

Trabajo Monográfico
Homeomorfismos de Brouwer en \mathbb{R}^2

Javier Correa

Orientador Martín Sambarino

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

El teorema de Traslación de Brouwer afirma que dado un homeomorfismo f del plano, que preserva orientación y no tiene puntos fijos, entonces todo punto del plano pertenece a un encaje topológico propio L de \mathbb{R} , disjunto de su imagen que separa $f(L)$ de $f^{-1}(L)$. Tales curvas son llamadas líneas de Brouwer. Patrice Le Calvez en el 2004 probó que es posible construir una foliación del plano por líneas de Brouwer. Este trabajo consiste en probar este último teorema, incluyendo los resultados previos para que sea autocontenido.

Abstract

The Brouwer's Translation Theorem asserts that, given an homeomorphism f of the plane, which preserves orientation and is fixed point free; then every plane's point, belongs to a proper topological imbedding L of \mathbb{R} , disjoint from its image and separating $f(L)$ and $f^{-1}(L)$. Such curves are called Brouwer's lines. Patrice Le Calvez in 2004 proved that its posible to construct a foliation of the plane by Brouwer's lines. This work consists in prove the last theorem, including previous results making it selfcontain.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Notaciones	1
1.3. Introducción	2
2. Lemas de Existencia de Puntos Fijos	5
2.1. Primer Lema - Discos Desbordantes	5
2.2. Segundo Lema - Arcos de Traslación	7
2.3. Tercer Lema - Puntos Periódicos	9
2.4. Cuarto Lema - Cadenas de Discos Libres Periódicas	10
3. Descomposición en Ladrillos	12
3.1. Conceptos Básicos	12
3.2. Descomposiciones Libres y Maximales	13
3.3. Órbitas de los Ladrillos	15
3.4. Existencia de una Descomposición Libre y Maximal	16
3.5. Conexión en B	22
3.6. Propiedades de una Descomposición Libre y Maximal	22
3.7. Subconjuntos Atractores y Repulsores de B	27
4. Líneas de Brouwer en el Esqueleto	29
4.1. E -Líneas de Brouwer	29
4.2. Espacio de las E -Líneas de Brouwer	32
4.3. Intersecciones de las E -Líneas	33
4.4. Propiedades del espacio Λ'	36
5. Foliación de \mathbb{R}^2 por Líneas de Brouwer	43
5.1. Construcción de una Quasi-Foliación	43
5.2. Construcción de una Foliación	47

1. Introducción

1.1. Preliminares

Este trabajo es prácticamente autocontenido. Para su lectura se necesita principalmente nociones básicas de topología. Los únicos tres teoremas destacados que usaremos y pero no demostraremos son los siguientes:

Teorema (de Punto Fijo de Brouwer). *Sea D un conjunto homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : D \rightarrow D$ una función continua. Entonces, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema (de Jordan). *Sea I es un intervalo compacto de \mathbb{R} y $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapa continuo e inyectivo excepto en sus extremos donde valen lo mismo. Entonces $\mathbb{R}^2 - \gamma(I)$ tiene exactamente dos componentes conexas, una acotada y la otra no.*

Teorema (de Schönflies). *Sea I es un intervalo compacto de \mathbb{R} y $\gamma : I \rightarrow S^2$ un mapa continuo e inyectivo excepto en sus extremos donde valen lo mismo. Entonces $S^2 - \gamma(I)$ tiene exactamente dos componentes conexas. Además cada una de estas es isotópica a disco de S^2 .*

1.2. Notaciones

Consideraremos \mathbb{R}^2 con su orientación y su estructura euclidea usual.

Llamaremos *disco* de \mathbb{R}^2 a cualquier subconjunto del plano, homeomorfo al conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Notaremos como $\mathring{int}(A)$ al interior de A . Si bien, podríamos usar de forma más cómoda $\overset{\circ}{A}$, en algunas partes, la notación quedaría sobrecargada de símbolos.

Una *foliación topológica unidimensional* de \mathbb{R}^2 es una descomposición del plano en subvariedades topológicas de dimensión 1 disjuntas que verifica lo siguiente: si llamamos *hoja* a cada subvariedad de la descomposición, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existe un abierto U_x y un homeomorfismo $h_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que para toda hoja L que intersecta a U , existe una constante c_L tal que $L \cap U = \{y \in U : h(y) = (h_1(y), c_L)\}$.

Llamaremos *arco* a todo mapa de $I \subset \mathbb{R}$ (un intervalo compacto) a \mathbb{R}^2 continuo e inyectivo a menos de los bordes. En la sección 2, que trabajaremos con arcos de traslación los bordes podrán tener la misma imagen. Sin embargo, a partir de la sección 3 los extremos de un arco serán distintos. Por lo general nos referiremos a un arco como toda la clase de equivalencia, dada por reparametrizaciones de la curva de forma estrictamente creciente. Pese a esto, en algunos casos lo importante será la imagen y no la orientación y en dicha situación nos referiremos como arco a toda la clase de equivalencia, dada por reparametrizaciones, crecientes o decrecientes. En todo caso, quedará claro la importancia de la orientación. En particular, en la notación, no distinguiremos entre la curva y su imagen.

Llamaremos *grafo del plano* a una dupla (A, V) donde A es una familia de arcos del plano, $V \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado y discreto y además $\forall a \in A$, los extremos de a son elementos de V . Decimos que es un *grafo dirigido* si los arcos están orientados y

existen dos funciones $e, s : A \rightarrow V$ tales que $s(a)$ y $e(a)$ son los extremos inicial y final de a respectivamente. Decimos que es un *grafo no dirigido* si los arcos no están orientados.

Llamaremos *línea* de \mathbb{R}^2 a todo mapa de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 , continuo, propio e inyectivo. O más precisamente, a toda la clase de equivalencia dada por reparametrizaciones de la curva de forma estrictamente creciente. Por lo tanto una línea Γ , queda determinada por su imagen y una orientación. Gracias al teorema de Schönflies podemos construir un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva orientación y además tal que $h \circ \Gamma(t) = (0, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. El conjunto cerrado $h^{-1}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ es independiente de h y lo notamos como $R(\Gamma)$. De la misma forma, notamos $L(\Gamma) = h^{-1}((-\infty, 0] \times \mathbb{R})$. En particular $R(\Gamma) - \Gamma$ y $L(\Gamma) - \Gamma$ son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \Gamma$.

Decimos que dos líneas Γ y Γ' *no se intersectan transversalmente* si $\Gamma \subset R(\Gamma')$ o $\Gamma \subset L(\Gamma')$. Esta relación es fácil de verificar que es simétrica. Más precisamente, Γ y Γ' no se intersectan transversalmente si y sólo si una de las siguientes propiedades se cumple:

- $R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$ (y por lo tanto $L(\Gamma') \subset L(\Gamma)$).
- $R(\Gamma') \subset R(\Gamma)$ (y por lo tanto $L(\Gamma) \subset L(\Gamma')$).
- $R(\Gamma) \cup R(\Gamma') = \mathbb{R}^2$ (y por lo tanto $L(\Gamma) \cap L(\Gamma') = \Gamma \cap \Gamma'$).
- $L(\Gamma) \cup L(\Gamma') = \mathbb{R}^2$ (y por lo tanto $R(\Gamma) \cap R(\Gamma') = \Gamma \cap \Gamma'$).

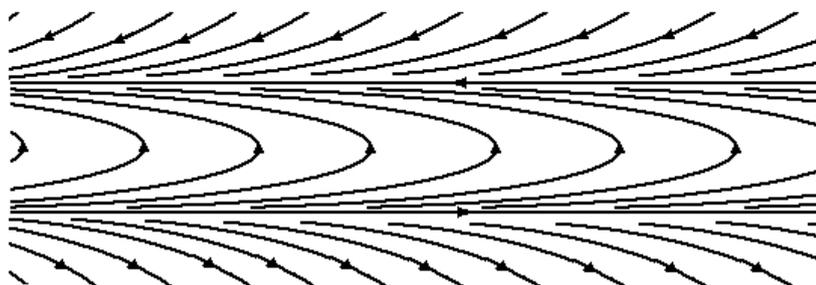
1.3. Introducción

En esta tesis, estudiaremos los homeomorfismos del plano, que preservan orientación y son libres de puntos fijos. A estos mapas los llamaremos *homeomorfismos de Brouwer*. Comencemos por recordar el Teorema de Traslación de Brouwer que afirma lo siguiente:

Teorema (de Traslación de Brouwer). *Sea f un homeomorfismo de Brouwer. Entonces, por todo punto del plano, pasa una línea Γ tal que $f(\Gamma) \subset R(\Gamma) - \Gamma$ y $f^{-1}(\Gamma) \subset L(\Gamma) - \Gamma$.*

Dado f un homeomorfismo de Brouwer, llamaremos *línea de Brouwer* a toda línea que verifica la tesis del Teorema. Además de la demostración original de Brouwer [Br12], deben señalarse las demostraciones debidas a Franks [Fr92], Guillou [Gu94] y Le Calvez, Sauzet [LS96].

El teorema tiene consecuencias inmediatas, que dan una buena descripción de la dinámica de f . Si $U = R(\Gamma) - R(f(\Gamma))$ y consideramos $W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$, entonces W es un abierto, invariante por f y además $f|_W$ es conjugado por un homeomorfismo a la traslación en \mathbb{R}^2 . Naturalmente, nos podemos cuestionar si W debe ser \mathbb{R}^2 . Es decir, si todo homeomorfismo de Brouwer es conjugado a la traslación. La respuesta a tal pregunta es negativa. Para eso, tengamos en mente el siguiente ejemplo. Supongamos que f , es el tiempo 1 del flujo que tiene por órbitas, las mostradas en el dibujo.



Sean L_1 y L_2 las dos rectas horizontales que son invariantes por f . Una propiedad dinámica que cumplen las traslaciones es que para todo C compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se da $f^n(C) \cap C = \emptyset$. Sin embargo, si en nuestro ejemplo, tomamos C un segmento de recta que une un punto de L_1 con un punto de L_2 . Se verifica fácilmente que $f^n(C) \cap C \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto f no es conjugado a la traslación.

La demostración del teorema, es bastante simple en tres casos particulares.

- f es el tiempo 1 de un flujo, inducido por un campo de vectores de clase C^1 .
- f se encuentra C^1 cerca de la identidad. O más precisamente, Df_z no posee valores propios negativos para ningún $z \in \mathbb{R}^2$.
- f es un difeomorfismo que baja al toro y es isotópico a la identidad.

Analizaremos únicamente el primer punto. Si $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el campo de vectores que induce a f , sea $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de vectores dado por $u = r_{\pi/2} \circ v$; donde $r_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la rotación de ángulo $\pi/2$. Es decir, v es un campo ortogonal a u . Puesto que f no tiene puntos fijos, por el teorema de Poincaré-Bendixon sabemos que v no puede tener singularidades y por lo tanto u tampoco. Por no tener singularidades, nuevamente por Poincaré-Bendixon, sabemos que las órbitas del flujo inducido por u tienen que ser líneas. En particular, estas órbitas son líneas de Brouwer para f , y en verdad, de esto obtenemos una foliación C^1 del plano por líneas de Brouwer. Más aún, si queremos podemos aproximar u por un campo C^∞ y así obtener una foliación C^∞ del plano por líneas de Brouwer.

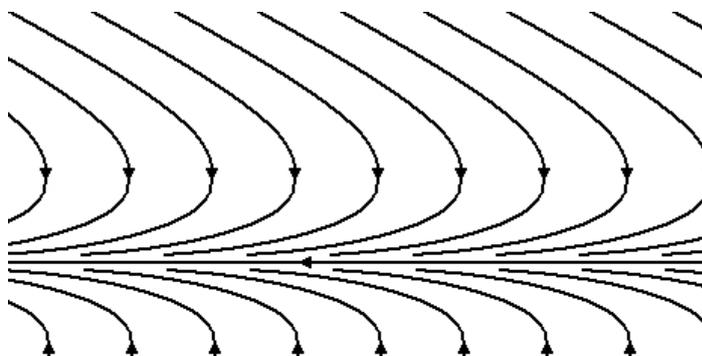


Figura 1: Órbitas del flujo inducido por el campo ortogonal del ejemplo anterior.

De los otros dos casos, podemos obtener también una foliación C^∞ del plano por líneas de Brouwer. El segundo es relativamente sencillo y el tercero es más complicado, cuyas ideas para la demostración, vienen de la geometría simpléctica. Estas situaciones, sugieren la pregunta natural de si es posible para cualquier homeomorfismo f de Brouwer, encontrar una foliación del plano por líneas de Brouwer. Le Calvez en [LeC04] da una respuesta afirmativa a esta pregunta y sobre ese trabajo, se basa este principalmente.

Teorema (de Le Calvez). *Si f es un homeomorfismo de Brouwer, entonces existe una foliación topológica del plano, donde las hojas son líneas de Brouwer de f .*

El teorema de traslación de Brouwer, es frecuentemente aplicado en el estudio de la dinámica de difeomorfismos o homeomorfismos de superficies. El teorema anterior, dice en particular que podemos elegir continuamente una línea de Brouwer por todo punto del plano. Observemos además, que la dinámica de una foliación, es de cierta forma transversal a la dinámica del homeomorfismo. Por todo punto $z \in \mathbb{R}^2$ podemos tomar un arco γ_z que una z con $f(z)$, tal que γ sea transversal a la foliación. La concatenación de los arcos $\gamma_{f^n(z)}$ forman una línea transversal a la foliación que contienen la órbita de z .

La principal herramienta para demostrar el teorema de Le Calvez es la noción de descomposición en ladrillos, libre y maximal, del plano. La noción de descomposición libre es introducida por Flucher [Fl90] para mostrar la existencia de un punto fijo en la versión topológica del teorema de Conley-Zehnder en dimensión dos. Además, es utilizada en [LS96] para obtener una demostración topológica del teorema de traslación de Brouwer. La noción de descomposición en ladrillos libre y maximal es desarrollada y utilizada por Sauzet en su tesis [Sa01]. También fue aplicada por Le Roux [LeR01] en un estudio de la dinámica de homeomorfismos del plano cerca de un punto fijo con índice de Lefschetz $\neq 1$.

En la sección 2, comenzaremos a desarrollar una de las principales herramientas que daremos forma en la sección 3. Sin embargo, esta sección tiene interés propio puesto que da una noción e información, acerca de la dinámica de un homeomorfismo que preserva orientación en el plano. Los resultados de esta sección son debidos a Brouwer y pueden encontrarse también en [Br84]. En la sección 3, veremos las principales propiedades de las descomposiciones en ladrillos, obtenidas por Sauzet, aunque, las demostraciones de la mayoría de los resultados de esta sección son originales. En la sección 4, a partir de una descomposición en ladrillos libre y maximal obtendremos una familia de líneas de Brouwer que luego inducirán la foliación. En esta sección estudiaremos las principales propiedades del espacio de tales líneas. En la sección 5, construiremos la foliación del plano por líneas de Brouwer. Sin embargo, construiremos primero una quasi-foliación y de ese punto modificaremos la construcción para obtener finalmente una foliación.

2. Lemas de Existencia de Puntos Fijos

El objetivo de esta sección es desarrollar el preámbulo para una de las herramientas más importantes que será concretada en la siguiente sección. La filosofía de los resultados que aquí se muestran es la siguiente: si tengo un punto que en el primer iterado se aleja pero luego vuelve cerca, entonces necesariamente debe haber un punto fijo cerca. Esto es consecuencia de la falta de direcciones para moverse en \mathbb{R}^2 . Los resultados principales de esta sección tendrán como conclusión que f tiene al menos un punto fijo, por lo tanto a partir de ahora f será un homeomorfismo del plano que solamente preserva orientación.

2.1. Primer Lema - Discos Desbordantes

Lo primero que necesitaremos es la noción de discos de desborde.

Definición 2.1.1. Sean C y D dos discos compactos del plano tales que $\text{int}(C) \cap \text{int}(D) \neq \emptyset$. Si J es una componente conexa de la intersección, donde $\text{int}(J) \neq \emptyset$, sabemos que J es un disco. En esta situación decimos que D desborda a C a lo largo de un arco $\gamma \subset \partial C =: c$ si:

- $\text{int}(\gamma) \subset \partial J$
- los extremos de γ son la intersección de $\partial D =: d$ y γ
- existe un arco $\delta \subset d$ determinado por γ que verifica:
 - $\text{int}(\delta) \cap J = \emptyset$
 - $\gamma \cup \delta$ son la frontera de un disco Δ donde $\text{int}(\Delta) \cap \text{int}(J) = \emptyset$

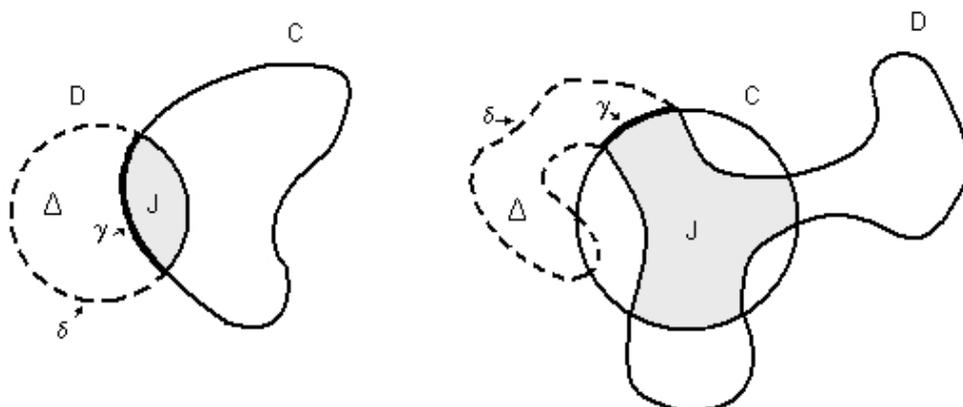


Figura 2: Discos de Desborde

Observación 2.1.2. Como $c \cap d$ es un conjunto cerrado en c y por lo tanto su complemento es abierto se tiene que hay a lo sumo una cantidad numerable de arcos de desborde. Más aún, por ser c homeomorfo a S^1 y estar acotado si hay una cantidad infinita de arcos siendo estos $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $\{\delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ los conjuntos asociados respectivamente, tenemos que $diam(\gamma_i) \xrightarrow{i} 0$, $diam(\delta_i) \xrightarrow{i} 0$ y $diam(\Delta_i) \xrightarrow{i} 0$.

Con esto definido pasamos al primer lema de puntos fijos.

Lema 2.1.3 (Primer Lema de Existencia de Puntos Fijos). *Si $D = f(C)$ donde $f(\gamma_i) \not\subseteq \delta_i$ y $\delta_i \not\subseteq f(\gamma_i) \forall i \in \mathbb{N}$ entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado $i \in \mathbb{N}$, por las condiciones del lema, existe l_i un arco tal que $l_i \subset int(\delta_i)$ y $l_i \cap f(\gamma_i) = \emptyset$. Como Δ_i es un disco, sea $h_i : \Delta_i \rightarrow [0, 1]^2$ un homeomorfismo que preserva orientación donde $h(\gamma_i) = [0, 1] \times \{0\}$ y por lo tanto $h(\delta_i) = \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [0, 1]$. Podemos suponer además que $h(l_i) = [0, 1] \times \{1\}$. Definimos $r : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ tal que $r(x, y) = (x, 0)$, y luego $g : J \rightarrow J$ de la

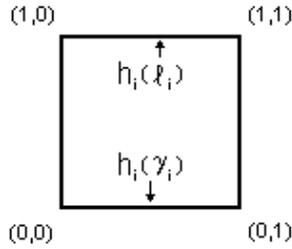


Figura 3: imagen de h_i

siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in J \\ h_i^{-1}(r(h_i(f(x))))), & \text{si } f(x) \in \Delta_i \end{cases}$$

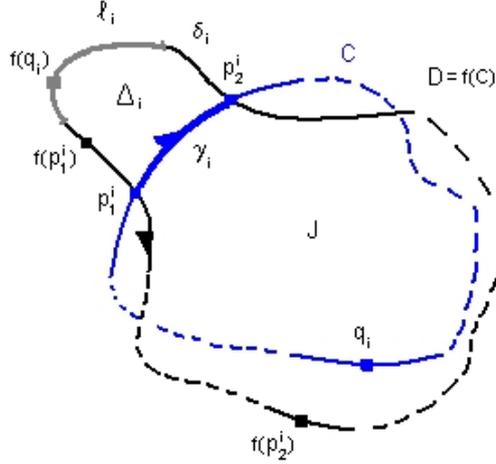
Tenemos entonces una función que en particular es continua. Los únicos puntos donde la continuidad podría ser dudosa es en aquellos $x \in J$ tales que $f(x) \in \gamma_i$. Sin embargo, por la construcción de h_i y r , es claro que para un x en dicha condición se tiene que $h_i^{-1}(r(h_i(f(x)))) = f(x)$ y por lo tanto queda g bien definida y continua.

Puesto que J es un disco y g es continua, por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in J$ tal que $g(x_0) = x_0$. Si $f(x_0) \in J$, tendríamos que $f(x_0) = g(x_0) = x_0$, por lo que terminamos. Supongamos que $f(x_0) \in \Delta_i$ y lleguemos a un absurdo. Si $f(x_0) \in \Delta_i$ entonces $g(x_0) \in \gamma_i$ o sea que $x_0 \in \gamma_i$ y por lo tanto $f(x_0) \in f(\gamma_i) \subset d$, como $f(\gamma_i) \cap l_i = \emptyset$, entonces $h_i(f(\gamma_i)) \subset \{0, 1\} \times [0, 1]$. De esto, por la definición de g , concluimos que $x_0 \in \{p_1^i, p_2^i\}$ donde p_1^i y p_2^i son los extremos de γ_i .

Veamos que esto no puede pasar. Supongamos sin perder generalidad, que $x_0 = p_1^i$ con $h_i(x_0) = (0, 0)$. Si $g(x_0) = x_0$, tenemos que $h_i(f(x_0)) \in 0 \times [0, 1]$. Hay entonces dos casos:

- Si $h_i(f(p_2^i)) \in \{0\} \times [0, 1]$ y además si $h_i(f(p_2^i)) = (0, t_2)$, $h_i(f(p_1^i)) = (0, t_1)$ y $t_1 < t_2$ entonces, $h_i(f(\gamma_i)) \subset \{0\} \times [0, 1]$ y por lo tanto $f(\gamma_i) \subset \delta_i$ lo cual es absurdo.

- Sino ocurre el caso anterior tomando un punto $q_i \in f^{-1}(l_i)$ deducimos que f manda la orientación dada por $p_1^i p_2^i q_i$ en la orientación dada por $f(p_1^i) f(q_i) f(p_2^i)$ contradiciendo que f preserva orientación.



□

Con este resultado, pasamos ahora a la noción de los arcos de traslación y usando el primer lema, obtendremos el segundo lema de existencia de puntos fijos.

2.2. Segundo Lema - Arcos de Traslación

Definición 2.2.1. Decimos que $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un *arco de traslación* si $f(\alpha(0)) = \alpha(1)$ y además $f(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\} = \emptyset$.

Lema 2.2.2 (Segundo Lema de Existencia Puntos Fijos). *Si α es un arco de traslación y existe $n \geq 1$ tal que $f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\} \neq \emptyset$ entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Por simplicidad, notemos $p = \alpha(0)$. Razonemos por absurdo y tomemos $k = \min\{n \geq 1 : f^n(\alpha - \{f(p)\}) \cap \alpha - \{f(p)\} \neq \emptyset\}$. Por la definición de arco de traslación sabemos que $k \geq 2$. Orientamos ahora α para que sea creciente según $t \in [0, 1]$, es decir de p hacia $f(p)$.

Como $f^k(\alpha) \cap \alpha$ es compacto, mirando la preimagen por $(f^k \circ \alpha)^{-1}$ en $[0, 1]$, concluimos que tiene un mínimo t_0 . Definiendo entonces $q = f^k \circ \alpha(t_0)$ resulta ser el primer punto en $f^k(\alpha)$ que intersecta a α . A partir de ahora notaremos $\overline{rs^m}$ como el subarco de $f^m(\alpha)$ que tiene como extremo inicial r y extremo final s , siempre que r y s sean puntos de $f^m(\alpha)$.

Definimos c como la curva dada por la unión compatible de los arcos orientados:

$$c := \overline{qf(p)^0} \cup \overline{f(p)f^2(p)^1} \cup \dots \cup \overline{f^{k-1}(p)f^k(p)^{k-1}} \cup \overline{f^k(p)q^k}$$

Como c es homeomorfa a S^1 por la elección de q , aplicando el teorema de la curva de Jordan sabemos que c separa \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas, una acotada y la

otra no. Definimos C como aquella componente acotada. Sea ahora $D = f(C)$ y $d := \partial D$. Por la definición de c se concluye que

$$d = \overline{f(q)f^2(p)}^1 \cup \overline{f^2(p)f^3(p)}^2 \cup \dots \cup \overline{f^k(p)f^{k+1}(p)}^k \cup \overline{f^{k+1}(p)f(q)}^{k+1}$$

Observemos que, en particular el arco $\overline{f(q)f^2(p)}^1 \cup \overline{f^2(p)f^3(p)}^2 \cup \dots \cup \overline{f^k(p)q}^k$ se encuentra contenido en ambas fronteras con la misma orientación. Si el caso fuera $\text{int}(C) \cap \text{int}(D) = \phi$, tendríamos que f no preserva orientación lo cual es absurdo. Sea J el disco compacto tal que $\text{int}(J)$ es la componente conexa de $\text{int}(C) \cap \text{int}(D)$ que tiene al arco que va desde $f(q)$ hasta q , anteriormente descrito como parte de su borde.

Analicemos ahora los arcos de desborde. Si no hubiera, tenemos que $D = f(C) \subset C$ y por el teorema de punto fijo de Brouwer tenemos un punto fijo en C , por lo que habríamos terminado. Suponiendo que hay arcos de desborde se deben encontrar en $\overline{qf(p)}^0 \cup \overline{f(p)f(q)}^1$ ya que el resto de la frontera de C es compartida con D . La idea ahora es usar el lema anterior, para eso nos resta probar que $\delta \not\subset f(\gamma)$ y $f(\gamma) \not\subset \delta$.

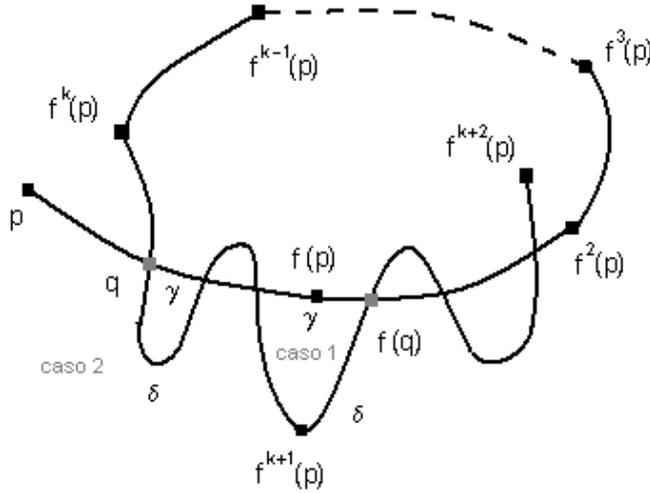


Figura 4: arco de traslación que se corta por primera vez en el k -ésimo iterado

Separemos el estudio en dos casos:

- $\gamma \cap \overline{f(p)f(q)}^1 - \{f(p)\} \neq \phi$. Si ocurriese esto, en verdad $\overline{f(p)f(q)}^1 \subset \gamma$ por la definición de q .
 - $\delta \not\subset f(\gamma)$. Como $\gamma \subset \overline{qf(p)}^0 \cup \overline{f(p)f(q)}^1$, tenemos $f(\gamma) \subset \overline{f(q)f^2(p)}^1 \cup \overline{f^2(p)f^2(q)}^2$. Luego como $\delta \subset \overline{qf^{k+1}(p)}^k \cup \overline{f^{k+1}(p)f(q)}^{k+1}$. En particular $\overline{f^{k+1}(p)f(q)}^{k+1} \subset \delta$ y por lo tanto $f^{k+1}(p) \in \delta$ pero $f^{k+1}(p) \notin f(\gamma)$.
 - $f(\gamma) \not\subset \delta$. Es inmediato porque $f^2(p) \in f(\gamma)$ y si $f^2(p) \in \delta$ estaríamos contradiciendo la minimalidad de k .

- $\gamma \subset \overline{qf(p)}^0$. De esto concluimos que $f(\gamma) \subset \overline{f(q)f^2(p)}^1$. Probemos que $\delta \not\subset f(\gamma)$ y $f(\gamma) \not\subset \delta$
 - $\delta \not\subset f(\gamma)$. Es inmediato porque existe r extremo de δ en $\alpha - \{f(p)\}$ y $f(\gamma) \subset f(\alpha)$.
 - $f(\gamma) \not\subset \delta$. Si no fuera cierto, obtengo $r \in f^k(\alpha - \{f(p)\}) \cap f(\alpha - \{f(p)\})$ y por lo tanto $f^{k-1}(\alpha - \{f(p)\}) \cap \alpha - \{f(p)\} \neq \emptyset$ contradiciendo la minimalidad de k .

□

2.3. Tercer Lema - Puntos Periódicos

A partir del segundo lema, surge inmediatamente el tercer lema que dentro este grupo de resultados. Sin embargo, antes de demostrarlo necesitaremos el siguiente sublema:

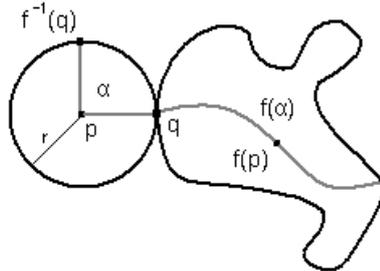
Sub-Lema 2.3.1. *Si f no tiene puntos fijos, entonces dado $p \in \mathbb{R}^2$ existe α un arco de traslación y $t \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t) = p$.*

Demostración. Veamos primero que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{p,\epsilon} \cap f(B_{p,\epsilon}) = \emptyset$. Esto se puede demostrar con un simple argumento de topología y usando que f es un homeomorfismo. Sin embargo, veamos otro argumento poco más complicado, cuya esencia será repetida nuevamente. Razonando por absurdo, podemos construir los conjuntos $C_n = \overline{B_{p,1/n}} \cap \overline{f(B_{p,1/n})}$. Entonces $\{C_n\}_{n \geq 1}$ es una familia decreciente de compactos no vacíos. Luego, la intersección de todos estos es no vacía. Sin embargo, $\bigcap_{n \geq 1} \overline{B_{p,1/n}} = \{p\}$. Por continuidad de f tenemos que $\bigcap_{n \geq 1} \overline{f(B_{p,1/n})} = \{f(p)\}$. De lo que se concluye $p = f(p)$ llegando a un absurdo.

Sea $r = \sup\{\epsilon > 0 : B_{p,\epsilon} \cap f(B_{p,\epsilon}) = \emptyset\}$. Sabemos que existe porque el conjunto se encuentra acotado por $d(f(p), p)$ y además por lo anterior sabemos que $r > 0$.

Observemos que $\overline{B_{p,r}} \cap \overline{f(B_{p,r})} = \partial B_{p,r} \cap \partial f(B_{p,r})$ y no es vacío. Si $q \in \overline{B_{p,r}} \cap \overline{f(B_{p,r})}$, entonces $f^{-1}(q) \in \partial B_{p,r}$. Como $q \neq f^{-1}(q)$ definimos α de la siguiente forma:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2tp + (1 - 2t)f^{-1}(q) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2 - 2t)p + (2t - 1)q & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



Es claro que α es un arco, $\alpha(1/2) = p$, $f(\alpha(0)) = f(f^{-1}(q)) = q = \alpha(1)$ y como $\alpha \subset B_{p,r}$ y $f(\alpha) \subset f(B_{p,r})$, concluimos que $f(\alpha) \cap \alpha \subset \{q, f^{-1}(q)\} = \{\alpha(1), \alpha(0)\}$ por lo que α es un arco de traslación. \square

Lema 2.3.2 (Tercer Lema de Existencia Puntos Fijos). *Si f tiene puntos periódicos, entonces tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Por absurdo supongamos que no tiene puntos fijos. Sea p un punto periódico, por el sub-lema anterior, existe α un arco de traslación y $t \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t) = p$. Luego si $n = \text{per}(p)$ entonces $\{p\} = f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\}$ contradiciendo el 2do Lema. \square

2.4. Cuarto Lema - Cadenas de Discos Libres Periódicas

Apuntamos ahora a demostrar el último lema, el cual será el que utilizaremos luego. Para esto, necesitamos definir el concepto de cadena de discos libres periódica.

Definición 2.4.1. *Una cadena de discos libres periódica es un conjunto de discos del plano D_1, \dots, D_n tales que:*

- $f(D_i) \cap D_i = \emptyset \forall i = 1, \dots, n$
- $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- Para cada $i = 1, \dots, n - 1$ existe m_i tal que $f^{m_i}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$
- existe m_n tal que $f^{m_n}(D_n) \cap D_1 \neq \emptyset$

Sub-Lema 2.4.2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, sean U y V abiertos que contienen al segmento \overline{xy} y tal que $\overline{xy} \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Entonces existe $h : U \rightarrow U$ un homeomorfismo isotópico a la identidad tal que $h(x) = y$ y $h|_{U-V} \equiv Id$.*

Demostración. Sea $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de vectores constante $v(p) = y - x$. Sea Φ_t el flujo asociado a la ecuación diferencial inducida por el campo v . En particular $\Phi_t(p) = p + t(y - x)$. Tomemos ahora W un abierto tal que $\overline{xy} \subset W \subset \overline{W} \subset V$ y sea $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ una función chichón, es decir diferenciable y tal que $\rho|_W \equiv 1$ y $\rho|_{V^c} \equiv 0$. Definimos $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de vectores dado por la relación $u(p) = \rho(p)v(p)$ y nos tomamos Ψ_t el flujo asociado a la ecuación diferencial, que es inducida por el campo u . Definimos finalmente $h : U \rightarrow U$ como $h = \Psi_1$. Por ser el tiempo 1 de un flujo, h es isotópico a la identidad. Además, se tiene que $h(x) = \Psi_1(x) = \Phi_1(x) = y$ porque $u|_W = v|_W$ y $\forall t \in [0, 1] \Psi_t(x) \in \overline{xy} \subset W$ y por lo tanto $\Psi_t(x) = \Phi_t(x)$. Por último $h|_{U-V} = \Psi_1|_{U-V} \equiv Id$ porque $u|_{U-V} \equiv 0$. \square

Lema 2.4.3 (Cuarto Lema de Existencia de Puntos Fijos). *Si f admite una cadena de discos libres periódica entonces tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$ tomamos $x_i \in D_i$ tal que $f^{m_i}(x_i) \in D_{i+1}$ si $i < n$ y $f^{m_i}(x_i) \in D_1$ si $i = n$. Sea $z_{i+1} = f^{m_i}(x_i)$ si $i < n$ y $z_1 = f^{m_n}(x_n)$. Sea $A = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i-1} \{f^j(x_i)\}$. En cada D_i , elegimos una poligonal p_i que una z_i con x_i y tal que $p_i \cap A = \emptyset$. Tomamos entonces dos abiertos U_i y V_i tales que

$p_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i \subset D_i$ donde $U_i \cap A = \phi$. Para cada i aplicamos el sub-lema anterior tantas veces como cantidad de vértices menos uno tenga la poligonal p_i , obteniendo un homeomorfismo que preserva orientación $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $h_i(U_i) \subset U_i$, $h_i(z_i) = x_i$ y $h_i|_{U_i^c} \equiv Id$. Defino ahora $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $h = h_n \circ \dots \circ h_1$. Puesto que los soportes de $h_i - Id$ son disjuntos dos a dos obtenemos que

$$h(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ x & \text{para otro caso} \end{cases}$$

Definimos ahora $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g = f \circ h$. Por ser composición de homeomorfismos que preservan orientación resulta un homeomorfismo que preserva orientación. En particular

$$\begin{aligned} g^{m_n+\dots+m_1}(z_1) &= g^{m_n+\dots+m_1-1}(g(z_1)) = g^{m_n+\dots+m_1-1}(f(h(z_1))) = \\ g^{m_n+\dots+m_1-1}(f(x_1)) &= g^{m_n+\dots+m_2}(g^{m_1-1}(f(x_1))) = g^{m_n+\dots+m_2}(f^{m_1}(x_1)) = \\ g^{m_n+\dots+m_2}(z_2) &= \dots = g^{m_n}(z_n) = g^{m_n-1}(g(z_n)) = \\ g^{m_n-1}(f(h(z_n))) &= g^{m_n-1}(f(x_n)) = f^{m_n}(x_n) = z_1 \end{aligned}$$

Concluyendo que g tiene un punto periódico y por el tercer lema obtenemos que existe q un punto fijo de g . Ahora, tenemos que $q \notin D_i$ para ningún i porque $g(D_i) \cap D_i = f(h(D_i)) \cap D_i \subset f(D_i) \cap D_i = \phi$. Pero entonces $q = g(q) = f(q)$ y por lo tanto f tiene un punto fijo. El cuidado extra tomados con los elementos de A es porque si no son tomados en cuenta, se podría modificar la nueva órbita de z_1 perdiendo que sea un punto periódico. \square

3. Descomposición en Ladrillos

Empecemos estableciendo que a partir de ahora, f será un homeomorfismo de Brouwer. El principal objetivo de esta sección es definir, probar la existencia y estudiar las principales propiedades de las descomposiciones en ladrillos. Básicamente, la continuidad establece que una función se comporta aproximadamente de la misma forma en la vecindad de un punto. Por otra parte, las líneas de Brouwer hablan acerca de la dirección en la que se mueve un punto bajo f . La idea de usar las descomposiciones en ladrillos para lograr líneas de Brouwer es colapsar un entorno a un objeto y estudiar el movimiento de ese objeto como un grafo dirigido.

3.1. Conceptos Básicos

Definición 3.1.1. Una *Descomposición en Ladrillos* es una terna (A, V, B) donde A es un conjunto de aristas (que llamaremos arcos), V es un conjunto de vértices y B es un conjunto de discos cerrados del plano que verifican lo siguiente:

- (A, V) es un grafo del plano no dirigido.
- V es discreto en \mathbb{R}^2 .
- Para todo $v \in V$ $\#\{a \in A : v \text{ es extremo de } a\} = 3$.
- Siendo E la unión de los elementos de A y de V como subconjuntos de \mathbb{R}^2 (que llamaremos *el esqueleto de la descomposición*), los elementos de B son las clausuras de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - E$, que llamaremos *ladrillos*.

Varias observaciones hay que hacerse. En primer lugar los arcos por el momento no están orientados. Les daremos una orientación luego, cuando la descomposición sea libre y maximal que definiremos inmediatamente. El segundo punto es de suma importancia, facilita el estudio y además garantiza que si dos ladrillos tienen un vértice en común entonces tienen un lado en común.

Los arcos son compactos por lo que tienen sus extremos y entonces en la definición de E los vértices no son necesarios. Sin embargo, lo definimos de esa forma porque hace el concepto de esqueleto.

En particular, trabajaremos con ladrillos compactos. Si bien llevará un trabajo extra lograrlos, es compensado por la uniformidad que tienen los argumentos posteriores y que la compacidad hace simples los argumentos para demostrar varias propiedades. En general, esta descomposición se puede ver como una estratificación topológica de \mathbb{R}^2 . Más aún, los arcos acá son continuos, no necesariamente diferenciables.

Si $X \subset B$ nos referiremos a él indistintamente como un subconjunto de B o como el subconjunto de \mathbb{R}^2 dado por la unión de los elementos de X .

3.2. Descomposiciones Libres y Maximales

Definición 3.2.1. A continuación definiremos varios términos importantes

- Decimos que dos ladrillos b y b' son adyacentes si existe $a \in A$ tal que $a \subset \partial b \cap \partial b'$.
- Decimos que (A', V', B') es una *subdescomposición* de (A, V, B) si $E' \subset E$.
- Decimos que una descomposición es *libre* si $\forall b \in B, f(b) \cap b = \phi$
- Decimos que una descomposición es *libre y maximal* si es libre y no admite una subdescomposición libre.

Observación 3.2.2.

- La esencia de tener una descomposición libre y maximal viene de una operación muy simple que se puede aplicar a una descomposición en ladrillos. Si tenemos una descomposición libre, dada una arista, miramos los ladrillos adyacentes que la tienen en su frontera. Si $b \cup b'$ es un conjunto libre ($f(b \cup b') \cap (b \cup b') = \phi$) entonces podemos “borrar” la arista. Esto es, sacamos a de A , pegamos las correspondientes aristas, sacamos los vértices de a de V y unimos los ladrillos, obteniendo así una subdescomposición libre. Para ser más formales, si v_1 y v_2 son los vértices de a , sean a_1^i, a_2^i las otras dos aristas que tienen a v_i como extremo además de a . Definimos entonces $a'_i = a_1^i \cup a_2^i$ para $i = 1, 2$. Siendo $A' = (A \cup \{a'_1, a'_2\}) - \{a, a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2\}$, $V' = V - \{v_1, v_2\}$ y $B' = (B \cup \{b \cup b'\}) - \{b, b'\}$, resulta (A', V', B') una subdescomposición libre de (A, V, B) .
- De la operación anterior se deduce inmediatamente, que una descomposición es libre y maximal si y sólo si es libre y $\forall b, b' \in B$ adyacentes, se cumple $f(b) \cap b' \neq \phi$ o $f(b') \cap b \neq \phi$. Esta última equidad nos da una versión más manipulable de la condición de ser libre y maximal, que será la que utilizaremos.

Apuntamos ahora a probar la existencia de una descomposición libre y maximal, pero primero necesitaremos traducir los resultados obtenidos en la sección anterior, por esto tendremos que conformarnos de momento con el siguiente lema:

Lema 3.2.3. *Dado f un homeomorfismo de Brouwer, existe una descomposición en ladrillos libre.*

Demostración. Para construir la descomposición solamente determinaremos los ladrillos; a partir de estos los vértices son aquellos puntos que se encuentran en la intersección de tres ladrillos y las aristas aquellas curvas que se encuentran en la intersección de dos ladrillos.

Comencemos descomponiendo el plano, por cuadrados de la forma $[k, k + 1] \times [k', k' + 1]$ con $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$. Si bien a cada vértice le llegan cuatro aristas de esto nos ocuparemos luego. Primero construyamos una descomposición del plano en conjuntos libres. Fijado un cuadrado $[k, k + 1] \times [k', k' + 1]$, si es libre lo dejamos como está. Sino es libre, lo escribimos como la unión de cuatro cuadrados iguales y miramos ahora cada cuadrado individualmente. Tomamos uno de los cuadrados, si es libre

lo dejamos como está, sino lo escribimos como unión de cuatro cuadrados iguales y así sucesivamente. Este algoritmo termina, puesto que sino, obtenemos una familia de cuadrados $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ compactos y decreciente tales que $f(Q_n) \cap Q_n \neq \emptyset$. Si $q_n \in Q_n \cap f^{-1}(Q_n)$ entonces $q_n, f(q_n) \in Q_n$. Dados $n, m > 0$ tenemos que si $n > m$ $q_n \in Q_m$ y por lo tanto $d(q_n, q_m) \leq \text{diam}(Q_m) = \frac{\sqrt{2}}{2^m}$ por lo que $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y tomamos entonces $q = \lim_n q_n$. Por otra parte $d(q_n, f(q_n)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ de lo que concluimos:

$$f(q) = \lim_n f(q_n) = \lim_n f(q_n) - q_n + q_n = \lim_n q_n = q$$

lo cual contradice que f no tiene puntos fijos.

Si indexamos \mathbb{Z}^2 por \mathbb{N} , podemos usar el algoritmo anterior en cada cuadrado. De esto obtenemos finalmente una familia de cuadrados $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que son libres, su unión da todo \mathbb{R}^2 y sus interiores son disjuntos dos a dos. Solo nos queda ahora arreglar el tema de los vértices. Observemos primero que a cada vértice le llega a lo sumo 4 artistas. Esto se verifica observando que en el algoritmo se mantiene esta propiedad en cada paso. Para solucionar el problema hay varias formas de hacerlo, una es en cada vértice con cuatro aristas, modificar ligeramente una arista, para que queden dos vértices que le llegan 3 aristas a cada uno y además que los nuevos “cuadrados” se mantengan libres. Sin embargo, me parece más elegante hacerlo de la siguiente forma: Si $B_{v,1/n}^1$ es la bola de centro v y radio $1/n$ según la norma 1, entonces para cada v existe un n suficientemente grande tal que $f(B_{v,1/n}^1) \cap B_{v,1/n}^1 = \emptyset$, sino existiera un tal n con el mismo razonamiento al del sub-lemma 2.3.1 terminamos probando que $f(v) = v$. Tomemos además n para que $1/n$ sea menor a un tercio del tamaño menor entre las aristas que llegan a v . Siendo $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ los vértices conflictivos, definimos entonces

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{Q_n - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{v_i, 1/n_i}^1\}} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{\{B_{v_i, 1/n_i}^1\}}$$

que claramente define una descomposición en ladrillos libre. □

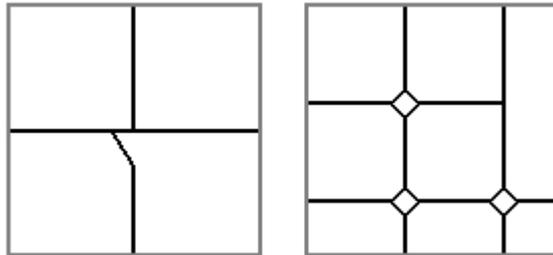


Figura 5: Modificaciones para transformar vértices de 4 artistas en vértices de 3 aristas

3.3. Órbitas de los Ladrillos

Teniendo probada la existencia de una descomposición libre, introduzcamos una notación. Dados $b, b' \in B$, $b \rightarrow b'$ significará que $f(b) \cap b' \neq \phi$.

Definición 3.3.1. Se define naturalmente la función $\Phi : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ por

$$\Phi(X) = \{b' \in B : \exists b \in X/b \rightarrow b'\}$$

Análogamente se puede definir $\Phi^- : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ por

$$\Phi^-(X) = \{b' \in B : \exists b \in X/b' \rightarrow b\}$$

La siguiente proposición traduce lo probado en la sección anterior, al lenguaje de los conceptos que manejamos ahora.

Proposición 3.3.2. *Dada una descomposición libre, si $b \in B$ entonces*

$$b \notin \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\})$$

Demostración. La idea para demostrar esto es razonar por el absurdo y suponer que existen $b_1, \dots, b_n \in B$ ladrillos distintos entre sí, tales que $b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_n \rightarrow b_1$. A simple vista, podríamos pensar que tenemos un absurdo directo del cuarto lema de existencia de puntos fijos. Sin embargo, los b_i no son abiertos sino compactos y tampoco son necesariamente disjuntos, pueden intersectarse en su frontera. Es posible modificar ligeramente los arcos para que si $b \rightarrow b'$ entonces $f(\text{int}(b)) \cap \text{int}(b') \neq \phi$ y en esta situación el resultado es directo del cuarto lema puesto que $\text{int}(b_1), \dots, \text{int}(b_n)$ forman una cadena de discos libre periódica. Sin embargo, el resultado es cierto en general sin tener que recurrir a modificar la descomposición.

Podemos pedir que si $j > i + 1$ no ocurre $b_i \rightarrow b_j$, de lo contrario consideramos $b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_i \rightarrow b_j \rightarrow b_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow b_n \rightarrow b_1$. También podemos pedir que si $j > i$ y $b_j \rightarrow b_i$ entonces $j = n$ e $i = 1$, de lo contrario consideramos $b_i \rightarrow b_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow b_j \rightarrow b_i$. Es decir, si miramos el conjunto B como los vértices de un grafo donde las aristas están dadas por $b \rightarrow b'$, la proposición dice que no hay ciclos en el grafo. El absurdo es suponer que hay un ciclo y en tal caso, tomamos uno que no tenga un sub-ciclo contenido.

Para cada $i = 1, \dots, n - 1$ sea $x_i \in b_i \cap f^{-1}(b_{i+1})$ y $z_{i+1} = f(x_i)$; sea $x_n \in b_n \cap f^{-1}(b_1)$ y $z_1 = f(x_n)$. Puesto que x_i y z_i están en b_i me tomo $\gamma_i \subset b_i$ una curva que une x_i con z_i donde además $\text{int}(\gamma_i) \subset \text{int}(b_i)$. Veamos que estas curvas son dos a dos disjuntas. Puesto que los interiores de las curvas están en los interiores de los ladrillos que son dos a dos disjuntos, tenemos que probar únicamente que los extremos de las curvas (si es que ya no están en el interior de los ladrillos) son disjuntos.

Sea $j > i$, si $x_i = x_j$ entonces $f(x_i) \in b_{j+1}$ y por lo tanto $b_i \rightarrow b_{j+1}$ lo cual es absurdo. Si $x_i = z_j$ entonces $b_{j-1} \rightarrow b_i$ lo cual no puede ser. Si $z_i = z_j$ o $z_i = x_j$ entonces $b_{i-1} \rightarrow b_j$ lo cual tampoco ocurre.

Sea ahora $0 < r := \min\{d(\gamma_i, \gamma_j) : i \neq j\}$. Como b_i es libre, γ_i también y por lo tanto existe $0 < r_i < r/2$ tal que $D_i = B(\gamma_i, r_i)$ es un disco del plano libre. De lo

contrario, usando la compacidad de γ_i podríamos encontrar un punto en $\gamma_i \cap f(\gamma_i)$. Finalmente D_1, \dots, D_n es una cadena de discos libres periódica y por el cuarto lema de puntos fijos, obtenemos un absurdo. \square

3.4. Existencia de una Descomposición Libre y Maximal

Lema 3.4.1. *Dado f un homeomorfismo de Brouwer, existe una descomposición en ladrillos libre y maximal.*

Demostración. En virtud de la observación 3.2.2, uno se encontraría tentado a tomar una descomposición libre cualquiera y unir ladrillos hasta que quede una descomposición maximal. Sin embargo, con este proceso podríamos perder la compacidad de los ladrillos. Por ejemplo tomemos la descomposición en ladrillos dada por la familia

$$B = \{[k, k + 2] \times [k', k' + 1] \subset \mathbb{R}^2 : k + k' \text{ es par} \}$$

Con esta descomposición \mathbb{R}^2 queda como una pared de ladrillos en el sentido cotidiano. Tomemos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, y + 3/2)$ la traslación del vector $(0, 3/2)$. La descomposición en ladrillos inducida por B resulta ser libre puesto que la altura de cualquier ladrillo es 1 y estamos trasladando verticalmente el ladrillo $3/2$. Tomemos un ladrillo cualquiera $b \in B$ y observemos que tiene 6 ladrillos adyacentes: dos arriba, uno a derecha, dos abajo y otro a izquierda. La imagen de b por f intersecta a los de arriba; la pre-imagen de b por f intersecta a los dos de abajo y por lo tanto, según el algoritmo solo podríamos unir b con los ladrillos que se encuentran a su izquierda y a su derecha. Como esto es para cualquier ladrillo; al final los ladrillos obtenidos serían de la forma $\mathbb{R} \times [k, k + 1]$.

Como se mencionó anteriormente, es beneficioso trabajar con ladrillos compactos y por lo tanto, resulta evidente que partiendo de una descomposición libre, unir ladrillos no va a ser suficiente. Tendremos entonces que modificarlos en su forma.

El algoritmo para hacer esta construcción tiene sus bases en hacer un *recorrido de un grafo en anchura*. Recorrer un grafo en anchura es, tomar un nodo inicial y procesarlo. Agregar a la lista de próximos nodos a recorrer todos sus nodos adyacentes. Procesar el primer nodo adyacente y agregar al final de la lista de próximos nodos a recorrer todos sus nodos adyacentes no procesados. Pasar al segundo nodo y así sucesivamente. Esta forma de recorrer consiste en visitar un nodo, luego todos sus adyacentes, luego todos los adyacentes de los adyacentes y así hasta visitar todos los vértices del grafo o indefinidamente si el grafo es infinito. Este recorrido, por ejemplo es el utilizado para asignar el *número de Erdős* a un investigador. La importancia de este recorrido es que para un grafo infinito todos los nodos (de una componente conexa del grafo) son visitados.

El grafo con el que trabajaremos tiene por nodos los ladrillos y las aristas determinadas por la adyacencia entre los ladrillos (como subconjuntos de \mathbb{R}^2). De la definición, por ser \mathbb{R}^2 conexo, es claro que el grafo queda conexo y por lo tanto todos los ladrillos serán visitados. Un primer problema a la vista es que los nodos no quedarán intactos. Todo lo contrario, la frontera de algunos ladrillos será modificada y otros ladrillos serán unidos. Sin embargo, no se crearán nuevos ladrillos. La

operación de modificar un ladrillo va a ser, tomar dos ladrillos adyacentes y modificar el arco que se encuentra en la intersección de los dos, agrandando un ladrillo y achicando el otro, pero ambos se mantendrán ladrillos. Por otra parte los ladrillos que son unidos, van a ser adyacentes por lo que el nuevo conjunto también será un ladrillo. Pensemos la unión, como la operación de colapsar dos nodos a uno solo, donde las aristas que llegan al nuevo nodo, es la unión de las aristas que llegaban a los ladrillos antes de ser unidos. Si bien esto hace que el concepto de recorrer el grafo pierda sentido pues el grafo va a cambiar constantemente, en el algoritmo un ladrillo que fue procesado, no volverá a serlo y por lo tanto el conjunto de ladrillos procesados nos dará la descomposición en ladrillos libre y maximal.

Sin más especulación del algoritmo, pasemos a la construcción de la descomposición. Primero tomemos un descomposición libre, que existe por el lema 3.2.3. Dados b y $b' \in B$ dos ladrillos adyacentes decimos que están *bien relacionados* si $b \rightarrow b'$ o $b' \rightarrow b$. Observemos que por la proposición anterior los dos casos no se pueden dar simultáneamente, sino tendríamos $b \rightarrow b' \rightarrow b$. Si todos los ladrillos tienen una buena relación con sus adyacentes, entonces por el segundo punto de la observación 3.2.2 tenemos una descomposición libre y maximal. Lo que vamos a hacer es modificar de a un ladrillo, para que tenga una buena relación con todos su vecinos.

Notaremos el conjunto de los ladrillos adyacentes a b como $ady(b)$ y el entorno de b como $E(b) = ady(b) \cup \{b\}$, más en general si $X \subset B$ notaremos $E(X) = \bigcup_{b \in X} E(b)$. Inductivamente definimos $E^n(X) = E(E^{n-1}(X))$ donde $E^1(X) = E(X)$.

Comencemos entonces con la construcción. Fijemos primero $b_0 \in B$. Si este fuera muy chico tal que no tiene una buena relación con ninguno de sus vecinos, lo agrandaremos de la siguiente forma: Como $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \geq 1} E^n(b_0)$ existe $m_0 \geq 1$ tal que $E^{m_0}(b_0) \cap f(b_0) \neq \phi$ y por lo tanto existe n_0 tal que $E^{n_0}(b_0)$ es libre pero $E^{n_0+1}(b_0)$ no. Se dan entonces dos situaciones:

- existe $b' \in E^{n_0+1}(b_0) - E^{n_0}(b_0)$ tal que $E^{n_0}(b_0) \cup b'$ no es libre. En ese caso definimos $b'_0 := E^{n_0}(b_0)$.
- no ocurre lo anterior y existen b' y $b'' \in E^{n_0+1}(b_0) - E^{n_0}(b_0)$ tales que $b' \cup b''$ no es libre. En ese caso definimos $b'_0 := E^{n_0}(b_0) \cup b'$.

Sea ahora $B_0 = \{b \in B : b \notin b'_0\} \cup \{b'_0\}$, donde b'_0 primero representa un conjunto de ladrillos y luego representa un ladrillo. Por simplicidad de la notación b_0 será b'_0 .

Logramos entonces una familia de ladrillos de una descomposición libre donde además existe $b' \in ady(b_0)$ tal que b_0 y b' tienen una buena relación.

Lo que haremos ahora es modificar a b_0 y sus adyacentes para que b_0 tenga una buena relación con todos sus adyacentes y además si $b', b'' \in ady(b_0)$ y son adyacentes entre sí entonces también tienen una buena relación. Esto se podría ver como obtener lo deseado localmente.

Cuando nos refiramos a iterar el proceso sobre un ladrillo, estaremos hablando de la serie de operaciones que realizaremos a partir de ahora sobre b_0 y sus adyacentes para lograr la situación deseada localmente. El paso anterior, es un paso inicial que no será necesario repetirlo puesto que, cada vez que comience a procesar un nuevo

ladrillo, por la forma en que lo elegiremos, ya va a tener un ladrillo adyacente con el que tiene una buena relación.

Sea b_1^0 un ladrillo adyacente a b_0 que tiene una buena relación con este. Enumeramos el resto de los ladrillos adyacentes a b_0 a partir de b_1^0 según aparezcan en la frontera de b_0 recorriéndola en sentido horario.

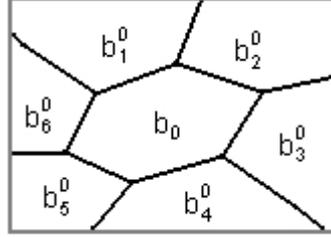


Figura 6: b_0 y sus adyacentes enumerados

Sea entonces $ady(b_0) = \{b_1^0, \dots, b_{k_0}^0\}$, donde b_i^0 y b_{i+1}^0 son adyacentes si $i = 1, \dots, k_0 - 1$, y b_1^0 y $b_{k_0}^0$ también son adyacentes. Comencemos por generar una buena relación entre los adyacentes de b_0 .

Afirmamos que existe un i_1 tal que $1 \leq i_1 < k_0$ y $\bigcup_{j=1}^{i_1} b_j^0$ es libre pero $\bigcup_{j=1}^{i_1+1} b_j^0$ no. Sino ocurriera esto, quiere decir que $ady(b_0)$ es un conjunto libre. Como b_0 y b_1^0 tienen una buena relación, se da $b_1^0 \rightarrow b_0$ o al revés. Supongamos que el caso es $b_1^0 \rightarrow b_0$, esto quería decir que $f(b_1^0) \cap b_0 \neq \emptyset$. Como supusimos que $ady(b_0)$ es libre entonces necesariamente $f(ady(b_0)) \subset b_0$. Puesto que f es un homeomorfismo y b_0 es compacto, tenemos que $f(b_0) \subset b_0$ y luego por el teorema de puntos fijos de Brouwer f tendría un punto fijo. Sea entonces $b_1^1 = \bigcup_{j=1}^{i_1} b_j^0$.

Continuando, es claro que existe i_2 tal que $i_1 < i_2 \leq k_0$ y $\bigcup_{j=i_1+1}^{i_2} b_j^0$ es libre pero si $i_2 < k_0$ entonces $\bigcup_{j=i_1+1}^{i_2+1} b_j^0$ no es libre. Siendo $b_2^1 = \bigcup_{j=i_1+1}^{i_2} b_j^0$ resulta inmediato que b_1^1 y b_2^1 tienen una buena relación porque $b_{i_1+1}^0 \subset b_2^1$.

Si $i_2 = k_0$ terminamos, sino existe i_3 tal que $i_2 < i_3 \leq k_0$ y $\bigcup_{j=i_2+1}^{i_3} b_j^0$ es libre pero si $i_3 < k_0$ entonces $\bigcup_{j=i_2+1}^{i_3+1} b_j^0$ no es libre. Sea $b_3^1 = \bigcup_{j=i_2+1}^{i_3} b_j^0$. Es claro que b_2^1 y b_3^1 tienen una buena relación. Si $i_3 = k_0$, y b_1^1 y b_3^1 tienen una buena relación terminamos, sino redefinimos $b_1^1 := b_1^1 \cup b_3^1$ y damos por terminada esta parte. Si $i_3 < k_0$ iteramos el paso de este párrafo sucesivamente. Puesto que $\#ady(b_0) = k_0$ en menos de k_0 pasos terminamos, logrando los ladrillos $b_1^1, \dots, b_{k_1}^1$ donde b_i^1 y b_{i+1}^1 son adyacentes con una buena relación para $i = 1, \dots, k_1 - 1$; y b_1^1 y $b_{k_1}^1$ también son adyacentes con una buena relación.

A la familia de ladrillos $\{b \in B_1 : b \neq b_i^0 \ \forall i = 1, \dots, k_0\} \cup \{b_1^1, \dots, b_{k_1}^1\}$ la notaremos como B_0^1 . Puesto que hasta ahora únicamente hemos unido ladrillos y por la forma en que lo hicimos B_0^1 induce una descomposición en ladrillos libre.

Observemos una propiedad importante de este primer paso. Supongamos que en el conjunto de los ladrillos $\{b_1^0, \dots, b_{k_0}^0\}$ aparecen tres ladrillos consecutivos $b_{j-1}^0, b_j^0, b_{j+1}^0$ tales que b_{j-1}^0 y b_j^0 tienen una buena relación y b_j^0 y b_{j+1}^0 también tienen una buena relación. Si k es el paso en donde $i_k \geq j - 1$, como $b_{j-1}^0 \cup b_j^0$ no es libre tenemos

que $i_k < j$ y por lo tanto $i_k = j - 1$. En el paso siguiente como $b_j^0 \cup b_{j+1}^0$ no es libre $i_{k+1} = j$ y por lo tanto $b_{k+1}^1 = b_j^0$. Esto quiere decir que b_j^0 no es modificado en el proceso. Esta propiedad al final va a hacer que los ladrillos ya procesados no sean modificados mientras se procesan otros ladrillos.

Tenemos entonces b_0 donde sus adyacentes en B_0^1 son $b_1^1, \dots, b_{k_1}^1$ y además tienen una buena relación entre sí donde corresponda y b_1^1 tiene además una buena relación con b_0 . Nuestro objetivo ahora es modificar los b_i^1 para que tengan todos una buena relación con b_0 , pero con el cuidado de que b_i^1 mantenga las buenas relaciones que tiene con todos sus vecinos, no sólo con sus ladrillos adyacentes comunes a los de b_0 . Preservar estas relaciones hará que una vez procesado un ladrillo b , cuando procesamos otro ladrillo b' que tiene un adyacente común a b , sea este b'' , al modificar b'' no pierda la buena relación que tiene con b .

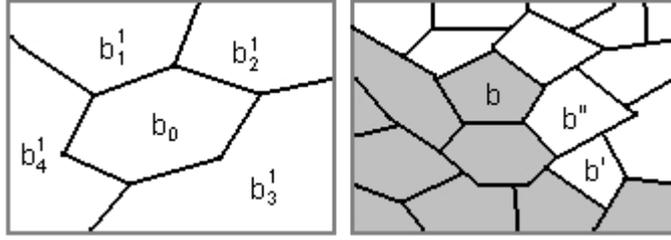


Figura 7: A la izquierda se encuentra una representación B_1 luego de la primera parte del algoritmo. A la derecha una representación de los ladrillos b, b' y b'' donde los pintados de gris representan los ladrillos ya procesados

Sean $j_1 < \dots < j_l$ los índices de aquellos b_j^1 que no tienen una buena relación con b_0 . Puesto que $j_1 > 1$, tenemos que $b_{j_1-1}^1$ tiene una buena relación con b_0 y además con $b_{j_1}^1$. Esto nos da las siguientes posibilidades:

- $b_0 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ o $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_0$
- $b_{j_1}^1 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ o $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_{j_1}^1$

En realidad, los dos puntos anteriores se encuentran relacionados. Más aún $b_0 \rightarrow b_{j_1-1}^1 \Leftrightarrow b_{j_1}^1 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ y por lo tanto $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_0 \Leftrightarrow b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_{j_1}^1$. La razón de esto es muy sencilla, como $b_{j_1}^1$ y b_0 no tienen una buena relación, la descomposición inducida por unirlos es libre y si el caso fuera $b_0 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ y $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_{j_1}^1$ entonces, en la nueva descomposición tendríamos $b_0 \cup b_{j_1}^1 \rightarrow b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_0 \cup b_{j_1}^1$ contradiciendo la proposición 3.3.2.

Supongamos que estamos en el caso $b_0 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ y $b_{j_1}^1 \rightarrow b_{j_1-1}^1$. O sea $f(b_0) \cap b_{j_1-1}^1 \neq \phi$ y $f(b_{j_1}^1) \cap b_{j_1-1}^1 \neq \phi$. Si a y a' son las aristas comunes a $b_{j_1-1}^1$ y b_0 , y a $b_{j_1-1}^1$ y $b_{j_1}^1$ respectivamente; entonces $f(b_{j_1}^1 \cup b_0) \cap (a \cup a') = \phi$. Lo anterior es cierto porque estamos suponiendo que $b_{j_1}^1 \cup b_0$ es libre. Sea C la componente conexa de $b_{j_1-1}^1 - f(b_0 \cup b_{j_1}^1)$ que tiene en su frontera a a y a a' . Por ser b_0 y $b_{j_1-1}^1$ adyacentes, no puede ocurrir $f(b_0) \subset b_{j_1-1}^1$ sino $b_{j_1-1}^1$ no sería libre. Análogamente no puede ocurrir $f(b_{j_1}^1) \subset b_{j_1-1}^1$. Y por lo tanto C es un disco.

En la frontera de C hay dos opciones no necesariamente una excluyente de la otra. Estas son:

- existe $I \subset \partial b_0$ tal que $f(I) \subset \partial C$.
- existe $I' \subset \partial b_{j_1}^1$ tal que $f(I') \subset \partial C$.

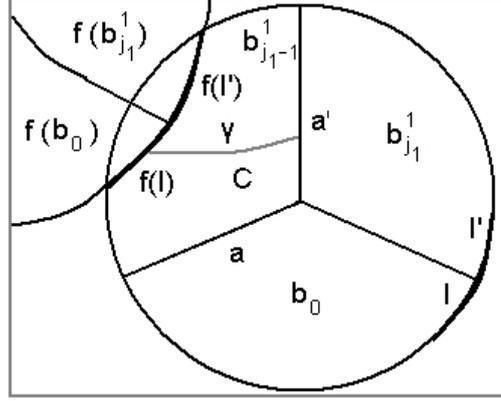


Figura 8: Representación de los ladrillos $b_0, b_{j_1-1}^1$ y $b_{j_1}^1$

Supongamos que ocurre la primera. Para garantizar que al final de la operación que realizaremos ahora, $b_{j_1-1}^1$ siga siendo un ladrillo necesitaremos que $f(int(b_0)) \cap int(b_{j_1-1}^1) \neq \phi$. Si este no fuera el caso, y por lo tanto la intersección se da entre las fronteras, podemos modificar levemente la frontera de $b_{j_1-1}^1$ (agrandándolo) para que así sea, con el cuidado de mantener la condición de ser libre para el ladrillo agrandado y mantener todas las buenas relaciones que tiene el ladrillo adyacente a $b_{j_1-1}^1$ que fue reducido.

Lo anterior suena más complicado de lo que verdaderamente es. Recordemos que un ladrillo b siempre tiene una cantidad finita de adyacentes. Mantener las buenas relaciones es: si achicamos b en b' ; lo que necesitamos es $\forall b'' \in ady(b)$ donde $b \rightarrow b''$ o $b'' \rightarrow b$ no ocurra $f^{-1}(b'') \cap b \subset b - b'$ si $b \rightarrow b''$ y tampoco pase que $f(b'') \cap b \subset b - b'$ si $b'' \rightarrow b$. Es decir, si por cada b'' tal que $b'' \rightarrow b$ tomamos un punto $x_{b''} \in f(b'') \cap b$ y por cada b'' tal que $b \rightarrow b''$ tomamos un punto $x_{b''} \in f^{-1}(b'') \cap b$. Entonces lo único que tenemos que pedirle a la modificación es que $x_{b''} \notin b - b' \forall b''$ y con esto el nuevo ladrillo b' tiene las mismas buenas relaciones que las que tenía b .

Estamos entonces en la situación $f(b_0) \cap \partial C \neq \phi$. Lo que vamos a hacer ahora es agrandar a $b_{j_1}^1$ en $b_{j_1}^2$ achicando a $b_{j_1-1}^1$ en $b_{j_1-1}^2$ para que $b_{j_1}^2 \cap f(b_0) \neq \phi$, logrando que $b_{j_1}^2$ y b_0 tengan una buena relación. Claro está, que la modificación se hará para que $b_{j_1-1}^2$ tenga las mismas buenas relaciones que tenía $b_{j_1-1}^1$. La forma de hacer esto es muy sencilla, supongamos que x_1, \dots, x_n son los puntos definidos en el párrafo anterior para $b_{j_1-1}^1$. Como C es un disco tomamos un arco $\gamma \subset \overline{C}$ donde $int(\gamma) \subset int(C)$, tiene un extremo en a' , el otro en $f(I)$ y además $x_i \notin \gamma \forall i$. Tomamos ahora $\epsilon > 0$ tal que $D_\gamma = \overline{B(\gamma, \epsilon)}$ es un disco, no contiene a ningún x_i , $D_\gamma \cap f(b_{j_1}^1) = \phi$ y además $D_\gamma \subset int(b_{j_1-1}^1 \cup b_{j_1}^1)$. Definimos entonces $b_{j_1}^2 = D_\gamma \cup b_{j_1}^1$ y $b_{j_1-1}^2 = \overline{b_{j_1-1}^1 - D_\gamma}$.

Como pedimos que $f(\text{int}(b_0)) \cap \text{int}(b_{j_1-1}^1) \neq \phi$, $b_{j_1-1}^2$ es conexo y por lo tanto un disco. Si no hubiéramos pedido tal condición hubieran quedado 2 componentes conexas. Nos quedó $b_{j_1}^2$ libre porque $f(b_{j_1}^2) \cap b_{j_1}^2 = f(b_{j_1}^1 \cup D_\gamma) \cap (b_{j_1}^1 \cup D_\gamma) \subset f(b_{j_1}^1 \cup b_{j_1-1}^1) \cap (b_{j_1}^1 \cup D_\gamma) = (f(b_{j_1}^1) \cap (b_{j_1}^1 \cup D_\gamma)) \cup (f(b_{j_1-1}^1) \cap (b_{j_1}^1 \cup D_\gamma)) \subset (f(b_{j_1}^1) \cap b_{j_1}^1) \cup (f(b_{j_1}^1) \cap D_\gamma) \cup (f(b_{j_1-1}^1) \cap (b_{j_1}^1 \cup b_{j_1-1}^1))$.

Donde el primer término es vacío porque $b_{j_1}^1$ es libre, el segundo por construcción de D_γ y el tercero porque $b_{j_1-1}^1$ es libre y además como supusimos que se da $b_{j_1}^1 \rightarrow b_{j_1-1}^1$ no ocurre lo opuesto por la proposición anterior. Que $b_{j_1-1}^2$ es libre, resulta inmediato porque está contenido en $b_{j_1-1}^1$. Finalmente, los x_i nos garantizan que $b_{j_1-1}^2$ mantiene las buenas relaciones de $b_{j_1-1}^1$. Como $b_{j_1}^1 \subset b_{j_1}^2$, el nuevo ladrillo no pudo perder ninguna buena relación, más aún gana una buena relación con b_0 .

En el caso en que existe $I' \subset \partial b_{j_1}^1$ tal que $f(I') \subset \partial C$, pero no I , hacemos exactamente lo mismo salvo que γ tiene un extremo en $f(I')$ y el otro en a y el ladrillo que agrandamos es b_0 .

Para el caso $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_0$ y $b_{j_1-1}^1 \rightarrow b_{j_1}^1$ en vez de trabajar con $f(b_{j_1}^1)$ y $f(b_0)$, trabajamos con $f^{-1}(b_{j_1}^1)$ y $f^{-1}(b_0)$.

Lo que hacemos ahora es aplicar todo este procedimiento a $b_{j_2}^1$ y así sucesivamente. Si $j_2 = j_1 + 1$ trabajamos con $b_{j_1}^2$ en vez de $b_{j_1}^1$. Luego aquellos ladrillos b_j^1 que no fueron modificados los llamamos b_j^2 . Al final logramos que b_0, b_1^2, \dots, b_l^2 sean ladrillos de una descomposición libre, donde de los anteriores, todos aquellos que son adyacentes, tienen una buena relación entre sí. Observemos que de este último paso, si aparecieran tres ladrillos $b_{j-1}^1, b_j^1, b_{j+1}^1$ tales que todos tienen una buena relación con b_0 entonces el del medio no es modificado. En verdad no es necesario el primer ladrillo b_{j-1}^1 pero ahora quedará claro porque lo explique así.

Lo que hacemos ahora es aplicar el procedimiento que hicimos en b_0 a b_1^2 . Observemos que entre los adyacentes de b_1^2 , b_0 aparece entre b_2^2 y b_l^2 . Como b_0 y b_1^2 tienen una buena relación y además tienen buenas relaciones con b_2^2 y b_l^2 , por lo que observamos anteriormente b_0 no es modificado cuando procesamos. Continuamos procesando sucesivamente b_2^2, \dots, b_l^2 y por las mismas razones que para b_0 , los ladrillos ya procesados no resultan modificados.

Sea B_1 la familia de ladrillos resultante de remplazar los ladrillos nuevos por los ladrillos viejos despues de procesar b_l^2 . Continuamos procesando ahora los ladrillos de $E_1^2(b_0) - E_1(b_0)$ (donde el sub-índice 1 viene de la familia B_1) de forma ordenada según aparezcan en $\partial E_1(b_0)$ orientándola de forma horaria. Luego procesamos los ladrillos de $E_2^3(b_0) - E_2^2(b_0)$ y así sucesivamente de a niveles. Por la forma del algoritmo, como ya dijimos los ladrillos ya procesados no son modificados y por lo tanto tenemos que $E_1(b_0) = E_2(b_0) = E_n(b_0) \forall n > 1$, $E_2^2(b_0) = E_n^2(b_0) \forall n > 2$ y más en general $E_m^m(b_0) = E_n^m(b_0) \forall n > m$. Por otra parte, inductivamente se ve que $E^n(b_0) \subset E_n^n(b_0)$ y por lo tanto $\bigcup_{m \geq 1} E_m^m(b_0) = \mathbb{R}^2$. Si entonces definimos B' como $B' = \bigcup_{m \geq 1} E_m^m(b_0)$, nos queda una familia de ladrillos que induce una descomposición libre y maximal porque todos los ladrillos tienen una buena relación con todos sus adyacentes. \square

Teniendo finalmente garantizada la existencia de una descomposición en ladrillos libre y maximal, a partir de ahora fijaremos la descomposición para una f dada.

3.5. Conexión en B

Veremos ahora un concepto útil, que resulta natural definirlo en el conjunto de los ladrillos.

Definición 3.5.1. Decimos que $X \subset B$ es *conexo* si $\forall b, b' \in X$, existen $b_1, \dots, b_n \in X$ tal que $b_1 = b$, $b_n = b'$ y b_i es adyacente de b_{i+1} si $i = 1, \dots, n - 1$.

Proposición 3.5.2. Si $X \subset B$ lo identificamos en \mathbb{R}^2 , entonces las nociones de conexión coinciden. Además si X es conexo entonces $\Phi(X)$ es conexo.

Demostración. Para ver lo primero, por esta vez notemos $X' = \bigcup_{b \in X} b \subset \mathbb{R}^2$. De hecho, si X' es conexo como $X' = \overline{\text{int}(X')}$ entonces X' es arcoconexo. Dados $b, b' \in X$, tomamos $x \in b$, $x' \in b'$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow X'$ un arco tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = x'$. Sean b_1, \dots, b_n los ladrillos tales que existen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1 \in [0, 1]$ donde $\gamma([t_0, t_1]) \subset b_1, \dots, \gamma([t_{n-1}, t_n]) \subset b_n$. Entonces $b_1 = b$, $b_n = b'$ y dado $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $\gamma(t_i) \in b_i \cap b_{i+1}$ por lo que b_i y b_{i+1} son adyacentes y por lo tanto X es conexo.

Si X es conexo y X' no lo fuera, existen Y' y Z' subconjuntos de X' cerrados, disjuntos y no vacíos tales que $X' = Y' \cup Z'$. Dado $y \in Y'$ existe $b_y \in X$ tal que $y \in b_y$. Como los ladrillos son conexos $b_y \subset Y'$. Análogamente existe $b_z \in X$ tal que $b_z \subset Z'$. Sea entonces b_1, \dots, b_n tales que $b_1 = b_y$, $b_n = b_z$ y b_i es adyacente de b_{i+1} para $i = 1, \dots, n - 1$. Por el mismo razonamiento aplicado a b_y , cada b_i está contenido en Z' o Y' . Sea $j < n$ tal que b_1, \dots, b_j están contenidos en Y' pero b_{j+1} está contenido en Z' . Como b_j y b_{j+1} son adyacentes, entonces existe $a \in A$ tal que $a \in b_j \cap b_{j+1}$ y por lo tanto $Z' \cap Y' \neq \emptyset$ lo cual es absurdo.

Veamos que si X es conexo, $\Phi(X)$ es conexo. Por lo anterior, si identificamos X como un subconjunto de \mathbb{R}^2 tenemos que $f(X)$ es conexo. Luego

$$\Phi(X) = \bigcup_{b: \exists y \in f(X) \cap b} b = \bigcup_{b: \exists y \in f(X) \cap b} (f(X) \cup b)$$

Si b es tal que existe $y \in b \cap f(X)$, como b y $f(X)$ son conexos, y $f(X) \cap b \neq \emptyset$, entonces $f(X) \cup b$ es conexo. Luego si b y b' están en $\Phi(X)$ entonces están en la misma componente conexa porque $f(X) \subset (f(X) \cup b) \cap (f(X) \cup b')$ y por lo tanto $\Phi(X)$ es conexo en \mathbb{R}^2 . De lo anterior $\Phi(X)$ es conexo en B . \square

3.6. Propiedades de una Descomposición Libre y Maximal

Lo que haremos ahora es estudiar las propiedades que tiene una descomposición libre y maximal. La primera de ellas es que podremos orientar los arcos de A y luego veremos que estas orientaciones no son arbitrarias, sino ricas en propiedades.

Comencemos con una consecuencia muy sencilla pero importante de la proposición 3.3.2 y que la descomposición sea libre y maximal.

Observación 3.6.1. (Orientación de los arcos)

Dado $a \in A$ un arco, sean b y b' los ladrillos adyacentes que tienen a a en su frontera. Puesto que la descomposición es libre y maximal, se da $b \rightarrow b'$ o $b' \rightarrow b$. De la proposición 3.3.2 sabemos que el o anterior es excluyente, sino tendríamos $b \rightarrow b' \rightarrow b$ lo cual no ocurre. Esta situación nos permite orientar a de la siguiente forma:

- si $b \rightarrow b'$, entonces orientamos a para que b' se encuentre a la derecha de a y b se encuentre a la izquierda de a .
- si $b' \rightarrow b$, entonces orientamos a para que b se encuentre a la derecha de a y b' se encuentre a la izquierda de a .

Notaremos $l(a)$ al ladrillo que se encuentre a la izquierda de a y $r(a)$ al ladrillo que se encuentre a la derecha de a . La orientación de a , permite naturalmente definir entre sus extremos (que son siempre distintos) el extremo inicial que llamaremos $s(a)$ y el extremo final que llamaremos $e(a)$. Observemos que tanto $s(a)$ como $e(a)$ son elementos de V .

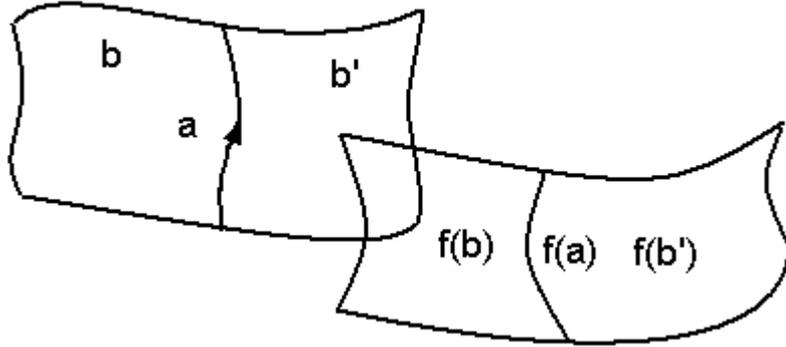


Figura 9: Orientación de a en el caso $b \rightarrow b'$

Tenemos ahora definida una orientación en los arcos de nuestra descomposición, lo que queremos ahora es estudiar las concatenaciones compatibles de los arcos. Esto motiva las siguientes definiciones

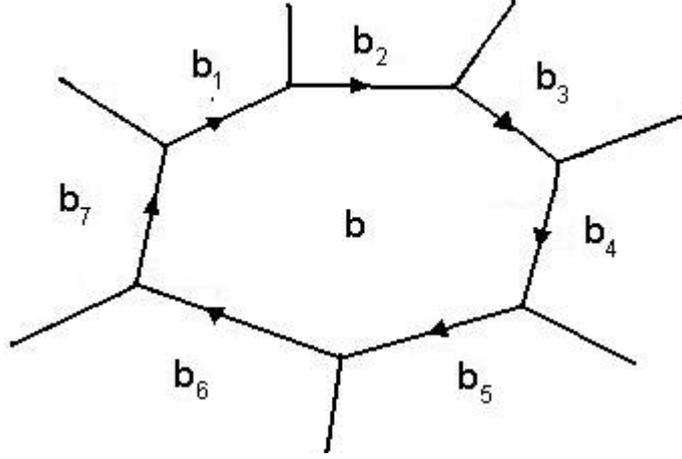
Definición 3.6.2. Una familia de arcos $\{a_i\}_{i \in I} \subset A$, indexada por $I \subset \mathbb{Z}$, es *admisibles* si $e(a_i) = s(a_{i+1})$ cuando $i, i+1 \in I$. En tal caso, podemos definir un arco orientado $\Gamma = \prod_{i \in I} a_i$ mediante la concatenación de los arcos, donde la orientación coincide con la dada en a_i cuando restringimos Γ a a_i .

Definimos la *vecindad derecha* de Γ como $r(\Gamma) = \{r(a_i) : i \in I\}$. Análogamente definimos la *vecindad izquierda* de Γ como $l(\Gamma) = \{l(a_i) : i \in I\}$.

Con estas definiciones apuntamos ahora a probar una proposición que da una descripción de la frontera de un ladrillo. Para eso necesitamos primero un sub-lemma.

Sub-Lema 3.6.3. Dado $b \in B$, existen $a, a' \in A$ tal que $b = r(a) = l(a')$.

Demostración. Supongamos por absurdo que $\partial b = \prod_{i=1}^n a_i$ donde $e(a_i) = s(a_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n-1$ y además $e(a_n) = s(a_1)$. Sean b_1, \dots, b_n los ladrillos adyacentes a b que comparten a_1, \dots, a_n con b respectivamente. Pensemos primero en el caso $b = r(a_i) \forall i$.



Esto quiere decir que $b_i \rightarrow b \forall i$ y por lo tanto no ocurre $b \rightarrow b_i$. Como además b es libre, concluimos que $f(b) \cap E(b) = \phi$. Esto implica que $f(b_i) \cap E(b)^c \neq \phi \forall i$. Como $f(b_i)$ es conexo obtenemos que existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f(b_i) \cap b_{j_i} \neq \phi$ o sea $b_i \rightarrow b_{j_i}$.

Sea $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que $g(i) = j_i$. Entonces tenemos que $b_1 \rightarrow b_{g(1)} \rightarrow b_{g^2(1)} \rightarrow \dots \rightarrow b_{g^n(1)} \rightarrow \dots$. Como los b_i son finitos en algún momento dos ladrillos se repiten en la secuencia anterior, llegando a un absurdo.

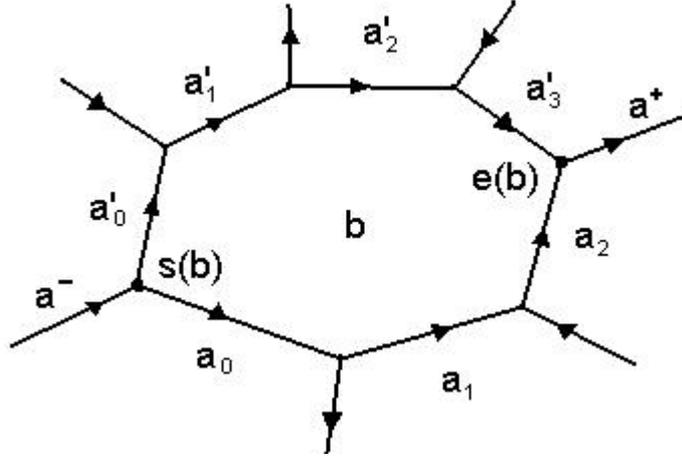
Para el caso $b = l(a_i)$ es análogo mirando hacia el pasado. Sino, basta observar que una descomposición en ladrillos libre y maximal para f , también es una descomposición en ladrillos libre y maximal para f^{-1} pero la orientación de los arcos es la inversa. \square

Proposición 3.6.4. La frontera de un ladrillo b es la unión de dos arcos bien orientados:

$$\Gamma = \prod_{i=0}^n a_i \text{ y } \Gamma' = \prod_{i=0}^{n'} a'_i$$

donde $s(a_0) = s(a'_0)$, $e(a_n) = e(a'_{n'})$ y $r(\Gamma') = l(\Gamma) = \{b\}$.

El vértice inicial común de a_0 y a'_0 lo notaremos como $s(b)$. El vértice final común de a_n y $a'_{n'}$ lo notaremos $e(b)$.



Demostración. Supongamos que no es cierto. Puesto que la frontera de b no puede ser un único arco bien orientado por el sub-lemma anterior, deben existir $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ arcos de la frontera de b que verifican:

- Si $x_0 = s(a_1)$ y recorremos ∂b desde x_0 en el sentido determinado por la orientación de a_1 , encontramos a_1, a_2, a_3 y a_4 en ese orden.
- $r(a_1) = r(a_3) = l(a_2) = l(a_4) = b$.

Sean b_1, b_2, b_3 y b_4 los ladrillos adyacentes a b con quien comparten la arista a_i respectivamente. Por la orientación de las aristas, tenemos que $b_1 \rightarrow b$, $b_3 \rightarrow b$, $b \rightarrow b_2$ y $b \rightarrow b_4$. De esto, la información que nos interesa es la siguiente:

$$f(b) \cap b_1 = \phi, \quad f(b) \cap b_3 = \phi, \quad f(b) \cap b_2 \neq \phi, \quad f(b) \cap b_4 \neq \phi$$

Como $\Phi(\{b\})$ es conexo en B , b_2, b_4 están en $\Phi(\{b\})$ y son adyacentes a b , entonces $\{b\} \cup \Phi(\{b\})$ es conexo en B y en particular es un anillo que encierra en B una componente conexa y acotada que tiene a b_1 o a b_3 .

Para ver esto, como $f(b) \cap b_2 \neq \phi$, $f(b) \cap b_4 \neq \phi$ y b es libre, ni b_2 ni b_4 están contenidos en $f(b)$. Si C la componente arco-conexa de $(b \cup b_2 \cup b_4) - \text{int}(f(b))$ que tiene a b . Sean $y_2 \in \partial f(b) \cap b_2 \cap C$ e $y_4 \in \partial f(b) \cap b_4 \cap C$. Sean $x_2 = f^{-1}(y_2)$ y $x_4 = f^{-1}(y_4)$. Sea γ una curva inyectiva en b que une x_2 con x_4 donde además $\text{int}(\gamma) \subset \text{int}(b)$. Sea δ una curva inyectiva cuya imagen esté en C , que une y_2 con y_4 . Luego la curva $f(\gamma) \cup \delta$ es una curva cerrada que por el teorema de Jordan separa \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas; una acotada y la otra no. Observemos que $f(\gamma) \cup \delta \subset f(b) \cup b \cup b_2 \cup b_4 \subset \Phi(\{b\}) \cup b$. En particular, como $\gamma \subset b$, $f(\gamma) \cap b = \phi$. Como un extremo de δ está en b_2 y el otro está en b_4 , podemos suponer que δ corta una sola vez a_4 y una sola vez a_2 . Si orientamos $f(\gamma) \cup \delta$, sin importar cual sea esta orientación tenemos que b_1 está a la derecha y b_3 a la izquierda o al revés, por como definimos los arcos a_i . De esto se concluye que $(\text{int}(\Phi(\{b\}) \cup b))^c$ (en \mathbb{R}^2) tiene una componente conexa acotada donde b_1 o b_3 está contenido en ella. Notémosla como X .

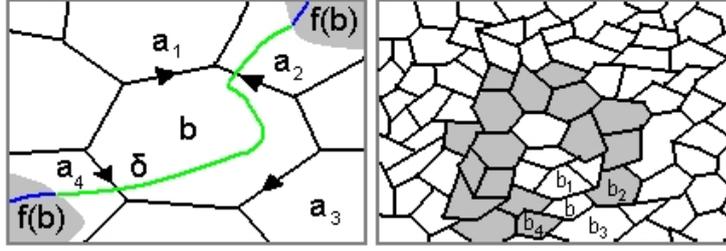


Figura 10: En la figura de la izquierda se encuentra una representación del ladrillo b , donde la curva verde representa a δ y la curva azul representa a $f(\gamma)$. A la derecha se encuentra un representación de la descomposición en ladrillos donde el conjunto de ladrillos en gris representa $\Phi(\{b\})$

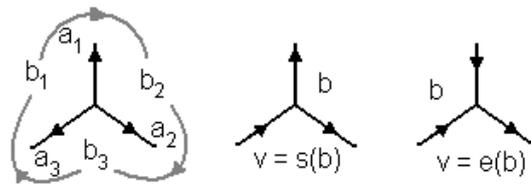
X puede ser identificado con un conjunto de ladrillos en B el cual es finito y tiene a b_1 o a b_3 . Supongamos a partir de ahora que b_1 está en X . Del sub-lemma anterior, como $b_1 \rightarrow b$, tenemos que existe b'_1 tal que $b'_1 \rightarrow b_1$. En particular b'_1 no puede estar en $\Phi(\{b\})$ porque sino, tendríamos $b \rightarrow b'_1 \rightarrow b_1 \rightarrow b$ lo cual es absurdo. Es claro, con el mismo razonamiento que b'_1 no puede ser b y por lo tanto $b'_1 \in X$. Aplicamos de nuevo el sub-lemma sobre b'_1 y obtenemos b'_2 donde $b'_2 \rightarrow b'_1$. Por las mismas razones $b'_2 \notin \Phi(b) \cup \{b\}$ y por lo tanto $b'_2 \in X$. Pero además $b'_2 \neq b'_1$ y $b'_2 \neq b_1$. Iteramos el paso ahora en b'_2 y así sucesivamente. Cada nuevo b'_n que obtenemos tiene que estar en X y tiene que ser distinto de los b'_1, \dots, b'_{n-1} y de b_1 puesto que sino, estaríamos en contradicción con la proposición 3.3.2. Como X es finito, en menos de $\#X$ pasos obtenemos un absurdo. \square

Veamos ahora una observación simple pero importante que es consecuencia de la proposición 3.3.2.

Observación 3.6.5. Si $v \in V$, sabemos que existen tres arcos en A que tienen como extremo a v . En particular v no puede ser el extremo final de los tres arcos ni tampoco el extremo inicial. De modo más formal: Dado $v \in V$, existen $a_1, a_2 \in A$ tal que $s(a_1) = e(a_2) = v$.

Además, de esta observación concluimos que dado $v \in V$, existe $b \in B$ tal que $v = s(b)$ o $v = e(b)$.

Demostración. Por absurdo, supongamos que $v = s(a_1) = s(a_2) = s(a_3)$ donde a_1, a_2 y a_3 están indexados de forma horaria. Sean b_1, b_2 y b_3 los ladrillos que tienen a v en su frontera y verifican $b_i = l(a_i)$. Entonces tenemos que $b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_1$ lo cual es absurdo. La situación es análoga para $v = e(a_1) = e(a_2) = e(a_3)$.



\square

3.7. Subconjuntos Atractores y Repulsores de B

Para terminar esta sección, estudiaremos la noción de conjuntos atractores y repulsores en B . Traducir la noción de un conjunto atractor al lenguaje de la descomposición en ladrillos es una pieza esencial a la hora de buscar líneas de Brouwer en la estructura que estamos trabajando. La razón de esto es clara: si Γ es una línea de Brouwer, $R(\Gamma)$ es un conjunto atractor.

Definición 3.7.1. Decimos que $X \subset B$ es un conjunto *atractor* si verifica

$$\Phi(X) \subset X$$

Decimos que $X \subset B$ es un conjunto *repulsor* si verifica

$$\Phi^-(X) \subset X$$

Estudiamos ahora algunas de las propiedades de los conjuntos atractores y repulsores.

Proposición 3.7.2. (*Propiedades de los conjuntos Atractores y Repulsores*)

1. X es atractor si y sólo si $B - X$ es repulsor.
2. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos de B . En primer lugar se verifica:

$$\Phi\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} \Phi(X_i) \quad \Phi\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \Phi(X_i)$$

Si los X_i son atractores, entonces la unión y la intersección de los X_i son atractores. Además se dan los resultados análogos para Φ^- y los conjuntos repulsores.

3. Si X es un atractor (repulsor), toda componente conexa de X también es un conjunto atractor (repulsor).
4. El conjunto

$$\bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\})$$

es atractor, conexo y no contiene a b .

5. Si X es un atractor y $a \in A$ verifica $a \subset \partial X$ entonces $r(a) \in X$ y $l(a) \in B - X$.

Demostración.

1. Sea $b \in B - X$. Si $b' \in \Phi^-(\{b\}) \cap X$ entonces tenemos que $b' \rightarrow b$ y luego $b \in \Phi(\{b'\}) \subset X$ lo cual es absurdo. La demostración del recíproco es análoga.
2. La parte de los atractores es inmediata a partir de las dos relaciones de los conjuntos. Para la unión, $b' \in \Phi\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$ si y sólo si existe $b \in \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que $b \rightarrow b'$ si y sólo si existe $i \in I$ y $b \in X_i$ tal que $b \rightarrow b'$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $b' \in \Phi(X_i)$ si y sólo si $b' \in \bigcup_{i \in I} \Phi(X_i)$.
Para la intersección. Si $b' \in \Phi\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)$ entonces existe $b \in \bigcap_{i \in I} X_i$ tal que $b \rightarrow b'$ y por lo tanto $b' \in \Phi(X_i) \forall i \in I$.

3. Sea X' una componente conexa de X y sea $b \in X'$. Como $b \in X$ tenemos que $\Phi(\{b\}) \subset X$. Luego, puesto que existe $b' \in B$ adyacente a b tal que $b \rightarrow b'$. Por ser $\Phi(b)$ conexo, es $\Phi(\{b\}) \cup \{b\}$ conexo y además $\Phi(\{b\}) \cup \{b\} \subset X$. De esto concluimos que $\Phi(\{b\}) \cup \{b\} \subset X'$ y por lo tanto $\Phi(\{b\}) \subset X'$.
4. b no está por la proposición 3.3.2. Además es atractor porque

$$\Phi\left(\bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\})\right) = \bigcup_{n \geq 1} \Phi(\Phi^n(\{b\})) = \bigcup_{n \geq 2} \Phi^n(\{b\}) \subset \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\})$$

Para ver que es conexo, basta observar que $b \cup \Phi(\{b\})$ es conexo y usar que:

$$\bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\}) = \bigcup_{n \geq 1} (\Phi^n(\{b\}) \cup \Phi^{n+1}(\{b\})) = \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\} \cup \Phi(\{b\}))$$

Como $\Phi^n(\{b\} \cup \Phi(\{b\}))$ es conexo y $\Phi^n(\{b\} \cup \Phi(\{b\})) \cap \Phi^{n+1}(\{b\} \cup \Phi(\{b\})) = \Phi^{n+1}(\{b\}) \neq \emptyset$ obtenemos finalmente que $\bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b\})$ es conexo.

5. Si fuera al revés, entonces $l(a) \in X$ y como $l(a) \rightarrow r(a)$, obtenemos que $r(a) \in X$. Por lo tanto $r(a) \cup l(a) \subset X$ y entonces $a \subset \text{int}(X)$ por lo que $a \notin \partial X$.

□

4. Líneas de Brouwer en el Esqueleto

En esta sección estudiaremos las líneas de Brouwer que se encuentran contenidas en el esqueleto E . No sólo las estudiaremos individualmente, también las analizaremos como un espacio al cual le daremos una topología y un orden.

Si $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ donde los a_i es una familia admisible indexada en \mathbb{Z} , tienen sentido $r(\Gamma)$, $l(\Gamma)$, $R(\Gamma)$ y $L(\Gamma)$. Es recomendable revisar las definiciones de los anteriores conjuntos que se encuentran en 3.6 las primeras dos y en 1.2 las últimas dos. Nótese que $r(\Gamma)$ y $R(\Gamma)$ son distintos. En particular $r(\Gamma) \subsetneq R(\Gamma)$ y análogamente $l(\Gamma) \subsetneq L(\Gamma)$.

4.1. E -Líneas de Brouwer

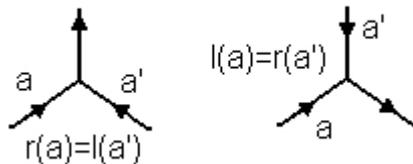
Comencemos por definir las E -líneas.

Definición 4.1.1. Decimos que $\Gamma \subset E$ es una E -Línea de Brouwer si es una línea de Brouwer.

Lo que haremos ahora es mostrar un teorema que nos dará información de como encontrarlas.

Teorema 4.1.2. Sea X un atractor y Γ una componente conexa de ∂X . Entonces los arcos de A en Γ son una familia infinita admisible indexada en \mathbb{Z} y además Γ es una E -línea de Brouwer.

Demostración. Veamos primero que es admisible. Por el último punto de la proposición 3.7.2, $r(\Gamma) = \{r(a) : a \subset \Gamma \text{ y } a \in A\} \subset X$. Sean $a, a' \in A$ arcos en Γ tales que $e(a) \in a'$. Supongamos por absurdo que $e(a) \neq s(a')$. Esto quiere decir que $e(a) = e(a')$, que implica $r(a) = l(a')$ o $r(a') = l(a)$.

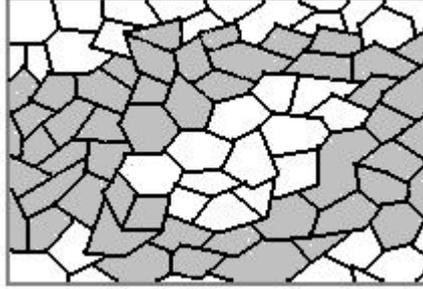


Si el caso es $r(a) = l(a')$ tenemos que $r(a') \cup l(a') \subset X$, por lo que a' no está en la frontera de X . Si el caso es $r(a') = l(a)$ entonces $r(a) \cup l(a) \subset X$, por lo que a no está en la frontera de X .

Si $\Gamma = \prod_{i \in I} a_i$ como Γ es una componente conexa del borde de una variedad topológica, o es un homeomorfo a S^1 o es un encaje propio de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto $I = \mathbb{Z}$ o podemos suponer que $I = \{1, \dots, n\}$ y además $e(a_n) = s(a_1)$.

Supongamos que I es finito y $e(a_n) = s(a_1)$. Por el teorema de la curva de Jordan y que los a_i pertenecen a A concluimos que existen X_1 y X_2 subconjuntos de B tales que son disjuntos en B , $B = X_1 \cup X_2$, $\mathbb{R}^2 - \Gamma = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$ y además podemos suponer que X_1 contiene a $r(\Gamma)$ y X_2 contiene a $l(\Gamma)$. Uno de los dos X_1 o X_2 debe

ser finito, ya que identificados en \mathbb{R}^2 uno debe ser acotado. Supongamos que X_1 es finito.



Sea $b_1 = r(a_1) \in X_1$, sabemos que existe $b_2 \in B$ adyacente a b_1 tal que $b_1 \rightarrow b_2$. En particular $b_2 \neq l(a_1)$ y $b_2 \neq b_1$ y por lo tanto $b_2 \in X_1$. Existe luego $b_3 \in B$ adyacente a b_2 tal que $b_2 \rightarrow b_3$, en particular $b_3 \neq b_2$, $b_3 \neq b_1$ y si $b_2 \in r(\Gamma)$ entonces $b_3 \notin l(\Gamma)$ por lo que $b_3 \in X_1$. Sucesivamente, si tomamos b_1, b_2, \dots, b_m ladrillos en X_1 tales que $b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_m$, donde $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$ y b_i es adyacente a b_{i+1} para $i = 1, \dots, m-1$. Sabemos que existe $b_{m+1} \in B$ adyacente a b_m tal que $b_m \rightarrow b_{m+1}$ y en particular $b_{m+1} \neq b_i \forall i = 1, \dots, m$. A su vez, si $b_m \in r(\Gamma)$ entonces $b_{m+1} \notin l(\Gamma)$ por lo que $b_{m+1} \in X_1$. Como X_1 es finito, en $\#(X_1)$ pasos obtengo un absurdo.

Teniendo ahora que $I = \mathbb{Z}$, podemos construir nuevamente X_1 y X_2 tales que $B = X_1 \cup X_2$ donde $\mathbb{R}^2 - \Gamma = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$ y además podemos suponer que X_1 contiene a $r(\Gamma)$ y X_2 contiene a $l(\Gamma)$. Como $r(\Gamma)$ es la unión de conjuntos conexos, donde tal unión contiene a Γ , que es conexo, obtenemos que $r(\Gamma)$ es conexo. Sea X_3 la componente conexa de X que contiene a $r(\Gamma)$. entonces $X_3 \subset X_1$. Por ser X atractor y por el tercer punto de la proposición 3.7.2 tenemos que X_3 es atractor. Luego X_2 es una componente conexa de $B - X_3$ que es un repulsor y por lo tanto X_2 es un repulsor. Finalmente X_1 es $B - X_2$ que es un atractor.

Probamos entonces que X_1 es un atractor y X_2 es un repulsor. En particular $X_1 = R(\Gamma)$ y $X_2 = L(\Gamma)$ y por lo tanto $f(\Gamma) \subset R(\Gamma)$ y $f^{-1}(\Gamma) \subset L(\Gamma)$. Para que sea una línea de Brouwer, necesitamos que $f(\Gamma) \subset R(\Gamma) - \Gamma$ y $f^{-1}(\Gamma) \subset L(\Gamma) - \Gamma$. Ahora, si existe $x \in \Gamma$ tal que $f(x) \in \Gamma$, sea $b_x \in r(\Gamma)$ tal que $x \in b_x$ y sea $b_{f(x)} \in l(\Gamma)$ tal que $f(x) \in b_{f(x)}$, entonces tenemos $b_x \rightarrow b_{f(x)}$ donde $b_x \in X_1$ y $b_{f(x)} \in X_2$ contradiciendo que X_1 sea atractor. Como $f(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$, $f^{-1}(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$ y además concluimos que Γ es una línea de Brouwer. \square

El teorema anterior nos dice que tenemos líneas de Brouwer en el esqueleto E y nos da una condición suficiente para encontrarlas. Veamos ahora que las E -líneas son compatibles con las orientaciones y una suerte de recíproco del teorema anterior.

Proposición 4.1.3. *Sea Γ una E -línea. Entonces es una concatenación de arcos, que forman una familia admisible indexada en \mathbb{Z} y además Γ es la frontera de un atractor.*

Demostración. Por estar Γ en E sabemos que es una concatenación de arcos, que a priori no necesariamente están bien orientados. Sin embargo, Γ está orientada y tenemos bien definidos los conjuntos $R(\Gamma)$ y $L(\Gamma)$. Como $\Gamma \subset E$, resulta que $R(\Gamma)$ puede ser identificado con una familia de ladrillos en B . Como Γ es una línea de Brouwer, $f(R(\Gamma)) \subset \text{int}(R(\Gamma))$ y por lo tanto $R(\Gamma)$ es un atractor en B . Recíprocamente $L(\Gamma)$ es un repulsor en B . Finalmente, como Γ es la frontera de un atractor por el teorema anterior tenemos la admisibilidad de los arcos. \square

Observación 4.1.4. Todo arco $a \in A$ está contenido en una E -Línea.

Demostración. Basta tomar el conjunto $X = \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(l(a))$ que por el cuarto punto de la proposición 3.3.2 sabemos que es un atractor y $l(a)$ no está en él. Sin embargo $r(a) \in \Phi(l(a)) \subset X$ y por lo tanto $a \in \partial X$. Por el teorema 4.1.2 tenemos que si Γ es la componente conexa de X que contiene a a , entonces Γ es una E -línea. \square

Veamos por último, en lo que respecta al entendimiento de las E -líneas, la siguiente observación

Observación 4.1.5.

- Sea $\Gamma = \prod_{i \in I} a_i$ donde la familia $\{a_i\}_{i \in I}$ es admisible y además I es un intervalo en \mathbb{Z} . Podemos extender Γ a una E -línea si y sólo si $l(\Gamma) \cap \bigcup_{n \geq 0} \Phi^n(r(\Gamma)) = \phi$.
- si $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ donde los arcos de Γ forman una familia admisible. Γ es una E -línea si y sólo si $\prod_{i=-n}^{i=n} a_i$ se puede extender a una E -línea $\forall n \geq 1$.

Demostración.

- Si Γ se extiende a Γ' entonces es cierto para Γ' y como $l(\Gamma) \subset l(\Gamma')$, $r(\Gamma) \subset r(\Gamma')$ y Φ respeta el orden de las inclusiones tenemos el directo.

Para el recíproco, si tomamos $X = \bigcup_{n \geq 0} \Phi^n(r(\Gamma))$. Resulta ser un atractor donde además $l(\Gamma) \subset B - X$ por lo que Γ está en la frontera de X . Si tomamos Γ' la componente conexa de la frontera de X , que contiene a Γ , sabemos que Γ' es una E -línea.

- El directo es trivial así que veamos el recíproco. Para esto por el punto anterior basta probar que $l(\Gamma) \cap \bigcup_{n \geq 0} \Phi^n(r(\Gamma)) = \phi$. Si no fuera cierto existen a_i y a_j arcos de Γ y $b_1, \dots, b_n \in \bar{B}$ tales que $r(a_j) \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_n \rightarrow l(a_i)$. Si $n > \max\{|i|, |j|\}$ concluimos que por el punto anterior $\prod_{i=-n}^{i=n} a_i$ no se puede extender a una E -línea, lo cual contradice la hipótesis.

\square

4.2. Espacio de las E -Lineas de Brouwer

Teniendo ahora una noción más clara de donde encontrar líneas de Brouwer, pasamos a formalizar el espacio de las E -líneas de Brouwer. Le proveeremos a A la topología discreta y $A^{\mathbb{Z}}$ la topología producto. Notaremos $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ el shift:

$$\sigma(\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}) = \{a_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

Observación 4.2.1. El conjunto de las familias de arcos admisibles $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $\prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ es una línea de Brouwer, es un cerrado Δ de $A^{\mathbb{Z}}$ invariante por σ .

Demostración. Que Δ es invariante por σ es inmediato. Veamos que Δ es cerrado. Si $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Delta$ y $\alpha^n \rightarrow \alpha$. Dado $i \in \mathbb{Z}$ el conjunto $U_i = \{\alpha' \in A^{\mathbb{Z}} : \alpha'_i = \alpha_i, \alpha'_{i+1} = \alpha_{i+1}\}$ es abierto en $A^{\mathbb{Z}}$. Luego, existe n tal que $\alpha^n \in U_i$ y como α^n es admisible entonces $e(\alpha_i) = e(\alpha_i^n) = s(\alpha_{i+1}^n) = s(\alpha_{i+1})$ por lo que α es una familia admisible. Para ver que α es una E -línea, tomemos el abierto $V_m = \{\alpha' \in A^{\mathbb{Z}} : \alpha'_i = \alpha_i \forall i = -m, \dots, 0, \dots, m\}$. Para cada m , obtenemos un n tal que $\alpha^n \in V_m$ y por lo tanto $\prod_{i=-m}^m \alpha_i$ se puede extender a una E -línea. Luego, por el último punto de la observación 4.1.5 tenemos que α induce una E -línea. \square

Observación 4.2.2. Dado $a \in A$. Definimos $\Delta_a = \{\alpha \in \Delta : \alpha_0 = a\}$. Ya sabemos que este conjunto no es vacío. En particular es un conjunto compacto.

Demostración. Es simple observar que es cerrado. Si $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Delta_a$ converge a $\alpha \in \Delta$. Para todo n tenemos $a = \alpha_0^n$ y por lo tanto $a = \alpha_0$.

Dada una arista $a \in A$, sean $P(a) = \{a' \in A : e(a) = s(a')\}$ y $P^{-1}(a) = \{a' \in A : s(a) = e(a')\}$. Por la observación 3.6.5 sabemos que $P(a)$ y $P^{-1}(a)$ no son vacíos. Más aún por las condiciones iniciales de la descomposición, pueden tener uno o dos elementos a lo sumo. Definimos de forma más general $P(X) = \{a' \in A : \exists a_X \in X \text{ tal que } e(a_X) = s(a')\}$ y $P^{-1}(X) = \{a' \in A : \exists a_X \in X \text{ tal que } s(a_X) = e(a')\}$. Si X es finito, entonces $P(X)$ y $P^{-1}(X)$ también son finitos. Ahora

$$\Delta_a \subset \prod_{i \in \mathbb{Z}} P^i(a)$$

y por lo tanto es compacto. \square

Notaremos Λ al conjunto de las E -líneas de Brouwer. El mapa

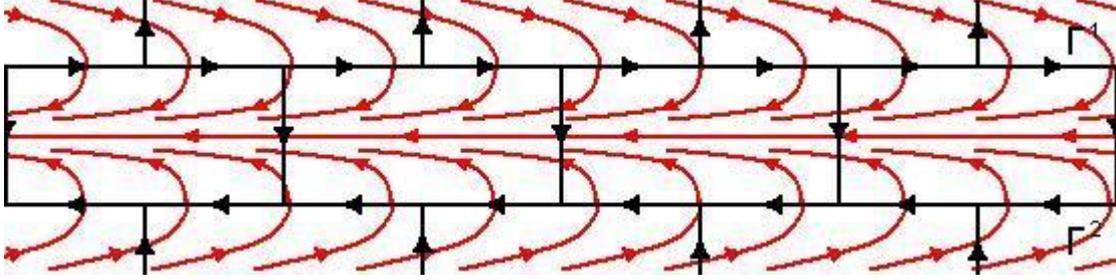
$$\pi : \Delta \rightarrow \Lambda, \quad \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$$

baja a un cociente y define una biyección entre el conjunto Δ/σ y Λ . Es claro que si $\pi(\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}) = \pi(\{a'_i\}_{i \in \mathbb{Z}})$ entonces deben ser los mismos arcos y por ser familias admisibles, debe existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a'_i = a_{i+n} \forall i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\{a'_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \sigma^n(\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}})$. Recíprocamente si $\{a'_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \sigma^n(\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}})$ es claro que definen la misma E -línea. De esto, podemos definir la topología cociente en Δ/σ y transportarla a Λ .

Por lo general esta topología no es Hausdorff y tiene como sub-base los conjuntos $\Lambda_a = \{\Gamma \in \Lambda : a \subset \Gamma\}$ donde $a \in A$. Observemos que la restricción de π a Δ_a

define un homeomorfismo sobre Λ_a . Los conjuntos Λ_a son abiertos, compactos, pero no necesariamente cerrados.

Veamos con un ejemplo que la topología de Λ no tiene por que ser Hausdorff y los Λ_a no tienen por que ser necesariamente cerrados. Supongamos que en B tenemos una “franja” de ladrillos como se muestra en la figura.



Podemos suponer que f es el tiempo 1 del flujo cuyas órbitas se muestran en rojo. Para garantizar que tenemos una franja de ladrillos como se muestra en la imagen, podemos crear a partir de dicha franja una descomposición libre, usando la idea de los cuadrados en el complemento de los ladrillos que queremos que estén (ver lema 3.2.3). Luego observando el algoritmo de la demostración para obtener una descomposición libre y maximal (ver lema 3.4.1), si empezamos por uno de los ladrillos de la franja, como tienen una buena relación con todos sus adyacentes entonces estos no resultan modificados.

Sean Γ^1 y Γ^2 las E -Lineas que se muestran en la figura. Puesto que los Λ_a son una sub-base, para estudiar un entorno que contiene a Γ^1 o a Γ^2 , basta fijar a_1, \dots, a_n en Γ^i y mirar las E -lineas que pasan por los a_i . En particular Γ^1 y Γ^2 no pueden ser separados por entornos disjuntos. Si a_1, \dots, a_n son arcos de Γ^1 y a'_1, \dots, a'_m son arcos de Γ^2 . Supongamos que a_n y a'_m son los arcos que se encuentran más a la derecha (según \mathbb{R}^2) en cada Γ^i . Sea a'' una arista vertical (en la franja comprendida por los Γ^i) que se encuentra más a la derecha que a_n y a'_m . Tomamos entonces la E -línea Γ que comienza igual a Γ^1 pasa a_n , baja por a'' y luego vuelve por Γ^2 . Es claro que Γ pertenece a los dos entornos y por lo tanto en este ejemplo la topología de Λ no es Hausdorff. Más aún, si $a' \in \Gamma^2$ entonces $\Lambda_{a'}$ no es cerrado. En efecto si U es un entorno de Γ^1 , $U \cap \Lambda_{a'} \neq \emptyset$ y se prueba con la misma construcción a la anterior. Como $\Gamma^1 \notin \Lambda_{a'}$ obtenemos que $\Lambda_{a'}$ no es cerrado.

4.3. Intersecciones de las E -Lineas

Apuntamos ahora a estudiar las intersecciones de las E -Lineas. Si tuviéramos una foliación del plano por líneas de Brouwer, estas no se intersectarían entre sí. Como estamos trabajando en el esqueleto E , por lo general tendremos intersecciones no triviales de líneas distintas. La mejor situación que podemos anhelar con el objetivo de construir una foliación, es que las intersecciones de las E -líneas no sean transversales. Es recomendable revisar el concepto de intersección transversal que fue definido en 1.2.

Proposición 4.3.1. *Si Γ y Γ' son dos E -lineas, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. Γ y Γ' se intersectan transversalmente.
2. $r(\Gamma) \cap l(\Gamma') \neq \emptyset$ y $l(\Gamma) \cap r(\Gamma') \neq \emptyset$ en B .

Demostración. Mostremos primero 1. \Rightarrow 2. Si la intersección es transversal entonces

- $\Gamma \cap (R(\Gamma') - \Gamma') \neq \emptyset$.
- $\Gamma \cap (L(\Gamma') - \Gamma') \neq \emptyset$.

Del primer punto, como $\Gamma \subset r(\Gamma)$ concluimos que $r(\Gamma) \cap (R(\Gamma') - \Gamma') \neq \emptyset$. Como $\text{int}(r(\Gamma))$ es denso en $r(\Gamma)$ y $R(\Gamma') - \Gamma'$ es abierto, obtenemos que $\text{int}(r(\Gamma)) \cap (R(\Gamma') - \Gamma') \neq \emptyset$. Análogamente del segundo punto obtenemos que $\text{int}(r(\Gamma)) \cap (L(\Gamma') - \Gamma') \neq \emptyset$ y como $\text{int}(r(\Gamma))$ es conexo concluimos que $\text{int}(r(\Gamma)) \cap \Gamma' \neq \emptyset$. Luego $\text{int}(r(\Gamma)) \cap l(\Gamma') \neq \emptyset$ y por el mismo argumento de densidad $\text{int}(r(\Gamma)) \cap \text{int}(l(\Gamma')) \neq \emptyset$. Utilizando ahora la densidad y la condición de ser abierto de $\bigcup_{b \in r(\Gamma)} \text{int}(b)$ en $\text{int}(r(\Gamma))$ y la densidad y la condición de ser abierto de $\bigcup_{b \in l(\Gamma')} \text{int}(b)$ en $\text{int}(l(\Gamma'))$, encontramos que existen $b \in r(\Gamma)$ y $b' \in l(\Gamma')$ tal que $\text{int}(b) \cap \text{int}(b') \neq \emptyset$. Como los ladrillos tienen interiores disjuntos dos a dos entonces $b = b'$. Por lo tanto $r(\Gamma) \cap l(\Gamma') \neq \emptyset$ en B . Con un argumento análogo concluimos que $l(\Gamma) \cap r(\Gamma') \neq \emptyset$.

Veamos 2. \Rightarrow 1. Supongamos que Γ y Γ' no tienen intersección transversal y estudiemos los cuatro casos enumerados en la primera sección.

- Si $R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$. En B tenemos que $\emptyset = R(\Gamma) \cap L(\Gamma') \supset r(\Gamma) \cap l(\Gamma')$ lo cual es absurdo.
- Si $R(\Gamma') \subset R(\Gamma)$. Es análogo al caso anterior.
- Si $L(\Gamma) \cup L(\Gamma') = \mathbb{R}^2$, $R(\Gamma) \cap R(\Gamma') = \Gamma \cap \Gamma'$. Si Γ y Γ' tuvieran un arco en común, entonces las orientaciones de los arcos comunes, debería ser opuesta lo cual es absurdo. Por lo tanto en \mathbb{R}^2 , $R(\Gamma) \cap R(\Gamma') = \emptyset$ y entonces $R(\Gamma) \cup R(\Gamma')$ no es conexo. Si $b \in l(\Gamma) \cap R(\Gamma')$ entonces $R(\Gamma) \cup R(\Gamma') = R(\Gamma) \cup (b \cup R(\Gamma')) = (R(\Gamma) \cup b) \cup R(\Gamma')$. Como la unión de dos conexos cuya intersección no es vacía es conexo, obtenemos un absurdo.
- Si $R(\Gamma) \cup R(\Gamma') = \mathbb{R}^2$. Es análogo al caso anterior.

□

Corolario 4.3.2. *El conjunto de $\Lambda \times \Lambda$ formado por los pares de E -lineas que no poseen intersección transversal es cerrado en $\Lambda \times \Lambda$.*

Demostración. Sean Γ y Γ' dos E -lineas que se escriben como $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ y $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a'_i$. Si estas se intersectan transversalmente, por la proposición anterior, obtenemos que existen dos enteros i_0, i'_0 tal que $l(a_{i_0}) = r(a'_{i'_0})$ y otros dos enteros i_1, i'_1 tal que $r(a_{i_1}) = l(a'_{i'_1})$. En particular, cualquier par de líneas que pertenezca al abierto $(\Lambda_{a_{i_0}} \cap \Lambda_{a_{i_1}}) \times (\Lambda_{a'_{i'_0}} \cap \Lambda_{a'_{i'_1}})$ tendrán intersección transversal y por lo tanto conjunto de los pares de E -lineas que poseen intersección transversal es abierto. □

Nuestro objetivo ahora, es mostrar que podemos cubrir el esqueleto por E -lineas de Brouwer que no tienen intersección transversal entre ellas. Para esto indexaremos $A = \{a_i\}_{i \geq 0}$.

Sub-Lema 4.3.3. *Dado $n \geq 0$, existe una familia $\{X_i^n\}_{i \geq 0}$ de atractores tales que:*

1. *La frontera de X_i^n contiene el arco a_i .*
2. *Los atractores X_1^n, \dots, X_n^n son comparables por la relación de inclusión.*

Demostración. Hagamos la construcción de forma inductiva. Si $n = 0$ definimos $X_i^0 = \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(l(a_i))$. Sabemos que por la proposición 3.7.2, este conjunto es un atractor que no tiene a $l(a_i)$ y sí a $r(a_i)$, por lo que $a_i \in \partial X_i^0$.

Supongamos que tenemos $X_i^n \forall i \in \mathbb{N}$. Si $i > n + 1$, definimos $X_i^{n+1} = X_i^n$. Consideremos ahora los $2n + 2$ atractores:

$$X_0^n \cap X_{n+1}^n, \dots, X_n^n \cap X_{n+1}^n, X_0^n \cup X_{n+1}^n, \dots, X_n^n \cup X_{n+1}^n$$

Por hipótesis inductiva tenemos que dados $i, j \in \{0, \dots, n\}$ con $i \neq j$, se da $X_i^n \subset X_j^n$ o $X_j^n \subset X_i^n$. Supongamos que $X_i^n \subset X_j^n$. Entonces $X_i^n \cap X_{n+1}^n \subset X_j^n \cap X_{n+1}^n \subset X_i^n \cup X_{n+1}^n \subset X_j^n \cup X_{n+1}^n$ y por lo tanto estos $2n + 2$ atractores son comparables por la relación de inclusión.

Fijemos $i \in \{0, \dots, n\}$. Sabemos que $l(a_i) \notin X_i^n$. Si $l(a_i) \notin X_{n+1}^n$ entonces a_i está en la frontera de $X_i^n \cup X_{n+1}^n$ y en ese caso definimos $X_i^{n+1} = X_i^n \cup X_{n+1}^n$. Si $l(a_i) \in X_{n+1}^n$ entonces $r(a_i) \in X_{n+1}^n$ por ser un atractor. De lo que deducimos que a_i está en la frontera de $X_i^n \cap X_{n+1}^n$ y en ese caso definimos $X_i^{n+1} = X_i^n \cap X_{n+1}^n$.

Definamos ahora X_{n+1}^{n+1} . Con los mismos argumentos, si $l(a_{n+1}) \notin X_0^n$ entonces a_{n+1} está en la frontera de $X_0^n \cup X_{n+1}^n$ y en ese caso definimos $X_{n+1}^{n+1} = X_0^n \cup X_{n+1}^n$. Si $l(a_{n+1}) \in X_0^n$, a_{n+1} está en la frontera de $X_0^n \cap X_{n+1}^n$ y definimos entonces $X_{n+1}^{n+1} = X_0^n \cap X_{n+1}^n$. \square

Teorema 4.3.4. *Existe una familia $\{\Gamma_i\}_{i \geq 0}$ de E -lineas de Brouwer tales que:*

1. *Cada línea Γ_i contiene el arco a_i .*
2. *Dos líneas Γ_i y Γ_j no se intersectan transversalmente.*

Demostración. Sean los $\{X_i^n\}_{n \geq 0, i \geq 0}$ del sub-lema anterior. Llamemos Γ_i^n a la componente conexa de ∂X_i^n que contiene a a_i . Dados i y j , sea $n \geq i, j$. Si $X_i^n \subset X_j^n$ entonces $l(\Gamma_j^n) \cap X_j^n = \phi$ y $r(\Gamma_i^n) \subset X_i^n$ por lo que $l(\Gamma_j^n) \cap r(\Gamma_i^n) = \phi$. Si la inclusión es al revés $l(\Gamma_i^n) \cap r(\Gamma_j^n) = \phi$ y por lo tanto $\forall n > i, j$ Γ_i^n y Γ_j^n no se intersectan transversalmente.

Definimos ahora $\Gamma^n \in \prod_{i \geq 0} \Lambda_{a_i}$ como $\Gamma^n = \{\Gamma_i^n\}_{i \geq 0}$. Por ser compacto el espacio producto $\prod_{i \geq 0} \Lambda_{a_i}$, $\{\Gamma^n\}_{n \geq 0}$ tiene un punto de acumulación $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i \geq 0}$.

Como $\Gamma_i \in \Lambda_{a_i}$ tenemos que $a_i \subset \Gamma_i$. Por el corolario 4.3.2 y lo demostrado anteriormente concluimos que para cualesquiera i, j , Γ_i y Γ_j no se intersectan transversalmente. \square

4.4. Propiedades del espacio Λ'

Notaremos ahora Λ' como la clausura de $\{\Gamma_i : i \geq 0\}$ en Λ , donde los Γ_i son los obtenidos en el teorema anterior. Por el corolario 4.3.2 sabemos que las E -Lineas de Λ' no se intersectan transversalmente. Los conjuntos $\Lambda'_a = \Lambda' \cap \Lambda_a$ no son necesariamente cerrados en Λ' , pero sí abiertos, compactos y forman una sub-base de la topología de Λ' .

El resto de esta sección está dedicada al estudio del espacio Λ' y del vinculo entre la topología del mismo y un orden natural que podemos definir sobre las E -lineas.

Definición 4.4.1. En Λ' definimos el orden:

$$\Gamma \leq \Gamma' \Leftrightarrow R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$$

Observación 4.4.2. El orden definido anteriormente, no es necesariamente total. Sin embargo, restringido a cada Λ'_a sí lo es y además Λ'_a es un intervalo en Λ' .

Demostración. En efecto si Γ y Γ' pertenecen a Λ'_a , entonces $r(a) \in R(\Gamma) \cap R(\Gamma')$ y $l(a) \in L(\Gamma) \cap L(\Gamma')$. Como Γ y Γ' no se intersectan transversalmente entonces $R(\Gamma) \cap L(\Gamma') = \phi$ o $R(\Gamma') \cap L(\Gamma) = \phi$. De esto, concluimos que $R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$ o $R(\Gamma') \subset R(\Gamma)$.

Para ver lo segundo, si Γ y Γ'' están en Λ'_a , Γ' está en Λ' y además $\Gamma \leq \Gamma' \leq \Gamma''$. Entonces $R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$ y por lo tanto $r(a) \in R(\Gamma')$, $L(\Gamma'') \subset L(\Gamma')$ y por lo tanto $l(a) \in L(\Gamma')$. De esto concluimos que $\Gamma' \in \Lambda'_a$.

Un ejemplo donde el orden no es necesariamente total es en el definido anteriormente en 4.2. Si $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ son los arcos verticales que tienen extremo inicial en Γ^1 y final en Γ^2 , la única E -línea que pasa por a_i es aquella que comienza igual a Γ^1 , baja por a_i y luego sigue como Γ^2 . Lo anterior está dado principalmente por la orientación que tienen los otros arcos verticales que comienzan en Γ^1 o Γ^2 y no son uno de los a_i . Luego, tenemos que las E -Lineas que pasan por los a_i , sean estas Γ_i necesariamente están en Λ' por la construcción del mismo. Finalmente, como Λ' es cerrado y los Γ_i acumulan en Γ^1 y en Γ^2 , entonces estas están en Λ' . Es claro que Γ^1 y Γ^2 no son comparables y por lo tanto el orden no es total. \square

Proposición 4.4.3. La topología de Λ'_a es la del orden.

Demostración. Es suficiente dar una aplicación continua, estrictamente creciente de Λ'_a a \mathbb{R} . Toda línea $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ con $a_0 = a$ le asociamos una sucesión $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma. Si $i \geq 0$, $e_i = 1$ si existe $a' \in A$ tal que $s(a') = e(a_i)$ y $l(a') = r(a_{i+1})$ y $e_i = 0$ en otro caso. Si $i < 0$, $e_i = 1$ si existe $a' \in A$ tal que $e(a') = s(a_{i+1})$ y $l(a') = r(a_i)$ y $e_i = 0$ en otro caso. Es decir, cuando $i > 0$ si recorremos Γ hacia el futuro cuando llega a un vertice si “sube” asignamos 1 a e_i y si “baja” asignamos 0. Cuando $i < 0$, recorriendo Γ hacia el pasado, si “sube” asignamos 1 y si “baja” asignamos 0.

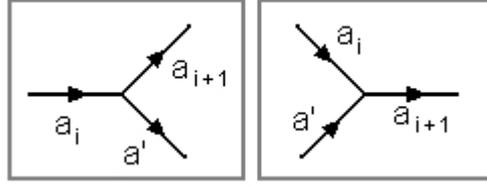


Figura 11: A la izquierda se encuentra el caso en que $e_i = 1$ si $i \geq 0$ y a la derecha el caso en que $i < 0$.

Consideramos el mapa que a cada Γ le asocia $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{e_i}{4^{|i|}}$ y veamos es continuo. Para eso, dado $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ con $a_0 = a$, tomemos Γ' en el abierto $\prod_{i=-n}^{i=n} \Lambda'_a$. Sean $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ los asociados a Γ y $\{e'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ los asociados a Γ' . Tenemos entonces que $e'_i = e_i \forall i = -(n-1), \dots, n-1$ y por lo tanto

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{e_i}{4^{|i|}} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{e'_i}{4^{|i|}} \right| < \sum_{i \geq n-1} \frac{4}{4^i}$$

Como la serie de la derecha es la cola de una serie convergente, la continuidad es inmediata.

El hecho de que sea inyectiva y creciente esta dado porque dos lineas en Λ'_a no se intersectan transversalmente. Sean $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ y $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a'_i$ en Λ'_a , y sean $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $\{e'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ las sucesiones asociadas a Γ y a Γ' respectivamente. Supongamos que Γ y Γ' son distintas. Sea $n_0 > 0$ tal que $\forall i = 0, \dots, n_0, a_i = a'_i$ y $a_{n_0+1} \neq a'_{n_0+1}$. Sea $m_0 < 0$ tal que $\forall i = -1, \dots, m_0 + 1, a_i = a'_i$ y $a_{m_0} \neq a'_{m_0}$. Supongamos que $\Gamma < \Gamma'$, entonces $R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$. Si $e_{n_0} = 1$, entonces $r(a_{n_0+1}) = l(a'_{n_0+1})$ y por lo tanto $r(a_{n_0+1}) \in R(\Gamma) - R(\Gamma')$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $e'_{n_0} = 1$ y $e_{n_0} = 0$. Por el mismo razonamiento, tenemos que $e'_{m_0} = 1$ y $e_{m_0} = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{e'_i}{4^{|i|}} - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{e_i}{4^{|i|}} &= \frac{1}{4^{n_0}} + \sum_{i > n_0} \frac{e'_i - e_i}{4^i} + \frac{1}{4^{m_0}} + \sum_{i < m_0} \frac{e'_i - e_i}{4^{-i}} \\ &\geq \frac{1}{4^{n_0}} - \sum_{i > n_0} \frac{1}{4^i} + \frac{1}{4^{m_0}} - \sum_{i < m_0} \frac{1}{4^{-i}} = \frac{1}{4^{n_0}} - \frac{1}{4^{n_0} \cdot 3} + \frac{1}{4^{m_0}} - \frac{1}{4^{m_0} \cdot 3} > 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto la función es estrictamente creciente. □

Definición 4.4.4.

- Dado a un arco, definiremos las siguientes lineas:

$$\Gamma_a^- = \text{mín } \Lambda'_a \text{ y } \Gamma_a^+ = \text{máx } \Lambda'_a$$

Sabemos que existen porque Δ'_a es compacto y la topología es del orden.

- Para toda familia $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ en Λ' convergente a $\Gamma \in \Lambda'$ podemos encontrar un abierto de la forma Λ'_a tal que contiene a todas las Γ_n a partir de un n suficientemente grande y comparar Γ_n con Γ .

Decimos que $\{\Gamma_n\}$ tiende por valores superiores (inferiores) a Γ si $\Gamma_n > \Gamma$ ($\Gamma_n < \Gamma$) para un n suficientemente grande.

- En la situación del punto anterior, diremos que Γ está *aislada a derecha* (*aislada a izquierda*) si no existe $\{\Gamma_n\}$ que tienda por valores superiores (inferiores) a Γ .

Las definiciones anteriores, motivan preguntarse si las líneas de la forma Γ_a^+ y Γ_a^- son todas las líneas aisladas a derecha o a izquierda. En la siguiente proposición daremos una respuesta afirmativa, pero antes, necesitaremos el siguiente sublema:

Sub-Lema 4.4.5. *Sea $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i \in \Lambda'$ tal que $\forall a_i \Gamma_{a_i}^+ > \Gamma$. Entonces para todo I , intervalo finito en \mathbb{Z} , existe $\Gamma' > \Gamma$ que contiene a $\prod_{i \in I} a_i$.*

Demostración. Veámoslo por inducción en el cardinal de I , que notaremos n . Si $n = 1$, $I = \{i\}$ y tomamos $\Gamma' = \Gamma_{a_i}^+$. Para $n = 2$ también es cierto. Si $I = \{i, i + 1\}$ sean $\Gamma_i, \Gamma_{i+1} \in \Lambda'$ tal que $\Gamma_i > \Gamma$, $\Gamma_{i+1} > \Gamma$, $a_i \subset \Gamma_i$ y $a_{i+1} \subset \Gamma_{i+1}$. Sean además $v = e(a_i) = s(a_{i+1})$ y $a' \in A$ la tercer arista que tiene un extremo en v . Si $v = s(a')$ entonces $a_i \subset \Gamma_{i+1}$ y por lo tanto Γ_{i+1} verifica. Si $v = e(a')$ entonces $a_{i+1} \subset \Gamma_i$ y por lo tanto Γ_i verifica.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n \geq 2$ y veamos que también es cierto para $n + 1 > 2$. Si $I = \{i, i + 1, \dots, i + n\}$. Sean $\Gamma_i, \Gamma_{i+1} \in \Lambda'$ tales que $\Gamma_i > \Gamma$, $\Gamma_{i+1} > \Gamma$, Γ_i contiene $\prod_{i \leq j < i+n} a_j$ y Γ_{i+1} contiene $\prod_{i < j \leq i+n} a_j$. Como Γ_i y Γ_{i+1} contienen el arco $\prod_{i < j < i+n} a_j$ (que no es vacío por ser $n \geq 2$), los arcos Γ_i y Γ_{i+1} resultan comparables por lo que el menor de ellos contiene a $\prod_{i \leq j \leq i+n} a_j$. \square

Proposición 4.4.6. *Las E -líneas aisladas a derecha (izquierda) son las líneas Γ_a^+ (Γ_a^-), $a \in A$.*

Demostración. Es claro que si $a \in A$ entonces Γ_a^+ es aislada a derecha, puesto que Λ'_a es un abierto de Γ_a^+ y por definición no hay E -líneas mayores en Λ'_a .

Si una línea no es de la forma Γ_a^+ , por el sub-lema anterior, podemos construir una familia $\{\Gamma_n\}_{n \geq 1}$ tal que si $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$, entonces $\Gamma_n > \Gamma$ y Γ_n contiene el arco $\prod_{i=-n}^{i=n} a_i$. Tal sucesión converge a Γ y tiende por valores superiores. \square

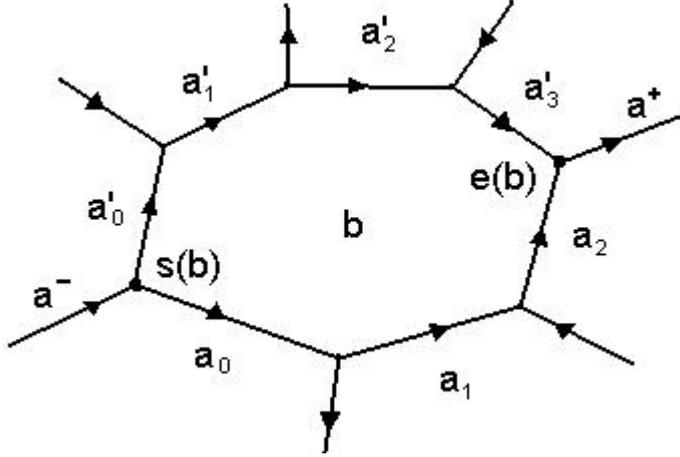
Estudiemos ahora las E -líneas de Γ' que son de la forma Γ_a^+ o Γ_a^- y su interacción con los ladrillos.

Proposición 4.4.7. *Dados a y a' dos arcos, se dan las siguientes propiedades:*

1. Si $l(a) = l(a')$ entonces $\Gamma_a^+ = \Gamma_{a'}^+$.
2. Si $r(a) = r(a')$ entonces $\Gamma_a^- = \Gamma_{a'}^-$.
3. Si $l(a) = r(a')$ entonces $\Gamma_a^+ < \Gamma_{a'}^-$ y $(\Gamma_a^+, \Gamma_{a'}^-) = \phi$.

Demostración.

Sea $b \in B$. Sabemos que la frontera de b está formada por dos arcos bien orientados $\prod_{0 \leq i \leq n} a_i$ y $\prod_{0 \leq i \leq n'} a'_i$ donde $r(a'_i) = l(a_j)$, $s(a_0) = s(a'_0) = s(b)$ y $e(a_n) = e(a'_{n'}) = e(b)$.



1. Veamos que $\Gamma_{a_i}^+ = \Gamma_{a_{i+1}}^+$ y por lo tanto $\Gamma_{a_i}^+ = \Gamma_{a_j}^+$. Dado $i \in \{0, \dots, n-1\}$, sea a'' la tercer arista que tiene como vértice $e(a_i) = s(a_{i+1}) = v$. Si $v = e(a'')$ entonces $a_{i+1} \subset \Gamma_{a_i}^+$ y por lo tanto $\Gamma_{a_i}^+$ y $\Gamma_{a_{i+1}}^+$ son comparables. Por la definición de $\Gamma_{a_{i+1}}^+$ tenemos que $\Gamma_{a_{i+1}}^+ \geq \Gamma_{a_i}^+$. Como $l(a'') = r(a_i)$ tenemos que $a_i \subset \Gamma_{a_{i+1}}^+$ sino sería $\Gamma_{a_{i+1}}^+ < \Gamma_{a_i}^+$. Luego por la definición de $\Gamma_{a_i}^+$ concluimos que $\Gamma_{a_i}^+ \geq \Gamma_{a_{i+1}}^+$ y entonces son iguales. Si $v = s(a'')$ es análogo.
2. Este punto se demuestra de forma análoga al primero.
3. Sea a^- la tercer arista que tiene como extremo a $s(b)$ y a^+ la tercer arista que tiene como extremo a $e(b)$. En particular $e(a^-) = s(b)$ y $s(a^+) = e(b)$, de lo que concluimos que $\Gamma_{a_0}^+$ y $\Gamma_{a'_0}^-$ son comparables, ya que ambas tienen a a^+ y a a^- . Como $b \in R(\Gamma_{a'_0}^-) - R(\Gamma_{a_0}^+)$ deducimos que $\Gamma_{a_0}^+ < \Gamma_{a'_0}^-$. Toda línea $\Gamma \in [\Gamma_{a_0}^+, \Gamma_{a'_0}^-]$ contiene a a^- . Si $b \in R(\Gamma)$ entonces Γ contiene a a'_0 y por lo tanto $\Gamma = \Gamma_{a'_0}^-$. Si $b \in L(\Gamma)$ entonces Γ contiene a a_0 y por lo tanto $\Gamma = \Gamma_{a_0}^+$.

□

La proposición anterior nos dice que podemos indexar las líneas Γ_a^+ y Γ_a^- , no solo por los arcos, sino por los ladrillos. Notaremos:

$$\Gamma_b^+ = \Gamma_a^- \text{ si } r(a) = b$$

$$\Gamma_b^- = \Gamma_a^+ \text{ si } l(a) = b$$

Del tercer punto de la proposición anterior, tenemos que para todo $b \in B$, $(\Gamma_b^-, \Gamma_b^+) = \phi$.

Las anteriores definiciones, sugieren una relación de equivalencia natural que está dada por:

$$b \approx b' \Leftrightarrow \Gamma_b^+ = \Gamma_{b'}^+ \text{ y } \Gamma_b^- = \Gamma_{b'}^-$$

Observación 4.4.8. Si b y b' son adyacentes entonces no pueden estar relacionados. En efecto, para todo arco $a \in A$ tenemos que:

$$\Gamma_{l(a)}^+ > \Gamma_{l(a)}^- = \Gamma_a^+ \geq \Gamma_a^- = \Gamma_{r(a)}^+$$

Proposición 4.4.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $b \approx b'$.
2. $b' \in r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$.
3. $b' \in R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$.

Demostración. Todo ladrillo $b' \in r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$. Si las E -líneas asociadas a b y b' son iguales entonces es inmediato que $b' \in r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$. Es decir 1. \Rightarrow 2. se verifica.

Veamos 2. \Rightarrow 1. Si $b' \in r(\Gamma_b^+)$, entonces $\Gamma_{b'}^+$ y Γ_b^+ tienen al menos un arco en común a tal que $r(a) = b'$ y por lo tanto son comparables. Como $\Gamma_{b'}^+ = \Gamma_a^-$ entonces $\Gamma_{b'}^+ \leq \Gamma_b^+$. Del mismo modo, si $b' \in l(\Gamma_b^-)$ tenemos que $\Gamma_b^- \leq \Gamma_{b'}^-$. Si la condición 2. es cierta entonces $\Gamma_b^- \leq \Gamma_{b'}^- < \Gamma_{b'}^+ \leq \Gamma_b^+$ y como $(\Gamma_b^-, \Gamma_b^+) = \phi$ tenemos que $\Gamma_b^- = \Gamma_{b'}^-$ y $\Gamma_b^+ = \Gamma_{b'}^+$.

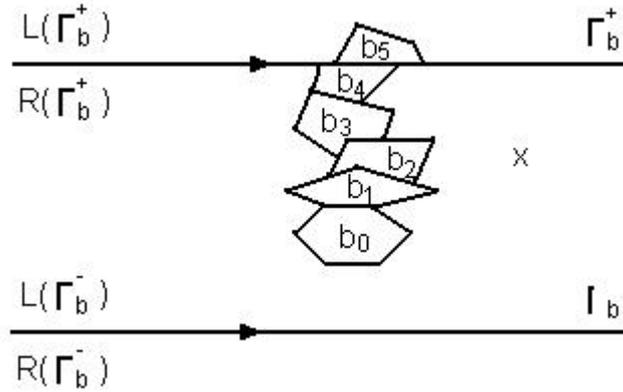
Para mostrar la equivalencia entre 2. y 3. basta ver que $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-) = r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$. Para esto, es suficiente mostrar $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-) \subset r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$.

Observemos que un ladrillo adyacente a b no pertenece a $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$. En efecto, para todo a tal que $r(a) = b$ ($l(a) = b$) tenemos que $l(a) \notin R(\Gamma_b^+)$ ($r(a) \notin L(\Gamma_b^-)$). Deducimos entonces que la componente conexa, en B , de $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$ que contiene a b , se reduce a $\{b\}$. De esto, se concluye inmediatamente que la componente conexa, en B , de $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$ que contiene un ladrillo b' equivalente a b se reduce a $\{b'\}$. Por la equivalencia entre 1. y 2., tenemos que la componente conexa de $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$ que contiene un ladrillo $r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$ se reduce a este ladrillo. Nos basta demostrar entonces que toda componente conexa X de $R(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$ contiene un ladrillo de $r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$.

Partamos de un ladrillo $b_0 \in X$. Como el conjunto $L(\Gamma_b^-)$ es conexo y contiene a $L(\Gamma_b^+)$. Podemos entonces tomar una familia $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de ladrillos de $L(\Gamma_b^-)$ tal que:

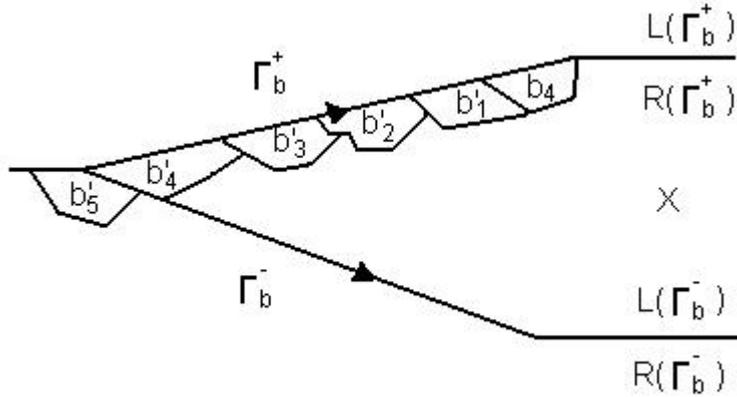
- b_{i+1} es adyacente a b_i si $i = 0, \dots, n-1$.
- $b_n \in L(\Gamma_b^+)$.

Si es necesario, reduciendo la familia, podemos suponer que $b_i \in R(\Gamma_b^+)$ si $i < n$. Los $b_i, i < n$ están entonces en X y además $b_{n-1} \in r(\Gamma_b^+) \cap L(\Gamma_b^-)$.



El arco a^+ , que sale de $e(b)$ está en Γ_b^- y en Γ_b^+ y por lo tanto $r(a^+) \in r(\Gamma_b^+) \cap R(\Gamma_b^-)$. De esto concluimos que el conjunto conexo $r(\Gamma_b^+)$ no está contenido en $L(\Gamma_b^-)$. Podemos entonces construir ahora una familia de ladrillos $\{b'_i\}_{0 \leq i \leq n'}$ en $r(\Gamma_b^+)$ tal que

- $b'_0 = b_{n-1}$.
- b'_{i+1} es adyacente de b'_i si $i = 0, \dots, n' - 1$.
- $b'_{n'} \in R(\Gamma_b^-)$
- $b'_i \in L(\Gamma_b^-)$ si $i < n'$.



Los ladrillos $b'_i, i < n'$ están entonces en X y finalmente $b'_{n'-1} \in r(\Gamma_b^+) \cap l(\Gamma_b^-)$. □

Observación 4.4.10. Sea $b \in B$ y $a \in A$ un arco de Γ_b^+ . Dos casos son posibles:

1. el ladrillo $r(a)$ pertenece a $l(\Gamma_b^-)$ y por lo tanto es equivalente a b .
2. el ladrillo $r(a)$ pertenece a $r(\Gamma_b^-)$ y por lo tanto a es un arco de Γ_b^- y $l(a) \in l(\Gamma_b^-) \cap l(\Gamma_b^+)$.

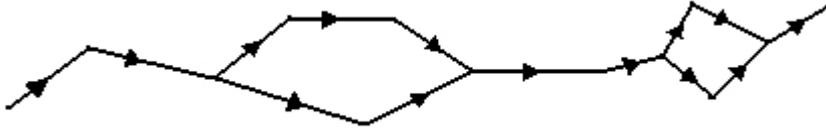


Figura 12: Representación de Γ_b^+ y Γ_b^- .

Definición 4.4.11. La unión de los arcos comunes a Γ_b^- y Γ_b^+ y los ladrillos equivalentes a b es un conjunto cerrado C_b del plano. Llamaremos a C_b como *cadena de equivalencia* la cual no depende del representante de la relación de equivalencia. En particular

$$C_b = R(\Gamma_b^+) - \text{int}(R(\Gamma_b^-)) = L(\Gamma_b^-) - \text{int}(L(\Gamma_b^+))$$

Los ladrillos equivalentes a b nunca son adyacentes, son separados por los arcos comunes a Γ_b^+ y Γ_b^- . Puesto que los conjuntos anteriores no dependen de la clase de equivalencia, notaremos \hat{b} la clase de equivalencia y $C_{\hat{b}} = C_b$ si $b \in \hat{b}$. De la misma forma, notaremos $\Gamma_{\hat{b}}^- = \Gamma_b^-$ y $\Gamma_{\hat{b}}^+ = \Gamma_b^+$.

Notaremos C como la unión disjunta de A y B . Una cadena de equivalencia entonces la podemos escribir como $\prod_{i \in \mathbb{Z}} c_i$ donde la familia $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tiene sus elementos en C y es tal que $e(c_i) = s(c_{i+1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. En particular los c_i que son ladrillos, son los elementos de la clase de equivalencia y los arcos definidos entre dos ladrillos consecutivos son las componentes conexas de $\Gamma_{\hat{b}}^- \cap \Gamma_{\hat{b}}^+$.

5. Foliación de \mathbb{R}^2 por Lineas de Brouwer

Construiremos primero una quasi-foliación. Esta subsección podría ser omitida, sin embargo tiene importancia puesto que es una primera aproximación a la solución del problema. Gracias a la construcción de las cadenas de equivalencia, sabemos que foliando un ladrillo desde su vértice inicial hasta su vértice final, al concatenar los arcos de esta foliación con los arcos comunes a $\Gamma_{\hat{b}}^+$ y $\Gamma_{\hat{b}}^-$ obtenemos una familia de líneas que forman una quasi-foliación. La dificultad está en hacer que sean líneas de Brouwer. El principal inconveniente de esta construcción es que las líneas del esqueleto no son separadas. Para solucionar esto, en 5.2 lo que hacemos es dejar un pequeño espacio sobre la izquierda de los arcos de A , para que por estos espacios pasen disjuntamente una familia de líneas de Brouwer que es isomorfa a Λ' . Luego, rellenamos lo que queda de los ladrillos con determinado cuidado y obtenemos finalmente una foliación por líneas de Brouwer.

5.1. Construcción de una Quasi-Foliación

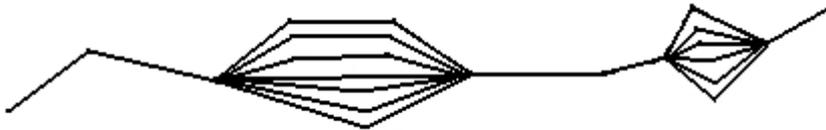
Comenzaremos por foliar cada ladrillo $b \in B$ por una familia continua de arcos orientados $\{\gamma_b^t\}_{t \in [-1,1]}$ que parten de $s(b)$ y terminan en $e(b)$. Si D es el disco unidad cerrado de \mathbb{R}^2 , tomaremos un homeomorfismo que preserva orientación $h : b \rightarrow D$ que envía $s(b)$ en $(-1, 0)$ y $e(b)$ en $(1, 0)$. Observemos que por h preservar orientación cada arco a tal que $r(a) = b$ es enviado al semiplano de ecuación $y \geq 0$ y cada arco tal que $l(a) = b$ es enviado al semi-plano de ecuación $y \leq 0$. Notaremos γ_b^t el arco definido sobre $[-1, 1]$ por:

$$\gamma_b^t(s) = h^{-1} \left((s, t\sqrt{1-s^2}) \right)$$

Fijemos ahora una clase de equivalencia \hat{b} . Cada conjunto

$$\Gamma_{\hat{b}}^t = \left(\Gamma_{\hat{b}}^- \cap \Gamma_{\hat{b}}^+ \right) \cup \bigcup_{b \in \hat{b}} \gamma_b^t$$

define naturalmente una línea, donde la orientación coincide con la de los arcos comunes a $\Gamma_{\hat{b}}^- \cap \Gamma_{\hat{b}}^+$ y la de los arcos γ_b^t .



Las líneas anteriores no se intersectan transversalmente entre ellas. En efecto $R(\Gamma_{\hat{b}}^t) \subset R(\Gamma_{\hat{b}}^{t'})$ si $t \leq t'$.

Si estuviéramos en la situación $f(R(\Gamma_{\hat{b}}^+)) \subset \text{int}(R(\Gamma_{\hat{b}}^-))$ entonces estas líneas serían de Brouwer. Vamos a ver ahora que uno puede reparametrizar en t cada

familia $\{\gamma_b^t\}_{t \in [-1,1]}$ obteniendo una familia $\{\Gamma_b^t\}_{t \in [-1,1]}$ de líneas de Brouwer aunque la relación $f(R(\Gamma_b^+)) \subset \text{int}(R(\Gamma_b^-))$ no se verifique.

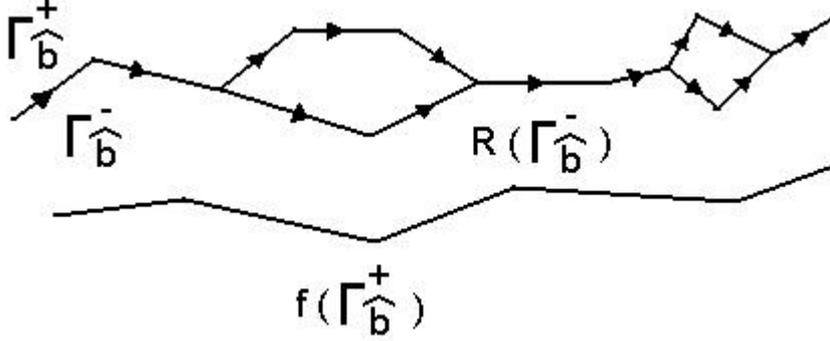


Figura 13: Representación del caso $f(R(\Gamma_b^+)) \subset \text{int}(R(\Gamma_b^-))$

Comencemos por establecer el siguiente sub-lema muy simple.

Sub-Lema 5.1.1. *Sea X un conjunto ordenado, $Y \subset X$ un subconjunto finito y $\{g_x\}_{x \in Y}$ una familia de homeomorfismos crecientes en $[-1,1]$ tal que si $x < x'$ entonces $g_x(1/3) < g_{x'}(-1/3)$. Dado $x_0 \notin Y$, existe g_{x_0} un homeomorfismo creciente en $[-1,1]$ tal que si $x < x'$ en $Y \cup \{x_0\}$ entonces $g_x(1/3) < g_{x'}(-1/3)$.*

Demostración. Notemos $Y^- = \{x \in Y : x < x_0\}$ y $Y^+ = \{x \in Y : x > x_0\}$ y analicemos todos los casos posibles:

1. Si $Y^- = Y^+ = \emptyset$ elegimos un g_{x_0} arbitrario.
2. Si $Y^- = \emptyset$ y $Y^+ \neq \emptyset$ elegimos g_{x_0} tal que $g_{x_0}(1/3) < \min_{x \in Y^+} g_x(-1/3)$.
3. Si $Y^- \neq \emptyset$ y $Y^+ = \emptyset$ elegimos g_{x_0} tal que $g_{x_0}(-1/3) > \max_{x \in Y^-} g_x(1/3)$.
4. Si $Y^- \neq \emptyset$ y $Y^+ \neq \emptyset$ elegimos g_{x_0} tal que

$$\max_{x \in Y^-} g_x(1/3) < g_{x_0}(-1/3) < g_{x_0}(1/3) < \min_{x \in Y^+} g_x(-1/3)$$

No hay ningún obstáculo para la construcción de g_{x_0} en el caso 4. En efecto existe $x^- \in Y^-$ y $x^+ \in Y^+$ tal que $\max_{x \in Y^-} g_x(1/3) = g_{x^-}(1/3)$ y $\min_{x \in Y^+} g_x(-1/3) = g_{x^+}(-1/3)$. Como $x_0 < x^+$ y $x^- < x_0$, tenemos que $x^- < x^+$ y que $g_{x^-}(1/3) < g_{x^+}(-1/3)$. \square

Lema 5.1.2. *Sea X un conjunto ordenado finito o numerable. Entonces existe una familia $\{g_x\}_{x \in X}$ de homeomorfismos crecientes en $[-1,1]$ tal que si $x < x'$ entonces $g_x(1/3) < g_{x'}(-1/3)$.*

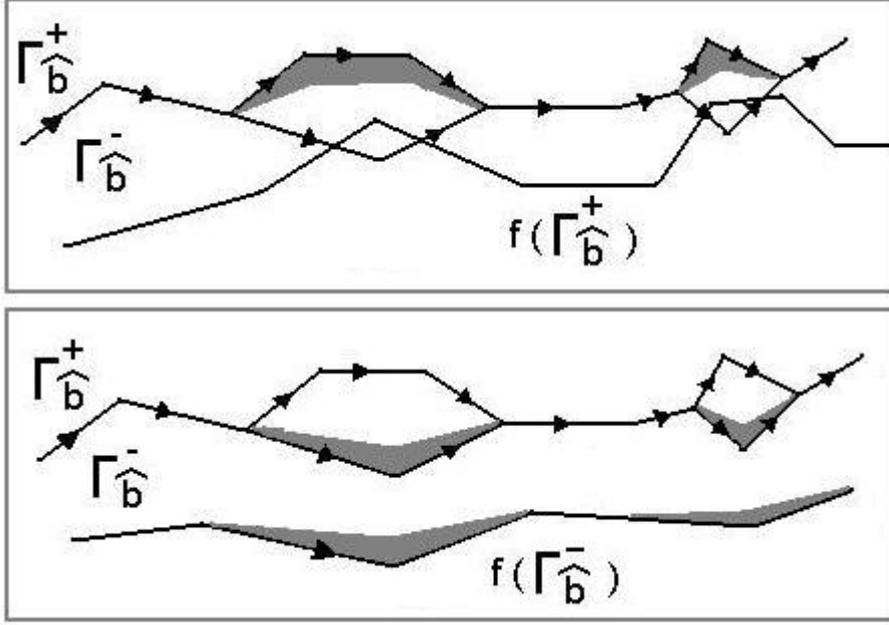
Demostración. La construcción se hace inductivamente tomando de a elementos de X y utilizando en cada paso el sub-lema anterior. \square

Puesto que $f(\Gamma_b^-) \subset \text{int}(R(\Gamma_b^-))$ y $f(\Gamma_b^+) \subset \text{int}(R(\Gamma_b^+))$, podemos reparametrizar cada familia $\{\gamma_b^t\}_{t \in [-1,1]}$ por un homeomorfismo $\nu_b : [-1,1] \rightarrow [-1,1]$ de tal forma que

$$\text{si } t \in [-1, -1/3] \Rightarrow f(\gamma_b^t) \subset \text{int}(R(\Gamma_b^-))$$

y

$$\text{si } t \in [1/3, 1] \Rightarrow \gamma_b^t \subset \text{int}(L(f(\Gamma_b^+)))$$



La relación siguiente

$$b \preceq b' \Leftrightarrow b \in \bigcup_{n \geq 1} \Phi^n(\{b'\})$$

define en B un orden. Entonces podemos construir una familia de homeomorfismos $g_b : [-1,1] \rightarrow [-1,1]$, $b \in \widehat{b}$ que verifica la conclusión para el orden restringido a \widehat{b} . Resta verificar que cada línea $\Gamma^t = (\Gamma_b^- \cap \Gamma_b^+) \cup_{b \in \widehat{b}} \gamma_b^{g_b^{-1}(t)}$ es una línea de Brouwer.

Puesto que $f(\Gamma^t) \cap R(\Gamma^t) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(\Gamma^t) \cap L(\Gamma^t) \neq \emptyset$, basta mostrar que $f(\Gamma^t) \cap \Gamma^t = \emptyset$. Si este conjunto no fuera vacío, existen $b, b' \in \widehat{b}$ y $t \in [-1,1]$ tal que

$$f(\gamma_b^{g_b^{-1}(t)}) \cap \gamma_{b'}^{g_{b'}^{-1}(t)} \neq \emptyset$$

De donde deducimos que $f(\gamma_b^{g_b^{-1}(t)}) \subset L(\Gamma_b^-)$ y por lo tanto $g_b^{-1}(t) > -1/3$. Además como $\gamma_{b'}^{g_{b'}^{-1}(t)}$ tiene un punto de $f(\gamma_{b'}^{g_{b'}^{-1}(t)}) \subset R(f(\Gamma_b^+))$ entonces tenemos que $g_{b'}^{-1}(t) < 1/3$ y por lo tanto $g_b(-1/3) < t < g_{b'}(1/3)$. Como $f(b) \cap b' \neq \emptyset$ entonces $b' \preceq b$ contradiciendo la propiedad del lema anterior.

Asumiremos de ahora en más que nuestra familia $\{\gamma\}_{b \in B, t \in [-1,1]}$ está reparametrizada para que cada Γ_b^t sea una línea de Brouwer.

Proposición 5.1.3. *Dos líneas $\Gamma_{\widehat{b}}^t, \Gamma_{\widehat{b}'}^t$ no se intersectan transversalmente.*

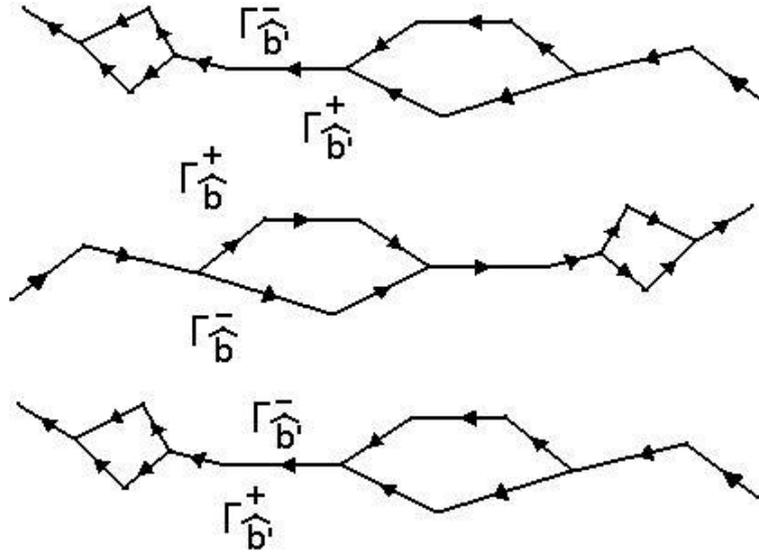
Demostración. Sean \widehat{b} y \widehat{b}' dos cadenas de equivalencia. Veamos primero el caso en que una de las dos líneas $\Gamma_{\widehat{b}}^-, \Gamma_{\widehat{b}}^+$ es comparable con alguna de las dos líneas $\Gamma_{\widehat{b}'}^-, \Gamma_{\widehat{b}'}^+$. Si esto ocurre como $(\Gamma_{\widehat{b}}^-, \Gamma_{\widehat{b}}^+) = \phi$, $(\Gamma_{\widehat{b}'}^-, \Gamma_{\widehat{b}'}^+) = \phi$ y por las definiciones de las mismas las cuatro líneas $\Gamma_{\widehat{b}}^-, \Gamma_{\widehat{b}}^+, \Gamma_{\widehat{b}'}^-$ y $\Gamma_{\widehat{b}'}^+$ son comparables. En esta situación se da alguno de los tres siguientes casos:

1. $\widehat{b} = \widehat{b}'$
2. $\Gamma_{\widehat{b}}^- < \Gamma_{\widehat{b}}^+ \leq \Gamma_{\widehat{b}'}^- < \Gamma_{\widehat{b}'}^+$
3. $\Gamma_{\widehat{b}'}^- < \Gamma_{\widehat{b}'}^+ \leq \Gamma_{\widehat{b}}^- < \Gamma_{\widehat{b}}^+$

Ya vimos que la proposición es cierta en el primer caso. Para el segundo y el tercer caso demostramos la proposición de la misma forma. Supongamos que el segundo es cierto, entonces:

$$R(\Gamma_{\widehat{b}}^t) \subset R(\Gamma_{\widehat{b}}^+) \subset R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) \subset R(\Gamma_{\widehat{b}'}^t)$$

Veamos ahora que la proposición es cierta si alguna de las dos líneas $\Gamma_{\widehat{b}}^-, \Gamma_{\widehat{b}}^+$ no es comparable con alguna de las dos líneas $\Gamma_{\widehat{b}'}^-, \Gamma_{\widehat{b}'}^+$. Si esto ocurre entonces $R(\Gamma_{\widehat{b}}^-) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) = \phi$ o $L(\Gamma_{\widehat{b}}^+) \cap L(\Gamma_{\widehat{b}'}^+) = \phi$ (en B).



Pensemos el caso, $R(\Gamma_{\widehat{b}}^-) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) = \phi$ (en B). Esta relación sigue siendo cierta en \mathbb{R}^2 porque, si comparten algún punto deben compartir un arco. Sin embargo, las orientaciones del arco que se deducen por las líneas que lo contienen son opuestas. Además, como vimos en la proposición 4.3.1, en B , $l(\Gamma_{\widehat{b}}^-) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) = \phi$. De esto concluimos que, en B :

$$R(\Gamma_{\widehat{b}}^+) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) \subset (R(\Gamma_{\widehat{b}}^-) \cup l(\Gamma_{\widehat{b}}^-)) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) = \phi$$

Deducimos entonces que por las mismas razones $R(\Gamma_{\widehat{b}}^+) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^+) = \phi$ en B y en \mathbb{R}^2 . Concluyendo que $R(\Gamma_{\widehat{b}}^t) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^{t'}) = \phi$ y por lo tanto no se intersectan transversalmente.

La proposición también se verifica si $L(\Gamma_{\widehat{b}}^+) \cap L(\Gamma_{\widehat{b}'}^+) = \phi$ y la demostración es análoga al caso $R(\Gamma_{\widehat{b}}^-) \cap R(\Gamma_{\widehat{b}'}^-) = \phi$. □

La familia $\{\Gamma_{\widehat{b},t}^t\}$ está formado por líneas de Brouwer que no se intersectan transversalmente y que cubren el plano. Todo punto $z \notin E$ pertenece a una única línea y la familia define una foliación en un entorno de z . Un punto $z \in E$ que no está en V pertenece a varias líneas, sin embargo, todas estas coinciden en un entorno de z con el arco que contiene a z . La familia define entonces una foliación en un entorno de z .

5.2. Construcción de una Foliación

Supongamos que tenemos una foliación del plano en Líneas de Brouwer. Sobre las hojas de la foliación podemos definir un orden natural, análogo al orden definido sobre Λ' en la sección anterior, a saber:

$$\Gamma < \Gamma' \Leftrightarrow R(\Gamma) \subset R(\Gamma')$$

Por otra parte, sobre la foliación podemos definir una topología cociente que viene de la usual en \mathbb{R}^2 . En particular, esta topología es Hausdorff si y sólo si el orden es total. Por el contrario, toda línea admite un entorno totalmente ordenado, de clausura compacta.

Un ejemplo donde la topología no es Hausdorff es tomar f como el tiempo 1 del flujo inducido por el campo u , definido en la sección 1. Recordemos que las órbitas de este flujo, son las hojas de una foliación por líneas de Brouwer, para el tiempo 1 del flujo inducido por el campo v . Por las mismas razones, el flujo inducido por el campo $-v$, tiene como órbitas, hojas de una foliación por líneas de Brouwer para nuestra f . La foliación por líneas de Brouwer que tenemos ahora, es la mostrada en la primera imagen de la sección 1, salvo que la orientación en las hojas, es la opuesta. En particular, si L_1 y L_2 son las líneas horizontales, como tienen orientaciones opuestas, $R(L_2) \subset L(L_1)$ y por lo tanto el orden no es total. Tomemos un abierto saturado U_1 que contenga a L_1 y otro U_2 , que contenga a L_2 . Supongamos, sin perder generalidad que $L_2 = \mathbb{R} \times \{1\}$ y $L_1 = \mathbb{R} \times \{-1\}$. Es claro que si los abiertos son saturados, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $[t_0, +\infty) \times [-1, 1] \subset U_1 \cap U_2$ y por lo tanto el espacio no es Hausdorff.

Construiremos ahora una foliación en líneas de Brouwer que contiene un conjunto cerrado e isomorfo (del punto de vista topológico y del punto de vista de orden) a Λ' . Para esto, como se mencionó al comienzo de la sección dejaremos un espacio a

la izquierda de cada arco, para que por estos pasen la familia de líneas de Brouwer disjuntas que es isomorfa a Λ' . Construiremos la foliación de a partes, primero sobre un entorno de los vértices y luego sobre un entorno de los arcos. Finalmente rellenaremos aquellos espacios en los ladrillos que no fueron foliados.

Definición 5.2.1. Decimos que un arco $a \in A$ es *singular* si $\Gamma_a^- = \Gamma_a^+$. Es decir si Λ'_a se reduce a una única línea.

En el caso contrario diremos que a es *regular*.

Podemos elegir para todo arco $a \in A$ un abierto conexo, simplemente conexo y libre $U_a \subset \mathbb{R}^2$ tal que $a \subset U_a$, $f(U_a) \subset R(\Gamma_a^-)$ y $f^{-1}(U_a) \subset L(\Gamma_a^+)$. Por lo tanto, para toda E -línea $\Gamma \in \Lambda'_a$ tenemos que $f(U_a) \subset R(\Gamma)$ y $f^{-1}(U_a) \subset L(\Gamma)$. La condición anterior tiene como objetivo hacer que las líneas de la foliación que representen líneas de Λ' resulten líneas de Brouwer. Por el momento esta hipótesis no la usaremos.

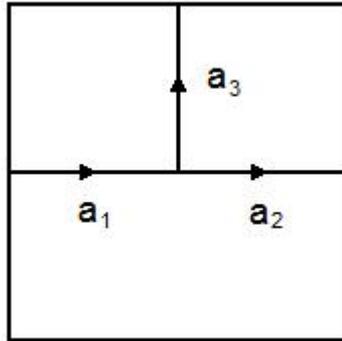
Elegimos $\forall v \in V$ un abierto conexo y simplemente conexo U_v tal que $v \in U_v$, $U_v \subset U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap U_{a_3}$, donde a_1, a_2 y a_3 son las tres aristas que tienen a v como extremo. Además U_v no intersecta ningún ladrillo que no sea adyacente a v y ninguna arista que no sea a_1, a_2 y a_3 .

Construiremos ahora alrededor de los vértices. Para eso, distinguiremos en casos:

- Supongamos que $v = e(a_1) = s(a_2) = s(a_3)$.

Podemos conjugar f por un homeomorfismo que preserva orientación donde v es el origen $(0, 0)$, $K_v = [-1, 1]^2 \subset U_v$ y además:

- $a_1 \cap [-1, 1]^2 = [-1, 0] \times \{0\}$.
- $a_2 \cap [-1, 1]^2 = [0, 1] \times \{0\}$.
- $a_3 \cap [-1, 1]^2 = \{0\} \times [0, 1]$.



En particular, el arco a_1 es regular en Λ' puesto que existe una línea que contiene a a_1 y a_2 y existe otra que contiene a a_1 y a_3 . Por otra parte, observemos que $v = s(b)$ donde $b = l(a_2) = r(a_3)$. Separaremos ahora la construcción en base a la regularidad de a_2 y a_3 .

- Supongamos que a_2 y a_3 son los dos regulares. Definimos 3 cuadriláteros T_v^1 , T_v^2 y T_v^3 de la forma siguiente:
 - los extremos de T_v^1 son $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1/4)$ y $(-1, 1/4)$.
 - los extremos de T_v^2 son $(-1, 1/4)$, $(0, 1/4)$, $(0, 1)$ y $(-1, 1/2)$.
 - los extremos de T_v^3 son $(-1, 1/2)$, $(0, 1)$, $(-1/2, 1)$ y $(-1, 3/4)$.

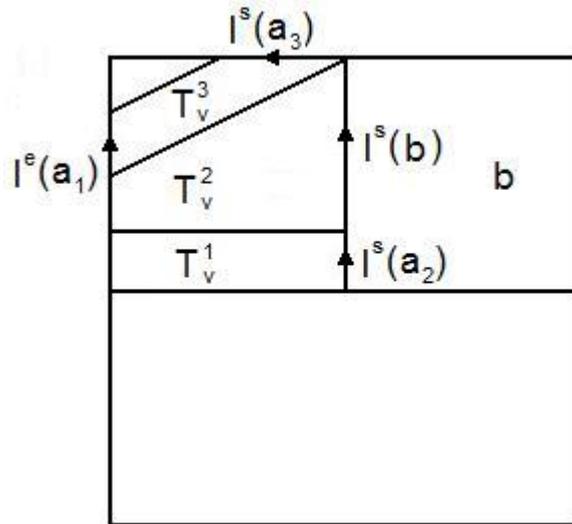
El segmento $\{-1\} \times [0, 3/4]$ lo notaremos $I^e(a_1)$ y lo orientamos tal que sea creciente sobre las y . Este será el *segmento de llegada* de a_1 .

El segmento $\{0\} \times [0, 1/4]$ lo notaremos por $I^s(a_2)$ y lo orientaremos para que sea creciente sobre las y . Este será el *segmento de partida* de a_2 .

El segmento $[-1/2, 0] \times \{1\}$ lo notaremos $I^s(a_3)$ y lo orientaremos para que sea decreciente sobre las x . Este será el *segmento de partida* de a_3 .

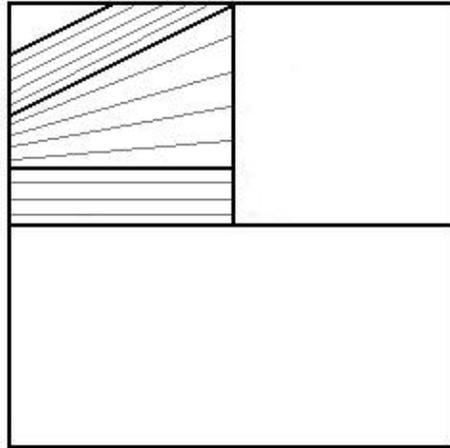
El segmento $\{0\} \times [1/4, 1]$ lo notaremos $I^s(b)$ y lo orientaremos para que sea creciente sobre las y . Este será el *segmento de partida* de b .

Finalmente el segmento $\{-1\} \times [1/4, 1/2]$ será el centro de $I^e(a_1)$.

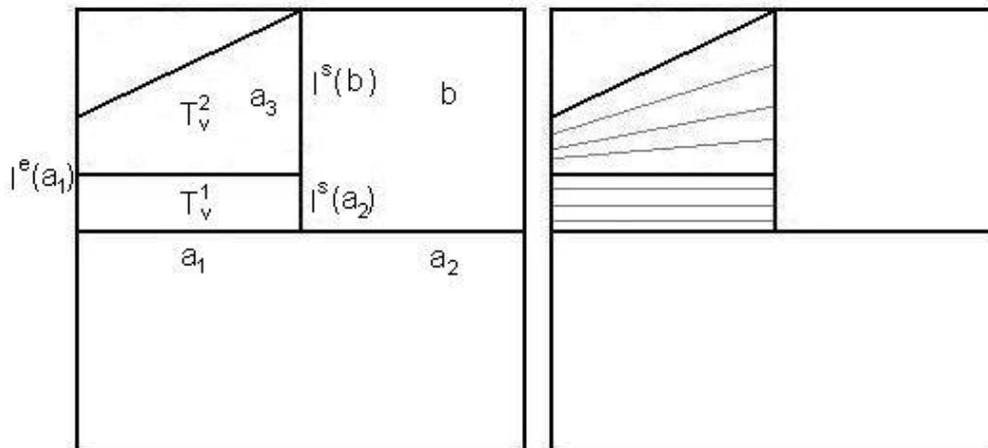


Foliamos ahora los cuadriláteros T_v^i por arcos, orientados para que sean crecientes sobre las x de la siguiente forma. Foliamos T_v^1 por segmentos horizontales, T_v^3 por segmentos paralelos a los bordes paralelos del cuadrilátero. Finalmente T_v^2 por segmentos que unen $t \in \{-1\} \times [1/4, 1/2]$ con $\lambda_v(t) \in I^s(b)$, donde λ_v es un homeomorfismo creciente entre el centro de $I^e(a_1)$ y el segmento de llegada de b . Llamaremos λ_v como *homeomorfismo de enlace*. Este homeomorfismo más tarde podrá ser modificado y consecuentemente la foliación en T_v^2 . El homeomorfismo anterior tendrá el papel que tenía reparametrizar las líneas que pasaban por los interiores de los ladrillos en 5.1 con el objetivo de que quedaran líneas de Brouwer. Utilizando la demostración de la proposición 4.4.3 podemos construir para $i = 2, 3$ un conjunto cerrado $\tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ que contiene los extremos de $I^s(a_i)$ e isomorfo (como espacio topológico ordenado) a Λ'_{a_i} . Si ahora transportamos

cada uno de los dos conjuntos, por las hojas de la foliación definida en cada cuadrilátero, obtenemos dos conjuntos cuya unión es isomorfa a Λ'_{a_1} y notaremos $\tilde{\Lambda}_{a_1}^e$.

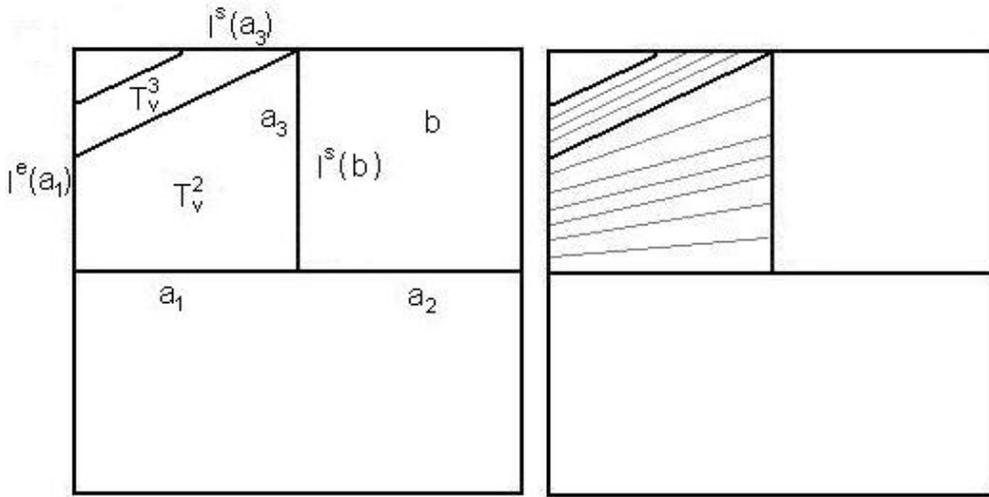


- Supongamos ahora que a_2 es regular, pero a_3 es singular. Definimos los cuadriláteros T_v^1 y T_v^2 como los del caso anterior. El segmento de llegada de a_1 pasará a ser $I^e(a_1) = \{-1\} \times [0, 1/2]$, orientado para que sea creciente sobre las y . Los segmentos de partida de a_2 y b se mantendrán iguales y el segmento de partida de a_3 se reduce al punto $(0, 1)$, el *punto de partida* de a_3 . La foliación definida sobre T_v^1 es idéntica y de la misma forma foliamos T_v^2 con el homeomorfismo de enlace λ_v . El conjunto $\tilde{\Lambda}_{a_3}^s$ se reduce al punto de partida de a_3 . Sin embargo, el conjunto $\tilde{\Lambda}_{a_2}^s$ se define de la misma forma, conteniendo los extremos de $I^s(a_2)$ e isomorfo a Λ'_{a_2} . Si transportamos este conjunto por la foliación en T_v^1 , cuando le adjuntamos el punto $(-1, 1/2)$, obtenemos un conjunto isomorfo a Λ'_{a_1} que notaremos $\tilde{\Lambda}_{a_1}^e$.



- Supongamos que a_2 singular y a_3 es regular.

En este caso el cuadrilátero T_v^3 queda igual al primer caso y el cuadrilátero T_v^2 pasa a ser la unión de los dos primeros cuadriláteros del primer caso. Es decir, T_v^2 es el cuadrilátero que tiene como vértices $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 1/2)$. En este caso, $I^e(a_1) = \{-1\} \times [0, 3/4]$, $I^s(b) = \{0\} \times [0, 1]$, $I^s(a_3) = [-1/2, 0] \times \{1\}$. Además el punto de partida de a_2 es el punto $(0, 0)$. La foliación sobre T_v^3 permanece igual al primer caso. En T_v^2 hacemos una foliación por segmentos que unen $t \in \{-1\} \times [0, 1/2]$ con $\lambda_v(t) \in I^s(b)$, que resulta un homeomorfismo de enlace. Cuando transportamos $\tilde{\Lambda}_{a_3}^s$ por la foliación en T_v^3 y le unimos el punto $(-1, 0)$ obtenemos el conjunto $\tilde{\Lambda}_{a_1}^e$ que es isomorfo a Λ'_{a_1} .



- Finalmente supongamos que a_2 y a_3 son singulares.

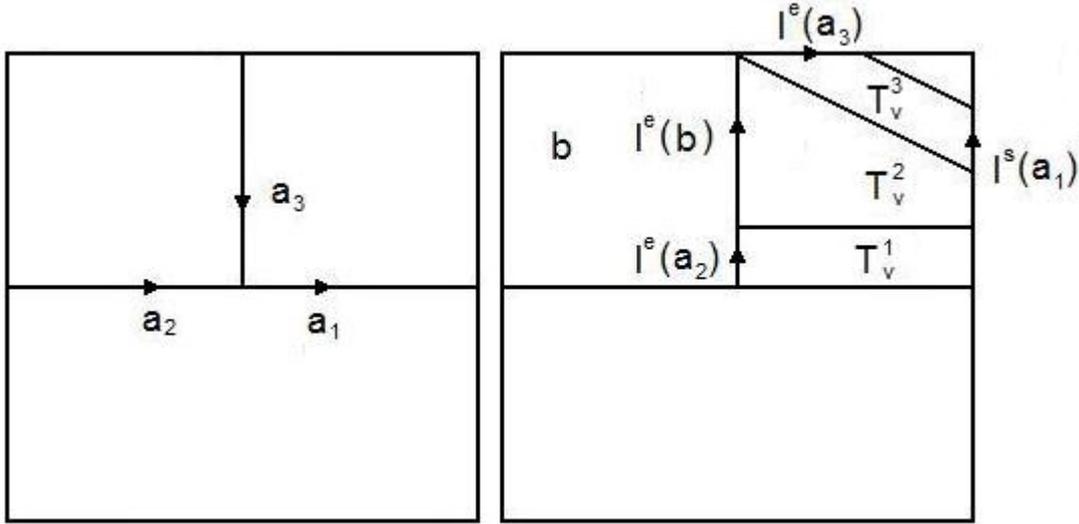
En este caso el cuadrilátero T_v^2 queda como en el caso anterior y no tenemos ni cuadrilátero T_v^1 ni cuadrilátero T_v^3 . En este caso, $I^e(a_1) = \{-1\} \times [0, 1/2]$, orientado para que sea creciente sobre las y . Además $I^s(b) = \{0\} \times [0, 1]$. Los segmentos de partida de a_2 y a_3 se reducen a los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. En T_v^2 hacemos una foliación como en el caso anterior obteniendo un homeomorfismo de enlace. Finalmente $\tilde{\Lambda}_{a_3}^s = \{(0, 1)\}$, $\tilde{\Lambda}_{a_2}^s = \{(0, 0)\}$ y $\tilde{\Lambda}_{a_1}^e = \{(-1, 0), (-1, 1/2)\}$.

- Supongamos ahora que $v = s(a_1) = e(a_2) = e(a_3)$.

Construiremos objetos análogos al caso anterior. En esta situación sin embargo cambiaremos la posición de las aristas:

- $a_1 \cap [-1, 1]^2 = [0, 1] \times \{0\}$.
- $a_2 \cap [-1, 1]^2 = [-1, 0] \times \{0\}$.
- $a_3 \cap [-1, 1]^2 = \{0\} \times [0, 1]$.

Es decir, hicimos una simetría sobre el eje vertical. Tomaremos los cuadriláteros, como los simétricos a los del punto anterior según corresponda el caso. Los arcos de los ejes verticales serán orientados de la misma forma, pero los arcos sobre las x son orientados de forma inversa a como fueron orientados anteriormente. Inclusive las hojas de las foliaciones. A su vez, los conjuntos simétricos de los segmentos de partida, pasaran a ser de llegada y viceversa.



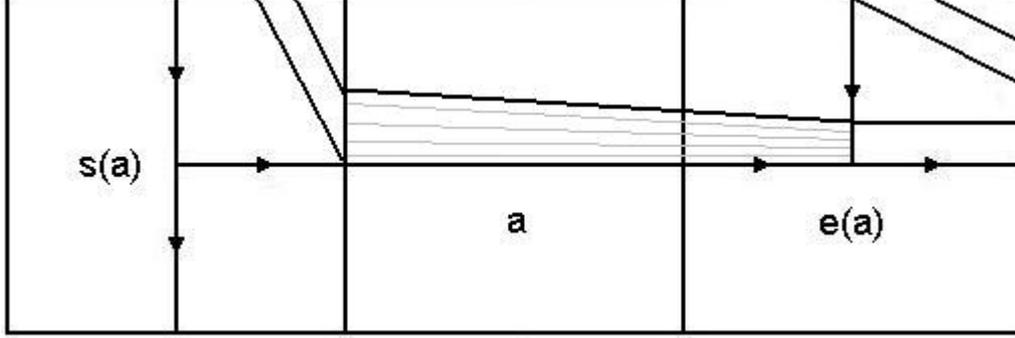
Observemos varias cosas de esta construcción. Para todo arco $a \in A$, tenemos definido $I^s(a)$ en $s(a)$ y $I^e(a)$ en $e(a)$. Análogamente, para todo ladrillo $b \in B$, tenemos definido $I^s(b)$ en $s(b)$ y $I^e(b)$ en $e(b)$. A su vez, en cada intervalo asociado a un arco a , tenemos una copia de Λ'_a . Además todo segmento de partida o de llegada de un arco, está situado respecto al ladrillo adyacente a la izquierda del arco y sus extremos inferiores están sobre cada arco.

Lo que haremos ahora es unir cada punto de $t \in \tilde{\Lambda}_a^s$ con aquel punto en $\tilde{\Lambda}_a^e$ que representa la misma E -línea de Λ'_a que representa t . De esta forma obtenemos nuestro conjunto isomorfo a Λ' . En la construcción rellenaremos los espacios que quedan en el medio para tener definida la foliación no solo alrededor de los vértices, sino también a la izquierda de los arcos.

Fijemos un arco $a \in A$. Conjugando f por un homeomorfismo que preserve orientación, podemos suponer que a es el segmento orientado que une $(-2, 0)$ con $(2, 0)$ y que el rectángulo $[-3, 3] \times [-1, 1]$ está contenido en U_a . Podemos suponer además que el cuadrado $[1, 3] \times [-1, 1]$ centrado en $e(a)$ es un trasladado del cuadrado $K_{e(a)}$ descrito anteriormente, en el caso en que $e(a)$ es la fuente de dos arcos o en el caso en que existe otro arco a' , que tiene como extremo final a $e(a)$ y verifica $l(a) = r(a')$. Si existe otro arco a' que tiene como extremo final a $e(a)$ pero $r(a) = l(a')$, podemos suponer que es la imagen de $K_{e(a)}$ por una rotación de $\pi/2$ luego de ser trasladado.

Supondremos también que $[-3, -1] \times [1, 1]$ es la imagen de $K_{s(a)}$ por una traslación en el caso de que $s(a)$ es el fin de otros dos arcos, o el caso en que existe a' tal que

$s(a') = s(a)$ y $r(a') = l(a)$. Si existe a' tal que $s(a') = s(a)$ pero el caso es $l(a') = r(a)$ podemos suponer que es la imagen de $K_{s(a)}$ por una rotación de $-\pi/2$ luego de ser trasladado.



Consideraremos ahora el cuadrilátero T_a cuyos respectivos lados son $I^s(a)$, $I^e(a)$, el segmento contenido en a que une los extremos inferiores de $I^s(a)$ y $I^e(a)$ y el segmento que une los extremos superiores. Este cuadrilátero resulta estar contenido en $l(a)$. Indexando A por \mathbb{N} podemos construir los cuadriláteros por recurrencia para que estos sean disjuntos dos a dos. Consideraremos un homeomorfismo ψ_a estrictamente creciente que envía $\tilde{\Lambda}_a^s$ en $\tilde{\Lambda}_a^e$ y lo extendemos a un homeomorfismo entre $I^s(a)$ y $I^e(a)$. Tomamos entonces una foliación de T_a por los segmentos orientados, para que sean crecientes según las x , uniendo $t \in I^s(a)$ con su correspondiente imagen en $I^e(a)$.

Recordemos que C es la unión disjunta de A y B . Toda hoja de T_a se prolonga al llegar a $I^e(a)$ en un única hoja contenida en el cuadrilátero $T_{e(a)}^i$ lo que conduce a un punto de $I^s(c)$ donde $s(c) = e(a)$. Uno obtiene entonces una familia continua de arcos orientada indexada por $t \in I^s(a)$ que induce un homeomorfismo Ψ_a entre $I^s(a)$ y $\bigcup_{c \in C/s(c)=e(a)} I^s(c)$. En otras palabras, Ψ_a va de intervalos de partida en intervalos de partida uniendo según se recorre las hojas de la foliación definida hasta ahora.

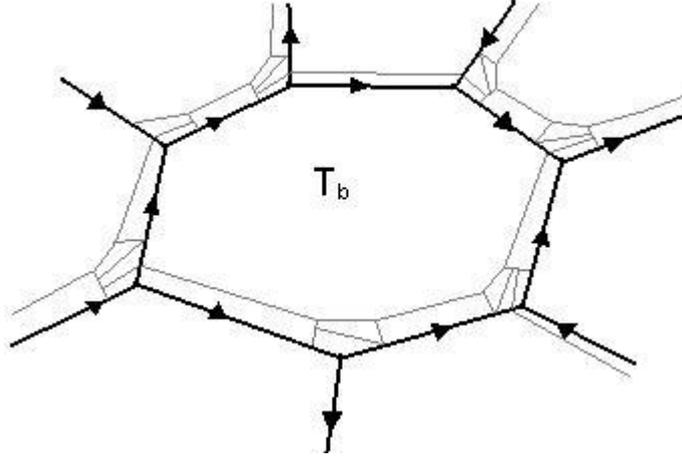
Observemos que dado $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i \in \Lambda'$, si $t_i \in I^s(a_i)$ es el asociado a Γ entonces $\Psi_{a_i}(t_i) = t_{i+1}$. En particular, dado un arco a , la hoja que pasa por el extremo superior de $I^s(a)$ representa Γ_a^+ que es $\Gamma_{l(a)}^-$ y análogamente la hoja que pasa por el extremo inferior de $I^s(a)$ representa Γ_a^- que es $\Gamma_{r(a)}^+$. Más aún, dado $b \in B$, si a_0 y a'_0 son los arcos tales que $s(a_0) = s(a'_0) = s(b)$ con $r(a'_0) = l(a_0) = b$, entonces el extremo superior de $I^s(a_0)$ es el extremo inferior de $I^s(b)$ y el extremo inferior de $I^s(a'_0)$ es el extremo superior de $I^s(b)$.

Lo que queremos ahora es definir la foliación en el resto de cada ladrillo y lo haremos uniendo puntos de $I^s(b)$ con puntos de $I^e(b)$. La construcción es parecida a como hicimos en 5.1 salvo que antes, las líneas de relleno iban de $s(b)$ a $e(b)$. Con esto logramos des-singularizar los vértices.

La unión de las fronteras de los cuadriláteros T_v^i y T_a junto con los arcos singulares definen una descomposición en ladrillos libre, que tiene a la original como una subdescomposición. Los T_v^i y los T_a son ahora ladrillos de esta nueva descomposi-

ción. Como veremos inmediatamente, todo otro ladrillo está contenido en un ladrillo $b \in B$ y todo $b \in B$ contiene un ladrillo de esta nueva descomposición que no es de la forma T_v^i o T_a y lo notaremos T_b .

Dado un ladrillo b . La frontera de b se escribe como unión de dos arcos $\prod_{0 \leq i \leq n} a_i$ y $\prod_{0 \leq i \leq n'} a'_i$ donde $s(a_0) = s(a'_0) = s(b)$, $e(a_n) = e(a'_{n'}) = e(b)$ y $l(a_i) = r(a'_j) = b$. Los cuadrilátero $T_{a'_j}$ y T_v^i donde $v = s(a'_j)$ están contenido en $l(a'_j)$ y por lo tanto tienen su interior disjunto al de b . Por otra parte los cuadriláteros de T_{a_j} y T_v^i donde $v = e(a_j)$ están todos contenido en b y además la unión de estos da un disco donde la frontera está formada por $I^s(a_0) \subset a'_0$, $I^e(a_n) \subset a'_{n'}$, el arco $\prod_{0 \leq i \leq n} a_i$ y finalmente el arco $(\prod_{0 \leq i < n} \gamma_{a_i}^{\max I^s(a_i)})\gamma$ donde γ es la hoja de T_{a_n} que une $\max I^s(a_n)$ con $\max I^e(a_n)$. De esto, deducimos que existe entonces un único ladrillo T_b de la nueva descomposición que está contenido en b . Este es un disco donde la frontera está contenida en la unión de $(\prod_{0 \leq i < n} \gamma_{a_i}^{\max I^s(a_i)})\gamma$ y del segmento contenido en $\prod_{0 \leq i \leq n'} a'_i$ que une los dos extremos de $(\prod_{0 \leq i < n} \gamma_{a_i}^{\max I^s(a_i)})\gamma$. Esta frontera contiene los segmentos de partida y de llegada de b .



Podemos tomar ahora un homeomorfismo h que preserve la orientación enviando T_b sobre $[-1, 1]^2$, y los segmentos $I^s(b)$ y $I^e(b)$ sobre $\{-1\} \times [-1, 1]$ y $\{1\} \times [-1, 1]$ respectivamente. Consideramos ahora la foliación orientada, imagen por h^{-1} de la foliación horizontal orientada para que sea creciente sobre las x . Cada hoja saliente de un $t \in I^s(b)$, al llegar a $I^e(b)$ se prolonga en una única hoja de $T_{e(b)}^2$, que termina en un punto $\Psi_b(t)$. Este punto se encuentra en el centro de $I^s(a^+)$ donde a^+ es el único arco que verifica $s(a^+) = e(b)$.

Notaremos

$$\gamma_b^{\min I^s(b)} = \prod_{0 \leq i \leq n} \gamma_{a_i}^{\max I^s(a_i)} \text{ y } \gamma_b^{\max I^s(b)} = \prod_{0 \leq i \leq n'} \gamma_{a'_i}^{\min I^s(a'_i)}$$

Diremos que una familia

$$\{(c_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{Z}} \in C^{\mathbb{Z}} \times \prod_{i \in \mathbb{Z}} I^s(c_i)$$

es admisible si $e(c_i) = s(c_{i+1})$ y $t_{i+1} = \Psi_{c_i}(t_i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Con esto entonces, acabamos de definir una foliación F orientada sobre el plano, donde las hojas son lineas de la forma

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c_i}^{t_i}$$

con $\{(c_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ admisible.

El resultado siguiente es evidente por la construcción:

Proposición 5.2.2. Sean $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c_i}^{t_i}$ y $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c'_i}^{t'_i}$ dos hojas de F . Si existe $i \in \mathbb{Z}$ y $i' \in \mathbb{Z}$ tales que $c_i = c'_{i'}$ entonces las dos hojas son comparables y tenemos que $\Gamma \leq \Gamma'$ si y sólo si $t_i < t'_{i'}$.

Estudiemos ahora las hojas de F .

Proposición 5.2.3. Sea $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c_i}^{t_i}$ una hoja de F . Entonces se da uno de los siguientes casos:

1. Si todos los c_i son arcos, entonces la línea $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} c_i$ aparece en Λ' y cada t_i es el elemento de $\tilde{\Lambda}_{c_i}^s$ que corresponde a Γ' .
2. Existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que c_{i_0} es un ladrillo y tal que t_{i_0} está en el interior de $I^s(c_{i_0})$. Entonces los c_i que son ladrillos, son exactamente los ladrillos de la clase de equivalencia de c_{i_0} y t_i está en el interior de $I^s(c_i) \forall i$. Si \hat{b} es dicha clase de equivalencia entonces $C_{\hat{b}} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} c_i$.
3. Existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que c_{i_0} es un ladrillo y tal que $t_{i_0} = \max I^s(c_{i_0})$. Si $\Gamma_{c_{i_0}}^+ = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$, podemos escribir $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{a_i}^{t'_i}$ donde $t'_i \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ corresponde a $\Gamma_{c_{i_0}}^+$.
4. Existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que c_{i_0} es un ladrillo y tal que $t_{i_0} = \min I^s(c_{i_0})$. Si $\Gamma_{c_{i_0}}^- = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$, podemos escribir $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{a_i}^{t'_i}$ donde $t'_i \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ corresponde a $\Gamma_{c_{i_0}}^-$.

Demostración.

1. Sea $\{(c_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia admisible donde cada c_i es un arco. Basta con mostrar que existe un i tal que $t_i \in \tilde{\Lambda}_{c_i}^s$. Como $\Psi(\tilde{\Lambda}_{c_i}^s) \cap I^s(c_{i+1}) = \tilde{\Lambda}_{c_{i+1}}^s$. Inductivamente, hacia futuro y pasado en \mathbb{Z} , probamos que $t_i \in I^s(c_{i+1})$.

Si existiera una tal línea $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i$, en particular tendríamos que $c_i = a_i \forall i$.

Supongamos que ningún t_i está en $\tilde{\Lambda}_{c_i}^s$, notemos $t_0^+ = \min\{t \in \tilde{\Lambda}_{c_0}^s : t > t_0\}$ y $t_0^- = \max\{t \in \tilde{\Lambda}_{c_0}^s : t < t_0\}$. Sabemos que existen los anteriores porque $t_0 \notin \tilde{\Lambda}_{c_0}^s$ y por lo tanto los conjuntos sobre los cuales tomamos máximo y mínimo son compactos. El punto t_0^+ corresponde a una línea $\Gamma^+ = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i^+$ y el punto t_0^- corresponde a una línea $\Gamma^- = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i^-$. Como las líneas son diferentes podemos suponer por ejemplo que existe $i \geq 0$ tal que $a_i^+ \neq a_i^-$. Sea i_0 el entero positivo más chico que verifica lo anterior. Notemos entonces a_i como arcos comunes a Γ^+ y Γ^- cuando $i = 0, \dots, i_0 - 1$.

Observemos que $i_0 \geq 1$ y que $r(a_{i_0}^+) = l(a_{i_0}^-)$. Si $t_i^+ \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ (respectivamente $t_i^- \in \Lambda_{a_i}^s$) es el correspondiente a Γ^+ (respectivamente Γ^-), entonces la imagen por Ψ_{a_i} del segmento $[t_i^-, t_i^+] \subset I^s(a_i)$ es igual al segmento $[t_{i+1}^-, t_{i+1}^+] \subset I^s(a_{i+1})$, si $i \in \{0, \dots, i_0 - 2\}$. De esto concluimos que $c_i = a_i$ y $t_i \in [t_i^-, t_i^+]$, si $i \in \{0, \dots, i_0 - 1\}$. Observemos que además (t_i^-, t_i^+) no contiene ningún elemento de $\tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ porque (Γ^-, Γ^+) es vacío en Λ' .

La línea $\Gamma_{a_{i_0}^+}^-$ es inferior Γ^+ y debe contener a a_{i_0-1} . Como es estrictamente superior a Γ^- , concluimos que $\Gamma^+ = \Gamma_{a_{i_0}^+}^-$ y análogamente que $\Gamma^- = \Gamma_{a_{i_0}^-}^+$. Deducimos entonces que la imagen por $\Psi_{a_{i_0-1}}$ del intervalo $(t_{i_0-1}^-, t_{i_0-1}^+)$ está contenido en el interior de $I^s(b)$, con $b = r(a_{i_0}^+) = l(a_{i_0}^-)$. Finalmente obtenemos que c_{i_0} no es un arco, sino el ladrillo b , llegando a un absurdo.

2. Sea $\{(c_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una familia admisible, con c_0 un ladrillo y t_0 en el interior de $I^s(c_0)$. Notemos $\prod_{i \in \mathbb{Z}} c'_0$ la cadena de equivalencia de c_0 , donde $c'_0 = c_0$. Ya sabemos que el único arco que tiene como extremo final, el extremo inicial de c_0 , es $c'_{-1} = c_{-1}$; y que el único arco que tiene como extremo inicial, el extremo final de c_0 es $c'_1 = c_1$. Sean entonces $\Gamma_{c_0}^- = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i^- \in \Lambda'$ y $\Gamma_{c_0}^+ = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i^+ \in \Lambda'$ donde $a_{-1}^- = a_{-1}^+ = c'_{-1}$. Notamos $t_i^- \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ el punto correspondiente a $\Gamma_{c_0}^-$ y $t_i^+ \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ el punto correspondiente a $\Gamma_{c_0}^+$. Si hay n^- arcos con c_0 como el ladrillo adyacente a izquierda y n^+ arcos con c_0 como ladrillo adyacente a derecha, tenemos que $a_{n^-}^- = a_{n^+}^+ = c'_1$.

Supongamos que existe un ladrillo en la familia $\{c'_i\}_{i \geq 1}$ y notemos c_{i_0} el primero que aparece. Tenemos entonces que $a_{n^-+i}^- = a_{n^++i}^+ = c'_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \dots, i_0 - 2\}$ y $l(a_{n^-+i_0-1}^-) = r(a_{n^++i_0-1}^+) = c'_{i_0}$. De esto obtenemos que la imagen por $\Psi_{c'_{i+1}}$ del intervalo $[t_{i+n^-}^-, t_{i+n^+}^+] \subset I^s(c'_{i+1})$ es igual a $[t_{i+1+n^-}^-, t_{i+1+n^+}^+] \subset I^s(c'_{i+2})$, para todo $i \in \{0, \dots, i_0 - 3\}$ y la imagen de $(t_{i_0-2+n^-}^-, t_{i_0-2+n^+}^+) \subset I^s(c'_{i_0-1})$ por $\Psi_{c'_{i_0-1}}$ es igual a $(t_{i_0-1+n^-}^-, t_{i_0-1+n^+}^+) \subset \text{int}(I^s(c'_{i_0}))$. Como el punto t_1 pertenece a $(t_{n^-}^-, t_{n^+}^+)$ deducimos que $c_i = c'_i$ para todo $i \in \{1, \dots, i_0\}$ y que t_{i_0} está en el interior de c_{i_0} . Podemos argumentar de forma análoga hacia el pasado y luego, repitiendo el paso, inductivamente queda el punto 2. demostrado.

3. Basta observar que si c_0 es un ladrillo y $t_0 = \max\{I^s(c_0)\}$ entonces t_0 está en $I^s(a_0)$ si a_0 es el arco que verifica $r(a_0) = c_0$ y $s(a_0) = s(c_0)$. En particular debe ser t_0 , como elemento de $I^s(a_0)$, el mínimo. Como $\tilde{\Lambda}_{a_0}^s$ tiene los extremos de $I^s(a_0)$ entonces por el punto 1. sabemos que se puede identificar con una línea de Brouwer. Por la construcción de $I^s(a_0)$, la línea debe ser $\Gamma_{a_0}^- = \Gamma_{c_0}^+$.
4. Es análogo a 3.

□

Estudiemos momentáneamente las hojas de F que verifican el punto 1. de la proposición anterior.

Proposición 5.2.4. *Consideremos la aplicación Θ que manda una línea de $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i \in \Lambda'$ le asocia la hoja $\Theta(\Gamma) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{a_i}^{t_i(\Gamma)}$ de F , con $t_i(\Gamma) \in \tilde{\Lambda}_{a_i}^s$ el elemento asociado a Γ . Entonces, esta aplicación es un homeomorfismo estrictamente creciente, de Λ' sobre su imagen. Más aún, cada curva $\Theta(\Gamma)$ es una línea de Brouwer.*

Demostración. La inyectividad es inmediata del hecho que la inversa está bien definida. Qué es un homeomorfismo sale del hecho que $\Theta|_{\Lambda'_a}$ es claramente un homeomorfismo creciente. Veamos ahora que es creciente. Para eso, hay que tener en cuenta la siguientes propiedad: Para toda línea $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a_i \in \Lambda'$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ y $\forall t \in [\text{mín } I^s(a_i), t_i(\Gamma)]$ el arco $\gamma_{a_i}^t$ está contenido en $l(\Gamma)$. En particular $R(\Gamma) \subset R(\Theta(\Gamma)) \subset R(\Gamma) \cup l(\Gamma)$. Más precisamente: $R(\Theta(\Gamma)) \subset R(\Gamma) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_{a_i}$.

Supongamos que $\Gamma' = \prod_{i \in \mathbb{Z}} a'_i \in \Lambda'$ es estrictamente superior a Γ . Si las líneas Γ y Γ' no tienen ningún arco en común, entonces

$$R(\Theta(\Gamma)) \subset R(\Gamma) \cup l(\Gamma) \subset R(\Gamma') \subset R(\Theta(\Gamma'))$$

Si Γ y Γ' tienen un arco común $a_i = a'_i$, entonces $t_i(\Gamma) < t_{i'}(\Gamma')$ y entonces $R(\Theta(\Gamma)) \subset R(\Theta(\Gamma'))$.

Para mostrar que $\Theta(\Gamma)$ es una línea de Brouwer, tenemos que utilizar las propiedades de los abiertos U_{a_i} enunciadas al comienzo de la sub-sección. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(R(\Theta(\Gamma))) &\subset f(R(\Gamma) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_{a_i}) \\ &\subset \text{int}(R(\Gamma)) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{int}(R(\Gamma_{a_i}^-)) \subset \text{int}(R(\Gamma)) \subset \text{int}(R(\Theta(\Gamma))) \end{aligned}$$

□

Finalmente, nos queda por demostrar la siguiente proposición:

Proposición 5.2.5. *Podemos escoger los homeomorfismos de enlace $\lambda_v, v \in V$ para que todas las hojas de F sean líneas de Brouwer.*

Demostración. Para todo ladrillo $b \in B$, vamos a reparametrizar la foliación definida sobre T_b , no solo por $t \in I^s(b)$, sino también por $t' \in [-1, 1]$ considerando un homeomorfismo creciente h_b de $[-1, 1]$ en $I^s(b)$, obteniendo así una familia $\{\gamma_b^{t'}\}_{t' \in [-1, 1]}$ de sub-arcos de los arcos $\gamma_b^{h_b(t')}$.

Consideremos una hoja $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c_i}^{t_i}$ de F que pasa por el interior de un ladrillo T_b , y sea \hat{b} la clase de equivalencia de b . Si c_i es un ladrillo, entonces Γ contiene el arco $\gamma_{c_i}^{t'_i}$, con $t_i = h_{c_i}(t'_i)$. Observemos que Γ es disjunto de $\Gamma_{\hat{b}}^-$ y además $R(\Gamma_{\hat{b}}^-) \subset \text{int}(R(\Gamma))$.

Si $b_0 = c_{i_0}$ y $b_1 = c_{i_1}$, son dos ladrillos sucesivos en la cadena de equivalencia $\prod_{i \in \mathbb{Z}} c_i$ de \hat{b} , los arcos $\gamma_{b_0}^{t'_{i_0}}$ y $\gamma_{b_1}^{t'_{i_1}}$ son separados en Γ por un arco γ incluido a la vez en $\bigcup_{i_0 < i < i_1} U_{c_i}$ y en la vecindad izquierda $l(\prod_{i_0 < i < i_1} c_i)$. La primera inclusión nos

dice que $f(\gamma)$ está incluida en $\text{int}(R(\Gamma_{\widehat{b}}^-))$ y por lo tanto en $R(\Gamma) - \Gamma$. La segunda inclusión nos dice que Γ está incluido en $L(\Gamma_{\widehat{b}}^+)$ y que $f^{-1}(\gamma)$ está entonces contenido en $\text{int}(L(\Gamma_{\widehat{b}}^+))$. Por lo tanto la imagen inversa no encuentra ningún ladrillo $b' \in \widehat{b}$. Como tampoco encuentra algún U_a , donde a es un arco contenido en la cadena de equivalencia, concluimos que $f^{-1}(\gamma)$ está incluido en $L(\Gamma) - \Gamma$.

Podemos ahora, pedirle al homeomorfismo h_b que $f(\gamma_b^{t'}) \subset \text{int}(R(\Gamma_{\widehat{b}}^-))$ si $t' \leq -1/3$ y que $f^{-1}(\gamma_b^{t'}) \subset \text{int}(L(\Gamma_{\widehat{b}}^+))$ si $t' \geq 1/3$.

Lo que nos falta mostrar es que podemos elegir los homeomorfismos de enlace $\lambda_{e(b)}$, $b \in B$ para que Γ sea una línea de Brouwer. Basado en lo anterior, esto es suficiente para que Γ sea libre. Recordemos de 5.1, que definimos un orden sobre \widehat{b} y que podemos tomarnos una familia de homeomorfismos que verifiquen la conclusión del lema 5.1.2 para cada orden. Uno puede entonces elegir los homeomorfismos de enlace $\lambda_{e(b)}$ para que toda hoja $\Gamma = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_{c_i}^{t_i}$ de F , que pase por el interior de un ladrillo T_b y verifique el segundo punto de una proposición anterior, contenga para un cierto $t' \in [-1, 1]$ todos los arcos $\gamma_b^{g_b^{-1}(t')}$, $b \in \widehat{b}$. De acuerdo con lo anterior, si Γ se intersecta con su imagen, existen $b, b' \in \widehat{b}$ y $t' \in [-1, 1]$ tales que:

$$f(\gamma_b^{g_b^{-1}(t')}) \cap \gamma_{b'}^{g_{b'}^{-1}(t')} \neq \emptyset$$

Obtenemos entonces una contradicción idéntica a la obtenida en 5.1. □

Referencias

- [Br12] L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912), 37-54.
- [Br84] M. Brown, *A New Proof of Brouwer's Lemma on Translation Arcs*, Houston J. Math. 10 (1984), 35-41.
- [Fl90] M. Flucher, *Fixed points of measure preserving torus homomorphism*, Manuscripta Math. 68(1990), 271-293.
- [Fr92] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 12 (1992), 217-226.
- [Gu94] L. Guillou, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology 33 (1994), 331-351.
- [LS96] P. Le Calvez y A. Sauzet, *Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer*, Expo. Math. 14 (1996), 277-287.
- [Sa01] A. Sauzet, *Application des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes de surface*, Thèse de l'Université Paris 13 (2001).
- [LeR01] F. Le Roux, *Dynamique des homéomorphismes de surfaces, versions topologiques des théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable*, Prépublication, Université Paris-Sud, 2001.
- [LeC04] P. Le Calvez, *Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer*, Comment. Math. 79 (2004) 229-259.