 4.8.5, deducimos que tenemos un mapa completamente isométrico $V = \text{mín}\,(V) \to \text{mín}\,\mathcal{Z} = \mathcal{Z}$. Recíprocamente si $\iota : V \to \mathcal{Z} = \text{mín}\,(\mathcal{Z})$ es completamente isométrico, en particular es isométrico y por 4.8.5 tenemos un mapa completamente isométrico $\text{mín}\,\iota : \text{mín}\, V \to \text{mín}\,\mathcal{Z} = \mathcal{Z}$. Como ambos mapas son completamente isométricos y tienen la misma imagen debe ser $V = \text{mín}\, V$. $\square$

También existe una caracterización de los espacios maximales pero la omitiremos pues se necesitan argumentos distintos y algunos resultados que están fuera del alcance del presente trabajo.

4.10. Cuantizaciones en espacios de Hilbert.

Comencemos considerando el espacio de Hilbert $\ell^2 = \{\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < \infty\}$ con el producto interno usual. Nos concentraremos en dos inclusiones de ℓ^2 en $\mathcal{B}(\ell^2)$, con las que damos estructura de espacio de operadores a ℓ^2.

Llamemos e_i al $i-$ésimo elemento de la base canónica de ℓ^2. Un operador $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ se representa por una matriz:

$$\begin{bmatrix} \langle Te_1, e_1\rangle & \langle Te_2, e_1\rangle & \dots \\ \langle Te_1, e_2\rangle & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}.$$

Una inclusión, la inclusión columna $\iota_C : \ell^2 \to \mathcal{B}(\ell^2)$, está dada por:

$$(\lambda_n) \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix},$$

mientras que la inclusión fila, $\iota_R : \ell^2 \to \mathcal{B}(\ell^2)$ está dada por:

$$(\lambda_n) \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Ambas dan a ℓ^2 estructura de espacio de operadores, el espacio columna y el espacio fila respectivamente. En lo que sigue trataremos de generalizar lo anterior para un espacio de Hilbert cualquiera.

4.10.1. El espacio columna.

Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert tenemos que $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ es un espacio de operadores identificando $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n,\mathcal{K}^n)$. En particular $\mathcal{B}(\mathbb{C},\mathcal{H})$ es un espacio de operadores. Consideremos la isometría $C : \mathcal{H} \to \mathcal{B}(\mathbb{C},\mathcal{H})$ dada por $C_\xi(z) = z\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ y $z \in \mathbb{C}$. Con ella definimos una familia de normas $\|\ \|_n : M_n(\mathcal{H}) \to [0,\infty)$, de manera que C sea completamente isométrico, esto es:

Si $C_n : M_n(\mathcal{H}) \to M_n(\mathcal{B}(\mathbb{C},\mathcal{H})) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathcal{H}^n) \quad (x_{i,j})_{i,j} \mapsto (Cx_{i,j})_{i,j}$, entonces:

$$\|\xi\|_n := \|C_n(\xi)\| \quad \forall \xi \in M_n(\mathcal{H})$$

Definición 4.10.1. A $\mathcal{H}$ con la estructura de espacio de operadores antes construida le llamamos el $\mathcal{H}$-espacio columna y lo denotamos $\mathcal{H}_c$.

Observación 4.10.2. Si $\mathcal{H} = \ell^2$, lo que acabamos de definir coincide con el espacio columna del inicio de la sección.

Demostración. Sean $(\lambda^{ij}) \in \mathbb{M}_n(\ell^2)$ y $\beta^1,\ldots,\beta^n \in \ell^2$, tales que $\|\beta^1\|^2+\cdots+\|\beta^n\|^2 \leqslant 1$. Sabemos que:

$$\big(\iota_C(\lambda^{ij})\big(\beta^1,\ldots,\beta^n) = \left(\sum_{k=1}^n \iota_C(\lambda^{1k})(\beta^k),\ldots,\sum_{k=1}^n \iota_C(\lambda^{nk})(\beta^k)\right) = \left(\sum_{k=1}^n \beta_1^k\lambda^{1k},\ldots,\sum_{k=1}^n \beta_1^k\lambda^{nk}\right).$$

Por otro lado:

$$C_n(\lambda^{ij})(\beta_1^1,\ldots,\beta_1^n) = \left(\sum_{k=1}^n \beta_1^k\lambda^{1k},\ldots,\sum_{k=1}^n \beta_1^k\lambda^{nk}\right).$$

A partir de lo anterior es fácil deducir que $\left\|\big(\iota_C(\lambda^{ij})\big)_{i,j}\right\| = \|C_n(\lambda^{ij})\|$. $\square$

A partir de la familia de normas que dan a $\mathcal{H}_c$ estructura de espacio de operadores podemos definir una norma en $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$. Simplemente, dado $v \in M_{m.n}(\mathcal{H}_c)$, tomamos $r \in \mathbb{Z}^+$ mayor que n y m y completamos la matriz v con ceros hasta hacerla de tamaño $r \times r$, a la matriz que resulta le llamamos $\widetilde{v}$. Definimos $\|v\| = \|\widetilde{v}\|$, la propiedad (M1) asegura que la definición no depende de r. Con lo anterior definimos la estructura de espacio de operadores en $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$. Obsérvese que $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$ es isométrico a $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathcal{H}^m)$, y que a su vez $M_{m,n}(\mathcal{B}(\mathbb{C},\mathcal{H}))$ es isométrico a $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathcal{H}^m)$. Por lo tanto, si $C_{m,n} : M_{m,n}(\mathcal{H}_c) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathcal{H}^m) = M_{m,n}(\mathcal{B}(\mathbb{C},\mathcal{H}))$ está dado por $(x_{ij}) \mapsto (C(x_{ij}))$, entonces $C_{m,n}$ es una isometría.

Con lo anterior obtendremos una fórmula para la norma de un elemento $(v_{ij}) \in M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$, en términos de la norma de una matriz compleja.

Observación 4.10.3. Tomemos $\xi \in \mathcal{H}$ y calculemos $(C_\xi)^*$ (el mapa adjunto): $\langle C_\xi(z), h\rangle = \langle z\xi, h\rangle = z\overline{\langle h, \xi\rangle} = \langle z, \langle h, \xi\rangle\rangle_{\mathbb{C}}$. Deducimos pues que $(C_\xi)^*(h) = \langle h, \xi\rangle$. Si identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{C}^*$, mediante $z \to \nu_z$ donde $\nu_z(u) = zu$ para todo $u \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que $(C_\xi)^* C_\eta = \langle \eta, \xi\rangle$.

Veamos cómo usar lo anterior para calcular la norma en $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$; sea $v \in M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$, luego

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|C_{m,n}(v)\| = \|C_{m,n}(v)^* C_{m,n}(v)\|^{\frac{1}{2}} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} \left(C_{m,n}(v)^*\right)_{ik} \left(C_{m,n}(v)\right)_{kj} \right)_{i,j=1}^{n} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ \|v\| &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} (C_{v_{ki}})^* C_{v_{kj}} \right)_{i,j=1}^{n} \right\|^{\frac{1}{2}} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} \langle v_{kj}, v_{ki}\rangle \right)_{i,j=1}^{n} \right\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Por la construcción de $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$ tenemos una isometría $\varphi : M_{m,n}(\mathcal{H}_c) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}^m)$. Ambos son espacios de operadores. Veamos que la isometría da lugar a un mapa completamente isométrico:

$$\begin{tikzcd} M_p\big(M_{m,n}(\mathcal{H}_c)\big) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_p"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & M_{mp,np}(\mathcal{H}_c) \arrow[d] \\ M_p\big(\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}^m)\big) \arrow[r, equal] & \mathcal{B}(\mathbb{C}^{np}, \mathcal{H}^{pm}) \end{tikzcd}$$

Los mapas indicados con $(=)$ son isometrías sobreyectivas (por las construcciones respectivas), y el mapa de la columna derecha es la isometría sobreyectiva que usamos para dar la norma en $M_{mp,np}(\mathcal{H}_c)$. Por lo tanto φ_p es una isometría. Hemos probado que $M_{m,n}(\mathcal{H}_c)$ es completamente isométrico a $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathcal{H}^m)$. En particular: $M_{m,1}(\mathcal{H}_c) \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathcal{H}^m) \cong (\mathcal{H}^m)_c$.

Una definición alternativa para la norma en $M_n(\mathcal{H}_c)$ se puede hacer identificando $M_n(\mathcal{H}_c) \cong M_n \otimes \mathcal{H}$. Para $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)} \in M_n$ y $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{H}$ tendríamos que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{h=1}^{r} \alpha^{(h)} \otimes e_h \right\| &= \left\| \sum_{h=1}^{r} \big(\alpha_{ij}^{(h)} e_h\big)_{i,j} \right\|_c = \left\| \left(\sum_{h=1}^{r} \big(\alpha_{ij}^{(h)} e_h\big)_{i,j} \right)^* \left(\sum_{h=1}^{r} \big(\alpha_{ij}^{(h)} e_h\big)_{i,j} \right) \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \left(\sum_{g,h=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \langle \alpha_{k,j}^{(h)} e_h, \alpha_{ki}^{(g)} e_g\rangle \right)_{i,j} \right\|^{\frac{1}{2}} = \left\| \left(\sum_{k,h} \alpha_{k,j}^{(h)} \alpha_{k,i}^{(h)} \right)_{i,j} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \sum_{h=1}^{r} (\alpha^{(h)})^* \alpha^{(h)} \right\|^{\frac{1}{2}} = \left\| \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha^{(r)} \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \tag{4.21}$$

4.10.2. El espacio fila.

Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tenemos isomorfismos isométricos $\theta : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}^*$ y $R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**} = \mathcal{B}(\mathcal{H}^*, \mathbb{C}) = \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}, \mathbb{C})$ dados por: $\theta_{\overline{h}}(k) = \langle k, h\rangle$ y $R_\eta(\overline{h}) = \theta_{\overline{h}}(\eta) = \langle \eta, h\rangle$.

Como $\mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}, \mathbb{C})$ es un espacio de operadores, podemos inducir en $\mathcal{H}$ una estructura de espacio de operadores. Al espacio resultante lo llamaremos el $\mathcal{H}-$espacio fila y lo denotaremos $\mathcal{H}_r$. Por la definición que acabamos de dar, si $\eta \in M_n(\mathcal{H}_r)$, entonces $R_n(\eta) : \overline{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}^n$, y se define $\|\eta\|_r = \|R_n(\eta)\|$.

También en este caso es posible demostrar que el ℓ^2-espacio fila que acabamos de definir coincide con el espacio fila del inicio de la sección.

Observación 4.10.4. Dado $\eta \in \mathcal{H}_r$, el mapa $(R_\eta)^* : \mathbb{C} \to \overline{\mathcal{H}}$ cumple que $(R_\eta)^*(z) = z\overline{\eta}$.

Demostración. $\langle R_\eta(\overline{\xi}), z\rangle = R_\eta(\overline{\xi})\overline{z} = \langle \overline{z}\eta, \xi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \overline{\xi}, z\overline{\eta}\rangle_{\overline{\mathcal{H}}}$ por lo que $(R_\eta)^*(z) = z\overline{\eta}$. □

Como corolario tenemos que, dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, con la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{C}^*$: $R_\eta(R_\xi)^* = \langle \eta, \xi\rangle$.

Procediendo en forma análoga a lo visto para el espacio columna, dado $\eta \in M_{m,n}(\mathcal{H}_r)$

$$\begin{aligned} \|\eta\|_r = \|R_{m,n}(\eta)\| = \|R_{m,n}(\eta)(R_{m,n}(\eta))^*\| &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} R_{\eta_{ik}}(R_{\eta_{jk}})^* \right)_{i,j} \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} \langle \eta_{ik}, \eta_{jk}\rangle \right)_{i,j} \right\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

También podemos probar que $M_{m,n}(\mathcal{H}_r)$ es completamente isométrico a $\mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}^n, \mathbb{C}^m)$ y tendremos que $M_{1,n}(\mathcal{H}_r) \cong \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}^n, \mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}^n}, \mathbb{C}) \cong (\mathcal{H}^n)_r$.

Nuevamente podemos obtener una expresión para la norma de $M_n(\mathcal{H}_r)$ con la identificación $M_n(\mathcal{H}_r) \cong M_n \otimes \mathcal{H}_r$. Tomemos $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)} \in M_n$ y $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{H}$ ortonormales. Esta vez será:

$$\left\| \sum_{h=1}^{r} \alpha^{(h)} \otimes e_h \right\| = \left\| \sum_{h=1}^{r} \alpha^{(h)}(\alpha^{(h)})^* \right\|^{\frac{1}{2}} = \left\| \left[\alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(r)} \right] \right\| \tag{4.23}$$

Observación 4.10.5. En el caso que dim $\mathcal{H} = 1$ por la ecuación anterior y por (4.21) tenemos que la norma fila y la norma columna coinciden en $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 4.10.6. *Si dim$\mathcal{H} = m > 1$ y tomamos $n \in \mathbb{N}$ entonces las normas en $M_{1,n}(\mathcal{H}_c)$ y $M_{1,n}(\mathcal{H}_r)$ no coinciden.*

Demostración. Podemos suponer que $n \leqslant m$, pues en otro caso completamos con ceros. Tomemos un conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathcal{H}$. Por (4.20)

$$\|(e_1, \ldots, e_n)\|_c = \left\| (\langle e_j, e_i\rangle)_{i,j} \right\| = \|I_n\| = 1$$

En cambio por (4.22) $\|(e_1,\dots,e_n)\|_r = \left\|\sum_{j=1}^n \langle e_j, e_j\rangle\right\|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$ $\square$

Teorema 4.10.7. *Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}) \cong \mathcal{CB}(\mathcal{H}_c,\mathcal{K}_c)$ como espacios de operadores.*

Demostración. Tenemos que ver que, dada una matriz $T \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H},K)) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n,\mathcal{K}^n)$, se tiene que el mapa correspondiente $\widetilde{T} \in M_n(\mathcal{CB}(\mathcal{H}_c,\mathcal{K}_c)) = \mathcal{CB}(\mathcal{H}_c, M_n\mathcal{K}_c)$, tiene la misma norma que T.

El mapa $\widetilde{T}$ se define de acuerdo a $\widetilde{T}(\xi) = \big(T_{kl}(\xi)\big)_{k,l}$. Fijemos $\xi \in M_p(\mathcal{H}_c)$. Podemos escribir $\xi = \sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes f_j$, siendo $\{f_1,\dots,f_r\}$ un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\alpha_j \in M_p$. Definimos $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}\{f_j; j=1,\dots,r\}$ y fijamos una base ortonormal $\{g_1,\dots,g_q\}$ de $\sum_{k,l} T_{k,l}(\mathcal{H}_0)$. Construimos los coeficientes $T_{k,l}(i,j)$, como aquellos que cumplen las ecuaciones: $T_{k,l}(f_j) = \sum_{i=1}^q T_{k,l}(i,j) g_i$ para todo k,l,j. Si $T_0(i,j) = \big(T_{k,l}(i,j)\big)_{k,j} \in M_n$ y $T_0 = (T_0(i,j))_{i,j}$, entonces tenemos que $\|T_0\| \leqslant \|T\|$ por ser la primera la matriz asociada a la restricción de la segunda en subespacios de $\mathcal{H}^n$ y $\mathcal{K}^n$.

El mapa $\widetilde{T}_p = Id \otimes \widetilde{T} : M_p \otimes \mathcal{H}_c \to M_p \otimes M_n \otimes \mathcal{K}_c$ satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_p(\xi) = \widetilde{T}_p\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes f_j\right) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes \widetilde{T} f_j = \sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes \left(\sum_{k,l=1}^n E_{k,l} \otimes T_{kl}(f_j)\right) \\
&= \sum_{j,k,l} \alpha_j \otimes E_{k,l} \otimes \left(\sum_{i=1}^q T_{k,l}(i,j) g_i\right) = \sum_{i,j} \alpha_j \otimes \left(\sum_{k,l} T_{k,l}(i,j) E_{k,l}\right) \otimes g_i \\
&= \sum_{i,j} \alpha_j \otimes T_0(i,j) \otimes g_i
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}_p(\xi)\right\|_{M_{np}(\mathcal{K}_c)} &= \left\|\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes T_0(1,j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r \alpha_j \otimes T_0(q,j)\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} I_p \otimes T_0(1,1) & \dots & I_p \otimes T_0(1,r) \\ \vdots & & \vdots \\ I_p \otimes T_0(q,1) & \dots & I_p \otimes T_0(q,r)\end{bmatrix}\right\| \\
&\leqslant \|I_p \otimes T_0\| \left\|\begin{bmatrix} \alpha_1 \otimes I_n \\ \vdots \\ \alpha_r \otimes I_n\end{bmatrix}\right\| \leqslant \|T\| \|\xi\|_{M_n(\mathcal{H}_c)}
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Para la otra desigualdad, si $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathcal{H}^n$, tomemos un base ortonormal $\{e_1,\dots,e_p\}$ de $\operatorname{span}\{\xi_i : i = 1,\dots,n\}$, y escribamos $\xi_l = \sum_{j=1}^p c_{(l,j)} e_j$, donde $c_{(l,j)} = \langle \xi_l, e_j\rangle$. Consecuentemente $\|\xi\|^2 = \sum_{l,j} |c_{(l,j)}|^2$. Identificamos $M_{m,1}(\mathcal{K}_c) \cong \mathcal{K}_c^m \cong \mathcal{K}^n$ entonces:

$$T(\xi) = \big[\sum_l T_{k,l}(\xi_l)\big]_{k=1\dots n} = \begin{bmatrix} T_{11}(e_1) & T_{12}(e_1) & \dots & T_{11}(e_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ T_{n1}(e_1) & T_{n2}(e_1) & \dots & T_{n1}(e_2) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{(1,1)} \\ \vdots \\ c_{(n,1)} \\ c_{(1,2)} \\ \vdots \\ c_{(n,p)} \end{bmatrix}$$

$$= \Big[\big(T_{k,l}(e_1))\big)_{k,l} \quad \dots \quad \big(T_{k,l}(e_p))\big)_{k,l}\Big] \begin{bmatrix} c_{(1,1)} \\ \vdots \\ c_{(n,1)} \\ c_{(1,2)} \\ \vdots \\ c_{(n,p)} \end{bmatrix} = \widetilde{T}_{1,p}([e_1, \dots, e_p]) \begin{bmatrix} c_{(1,1)} \\ \vdots \\ c_{(n,1)} \\ c_{(1,2)} \\ \vdots \\ c_{(n,p)} \end{bmatrix}$$

Usando la identificación $M_n(M_{1,p}(\mathcal{K}_c)) \cong M_{n,np}(\mathcal{K}_c)$ y lo anterior:

$$\|T(\xi)\| \leqslant \|\widetilde{T}_{1,p}([e_1, \dots, e_p])\| \|(c_{(k,l)})\| \leqslant \|\widetilde{T}\|_{cb} \|[e_1, \dots, e_p]\|_c \|\xi\| = \|\widetilde{T}\|_{cb} \|\xi\|$$

□

De acuerdo al teorema anterior y a (4.10.5) tenemos la siguiente cadena de isomorfismos completemente isométricos:

$$(\mathcal{H}_c)^* = \mathcal{B}(\mathcal{H}_c, \mathbb{C}) = \mathcal{CB}(\mathcal{H}_c, \mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}^{**}, \mathbb{C}) = (\mathcal{H}^*)_r$$

Ahora si $K = \mathcal{H}^*$ por isomorfismos isométricos:

$$(K_r)^* = ((\mathcal{H}^*)_r)^* = (\mathcal{H}_c)^{**} = \mathcal{H}_c = (\mathcal{K}^*)_c$$

Proposición 4.10.8. *Para espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, tenemos una isometría completa y sobreyectiva $\mathcal{B}(\mathcal{K}^*, \mathcal{H}^*) \cong \mathcal{CB}(\mathcal{H}_r, \mathcal{K}_r)$.*

Demostración. Tenemos isometrías completas:
$\mathcal{CB}(\mathcal{H}_r, \mathcal{K}_r) \cong \mathcal{CB}((\mathcal{K}_r)^*, (\mathcal{H}_r)^*) \cong \mathcal{CB}((\mathcal{K}^*)_c, (\mathcal{H}^*)_c) \cong \mathcal{B}(\mathcal{K}^*, \mathcal{H}^*)$ □

Proposición 4.10.9. *Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tenemos las identificaciones completamente isométricas: $\overline{\mathcal{H}_c} \cong (\overline{\mathcal{H}})_c$ y $\overline{\mathcal{H}_r} \cong (\overline{\mathcal{H}})_r$.*

Demostración. Para la primera, tomemos un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$ formado por $e_1, \ldots, e_n$ y matrices $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(1)} \in M_n$, si $u = \sum_i \alpha^{(i)} \otimes e_i$ sabemos que:
$\|\overline{u}\|_{M_n(\overline{\mathcal{H}_c})} = \|\sum_i \overline{\alpha^{(i)} \otimes e_i}\|_{M_n(\overline{\mathcal{H}_c})} = \|\sum_i \overline{\alpha^{(i)}} \otimes \overline{e_i}\|_{M_n(\overline{\mathcal{H}_c})} = \left\| \left[\sum_i \overline{\alpha_{kj}^{(i)} e_i} \right]_{k,j} \right\|_{M_n(\overline{\mathcal{H}_c})} =$
$\left\| \left[\sum_i \alpha_{kj}^{(i)} e_i \right]_{k,j} \right\|_{M_n(\mathcal{H}_c)} = \|\sum_i \alpha^{(i)} \otimes e_i\|_{M_n(\mathcal{H}_c)} = \|\sum_h \left(\alpha^{(h)}\right)^* \alpha^{(h)}\|^{\frac{1}{2}}$

Pero como el conjunto $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$ es ortonormal en $\overline{\mathcal{H}}$ procediendo como antes:
$\|\overline{u}\|_{M_n((\overline{\mathcal{H}})_c)} = \left\|\sum_i \overline{\alpha^{(i)}} \otimes \overline{e_i}\right\| = \left\|\sum_i \overline{\alpha^{(i)}}^* \overline{\alpha^{(i)}}\right\|^{\frac{1}{2}} = \|\sum_i (\alpha^{(i)})^* \alpha^{(i)}\|^{\frac{1}{2}}$ lo que prueba la primera afirmación, la otra se deduce análogamente. $\square$

Por último, observamos que $(\mathcal{H}_c)^* = (\mathcal{H}^*)_r = (\overline{\mathcal{H}})_r = \overline{(\mathcal{H}_r)}$, y observamos que el mapa $\theta : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}^*$ podría definir un mapa completamente isométrico de $\overline{\mathcal{H}_c}$ a $(\mathcal{H}_c)^*$. Pero por lo de arriba esto no sucede (las normas en $M_n(\overline{\mathcal{H}_c})$ y $M_n(\overline{\mathcal{H}_r})$ no coincden).

4.11. El ejemplo de Pisier.

El objetivo de esta sección es probar que hay una única estructura de espacios de operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de manera que el mapa $\theta : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}^*$ es completamente isométrico.

Para poder demostrarlo introduciremos primero ciertas herramientas que nos permitirán usar una fórmula para la norma que deseamos construir en el espacio de Hilbert. Denotaremos como $\mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ al espacio de los operadores de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$, es decir aquellos operadores para los cuales existe una base ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{K}$, tal que $\sum_i \|Te_i\|^2 < \infty$. En $\mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tomamos la norma $\|T\|_2 = \left(\sum_i \|Te_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y obtenemos un espacio de Banach. Viendo a $\overline{\mathcal{K}}$ como espacio de Hilbert tenemos un mapa bilineal acotado $u : \mathcal{H} \times \overline{\mathcal{K}} \to \mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, dado por $u_{(h,\overline{k})}(g) = \langle g, k \rangle h$, el cual define un mapa $V : \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{K}} \to \mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Veamos que es una isometría.

Denotaremos $V(\eta \otimes \overline{\xi}) = x_{\eta \otimes \overline{\xi}} = u(\eta, \overline{xi})$.

Sea $v = \sum_{r,j} c_{(r,j)} \eta_r \otimes \overline{\xi_j}$, siendo $(\eta_r)_r$ y $(\xi_j)_j$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ resp. (ver 5.1), entonces:

$$\sum_j \|V_v(\xi_j)\|^2 = \sum_j \left\| \sum_{r,s} c_{(r,s)} x_{\eta_r \otimes \overline{\xi_s}}(\xi_j) \right\|^2 = \sum_j \left\| \sum_r c_{(r,j)} \eta_r \right\|^2 = \sum_{r,j} |c_{(r,j)}|^2 = \|v\|^2$$

Veamos que V es sobreyectivo. Para ello observamos que los operadores de rango finito de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$ son densos en $\mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Como V es una isometría, basta probar que los operadores de rango finito están en la imagen de V. Para un operador de rango finito $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, consideramos $(\xi_j)_{j\in J}$ una base ortonormal de $Im(F)$. Tendremos, para $u \in \mathcal{K}$:

$$F(u) = \sum_{j\in J} \langle u, F^*(\xi_j)\rangle \xi_j = \sum_{j\in J} x_{\xi_j \otimes \overline{F^*(\xi_j)}}(u)$$

lo que quiere decir que $F = V(\sum_j \xi_j \otimes \overline{F^*(\xi_j)})$.

Con la isometría V, tenemos una equivalencia unitaria $\sigma : \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{K}}) \to \mathcal{B}(\mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H}))$ $w \mapsto VuV^{-1}$

Afirmación 4.11.1. *Si $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $a \in \mathcal{B}(K)$ y $x \in \mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ entonces $\sigma(b \otimes \overline{a})(x) = bxa^*$ ($\overline{a}$ es el operador a actuando sobre $\overline{\mathcal{H}}$).*

Demostración. Basta verlo para $x = x_{\eta\otimes\bar{\xi}}$, es este caso:
$\sigma(b \otimes \overline{a})(x) = V(b \otimes \overline{a})V^{-1}(x_{\eta\otimes\bar{\xi}}) = V(b \otimes \overline{a})(\eta \otimes \bar{\xi}) = x_{b\eta\otimes\overline{a\xi}}$. Ahora tomando $z \in \mathcal{K}$
$x_{b\eta\otimes\overline{a\xi}}(z) = \langle z, a\xi\rangle b\eta = b(\langle a^*z, \xi\rangle\eta) = \big(b \circ x_{\eta\otimes\bar{\xi}} \circ a^*\big)(z)$. □

Corolario 4.11.2. *Si $u = \sum_i b_i \otimes \overline{a_i} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathcal{K}})$ entonces:*

$$\|u\| = \sup\Big\{\Big\| \sum_i b_i x a_i^*\Big\|_2 : \ \|x\|_2 \leqslant 1 \ x \in \mathcal{HS}(\mathcal{K}, \mathcal{H})\Big\}$$

Demostración. Sabemos que $\|\sigma(u)\| = \|u\|$, y además $\sum_i b_i x a_i^* = \sigma(u)(x)$, por lo que basta usar la afirmación anterior. □

El producto interno de $\mathcal{H}$ determina un mapa sesquilineal:

$$\langle\langle \cdot \mid \cdot \rangle\rangle : M_m(\mathcal{H}) \times M_n(\mathcal{H}) \to M_m \otimes M_n \ / \quad (\eta, \epsilon) \mapsto [\langle \eta_{i,j}, \epsilon_{kl}\rangle] = \sum_{k,l=1}^{n} \Big([\langle \eta_{ij}, \epsilon_{kl}\rangle]_{i,j=1}^m\Big) \otimes E_{k,l}$$

Dados $\xi, \eta \in M_n(\mathcal{H}) = M_n \otimes \mathcal{H}$ escribimos $\xi = \sum_h \alpha^{(h)} \otimes e_h$ y $\eta = \sum_h \beta^{(h)} \otimes e_h$ siendo $(e_h)_h$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$. Calculemos $\langle\langle \eta | \xi \rangle\rangle$:

$$\langle\langle \eta | \xi \rangle\rangle = \Bigg[\sum_h \beta_{ij}^{(h)} \overline{\alpha_{kl}^{(h)}}\Bigg]_{k,l,i,j} = \sum_h \beta^{(h)} \otimes \overline{\alpha^{(h)}} \in M_n \otimes \overline{M_n} \tag{4.25}$$

Teorema 4.11.3. *Para cualquier espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\xi, \eta \in M_n(\mathcal{H})$ se cumple que:*

$$\|\langle\langle \eta | \xi \rangle\rangle\| \leqslant \|\langle\langle \eta | \eta \rangle\rangle\|^{\frac{1}{2}} \|\langle\langle \xi | \xi \rangle\rangle\|^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Con la notación anterior, usando el corolario previo, y tomando como espacio de Hilbert a $\mathbb{C}^n$ (en tal caso la norma en $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ está dada por el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$), se tiene:

$$\begin{aligned}\|\langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle\| &= \left\|\sum_h \beta^{(h)}\overline{\alpha^{(h)}}\right\| = \sup\left\{\left|\langle\sum_h \beta^{(h)}x\overline{\alpha^{(h)}}, y\rangle\right| : \ x, y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\ \|x\|_2, \|y\|_2 \leqslant 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|tr\left(\sum_h \beta^{(h)}x\overline{\alpha^{(h)}}y^*\right)\right| : \ x, y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\ \|x\|_2, \|y\|_2 \leqslant 1\right\}\end{aligned}$$

Para $x, y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ descomponemos $x = v|x|$, $y = w|y|$ (descomposición polar) y definimos $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$ siendo: $x_1 = v|x|^{\frac{1}{2}}$, $x_2 = |x|^{\frac{1}{2}}$, $y_1 = w|y|^{\frac{1}{2}}$ y $y_2 = |y|^{\frac{1}{2}}$. Tenemos pues las siguientes igualdades:

$$x_1x_1^* = v|x|^{\frac{1}{2}}|x|^{\frac{1}{2}}v^* = v|x|v^* = |x^*|$$
$$y_1y_1^* = |y^*| \quad x_2x_2^* = |x| \quad y_2y_2^* = |y| \quad \||x|\|_2 = \|x\|_2 \quad \||y|\|_2 = \|y\|_2$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\left|tr\left(\sum_h \beta^{(h)}x\big(\alpha^{(h)}\big)^*y^*\right)\right| &\leqslant \sum_h \left|tr\left(\beta^{(h)}x_1x_2\big(\alpha^{(h)}\big)^*y_2^*y_1^*\right)\right| \leqslant \sum_h \left|tr\left(\underbrace{y_1^*\beta^{(h)}x_1}_{\delta}\underbrace{x_2\big(\alpha^{(h)}\big)^*y_2^*}_{\gamma}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_h tr\,(\delta\delta^*)^{\frac{1}{2}}\,tr\,(\gamma^*\gamma)^{\frac{1}{2}} = \sum_h tr\left(y_1^*\beta^{(h)}x_1x_1^*\big(\beta^{(h)}\big)^*y_1\right)^{\frac{1}{2}} tr\left(y_2(\alpha^{(h)})x_2^*x_2\big(\alpha^{(h)}\big)^*y_2^*\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\sum_h tr\left(\beta^{(h)}|x^*|\left(\beta^{(h)}\right)^*|y^*|\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_h tr\left(\alpha^{(h)}|x|\left(\alpha^{(h)}\right)^*|y|\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &\left|\left\langle\sigma\left(\sum_h \beta^{(h)}\otimes\overline{\beta^{(h)}}\right)(|x^*|)\Big||y^*|\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}}\left|\left\langle\sigma\left(\sum_h \alpha^{(h)}\otimes\overline{\alpha^{(h)}}\right)(|x|)\Big||y|\right\rangle\right|^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\leqslant \left\|\sum_h \beta^{(h)}\otimes\overline{\beta^{(h)}}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\sum_h \alpha^{(h)}\otimes\overline{\alpha^{(h)}}\right\|^{\frac{1}{2}} = \|\langle\langle\eta|\eta\rangle\rangle\|^{\frac{1}{2}}\|\langle\langle\xi|\xi\rangle\rangle\|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

□

Definición 4.11.4. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ definimos la norma $\|\ \|_O$ en $M_n(\mathcal{H})$ como $\|\xi\|_O = \|\langle\langle\xi|\xi\rangle\rangle\|^{\frac{1}{2}}$.

Teniendo en cuenta el teorema anterior es inmediato que lo que acabamos de definir es una norma (el teorema anterior prueba el análogo de Cauchy-Schwarz).

Proposición 4.11.5. *Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la norma $\| \; \|_O$ es una norma de espacio de operadores. Si consideramos a $\overline{\mathcal{H}}$ y a $\mathcal{H}^*$ como espacios de operadores a partir de la norma $\| \; \|_O$, entonces el mapa canónico $\psi : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}^*$ es completamente isométrico. Más aún: la norma $\| \; \|_O$ es la única estructura de espacio de operadores en $\mathcal{H}$ para la cual ψ es completamente isométrico.*

Demostración. Primero veamos $(M1)'$: $\|\xi \oplus \eta\|_O^2 = \|\langle\langle \xi \oplus \eta | \xi \oplus \eta \rangle\rangle\|$. Reordenando las filas y columnas: $\|\xi \oplus \eta\|_O^2 = \|\langle\langle \xi|\xi\rangle\rangle \oplus \langle\langle \eta|\eta\rangle\rangle \oplus \langle\langle \xi|\eta\rangle\rangle \oplus \langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle\| = \text{máx}\{\|\xi\|_O^2, \|\eta\|_O^2, \|\xi\|_O\|\eta\|_O\} = \text{máx}\{\|\xi\|_O^2, \|\eta\|_O^2\} = \text{máx}\{\|\xi\|_O, \|\eta\|_O\}^2$ (la segunda igualdad es consecuencia del teorema anterior).

Por otro lado $\langle\langle \alpha\xi\beta | \alpha\xi\beta \rangle\rangle = (\alpha \otimes \overline{\alpha})\langle\langle \xi|\xi\rangle\rangle(\beta \otimes \overline{\beta})$ y como $\|(\alpha \otimes \overline{\alpha})\| = \|\alpha\|\|\overline{\alpha}\| = \|\alpha\|^2$, $\|(\beta \otimes \overline{\beta})\| = \|\beta\|\|\overline{\beta}\| = \|\beta\|^2$, concluimos que $\|\alpha\xi\beta\|_O \leqslant \|\alpha\|\|\xi\|_O\|\beta\|$.

Veamos que ψ es isométrico si consideramos en $\mathcal{H}$ la norma $\| \; \|_O$. Si $\overline{\xi} \in M_n(\overline{\mathcal{H}})$ con $(\overline{\xi})_{kl} = \overline{\xi_{kl}}$, tenemos el mapa $\varphi = \psi_n(\overline{\xi}) \in M_n((\mathcal{H})^*) = \mathcal{CB}(\mathcal{H}, M_n)$, del cual queremos calcular la norma. Para un $\eta \in M_m(\mathcal{H})$ tenemos:
$\varphi_m(\eta) = (\varphi(\eta_{ij})) = \left[\psi_n(\overline{\xi})(\eta_{ij})\right] = \left[\psi(\overline{\xi_{k,l}})(\eta_{ij})\right] = \left[\langle \eta_{ij}, \xi_{k,l}\rangle\right] = \langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle$. Usando esto último y el teorema anterior deducimos que $\|\varphi_m(\xi)\| \leqslant \|\xi\|_O\|\eta\|_O \Rightarrow \|\psi_n(\overline{\xi})\|_{cb} \leqslant \|\overline{\xi}\|$. Tomando $\eta = \frac{1}{\|\xi\|}\xi$ deducimos que $\|\varphi_n(\xi)\| = \|\xi\|$, y por lo tanto que $\|\psi_n(\overline{\xi})\|_{cb} \leqslant \|\overline{\xi}\|$. Esto muestra que ψ es completamente isométrico.

Supongamos que hay otra norma de espacio de operadores en $\mathcal{H}$, digamos $\| \; \|'$, que hace a ψ completamente isométrico. De acuerdo a lo anterior $\|\xi\|' = \sup\{\|\langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle\| : \|\eta\|' \leqslant 1\}$. Tomando $\eta = \frac{1}{\|\xi\|'}\xi$ deducimos que $\|\xi\|' \geqslant \|\xi\|_O$. Por último: $\|\xi\|' = \sup\{\|\langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle\| : \|\eta\|' \leqslant 1\} \leqslant \sup\{\|\langle\langle \eta|\xi\rangle\rangle\| : \|\eta\|_O \leqslant 1\} = \|\xi\|_O$. □

Capítulo 5

Apéndice.

5.1. Espacios de Hilbert y productos tensoriales.

Lema 5.1.1. *Si* $(\mathbf{E}, [\ ,\ ])$ *es un espacio con producto interno, entonces existen un espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *y un mapa lineal e isométrico* $i : \mathbf{E} \to \mathcal{H}$*, tales que:*

- $i(\mathbf{E})$ *es denso en* $\mathcal{H}$
- $[v, w] = \langle i(v), i(w) \rangle \ \forall v, w \in \mathbf{E}$
- *todo mapa lineal acotado entre espacios normados* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$*, siendo* $\mathbf{F}$ *completo, induce un único mapa* $\widetilde{T} : \mathcal{H} \to \mathbf{F}$*, con las propiedades:* $\widetilde{T} \circ i = T$ *y* $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Sea $(\mathcal{H}, i)$ la completación (topológica) de $\mathbf{E}$ como espacio métrico. Observando que $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ es una completación de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$, y que el mapa $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathcal{H} \quad (e, f) \to i(e + f)$ es uniformemente continuo, podemos inducir una suma en $\mathcal{H}$. Lo mismo con el producto por escalares. Esto le da a $\mathcal{H}$ estructura de espacio vectorial.

Ahora consideramos el mapa $[\ ,\ ] : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{C}$, que por lo observado antes induce una forma sesquilineal $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Basta verificar que esta forma es un producto interno en $\mathcal{H}$, y que además la métrica que induce es la misma que la de $\mathcal{H}$ como completación.

Por último, dado el mapa T, por ser acotado es uniformemente continuo. Por lo tanto induce un único mapa $\widehat{T}$, que cumple $\widetilde{T}i = T$. La afirmación ateniente a la norma se deduce de esto último y de que $i(\mathbf{E})$ es denso en $\mathcal{H}$. $\square$

Proposición 5.1.2. *Si* $\mathcal{H}$ *y* $\mathcal{K}$ *son* $\mathbb{C}$*-espacios de Hilbert, y* $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ *es el poducto tensorial (algebraico) de* $\mathcal{H}$ *y* $\mathcal{K}$*, entonces el mapa* $\langle \cdot , \cdot \rangle : (\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}) \times (\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}) \to \mathbb{C}$*, dado por* $\langle h \otimes k, h' \otimes k' \rangle = \langle h, h' \rangle \langle k, k' \rangle \ \forall h, h' \in \mathcal{H} \ k, k' \in \mathcal{K}$*, es un producto interno.*

Demostración. La construcción del mapa puede realizarse a partir de la propiedad universal del producto tensorial.

Verifiquemos que si $u \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$, entonces $\langle u, u\rangle \geqslant 0$, y que $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$. Sabemos que $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i$, para algunos $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ y un conjunto ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $\mathcal{K}$. Luego:

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= \langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i, \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i \otimes e_i, x_j \otimes e_j\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_i \langle x_i, x_i\rangle = \sum_i \|x_i\|^2\end{aligned}$$

De esto se deduce que $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ y que $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$. □

Para la siguiente proposición en $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ tomamos el producto interno que construimos antes.

Proposición 5.1.3. *Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son $\mathbb{C}$-espacios de Hilbert, y $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ es el poducto tensorial (algebraico) de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, entonces existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, y un mapa $i : \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, tales que:*

- *i preserva el producto interno, esto es: $\langle u, v\rangle = \langle i(u), i(v)\rangle$ $\forall u, v \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$.*
- *$i(\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K})$ es denso en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.*
- *Si: $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{K}'$ son espacios de Hilbert, $i' : \mathcal{H}' \otimes_a \mathcal{K}' \to \mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}'$ es el mapa que da la tesis de este teorema, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$, y $T \otimes_a S : \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K} \to \mathcal{H}' \otimes_a \mathcal{K}'$ es el único tal que $(T \otimes_a S)(x \otimes y) = Tx \otimes Sy$, entonces tenemos un mapa $T \otimes S \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}')$, con $\|T \otimes S\| = \|T\|\|S\|$ y tal que $(T \otimes S)i = i'(T \otimes_a S)$.*

Demostración. Los primeros dos ítemes se deducen directamente aplicando 5.1.3.

Respecto de lo último, usando los resultados antes citados, sólo resta ver que $T \otimes_a S : \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K} \to \mathcal{H}' \otimes_a \mathcal{K}'$ es un mapa acotado tal que $\|T \otimes_a S\| = \|T\|\|S\|$.

Supongamos que $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$ y $S = Id$ (el mapa identidad), luego $T \otimes_a S = T \otimes_a Id$.

Sea $u \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$; podemos suponer que $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i$ con $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{K}$. Luego: $\|u\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$ y

$$\|(T \otimes_a I)(u)\|^2 = \|\sum_i Tx_i \otimes_a e_i\|^2 = \sum_{i,j} \langle Tx_i, Tx_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \sum_i \|Tx_i\|^2 \leqslant \|T\|^2\|u\|^2.$$

De lo anterior se deduce que $\|T \otimes_a I\| \leqslant \|T\|$.

Ahora, en el caso general: $\|T \otimes_a S\| = \|(T \otimes_a Id_{\mathcal{K}})(Id_{\mathcal{K}'} \otimes_a S)\| \leqslant \|T\|\|S\|$.

Por último, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente tales que: $\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\|Tx_n\| \to \|T\|$ y $\|Sx_n\| \to \|S\|$. Entonces $\|x_n \otimes_a y_n\| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y $\|(T \otimes_a S)(x_n \otimes_a y_n)\| = \|Tx_n\|\|Sy_n\| \to \|T\|\|S\|$.

Con esto concluimos que $\|T \otimes_a S\| = \|T\|\|S\|$ y terminamos la prueba. □

De acuerdo a la proposición anterior podemos pensar $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ como incluido en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Hallemos una base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Sean $(e_i)_{i\in I}$ y $(f_j)_{j\in J}$ bases oronormales de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente. Afirmamos que $\mathcal{O} = (e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Primero observamos que es un conjunto ortonormal.

Ahora supongamos que $u \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ es tal que $\langle u, e_i \otimes f_j\rangle = 0, \forall i \in I, j \in J$. Queremos ver que $u \in (\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K})^\perp$, y por lo tanto $u = 0$. Si $v \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ queremos probar que $\langle u, v\rangle = 0$. Escribimos $v = \sum_{r=0}^{k} x_r \otimes y_r$ con $k \in \mathbb{N}$. Veremos que v es límite de una red donde cada elemento de ésta es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{O}$, de ello deducimos que $\langle u, v\rangle = 0$.

Veamos pues que v es el límite de una red con las características anteriores. Basta verificarlo para el caso $v = x \otimes y$. Si F y G son subconjuntos finitos de I y J respectivamente, consideremos $x_F = \displaystyle\sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i$, e $y_G = \displaystyle\sum_{j\in G}\langle y, f_j\rangle f_j$. Luego $x_F \otimes y_G = \displaystyle\sum_{(i,j)\in F\times G} \langle x, e_i\rangle\langle y, f_j\rangle e_i \otimes f_j$.

Por otro lado: $\|x \otimes y - x_F \otimes y_G\| \leqslant \|x - x_F\|\|y\| + \|x\|\|y - y_G\|$, y como sabemos que $\lim_F \|x - x_F\| = \lim_G \|y - y_G\| = 0$ tenemos lo que queríamos.

5.2. Resultados sobre operadores en espacios de Hilbert.

Lema 5.2.1. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ $\mathbb{F}-$espacios de Hilbert donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\rho : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{F}$ una forma sesquilineal acotada. Entonces existen únicos operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, tales que $\rho(h, k) = \langle Th, k\rangle_{\mathcal{K}} = \langle h, Sk\rangle_{\mathcal{H}}$, $\forall h \in \mathcal{H}$, y $k \in \mathcal{K}$.*

Lema 5.2.2. *Si T es un operador acotado sobre un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces T es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos 5.2.3. *Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto entonces:*

- *$sp(T) \subset sp_p(T) \cup \{0\}$. (El espectro puntual de T es $sp_p(T) = \{\lambda \in sp(T) :\ T - \lambda$ no es inyectivo $\}$)*
- *$sp_p(T) \setminus \{0\}$ es finito o infinito numerable. En el último caso $sp_p(T) \setminus \{0\} = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$ y $\lim_n \lambda_n = 0$.*
- *Si $\lambda \in sp_p(T) \setminus \{0\}$ entonces $Ker(T - \lambda)$ es de dimensión finita.*
- *Existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T.*
- *Si P_n es la proyección ortogonal sobre $Ker(T - \lambda_n)$ entonces:*
    1. *$0 = P_nP_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.*
    2. *$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_n$, es decir $\lim_N \left\|T - \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n\right\| = 0$.*

5.2.1. Operadores compactos y de tipo traza.

Los resultados necesarios para este tópico están en la sección *6.3* de [9]. Por ello solamente proporcionamos una demostración elemental de un lema que, en el texto citado, se prueba acudiendo a una versión del teorema espectral más general que la de la página anterior.

Lema 5.2.4. *Para un operador acotado y positivo S sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se cumple que: si la suma $\sum_k \langle Ae_k, e_k\rangle$ es finita para alguna base ortonormal (e_k) de $\mathcal{H}$, entonces es finita para cualquier base ortonormal y no depende de la base. Además A es compacto.*

Demostración. Si (f_j) es otra base ortonormal, por el teorema de Fubini tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_j \langle Af_j, f_j\rangle &= \sum_j \sum_{k,l} \langle f_j, e_k\rangle \overline{\langle f_j, e_l\rangle} \langle Ae_k, e_l\rangle = \sum_{k,l} \sum_j \langle f_j, e_k\rangle \overline{\langle f_j, e_l\rangle} \langle Ae_k, e_l\rangle \\ &= \sum_{k,l} \langle e_k, e_l\rangle \langle Ae_k, e_l\rangle = \sum_k \langle Ae_k, e_k\rangle.\end{aligned}$$

Para ver que A es compacto, tomamos $B = A^{\frac{1}{2}}$ de acuerdo a 5.3. Alcanza con ver que B es compacto. Para ello basta probar que dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ con $\|x_n\| \leqslant 1$ entonces $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

Observamos que dada la base ortonormal $(e_k)_{k\in I}$, se tiene que $H^2 = \sum \langle Be_k, Be_k\rangle < \infty$ (suponemos que la suma no es cero pues en ese caso la tesis es inmediata).

Fijamos la sucesión (x_n) como arriba. Dado $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $I_n = \{k \in I : \langle x_n, e_k\rangle \neq 0\}$ es numerable, y por lo tanto $J_0 = \bigcup_n I_n$ es numerable. Concluimos que $J := J_0 \cup \{k \in I : \|Be_k\| \neq 0\} = \{j_1, j_2, \dots\}$ también es numerable.

Ahora dado $N \geqslant 1$, definimos $P_N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como la proyección otrtogonal sobre $\operatorname{span}\{e_{j_i} : 1 \leqslant i \leqslant N\}$ y $J_N = \{j_1, \dots, j_N\}$. Por otro lado, consideramos $x_n^0 = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $N \geqslant 1$ sabemos que $\left(P_n(x_n^{N-1})\right)_n$ es una sucesión acotada en un espacio de dimensión finita, y por lo tanto $\left(x_n^{N-1}\right)_n$ tiene una subsucesión, que denotaremos $\left(x_n^N\right)_n$, tal que $\left(P_n(x_n^N)\right)_n$ es convergente.

Tomemos la subsucesión de (x_n) dada por $\left(x_N^N\right)_{N\geqslant 1}$, y veamos que $\left(Bx_N^N\right)_{N\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy, lo que concluirá la prueba.

$$
\begin{aligned}
\|Sx_{N+p}^{N+p} - Sx_N^N\| &\leqslant \sum_k |\langle x_{N+p}^{N+p} - x_N^N, e_k\rangle| \|Be_k\| = \sum_{k\in J_M} |\langle x_{N+p}^{N+p} - x_N^N, e_k\rangle| \|Be_k\| + \\
&+ \sum_{k\in I-J_M} |\langle x_{N+p}^{N+p} - x_N^N, e_k\rangle| \|Be_k\| \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{k\in J_M} |\langle x_{N+p}^{N+p} - x_N^N, e_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \|Se_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \left(\sum_k |\langle x_{N+p}^{N+p} - x_N^N, e_k\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in I-J_M} \|Se_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\leqslant \|Px_{N+p}^{N+p} - Px_N^N\| H + \|x_{N+p}^{N+p} - x_N^N\| \left(\sum_{k\in I-J_M} \|Se_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|Px_{N+p}^{N+p} - Px_N^N\| H + 2 \left(\sum_{k\in I-J_M} \|Se_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{k\in I-J_M} \|Se_k\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{16}$. Además existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $N \geqslant N_0$ y $p \geqslant 0$, entonces $\|Px_{N+p}^{N+p} - Px_N^N\| < \frac{\varepsilon}{2H}$. Por lo tanto

$$\|Sx_{N+p}^{N+p} - Sx_N^N\| < \varepsilon \quad \text{si} \;\; N \geqslant N_0 \; p \geqslant 0 \;\; M \;\; \text{como antes.}$$

□

Definición 5.2.5. Para un operador positivo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos $tr(A) = \sum_k \langle Ae_k, e_k\rangle$ para una base ortonormal $(e_k)_{k\in I}$ (la suma puede ser infinita).

Lema 5.2.6 (Descomposición polar). *Dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, si $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ entonces existe un único operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que $A = U|A|$, $U\big|_{Ran|A|\perp} = 0$ y $U\big|_{Ran|A|}$ es una isometría.*

Demostración. Tenemos que $\|Ax\|^2 = \langle |A|^2 x, x\rangle = \||A|x\|^2$. Si existe un tal U, entonces en $Ran(|A|)$ debe estar definida por $U(|A|x) = Ax$. Veamos que la definición no depende de la elección de $|A|x$: si $|A|x = |A|y$, entonces por lo anterior $\||A|(x-y)\|^2 = 0$. Además es inmediato que U es una isometría en $Ran(|A|)$. Podemos extender U a $\overline{Ran|A|}$, por ser este último una completación de $Ran|A|$ y U uniformemente continua. Como debe ser $U_{Ran|A|\perp} = 0$, U queda definida en $\mathcal{H}$. □

5.3. Raíz de un operador positivo.

En esta sección resumimos algunos resultados, extraídos de [7], que nos permiten resolver el siguiente problema: dado un operador positivo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ encontrar un (único) operador positivo $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T = S^2$.

Lema 5.3.1 (Desigualdad de Schwarz generalizada). *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es positivo entonces:*

$$|\langle Ah, k\rangle| \leqslant \langle Ah, h\rangle\langle Ak, k\rangle \quad \textit{para todos}\, h, k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Demostración. Dado $t \in \mathbb{R}$ consideramos $u_t = h + t\langle Ah, k\rangle k$, planteamos la ecuación $0 \leqslant \langle Au_t, u_t\rangle$, desarrollamos el producto $\langle Au_t, u_t\rangle$ (usando que A es autoadjunto) para obtener un polinomio de segundo grado en t. Obtenemos la tesis planteando que el discriminante del polinomio debe ser no positivo. □

Teorema 5.3.2. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores positivos tales que:*

- $A_{n+1} - A_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
- $\sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Entonces $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge punto a punto en norma a un operador $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positivo. Con la convergencia nos referimos a que:

$$\lim_n \|Rx - A_n x\| = 0 \quad \textit{para todo}\, x \in \mathcal{H}$$

Demostración. Ver [7] □

Teorema 5.3.3. *Dado un operador positivo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe un único operador positivo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que $A = T^2$. A este operador T lo denotaremos mediante$A^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Ver [7] □

5.4. Topologías débiles en espacios de Banach.

Teorema 5.4.1. *Si V, W son espacios de Banach y $\varphi : W^* \to V^*$ es un mapa lineal, entonces φ es ω^*-continuo si y sólo si $\varphi\big|_{W_1^*}$ es ω^*-continuo con la topología relativa. En este caso existe un único mapa $\psi : V \to W$ lineal, acotado, y tal que $\psi^* = \varphi$.*

Demostración. Para la equivalencia sólo es necesario probar el recíproco. Observamos que φ es acotada, pues $\varphi(V_1^*)$ es ω^* compacto, y usando el teorema de la acotación uniforme se deduce que $\varphi(V_1^*)$ es acotado en norma.

En caso de existir una ψ como en la tesis, tendríamos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "J_V"'] & W \arrow[d, "J_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\psi^{**}=\varphi^*"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

donde los mapas J son los canónicos. Sabemos que los mapas $J_V : V \to V^{**}$ y $J_W : W \to W^{**}$ son isometrías, y por el teorema de Banach son isomorfismos de espacios de Banach sobre su imagen. En caso que $\varphi^*(Im(J_V)) \subset Im(J_W)$, el mapa ψ queda únicamente determinado por $\psi = \left(J_W\big|_{Im(J_W)}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ J_V$, lo que implicaría que ψ es acotada.

Para ver que $\varphi^*(Im(J_V)) \subset Im(J_W)$ basta observar que el espacio dual de W^* con la topología ω^*, es W. A partir de lo anterior se deduce que $\varphi = \psi^*$, con ψ acotado, por lo tanto ψ^* es ω^*-continua. $\square$

Lema 5.4.2. *Si V es de Banach y X es un subespacio cerrado en norma de V^*, entonces X es ω^*-cerrado si y sólo si X_1 es ω^*-cerrado. Además existe un subespacio W de V, tal que $X = W^\perp$ (el anulador), y tenemos un ω^*-isomorfismo lineal e isométrico entre X y $(V/W)^*$.*

Demostración. El directo es inmediato, y el recíproco es consecuencia del teorema de Krein-Smulian. Para el resto de las afirmaciones consideremos $W = X_\perp = \{x \in V : f(x) = 0 \ \forall f \in X\}$, es inmediato que W es ω es un subespacio cerrado. Por lo tanto W es cerrado en norma. Ahora $W^\perp = (X_\perp)^\perp = \overline{X}$ con la topología ω^*, entonces $W^\perp = X$.

Por un lado, dada $f \in W^\perp$ tenemos que $W \subset Ker(f)$, y por lo tanto f induce una única funcional $\widetilde{f} : V/W \to \mathbb{C}$, que cumple que $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$, y $f = \widetilde{f} \circ \pi_W$. Con ello tenemos un mapa lineal e isométrico $W^\perp \to (V/W)^*$. Para ver que el mapa es sobreyectivo: dado $\eta \in (V/W)^*$, construimos $\widehat{\eta} = \eta \circ \pi_W$ con π_W la proyección canónica. Es claro que $\widehat{\eta} \in W^\perp$.

Es inmediato que los mapas $W^\perp \to (V/W)^*$ $f \to \widetilde{f}$ y $(V/W)^* \to W^\perp$ $\eta \to \widehat{\eta}$ son ω^*-continuos e inversos uno del otro. $\square$

Bibliografía

[1] Arveson, William B., *On subalgebras of C^*-algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 75, (1969).

[2] Choi, Man Duen and Effros, Edward G., *Injectivity and operator spaces*, J. Functional Analysis, Vol. 24, (1977), Núm. 2.

[3] Dixmier, Jacques, *C^*-algebras*, Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1977).

[4] Effros, Edward G. and Ruan, Zhong-Jin, *Operator spaces*, London Mathematical Society Monographs. New Series, Vol. 23, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, (2000).

[5] Paulsen, Vern, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 146, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1986).

[6] Pisier, Gilles, *Introduction to operator space theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 294, Cambridge University Press, Cambridge, (2003).

[7] Riesz, Frigyes and Sz.-Nagy, Béla, *Functional analysis*, Dover Books on Advanced Mathematics, Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original, Dover Publications Inc., New York, (1990).

[8] Ruan, Zhong-Jin, *Subspaces of C^*-algebras*, J. Funct. Anal., Journal of Functional Analysis, Vol. 76, (1988), Num. 1.

[9] Weaver, Nik, *Mathematical quantization*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2001).

[10] *C^*-algebras: 1943-1993*, Contemporary Mathematics, Vol. 167, Proceedings of the AMS Special Session held in San Antonio, Texas, January 13–14, 1993, American Mathematical Society, Providence, RI, (1994).