Extensiones de álgebras de Hopf provenientes de pares de grupos finitos

Javier Cóppola Rodríguez
Orientador: Andrés Abella Lezama

30 de marzo de 2009

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es caracterizar todas las sucesiones exactas cortas de álgebras de Hopf, que empiezan en un álgebra dual a la de un grupo, y terminan en un álgebra de grupo. Es decir, dados dos grupos finitos F, G, queremos hallar todas las extensiones de kF por k^G.

El interés en estudiar este tipo de extensiones viene al menos por dos lados. Por uno, nos permiten obtener ejemplos de álgebras de Hopf que no son conmutativas ni coconmutativas. Por otro, se aplican en la clasificación de álgebras de Hopf semisimples. Por ejemplo, usando estas extensiones se puede probar que toda álgebra de Hopf de dimensión pq, con p y q primos distintos es isomorfa a un álgebra de grupo o a su dual (ver [3]).

A continuación haremos un breve resumen de la monografía.

Este primer capítulo está dedicado a fijar algo de notación para el resto del trabajo, y a repasar algunos conceptos básicos de la teoría de álgebras de Hopf.

En el segundo capítulo, la primera sección introduce el concepto de sucesión exacta corta de álgebras de Hopf y lo relaciona con el previamente existente concepto de sucesión exacta corta de grupos. Luego se estudia el ejemplo trivial (cuando en el centro aparece el producto tensorial de los extremos), y se termina mostrando un teorema que condiciona parte de la estructura de una extensión, el teorema de la grieta.

El tercer capítulo está dedicado a construir ejemplos de extensiones de kF por k^G. Primero se toma el caso del producto semidirecto de un álgebra R por un grupo F que actúa en ella por automorfismos, y se construye una extensión de kF por k^G (poniendo $R = k^G$, y la acción de F proveniente de una acción de F en G por automorfismos de grupos). Se observa que tiene una estructura multiplicativa no trivial pero una estructura comultiplicativa trivial, y se ve enseguida un caso ligeramente más complicado, que es torcer aún más la multiplicación mediante un cociclo. La última sección plantea torcer las estructuras multiplicativa y comultiplicativa a la vez, sustituyendo la acción por automorfismos de grupos por el concepto de par ligado de grupos: dos grupos F, G, una acción de F en G y una de G en F, con ciertas relaciones . A partir de un par ligado y de un cociclo para cada acción, en el teorema 3.2.4 se construye una extensión de kF por k^G.

El capítulo cuarto, el más importante del trabajo, se dedica a establecer el recíproco del teorema 3.2.4. Se parte de una extensión cualquiera de kF por k^G, y usando el teorema de la grieta se hallan acciones de par ligado entre F y G, y cociclos para dichas acciones, de forma tal que la extensión de la que partimos es isomorfa a una de las construidas en el capítulo tercero (ver teorema 4.5.1).

1.2. Convenciones.

En todo el trabajo, salvo que se indique lo contrario, los símbolos en general representarán los mismos tipos de objetos matemáticos. Algunas cosas que hay que asumir (casi) sin pensar son:

- La letra k representará un cuerpo (aunque para muchos resultados solamente se usa que es un anillo conmutativo). Las estructuras de espacios vectoriales que aparezcan van a ser siempre sobre k.
- Usaremos las letras A, H, K para álgebras de Hopf, siempre de dimensión finita (a veces no vamos a necesitar esta hipótesis, pero es suficiente para que todo funcione como queremos). Denotaremos a sus elementos con letras como a, h, k, respectivamente. Es la única vez que vamos a repetir una letra, pero va a quedar claro por el contexto cuándo k se refiere al cuerpo, y cuándo $k \in K$ es un elemento del álgebra.
- Para las operaciones de multiplicación, unidad, comultiplicación, counidad y antípoda, usamos las letras m, u, Δ, ϵ y $\mathcal{S}$, respectivamente. Salvo que necesitemos especificar, usaremos las mismas letras sea el álgebra que sea.
- Cuando comultipliquemos, usaremos la notación de Sweedler:

  $$\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

  A veces, si queremos alivianar la notación y si las cosas son obvias, omitiremos el símbolo de sumatoria, el subíndice a o los paréntesis.
- De la misma forma que en el punto anterior lo haremos para las coacciones, en donde el subíndice 0 denotará el elemento del comódulo:

  $$\rho(m) = \sum_m m_{(0)} \otimes m_{(1)},$$

  $$\rho(m) = \sum_m m_{(-1)} \otimes m_{(0)},$$

  si la coacción ρ es a derecha o a izquierda, respectivamente.
- Dadas dos álgebras de Hopf, si en su producto tensorial definimos todas las operaciones componente a componente, obtenemos el álgebra de Hopf producto. [1]

[1] Otra forma de verlo es que, al hacer el producto tensorial de los espacios, también lo hacemos con los mapas correspondientes a la estructura de Hopf (con alguna trasposición mediante, para que las cosas queden bien definidas formalmente).

- Cuando consideremos k como álgebra de Hopf, lo haremos con la estructura trivial (no puede tener otra). Esto es, asumiendo que $k \otimes k = k$ vía la multiplicación del cuerpo, todos los mapas estructurales son la identidad.

- Cuando expresemos igualdades de funciones en términos de morfismos, muchas veces no lo haremos con toda la formalidad categórica. Algunos isomorfismos, como el del punto anterior por ejemplo, serán asumidos de forma automática. La idea en este trabajo no es expresar las cosas de forma categórica, simplemente hay igualdades que se ven más claras escribiendo sólo las funciones, sin evaluarlas en elementos genéricos.

- Con las letras G, F nos referiremos a grupos finitos (tampoco va a ser siempre necesaria la finitud, pero es en el marco en que vamos a trabajar). En general usaremos las letras x, y, z para los elementos de F, y q, r, s, t para los de G.

- De todas formas no restringirse, usar el sentido común.

Por otra parte, hay algo con lo que sí tenemos que tener cuidado. Si bien los objetos que estudiamos son por lo general álgebras de Hopf, los morfismos que encontremos no siempre van a preservar toda esa estructura, si no se vuelve todo muy restrictivo. Por momentos nos concentraremos en una parte de la estructura, como por ejemplo ver un álgebra de Hopf sólo como álgebra, coálgebra, módulo, comódulo, etc. Incluso ese tipo de morfismos nos va a interesar especialmente, pues estamos intentando explorar ejemplos distintos de la teoría, modificando parcialmente la estructura. Más adelante lo veremos, vamos a obtener familias de álgebras de Hopf no isomorfas, pero con la misma estructura de módulo sobre cierta subálgebra y con la misma estructura de comódulo sobre cierto cociente.

1.3. Definiciones previas

Para la comprensión de este trabajo son necesarios ciertos conceptos previos de la teoría de álgebras de Hopf, que no aparecen definidos aquí. Se pueden encontrar en [2] y en [4]

- La counidad $H \xrightarrow{\epsilon} k$ es un morfismo de álgebras de Hopf. En este caso definimos

  $$H^+ := Ker(\epsilon).$$

  Observemos que, como es el núcleo de un morfismo, va a ser un ideal de Hopf de H.

- Sea $(M, \rightharpoonup)$ un H-módulo. El espacio de los *H-invariantes* de M es

  $$M^H := \{m \in M : \forall h \in H,\ h \rightharpoonup m = \epsilon(h)m\}.$$

- Sea (M, ρ) un H-comódulo. El espacio de los *H-coinvariantes* de M es

  $$M^{coH} := \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1_H\}.$$

  En los dos puntos anteriores, si hay acciones o coacciones a la izquierda y a la derecha a la vez, para aclarar se pone el superíndice del lado correspondiente: ${}^{H}M,\ {}^{coH}M$.

- Un H-*módulo coálgebra* (a izquierda) es, como su nombre lo indica, un espacio vectorial M que tiene a la vez estructura de H-módulo (a izquierda) $(M, \rightharpoonup)$ y de coálgebra $(M, \Delta_M, \epsilon_M)$. Además, incluimos en la definición que ambas estructuras sean compatibles, esto es que los mapas que definen cada estructura sean morfismos para la otra, o lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_M(h \rightharpoonup m) & = & \sum (h_1 \rightharpoonup m_1) \otimes (h_2 \rightharpoonup m_2) \\ \epsilon_M(h \rightharpoonup m) & = & \epsilon_M(h)\epsilon_M(m) \end{array} \quad \forall h \in H, \ m \in M.$$

- Un H-*comódulo álgebra* (a derecha) es, como su nombre lo indica, un espacio vectorial M que tiene a la vez estructura de H-comódulo (a derecha) (M, ρ) y de álgebra $(M, m_M, 1_M)$. Además, incluimos en la definición que ambas estructuras sean compatibles, esto es que los mapas que definen cada estructura sean morfismos para la otra, o lo que es lo mismo:

$$\begin{array}{rcl} \rho(mn) & = & \sum m_0 n_0 \otimes m_1 n_1 \quad \forall m, n \in M, \\ \rho(1_M) & = & 1_M \otimes 1_H. \end{array}$$

- Si A es de dimensión finita, podemos traspasar toda la estructura de Hopf a A^*, dualizando los mapas. Al ser * un funtor contravariante, intercambia las estructuras de álgebra y coálgebra.

$$\begin{array}{lll} m_{A^*} := (\Delta_A)^* & u_{A^*} := (\epsilon_A)^* & \mathcal{S}_{A^*} := (\mathcal{S}_A)^* \\ \Delta_{A^*} := (m_A)^* & \epsilon_{A^*} := (u_A)^* & \end{array} . \tag{1.1}$$

  Lo que estamos usando implícitamente es que hay una inclusión natural $A^* \otimes A^* \subset (A \otimes A)^*$, además de que estamos en dimensión finita, entonces como tienen igual dimensión la inclusión es una igualdad.

- Llamamos kF al espacio vectorial libre que tiene como base los elementos de F.
  Como en F tenemos una multiplicación, podemos extender la misma a kF por bilinealidad, usando que F es base. Con esta operación le damos a kF estructura de álgebra asociativa, y la unidad es la propia unidad de F. Para ponerle la estructura de coálgebra lo hacemos trivialmente, otra vez en F como base.

$$\Delta(x) := x \otimes x \quad ; \quad \epsilon(x) := 1 \quad ; \quad \forall x \in F \ .$$

  Ver la compatibilidad entre la estructura de álgebra y de coálgebra, es una cuenta fácil. También observemos que para darle estructura de álgebra sólo usamos la estructura de monoide de F, y para la de coálgebra menos aún, se puede hacer con cualquier conjunto. Justamente, el axioma que nos falta usar del hecho de que F sea un grupo, es lo que usamos para definir la antípoda:

$$\mathcal{S}(x) := x^{-1} \quad \forall x \in F,$$

  y lo extendemos linealmente a kF.

- Definimos k^G como el espacio vectorial de las funciones de G en k. Ahora, como G es base de kG, hay un isomorfismo lineal entre las funciones de G en k y las transformaciones lineales de kG en k; esto es, podemos identificar k^G con el dual de kG. Entonces, con los dos puntos anteriores le damos a k^G estructura de álgebra de Hopf. Veamos más en detalle las operaciones:

$$\alpha\beta = m_k \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta, \ \forall \alpha, \beta \in k^G.$$

Si evaluamos la ecuación anterior en un $s \in G$ cualquiera, queda

$$(\alpha\beta)(s) = m_k\left((\alpha \otimes \beta)(s \otimes s)\right) = \alpha(s)\beta(s).$$

Con esta forma de verlo, la multiplicación es la conocida punto a punto. La unidad de este producto es la función constante igual a 1.
Ahora, la comultiplicación:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \circ m,$$

esto es,

$$\Delta(\alpha) = \sum \alpha_1 \otimes \alpha_2 \Leftrightarrow \forall s, t \in G \ \alpha(st) = \sum \alpha_1(s)\alpha_2(t).$$

La counidad es

$$\epsilon(\alpha) = \alpha(1_G).$$

Y la antípoda viene dada por

$$\mathcal{S}(\alpha)(s) = \alpha(\mathcal{S}(s)) = \alpha(s^{-1})$$

Hay otra forma de escribirlo más concreta, viendo las operaciones en una base fija. Llamemos $\{e_s : s \in G\} \subset k^G$ a la base dual de G, esto es $e_s(t) = \delta_{s,t}$. La función e_s no es otra cosa que la proyección sobre el espacio generado por s, con respecto al complemento generado por $G \setminus \{s\}$. Con esta forma de verlo, los elementos de la base son idempotentes y ortogonales, y en consecuencia la unidad es la suma de todos ellos.

$$e_s e_t = \delta_{s,t} e_s \quad ; \quad 1_{k^G} = \textstyle\sum_{s \in G} e_s \ .$$

La estructura de coálgebra también es interesante:

$$\epsilon(e_s) = \delta_{s,1_G}$$

$$\Delta(e_s) = \sum_{qr=s} e_q \otimes e_r$$

Observemos que, como G tiene estructura de grupo, todos sus elementos tienen inverso, entonces podemos escribir la comultiplicación de otra forma:

$$\Delta(e_s) = \sum_q e_q \otimes e_{q^{-1}s} = \sum_r e_{sr^{-1}} \otimes e_r.$$

Por último, la antípoda queda de la siguente forma:

$$\mathcal{S}(e_s) = e_{s^{-1}}.$$

Capítulo 2

Extensiones de álgebras de Hopf.

2.1. Definición de extensión

Observación 2.1.1. *Consideremos la siguiente sucesión en la categoría de álgebras de Hopf:*

$$K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H.$$

Entonces:

- *Le damos a A estructura de K-módulo coálgebra a izquierda con la siguiente acción:*

  $$k \cdot a := \iota(k)a.$$

  De forma análoga se le da estructura de K-módulo coálgebra a derecha:

  $$a \cdot k := a\iota(k).$$

- *Le damos a A estructura de H-comódulo álgebra a derecha con la siguiente coacción:*

  $$\rho(a) := \sum a_1 \otimes \pi(a_2).$$

  De forma análoga se le da estructura de H-comódulo álgebra a izquierda:

  $$\rho(a) := \sum \pi(a_1) \otimes a_2.$$

De ahora en adelante asumiremos que ι es inyectivo, o sea que lo vemos como una inclusión, y que π es sobreyectivo, o sea que lo vemos como la proyección a un cociente.

Teorema 2.1.2. *Las siguientes igualdades de espacios vectoriales son equivalentes:*

$$\begin{aligned} H &= A/AK^+ \\ H &= A/K^+A \\ K &= A^{coH} \\ K &= {}^{coH}A \end{aligned}$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en [1]. □

Definición 2.1.3. *Si las condiciones del teorema anterior se cumplen, decimos que A es una* extensión *de H por K, o que tenemos una* sucesión exacta corta *de álgebras de Hopf.*

Simplemente a modo de motivación, vamos a observar que esta definición generaliza la noción de sucesión exacta corta que se tiene para grupos. Una sucesión exacta corta de grupos es una sucesión de grupos y morfismos

$$G_1 \xrightarrow{i} G_2 \xrightarrow{p} G_3,$$

tal que i es inyectivo, p es sobreyectivo, y se cumple que $Im(i) = Ker(p)$. Observemos que por linealidad podemos extender los mapas a las álgebras de grupo, y obtenemos una sucesión

$$kG_1 \xrightarrow{\hat{i}} kG_2 \xrightarrow{\hat{p}} kG_3,$$

que va a ser una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf si y sólo si la sucesión de arriba es una sucesión exacta corta de grupos. Para probar esto, observemos que i $a = \sum_{g\in G_2} \lambda_g g$ un elemento genérico de kG_2, entonces

$$\begin{aligned} a \in (kG_2)^{co(kG_3)} &\Leftrightarrow \rho(a) = a \otimes 1 \Leftrightarrow \sum_{g\in G_2} \lambda_g g \otimes p(g) = \sum_{g\in G_2} \lambda_g g \otimes 1 \Leftrightarrow p(g) = 1,\ \forall g:\ \lambda_g \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \in k(Ker(p)). \end{aligned}$$

Luego probamos que $(kG_2)^{co(kG_3)} = k(Ker(p))$. Por otro lado sabemos que $\hat{i}(kG_1) = k(Im(i))$. Entonces

$$Im(i) = Ker(p) \Leftrightarrow k(Im(i)) = k(Ker(p)) \Leftrightarrow \hat{i}(kG_1) = (kG_2)^{co(kG_3)}.$$

Por otro lado, la "vuelta" de lo anterior se puede hacer tomando los elementos de tipo grupo de las álgebras de Hopf. Recordemos que si H es un álgebra de Hopf, entonces $h \in H$ es un *elemento de tipo grupo* si verifica $\Delta(h) = h \otimes h$ y $\epsilon(h) = 1$. Los elementos de tipo grupo de H forman un grupo con el producto de H, que denotamos $G(H)$. Si

$$K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H$$

es una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf, entonces la sucesión obtenida por restricción

$$G(K) \xrightarrow{\tilde{\iota}} G(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}} G(H)$$

es una sucesión exacta corta de grupos.

Para probarlo, observemos que $\tilde{\iota}(G(K)) = \iota(K) \cap G(A)$ y por lo tanto $\tilde{\iota}(G(K)) = A^{coH} \cap G(A)$. Sea $a \in G(A)$, entonces

$$a \in \tilde{\iota}(G(K)) \Leftrightarrow \rho(a) = a \otimes 1 \Leftrightarrow a \otimes \pi(a) = a \otimes 1 \Leftrightarrow \pi(a) = 1 \Leftrightarrow a \in Ker(\tilde{\pi}).$$

Entonces $\tilde{\iota}(G(K)) = Ker(\tilde{\pi})$.

2.2. La extensión trivial

Teorema 2.2.1. *La sucesión*

$$K \xrightarrow{\iota} K \otimes H \xrightarrow{\pi} H$$

Es una sucesión exacta corta, definiendo

$$\iota(k) := k \otimes 1$$

$$\pi(k \otimes h) := \epsilon(k)h$$

Dado su carácter trivial, la denominamos justamente la *extensión trivial*[1].
Esta trivialidad se ve reflejada, por ejemplo, en que dentro del producto tensorial los factores aparecen de alguna forma separados, sus estructuras no interactúan. Las copias isomorfas a K y a H, respectivamente $K \otimes 1_H$ y $1_K \otimes H$, son subálgebras de Hopf[2] de $K \otimes H$.
Demostración:
Para demostrar el anterior teorema sólo precisamos verificar una de las igualdades del teorema 2.1.2, verificaremos que $(K \otimes H)^{coH} = K \otimes 1_H$. Por el camino, veremos quiénes son la acción y la coacción en este caso particular.

$\rightharpoonup : K \otimes (K \otimes H) \longrightarrow K \otimes H$

$$k' \rightharpoonup (k \otimes h) = \iota(k')(k \otimes h) = (k' \otimes 1_H)(k \otimes h) = k'k \otimes h$$

Entonces lo que nos queda es

$$\rightharpoonup = m_K \otimes id_H. \tag{2.1}$$

Es la acción natural, en cierto sentido lo más trivial que podemos definir.

$\rho : K \otimes H \longrightarrow (K \otimes H) \otimes H$

$$\begin{aligned}
\rho(k \otimes h) &= \sum_{k \otimes h} (k \otimes h)_1 \otimes \pi((k \otimes h)_2) \\
&= \sum_{k,h} k_1 \otimes h_1 \otimes \pi(k_2 \otimes h_2) \\
&= \sum_{k,h} k_1 \otimes h_1 \otimes \epsilon(k_2) h_2 \\
&= \sum_{k} \epsilon(k_2) k_1 \otimes \left(\sum_{h} h_1 \otimes h_2 \right) \\
&= \sum_{k} \epsilon(k_2) k_1 \otimes \Delta(h) = k \otimes \Delta(h)
\end{aligned}$$

Entonces lo que nos queda es

$$\rho = id_K \otimes \Delta_H. \tag{2.2}$$

Es la coacción natural, en cierto sentido lo más trivial que podemos definir.

Con lo anterior, pasamos a demostrar el teorema 2.2.1:
La inclusión $(K \otimes H)^{coH} \supset K \otimes 1_H$ es clara:

$$\rho(k \otimes 1) = k \otimes \Delta(1) = k \otimes 1 \otimes 1 \Rightarrow k \otimes 1 \in (K \otimes H)^{coH}.$$

[1]Esto no es sólo un nombre así porque sí, las clases de isomorfismos de extensiones forman un grupo, en el cual la extensión trivial es el neutro. Se puede encontrar el resultado en [1].

[2]En el caso general, esto sólo sucede con la copia isomorfa a K, mientras que la copia isomorfa a H es sólo un sub H-comódulo, como veremos en la sección 2.3

Para la inclusión inversa, tomamos $\{k^i\}_i$ una base de K, entonces un elemento genérico de $K \otimes H$ se escribe de forma única como $\sum_i k^i \otimes h^i$, para ciertos $h^i \in H$. [3]
Ahora,

$$\rho\left(\sum_i k^i \otimes h^i\right) = \sum_i k^i \otimes \left(\sum_{h^i} h_1^i \otimes h_2^i\right),$$

pero si asumimos que este elemento está en $(K \otimes H)^{coH}$, sabemos que

$$\rho\left(\sum_i k^i \otimes h^i\right) = \sum_i k^i \otimes h^i \otimes 1_H.$$

Entonces, juntamos las dos de arriba y para cada i tenemos la igualdad

$$\sum_{h^i} h_1^i \otimes h_2^i = h^i \otimes 1$$

y si aplicamos $\epsilon \otimes id$ lo que queda es $h^i = \epsilon(h^i)1_H$ y tenemos la inclusión inversa. □

2.3. El teorema de la grieta

El teorema que viene a continuación dice, entre otras cosas, que todas las extensiones de H por K son isomorfas a $K \otimes H$ como espacio vectorial, así que podemos pensar que de alguna forma estamos deformando la estructura trivial sobre el mismo espacio de base, obteniendo varios ejemplos no isomorfos pero de igual dimensión.
Podemos ver el paralelismo que hay con las sucesiones exactas cortas de grupos abelianos, las cuales se dice que se escinden en el caso en que el término del medio es isomorfo a la suma directa de los otros dos. Cuando hay multiplicación y unidad, como en este caso, tiene sentido que el término del medio sea isomorfo al producto tensorial de los otros dos. En este caso, el análogo de una sucesión exacta corta de grupos que se escinde, es una extensión de álgebras de Hopf isomorfa a la extensión trivial, que vimos en la sección anterior.
De todas formas, en una sucesión exacta corta de grupos finitos, resulta que siempre el cardinal del término del medio es el producto de los cardinales de los términos de las puntas. Esto es, es término del medio es isomorfo como conjunto al producto de los de las puntas. El análogo de esta afirmación es justamente, que en una extensión de álgebras de Hopf, el término del medio es isomorfo como espacio vectorial al producto tensorial de los términos de las puntas.
Cuando se cumple la tesis del siguiente teorema, decimos que una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf *se agrieta*. (En inglés, *is cleft*).

Teorema 2.3.1. *Dada una extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita*

$$K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H,$$

existe

$$\theta : A \to K \otimes H,$$

un isomorfismo de K-módulos y H-comódulos[4] *, que además preserva la unidad y la counidad.*

[3]Esto es, $K \otimes H$ es un H-módulo a derecha libre, de base $\{k^i\}_i$.

[4]Recordemos que en A las estructuras de módulo y comódulo son las que vienen de ι y π, respectivamente, y que en $K \otimes H$ son las naturales, o lo que es lo mismo, las heredadas de la extensión trivial. Están definidas en (2.1) y (2.2).

La demostración de este teorema se puede encontrar en [5]. □

Introducimos ahora algunas notaciones y definiciones que nos serán útiles en lo que sigue.

Definición 2.3.2. .

- *Definimos* $\# : K \otimes H \to A$ *como la inversa de* θ. *Esto es,*

$$k\#h := \theta^{-1}(k \otimes h) \in A.$$

- *Definimos* $\phi : H \to A$ *mediante*

$$\phi(h) := 1\#h.$$

  Siguiendo el lenguaje de las extensiones, a ϕ *se le llama* sección.

- *Definimos* $\gamma : A \to K$ *mediante* [5]

$$\gamma(k\#h) := \epsilon(h)k.$$

  Siguiendo el lenguaje de las extensiones, a γ *se le llama* retracción.

Observación 2.3.3. *De las propiedades de* θ *sabemos que* ϕ *es* H*-colineal,* γ *es* K*-lineal, y que ambas preservan unidad y counidad. Además, en la proposición 7.2.7 de [2] se prueba que* ϕ *es invertible por convolución*[6].

Ahora veamos cómo quedan escritas estas propiedades en función de los símbolos que definimos:

$$\begin{array}{lrcl} \theta \text{ morfismo de } K\text{-módulos:} & k' \cdot (k\#h) & = & k'k\#h \\ \theta \text{ preserva unidad:} & 1_A & = & 1_K\#1_H \\ \theta \text{ morfismo de } H\text{-comódulos:} & \rho(k\#h) & = & \sum_h (k\#h_1) \otimes h_2 \\ \theta \text{ preserva counidad:} & \epsilon(k\#h) & = & \epsilon(k)\epsilon(h). \end{array} \tag{2.3}$$

Proposición 2.3.4. *Con la notación recién definida,* ι *y* π *pueden escribirse de la siguiente forma:*

- $\iota(k) = k\#1_H$.
- $\pi(k\#h) = \epsilon(k)h$.

Demostración:
La primera igualdad es más fácil, sale en una sola cuenta, usando que θ es K-lineal y preserva unidad:

$$\iota(k) = \iota(k)1_A = \iota(k)(1_K\#1_H) = k \cdot (1_K\#1_H) = k1_K\#1_H = k\#1_H$$

Para la segunda, como es de esperar, usaremos las otras dos propiedades. Primero, que θ es H-colineal:

$$\sum_h (k\#h_1) \otimes h_2 = \rho(k\#h) = \sum_{k\#h} (k\#h)_1 \otimes \pi((k\#h)_2).$$

[5]Esto alcanza para definir γ en cualquier elemento de A, porque $\{k\#h\}_{k\in K;\ h\in H}$ son las imágenes de los tensores elementales de $K \otimes H$, y por lo tanto generan A linealmente.

[6]Observar que dualizando se puede probar que γ también es invertible por convolución.

Si aplicamos $\epsilon_A \otimes id_H$ en los miembros extremos de la igualdad,

$$\sum_h \epsilon(k\#h_1)h_2 = \sum_{k\#h} \epsilon((k\#h)_1)\pi((k\#h)_2).$$

En el miembro de la derecha, sólo usando que π es una transformación lineal, nos queda

$$\pi\left(\sum \epsilon((k\#h)_1)(k\#h)_2\right) = \pi(k\#h).$$

En el miembro de la izquierda, usamos la expresión de la counidad que aparece en (2.3), y nos queda

$$\sum \epsilon(k)\epsilon(h_1)h_2 = \epsilon(k)\sum \epsilon(h_1)h_2 = \epsilon(k)h,$$

que era lo que queríamos. $\square$

Observación 2.3.5. *Sea $\{h^i\}_i$ una base de H. Entonces, para cada $a \in A$ existen únicos $\{k^i\}_i$ en K tal que $a = \sum_i k^i\#h^i$.*

La explicación de esto es que $\{1_K \otimes h^i\}_i$ es una base de $K \otimes H$ como K-módulo a izquierda. Como θ es isomorfismo de K-módulos a izquierda, $\{1_K\#h^i\}_i$ es una base de A como K-módulo a izquierda.

Volviendo al ejemplo de la extensión trivial, podemos tomar $\theta = id_{K\otimes H}$, ya que vimos que las estructuras de módulo y comódulo son las usuales. Nos queda $k\#h = k\otimes h$, y la sección y la retracción que quedan son las usuales:

$$\phi(h) = 1_K \otimes h; \quad \gamma(k \otimes h) = \epsilon(k)h.$$

Capítulo 3

Extensiones de kF por k^G. Ejemplos.

Ahora nos vamos a centrar en extensiones de la forma

$$k^G \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} kF.$$

Ya sabemos de la sección anterior que toda extensión de kF por k^G es isomorfa como espacio vectorial a $k^G \otimes kF = \bigoplus_{x\in F} k^G \otimes x$. Luego podemos escribir $A = \bigoplus_{x\in F} k^G\#x$, así alcanza con definir las operaciones en elementos genéricos de la forma $\alpha\#x$, con $\alpha \in k^G$ y $x \in F$.

3.1. Producto semidirecto, producto cruzado

Vamos a centrarnos por ahora en la estructura de álgebra, que es sobre la que hay más resultados. La forma en la que recién describimos la extensión, y el hecho de que k^G es un álgebra conmutativa, nos permiten plantearnos como ejemplo el producto semidirecto.

Definición 3.1.1. *Sean R un álgebra conmutativa, F un grupo, y $\rightharpoonup$ una acción a izquierda de F en R por automorfismos de álgebras. Llamamos* producto semidirecto *al álgebra $R \rtimes F$, que como espacio vectorial es $RF = \bigoplus_{x\in F} Ru_x$, y cuya multiplicación viene dada por*

$$(\alpha u_x)(\beta u_y) := \alpha(x \rightharpoonup \beta)u_{xy}.$$

Su unidad es $1_R u_{1_F}$.

Supongamos que F actúa por la derecha en G, con una acción que denotamos $\triangleleft$. Esto permite definir una acción a izquierda de F en k^G, que denotamos por $\rightharpoonup$, dada por

$$(x \rightharpoonup \alpha)(s) := \alpha(s \triangleleft x), \quad \forall\alpha \in k^G,\ \forall x \in F.$$

Como las operaciones de k^G como álgebra son las definidas punto a punto, resulta que la acción $\rightharpoonup$ recién definida es por automorfismos de álgebras.

Ahora, como F está actuando en k^G por automorfismos de álgebras, en particular sus elementos mandan invertibles en invertibles, por lo tanto podemos restringir la acción a $(k^G)^\times$, que es un grupo abeliano. Entonces podemos decir que, bajo la acción $\leftharpoonup$, $(k^G)^\times$ resulta un F-módulo a izquierda. En este caso, podemos definir algunos conceptos provenientes de la cohomología de grupos.

Definición 3.1.2. *Sean* $(M, \cdot, 1, \rightharpoonup)$ *un* F*-módulo*[1] *y* $\sigma : F \times F \longrightarrow M$ *una función.*

- *Decimos que* σ *es un* cociclo, *si*

$$(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz) = \sigma(x,y)\sigma(xy,z), \quad \forall x,y,z \in F.$$

- *Decimos que un cociclo* σ *está* normalizado, *si*

$$\sigma(1,x) = \sigma(x,1) = 1, \quad \forall x \in F.$$

Los cociclos normalizados nos sirven para torcer más la estructura, dando lugar a productos cruzados en general.

Definición 3.1.3. *Sean* R *un álgebra conmutativa,* F *un grupo,* $\rightharpoonup$ *una acción a izquierda de* F *en* R *por automorfismos de álgebras, y* σ *un cociclo normalizado para dicha acción. Llamamos* producto cruzado *al álgebra* $R \rtimes_\sigma F$*, que como espacio vectorial es* $RF = \bigoplus_{x \in F} Ru_x$*, y cuya multiplicación viene dada por*

$$(\alpha u_x)(\beta u_y) := \alpha(x \rightharpoonup \beta)\sigma(x,y)u_{xy}.$$

Su unidad es $1_R u_{1_F}$*.*

Si σ es trivial, o sea $\sigma(x,y) = 1_{k^G}$ $\forall x,y \in F$, estamos en el caso anterior.

Otra propiedad que tienen los productos anteriormente mencionados, es que incluyen naturalmente a $R = k^G$ como subálgebra (identificando α con αu_{1_F}), que es parte de lo que estamos buscando para definir una extensión con estos elementos.

En cuanto a la estructura de coálgebra y a la proyección sobre kF, ponemos las mismas que en la extensión trivial, o sea copiamos la estructura de $k^G \otimes kF$.

Para que estas dos estructuras sean compatibles, es condición necesaria y suficiente que $\triangleleft$ sea una acción por automorfismos de grupos, y que para cada $x,y \in F$ el elemento $\sigma(x,y) : G \longrightarrow k^\times$ sea también un morfismo de grupos.
La antípoda, definida en un elemento de la base $\{e_s u_x\}_{(s,x) \in G \times F}$ viene dada por

$$\mathcal{S}(e_s u_x) = (\sigma(x,x^{-1})(s^{-1}))^{-1} e_{(s \triangleleft x)^{-1}} u_{x^{-1}}$$

Teorema 3.1.4. *Sean* F *y* G *grupos finitos,* $\rightharpoonup$ *una acción a izquierda de* F *en* k^G *por automorfismos de álgebras, y* σ *un cociclo para dicha acción. La sucesión*

$$k^G \xrightarrow{\iota} k^G \rtimes_\sigma F \xrightarrow{\pi} kF,$$

es una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf, donde

$$\iota(\alpha) = \alpha u_{1_F}, \quad \forall \alpha \in k^G,$$

$$\pi(\alpha u_x) = \epsilon(\alpha)x, \quad \forall \alpha \in k^G,\ \forall x \in F.$$

[1] Con esto queremos decir que la estructura de grupo abeliano subyacente la escribimos de forma multiplicativa, en vez de la usual notación aditiva. Esto es simplemente porque a lo largo del trabajo aparece todo de esta forma.

Demostración:
Sabemos que $\iota(k^G) = k^G u_{1_F}$; vamos a verificar que esto es igual a $A^{co(kF)}$. Lo hacemos calculando la coacción en un elemento genérico de A, que escribimos como $\sum_{x\in F} \alpha_x u_x$.

$$\begin{aligned}
\rho\left(\sum_{x\in F}\alpha_x u_x\right) &= (id\otimes\pi)\left(\Delta\left(\sum_{x\in F}\alpha_x u_x\right)\right)\\
&= (id\otimes\pi)\left(\sum_{x\in F}\sum_{\alpha_x}(\alpha_x)_1 u_x\otimes(\alpha_x)_2 u_x\right)\\
&= \sum_{x\in F}\sum_{\alpha_x}(\alpha_x)_1 u_x\otimes\epsilon((\alpha_x)_2)x\\
&= \sum_{x\in F}\sum_{\alpha_x}\epsilon((\alpha_x)_2)(\alpha_x)_1 u_x\otimes x\\
&= \sum_{x\in F}\alpha_x u_x\otimes x
\end{aligned}$$

Para que esto sea igual a $\sum_{x\in F} \alpha_x u_x \otimes 1_F$, es necesario y suficiente que $\alpha_x = 0\ \forall x \neq 1_F$, o sea, que el elemento esté en $k^G u_{1_F}$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Observemos que lo que hemos modificado con respecto a la extensión trivial es sólo la estructura multiplicativa. Se puede hacer lo mismo trabajando en los duales, para obtener extensiones que tienen modificada la estructura comultiplicativa, y no la multiplicativa. Lo que aparece en esos ejemplos es lo dual, una acción a izquierda $\triangleright$ de G en F, que origina una acción a derecha $\leftharpoonup$ de G en kF, y un cociclo normalizado τ para dicha acción[2].

En el ejemplo de la siguiente sección describiremos una forma de modificar la estructura multiplicativa y la comultiplicativa a la vez. Básicamente, lo que aparece son todos los elementos anteriores juntos, y se hacen un poco más complejas las relaciones entre ellos.

3.2. Par ligado de grupos

Antes de mostrar el ejemplo de extensión que veremos en esta sección, vamos a definir lo que es un par ligado de grupos, y a dar una forma equivalente de interpretarlo.

Definición 3.2.1. *Sean F, G grupos, $\triangleleft$ una acción a derecha de F en G y $\triangleright$ una acción a izquierda de G en F. Decimos que $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ es un* par ligado *si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$st \triangleleft x = (s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x) \quad \forall s, t \in G\ \forall x \in F \tag{3.1}$$

$$1_G \triangleleft x = 1_G \quad \forall x \in F \tag{3.2}$$

$$s \triangleright xy = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y) \quad \forall s, \in G\ \forall x, y \in F \tag{3.3}$$

$$s \triangleright 1_F = 1_F \quad \forall s \in G \tag{3.4}$$

[2] La definición de cociclo normalizado para una acción a derecha es análoga a la que definimos para una acción a izquierda. Está descrita con más detalle en la sección 4.3.

Ahora vamos a interpretar la definición anterior. Supongamos que hay un grupo llamado Π, que tiene dos subgrupos que se llaman F y G, de forma que $\Pi = FG$ y que $F \cap G = \{1\}$. Esto quiere decir que la multiplicación del grupo, restringida a $F \times G$, es una biyección sobre Π, o, lo que es lo mismo, que dado cualquier elemento $p \in \Pi$ existen únicos $x \in F$ y $s \in G$ tales que $p = xs$. Para describir completamente Π, reduciéndolo de alguna manera en términos de F y G, tenemos que saber qué pasa cuando se multiplica un elemento de G por uno de F, en el sentido inverso al que nos referimos arriba.

Proposición 3.2.2. *En estas condiciones, sean $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$, y $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$, definidas mediante la igualdad*

$$sx = (s \triangleright x)(s \triangleleft x), \quad \forall s \in G,\ \forall x \in F.$$

Entonces:

- *La función $\triangleright$ es una acción a izquierda de G en F*
- *La función $\triangleleft$ es una acción a derecha de F en G*
- *$(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ es un par ligado*

Demostración:
Vamos a escribir las igualdades de la propiedad asociativa y de unidad, y expresar esas igualdades como productos de un elemento de F por uno de G, ya que sabemos que esa expresión es única.

La propiedad asociativa nos dice $s(xy) = (sx)y$. Observar que:

$$s(xy) = (s \triangleright xy)(s \triangleleft xy)$$

$$(sx)y = (s \triangleright x)(s \triangleleft x)y = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y)((s \triangleleft x) \triangleleft y)$$

De lo anterior obtenemos, por la parte del factor de G, que $\triangleleft$ es acción, y por la parte del factor de F, la ecuación (3.3). Análogamente, de $(st)x = s(tx)$ se deduce que $\triangleright$ es acción y la ecuación (3.1).

Por otro lado, de $s1 = s = 1s$, deducimos

$$s1 = (s \triangleright 1)(s \triangleleft 1)$$

$$s = 1s.$$

De lo anterior obtenemos, por la parte del factor de G, que 1_F actúa en G como la identidad, y por la parte del factor de F, la ecuación (3.4). Análogamente, de $1x = x = x1$ deducimos que 1_G actúa en F como la identidad y la ecuación (3.2). $\square$

En la proposición anterior vimos cómo obtener un par ligado a partir de dos subgrupos de un grupo dado. La proposición siguiente muestra que el recíproco también es cierto: dado un par ligado, podemos construir un grupo Π como el que teníamos al principio.

Proposición 3.2.3. *Sea $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ un par ligado. Entonces el conjunto $\Pi = F \times G$ tiene estructura de grupo definiendo:*

$$(x, s)(y, t) := (x(s \triangleright y), (s \triangleleft y)t), \quad \forall (x, s), (y, t) \in \Pi.$$

$$1_\Pi := (1_F, 1_G)$$

Podemos identificar F con $F \times \{1_G\}$, y G con $\{1_F\} \times G$, y de esta manera obtenemos que

$$\Pi = FG$$

$$F \cap G = \{1_\Pi\}$$

□

Hecho este paréntesis para entender lo que es un par ligado de grupos, procedemos a dar el ejemplo que lo contiene.

Teorema 3.2.4. *Sea $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ un par ligado de grupos finitos. Sean $\sigma : G \times F \times F \to k^\times$ y $\tau : G \times G \times F \to k^\times$ mapas que verifiquen las siguientes condiciones:*

$$\sigma(s \triangleleft x; y, z)\sigma(s; x, yz) = \sigma(s; x, y)\sigma(s; xy, z), \quad \forall x, y, z \in F,\ s \in G; \tag{3.5}$$

$$\sigma(s; 1, x) = \sigma(s; x, 1) = 1, \quad \forall x \in F,\ s \in G. \tag{3.6}$$

$$\tau(r, st; x)\tau(s, t; x) = \tau(rs, t; x)\tau(r, s; t \triangleright x) \quad \forall x \in F,\ r, s, t \in G; \tag{3.7}$$

$$\tau(s, 1; x) = \tau(1, s; x) = 1 \quad \forall x \in F,\ s \in G. \tag{3.8}$$

$$\sigma(st; x, y)\tau(s, t; xy) = \sigma(s; t \triangleright x, (t \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(t; x, y)\tau(s, t; x)\tau(s \triangleleft (t \triangleright x); t \triangleleft x; y) \quad \forall s, t \in G\ \forall x, y \in F \tag{3.9}$$

$$\sigma(1_G; x, y) = 1 \quad \forall x, y \in F \tag{3.10}$$

$$\tau(s, t; 1_F) = 1 \quad \forall s, t \in G \tag{3.11}$$

Sea $k^G \#_{\sigma,\tau} kF$ el espacio vectorial de base $\{e_s u_x\}_{(s,x)\in G\times F}$. Definimos las siguientes operaciones en esa base y extendemos por linealidad:

$$(e_s u_x)(e_t u_y) := \delta_{s \triangleleft x, t}\sigma(s; x, y)e_s u_{xy}$$

$$1_{k^G \#_{\sigma,\tau} kF} := \sum_{s\in G} e_s u_{1_F}$$

$$\Delta(e_s u_x) := \sum_{s_1 s_2 = s} \tau(s_1, s_2; x)\ e_{s_1} u_{s_2 \triangleright x} \otimes e_{s_2} u_x$$

$$\epsilon(e_s u_x) := \delta_{s,1_G}$$

$$\mathcal{S}(e_s u_x) := \sigma(s^{-1}; s \triangleright x, (s \triangleright x)^{-1})^{-1}\tau(s^{-1}, s; x)^{-1} e_{(s \triangleleft x)^{-1}} u_{(s \triangleright x)^{-1}}$$

Con las operaciones anteriormente definidas, $k^G \#_{\sigma,\tau} kF$ es un álgebra de Hopf.

Demostración:
Las propiedades que hacen que $k^G\#_{\sigma,\tau}kF$ sea una biálgebra se demuestran fácilmente, haciendo la cuenta directa y haciendo uso de las condiciones arriba mencionadas[3], de la forma en que detallamos:

Asociatividad	(3.5)
Unidad	(3.6)
Coasociatividad	(3.7)
Counidad	(3.8)
Compatibilidad multiplicación-comultiplicación	(3.9)
Compatibilidad multiplicación-counidad	(3.10)
Compatibilidad unidad-comultiplicación	(3.11)
Compatibilidad unidad-counidad	Sale sin condiciones

Para ver que la $\mathcal{S}$ definida es una antípoda vamos a demostrar, evaluando en un elemento genérico $e_r u_z$ de la base de $k^G\#_{\sigma,\tau}kF$, que es la inversa por convolución a derecha de la identidad[4]. Esto es, que

$$(m \circ (id \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta)(e_r u_z) = (u \circ \epsilon)(e_r u_z) = \delta_{r,1_G} u_{1_F}, \quad \forall r \in G,\ \forall z \in F.$$

Primero comultiplicamos:

$$\Delta(e_r u_z) = \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\ e_s u_{t\triangleright z} \otimes e_t u_z$$

Ahora aplicamos la antípoda en el lado derecho y multiplicamos:
$(m \circ (id \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta)(e_r u_z) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\ (e_s u_{t\triangleright z})\sigma(t^{-1}; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1})^{-1}\tau(t^{-1},t;z)^{-1} e_{(t\triangleleft z)^{-1}} u_{(t\triangleright z)^{-1}} \\
&= \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\sigma(t^{-1}; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1})^{-1}\tau(t^{-1},t;z)^{-1}\ (e_s u_{t\triangleright z})(e_{(t\triangleleft z)^{-1}} u_{(t\triangleright z)^{-1}}) \\
&= \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\sigma(t^{-1}; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1})^{-1}\tau(t^{-1},t;z)^{-1}\ \delta_{s\triangleleft(t\triangleright z),(t\triangleleft z)^{-1}}\sigma(s; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1}) e_s u_{(t\triangleright z)(t\triangleright z)^{-1}} \\
&= \sum_{st=r} \delta_{s\triangleleft(t\triangleright z),(t\triangleleft z)^{-1}}\tau(s,t;z)\tau(t^{-1},t;z)^{-1}\sigma(t^{-1}; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1})^{-1}\sigma(s; t\triangleright z, (t\triangleright z)^{-1}) e_s u_{1_F}
\end{aligned}$$

En el medio, vamos a probar la siguiente igualdad sobre el delta de Kronecker que aparece en la cuenta que hicimos recién:

$$\delta_{s\triangleleft(t\triangleright z),(t\triangleleft z)^{-1}} = \delta_{st,1_G}.$$

De las propiedades (4.6) y (4.7) sabemos que

$$(t^{-1} \triangleleft (t\triangleright z))(t\triangleleft z) = t^{-1}t \triangleleft z = 1_G \triangleleft z = 1_G,$$

[3]Las igualdades a plantear están escritas con más detalle a lo largo del capítulo 4. Mientras que deducir las propiedades de $k^G\#_{\sigma,\tau}kF$ a partir de las de las acciones y los cociclos es directo, el recíproco requiere un poco más de trabajo y a eso se dedica dicho capítulo.

[4]Esto es suficiente porque en un álgebra de dimensión finita, como es en este caso las funciones lineales de $k^G\#_{\sigma,\tau}kF$ en $k^G\#_{\sigma,\tau}kF$ con el producto de convolución, alcanza con demostrar que un elemento es invertible a derecha para probar que es invertible, y en ese caso su inverso es el inverso a derecha hallado.

luego $(t \triangleleft z)^{-1} = (t^{-1} \triangleleft (t \triangleright z))$.
Como $\triangleleft$ es una acción, actuar con un elemento fijo como $t \triangleright z$ s una biyección, entonces

$$s \triangleleft (t \triangleright z) = (t \triangleleft z)^{-1} \Leftrightarrow s \triangleleft (t \triangleright z) = t^{-1} \triangleleft (t \triangleright z) \Leftrightarrow s = t^{-1} \Leftrightarrow st = 1_G$$

Habiendo probado esto, la igualdad que queremos demostrar es

$$\delta_{r,1_G} \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\tau(t^{-1},t;z)^{-1}\sigma(t^{-1};t\triangleright z,(t\triangleright z)^{-1})^{-1}\sigma(s;t\triangleright z,(t\triangleright z)^{-1})e_s u_{1_F} = \epsilon(e_r u_z)1_{k^G\#_{\sigma,\tau}kF} = \delta_{r,1_G} u_{1_F}.$$

Como estamos evaluando dos expresiones multiplicadas por $\delta_{r,1_G}$, sólo tenemos que chequear que la igualdad vale para $r = 1_G$, porque en el otro caso ambas son iguales a 0. Pero si $r = 1_G$, entonces $s = t^{-1}$. En este caso, podemos sustituir todas las veces que aparece s por t^{-1}, y los factores correspondientes a valores de σ y τ se cancelan. Lo que nos queda es

$$(m \circ (id \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta)(e_{1_G} u_z) = \sum_{st=1_G} e_s u_{1_F} = \sum_{s \in G} e_s u_{1_F} = u_{1_F} = (u \circ \epsilon)(e_{1_G} u_z).$$

□

En forma análoga al teorema 3.1.4 se prueba el siguiente:

Teorema 3.2.5. *Sean $F, G, \triangleleft, \triangleright, \sigma, \tau$ en las hipótesis del teorema anterior. Entonces la sucesión*

$$k^G \xrightarrow{\iota} k^G \#_{\sigma,\tau} kF \xrightarrow{\pi} kF,$$

es una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf, donde

$$\iota(e_s) = e_s u_{1_F}, \quad \forall s \in G,$$

$$\pi(e_s u_x) = \delta_{s,1_G} x, \quad \forall s \in G, \ \forall x \in F.$$

□

Por último observemos que, si $\triangleright$ es trivial, entonces $\triangleleft$ es una acción por automorfismos de grupos, y si además τ es trivial, queda trivial toda la estructura comultiplicativa. Además, la ecuación (3.5) y (3.6) nos dicen que σ es un cociclo normalizado para la acción $\rightharpoonup$ de F en k^G inducida por $\triangleleft$, así que lo que obtenemos es un producto cruzado como los del ejemplo de la sección anterior.

Capítulo 4

Extensiones de kF por k^G en general.

Lo que vamos a hacer en este capítulo es partir de cualquier extensión de kF por k^G, y demostrar que es una de las del último ejemplo del capítulo anterior. Es decir, ya torcimos la estructura multiplicativa y la multiplicativa todo lo que podíamos, y no podemos hacer más. En lo que sigue, consideramos una extensión de álgebras de Hopf fija, de la forma

$$k^G \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} kF.$$

4.1. Identificando estructuras

Para empezar vamos a fijarnos en la estructura que tiene A como kF-comódulo, en este caso podemos hacer una construcción parecida a la que hicimos cuando definimos los coinvariantes. Recordemos la definición de los coinvariantes, aplicada en este caso:

$$A^{co(kF)} = \{a \in A : \rho(a) = a \otimes 1_F\}$$

Vamos a hacer lo mismo, pero en vez de 1 tomamos cualquier elemento $x \in F$:

$$A_x := \{a \in A : \rho(a) = a \otimes x\}$$

Observación 4.1.1. *Los espacios A_x nunca son triviales. Es más,*

$$\alpha\#x \in A_x, \quad \forall x \in F,\ \forall \alpha \in k^G,$$

o, lo que es lo mismo,

$$k^G\#x \subset A_x, \quad \forall x \in F.$$

Demostración:
Es una cuenta:

$$\rho(\alpha\#x) = (\alpha\#x) \otimes x, \quad \forall \alpha \in k^G,\ x \in F.$$

Al igual que los coinvariantes, es obvio que A_x es un subcomódulo para cualquier $x \in F$.
Los coinvariantes además son un subcomódulo álgebra, ya que si $a, b \in A^{co(kF)} \Rightarrow \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = (a \otimes 1)(b \otimes 1) = ab \otimes (1 \cdot 1) = ab \otimes 1$. En el caso del álgebra de grupo kF, lo que tenemos es que F es

cerrado por la multiplicación. Podemos aplicar la propiedad de compatibilidad de comódulo álgebra igual que recién, y lo que obtenemos es

$$A_x A_y \subset A_{xy}, \quad \forall x, y \in F$$

Esto nos va a dar una F-graduación, una vez que probemos lo siguiente:

Teorema 4.1.2.

$$A_x = k^G \# x, \quad \forall x \in F$$

$$A = \bigoplus_{x \in F} A_x$$

Demostración:

Ya sabíamos que $A = \bigoplus_{x \in F} k^G \# x$, (esto es por el isomorfismo lineal entre A y $k^G \otimes kF$, además de que F es base de kF), y que esta suma directa es como k^G-módulos (observación 2.3.5) y como kF-comódulos (observación 4.1.1).

Ahora veremos que los espacios $\{A_x\}_{x \in F}$ son linealmente independientes. Supongamos que podemos escribir

$$0 = \sum_{x \in F} a_x, \qquad (a_x \in A_x, \ \forall x \in F)\,.$$

Aplicamos la coacción a ambos lados de la igualdad y obtenemos la siguiente igualdad en $A \otimes kF$:

$$0 = \rho\left(\sum_{x \in F} a_x\right) = \sum_{x \in F} \rho(a_x) = \sum_{x \in F} a_x \otimes x.$$

Ahora, como F es base de kF como espacio vectorial, $\{1_A \otimes x\}_{x \in F}$ va a ser base de $A \otimes kF$ como A-módulo. Esto quiere decir que la forma en la que escribimos recién al 0 de $A \otimes kF$ es única, de donde todos los coeficientes a_x son nulos. Esto nos dice que los $\{A_x\}_{x \in F}$ son linealmente independientes, esto es, que su suma es directa.

Para probar que dicha suma es todo A sólo hay que hacer unas cuentas con las dimensiones de los espacios. Sabemos que cada A_x tiene dentro a $k^G \# x$, por lo tanto

$$dim(A_x) \geq dim(k^G \# x) = \#G.$$

Entonces

$$dim\left(\bigoplus_{x \in F} A_x\right) \geq \sum_{x \in F} \#G = (\#F)(\#G),$$

pero esto último es la dimensión de A. Con esto demostramos que las desigualdades de arriba son igualdades, y por el hecho de ser subespacios de igual dimensión obtenemos las dos igualdades del teorema. $\square$

Por otra parte, $A^{co(kF)} = A_{1_F} = k^G \# 1_F = \iota(k^G) \cong k^G$ como álgebra de Hopf (observemos que es conmutativa). Por esto abusamos de notación, escribiendo α como elemento de A, en vez de $\iota(\alpha)$ ó $\alpha \# 1$.

4.2. La multiplicación de A

La primera definición es simplemente para que haya menos símbolos en la vuelta.

Definición 4.2.1. *Para cada $x \in F$ llamaremos u_x al elemento $1\#x \in A_x$.*

La observación 2.3.5 nos permite afirmar que $\{u_x\}_{x\in F}$ es base de A como k^G-módulo. Además, por la forma de la acción de k^G en A que aparece en (2.3) sabemos que

$$\alpha\#x = \alpha u_x, \quad \forall \alpha \in k^G, x \in F.$$

Juntando estos resultados obtenemos lo siguiente:

Observación 4.2.2. *Dado cualquier $a \in A$, existe una única colección de coeficientes $\{\alpha_x\}_{x\in F} \subset k^G$ tales que*

$$a = \sum_{x\in F} \alpha_x u_x$$

En particular, si existe un $x \in F$ tal que a está en A_x, entonces existe un único $\alpha \in k^G$ tal que

$$a = \alpha u_x$$

Ahora vienen dos definiciones que haremos usando la observación anterior junto con el hecho de que A es un álgebra F-graduada.

Definición 4.2.3. *Sabemos que $u_x u_y \in A_{xy}$ $\forall x, y \in F$; y que $u_x\alpha \in A_x$ $\forall x \in F$, $\forall \alpha \in k^G$. Entonces:*

- *Definimos $\sigma : F \times F \longrightarrow k^G$ mediante la igualdad*

$$u_x u_y = \sigma(x, y)u_{xy}. \quad \forall x, y \in F$$

- *Definimos $\rightharpoonup: F \times k^G \longrightarrow k^G$ mediante la igualdad*

$$u_x\alpha = (x \rightharpoonup \alpha)u_x. \quad \forall x \in F\ , \alpha \in k^G$$

Podemos ver estas definiciones en forma más explícita. Al ser ϕ invertible por convolución (recordar observación 2.3.3), vamos a ver con una cuenta que los u_x son invertibles. Sea ψ la inversa por convolución de ϕ. Entonces

$$(\phi * \psi)(x) = (m \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta)(x) = (m \circ (\phi \otimes \psi))(x \otimes x) = \phi(x)\psi(x),$$

pero además esto es igual a $\epsilon(x)1 = 1$, por lo que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son inversos. O sea que $\phi(x) = 1\#x = u_x$ es invertible, para todo $x \in F$. Esto nos permite expresar las definiciones de una manera más limpia:

$$\sigma(x, y) = u_x u_y u_{xy}^{-1} \tag{4.1}$$

$$x \rightharpoonup \alpha = u_x \alpha u_x^{-1} \tag{4.2}$$

Ahora veamos cómo queda la multiplicación para dos elementos homogéneos de la graduación (los demás son sumas de éstos):

$$(\alpha u_x)(\beta u_y) = \alpha(x \rightharpoonup \beta)u_x u_y = \alpha(x \rightharpoonup \beta)\sigma(x, y)u_{xy} \tag{4.3}$$

Entonces, lo que hacemos es ver qué propiedades le podemos encontrar a $\rightharpoonup$ y a σ para que ellos determinen la extensión, y así hacer lo que recién hicimos para el otro lado.

Teorema 4.2.4. $\rightharpoonup: F \times k^G \longrightarrow k^G$ *es una acción por automorfismos de álgebras.*

Demostración:
Actuar con un elemento x es un automorfismo de álgebras porque es la conjugación por el elemento u_x, y la siguiente cuenta nos muestra que $\rightharpoonup$ es acción:

$$x \rightharpoonup (y \rightharpoonup \alpha) = u_x(y \rightharpoonup \alpha)u_x^{-1} = u_x u_y \alpha u_y^{-1} u_x^{-1} = u_x u_y \alpha (u_x u_y)^{-1} = \sigma(x,y)u_{xy}\alpha(\sigma(x,y)u_{xy})^{-1} =$$

$$= \sigma(x,y)u_{xy}\alpha u_{xy}^{-1}\sigma(x,y)^{-1} = \sigma(x,y)(xy \rightharpoonup \alpha)\sigma(x,y)^{-1} = xy \rightharpoonup \alpha.$$

El último paso (el de la cancelación de $\sigma(x,y)$) lo podemos hacer porque los tres factores pertenecen a $k^G\#1 \cong k^G$, que es un álgebra conmutativa. □

Teorema 4.2.5. *Para todo par $x, y \in F$ se cumple que $\sigma(x,y)$ es un elemento invertible de k^G, y el mapa $\sigma : F \times F \longrightarrow (k^G)^\times$ es un cociclo normalizado.*

Demostración:
Empecemos por ver que los $\sigma(x,y)$ son siempre invertibles, esto es fácil porque en (4.1) los tenemos expresados como producto de elementos invertibles. La propiedad de cociclo es consecuencia de la asociatividad del producto; para ver esto vamos a multiplicar de las dos maneras posibles una terna de elementos de la base, y ver qué queda:

$$(u_x u_y)u_z = \sigma(x,y)u_{xy}u_z = \sigma(x,y)\sigma(xy,z)u_{xyz}$$
$$u_x(u_y u_z) = u_x\sigma(y,z)u_{yz} = (x \rightharpoonup \sigma(y,z))u_x u_{yz} = (x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz)u_{xyz}.$$

La asociatividad nos dice que los dos resultados son iguales. Entonces, luego de dividir por u_{xyz} nos queda

$$(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(x,yz) = \sigma(x,y)\sigma(xy,z),$$

o, lo que es lo mismo,

$$(x \rightharpoonup \sigma(y,z))\sigma(xy,z)^{-1}\sigma(x,yz)\sigma(x,y)^{-1} = 1.$$

Esto quiere decir que σ es un cociclo para el F-módulo $(k^G)^\times$.

La condición de normalización viene de ver cómo se comporta el cociclo con $u_1 = 1\#1$, que sabemos que es la unidad del producto:

$$u_x = u_1 u_x = \sigma(1,x)u_x \Rightarrow \sigma(1,x) = 1,$$
$$u_x = u_x u_1 = \sigma(x,1)u_x \Rightarrow \sigma(x,1) = 1.$$

□

La fórmula (4.3) y los teoremas 4.2.4 y 4.2.5 se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.6. *Si A es una extensión de kF por k^G, entonces existen una acción a izquierda $\rightharpoonup: F \times k^G \longrightarrow k^G$ y un cociclo normalizado $\sigma : F \times F \longrightarrow (k^G)^\times$, tales que A es isomorfo como álgebra al producto cruzado $k^G \rtimes_\sigma F$.* □

Ahora que ya tenemos más datos sobre $\rightharpoonup$ y σ, podemos intentar describir de forma aún más concreta la multiplicación, traduciendo los elementos de la ecuación (4.3) a operaciones que dependan solamente de los grupos F y G. El siguiente teorema y la definición que viene enseguida apuntan en esa dirección, queremos librarnos de los $\alpha \in k^G$, y escribir la acción de F en términos de los elementos de G directamente.

Teorema 4.2.7. *La base $\{e_s\}_{s\in G}$ es invariante bajo la acción de F sobre k^G. Dicho de otro modo,*

$$\forall s \in G,\ x \in F,\ \exists t \in G:\ x \rightharpoonup e_s = e_t$$

Antes de demostrar el teorema, vamos a precisar un lema sencillo:

Lema 4.2.8. *Si un álgebra tiene una base de elementos idempotentes y ortogonales, entonces dicha base es única.*

Demostración:
Sean $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ y $\{d_i\}_{i=1,\ldots,n}$ dos bases (ordenadas) formadas por elementos idempotentes y ortogonales. Para cada i escribimos el elemento d_i según sus coordenadas en la base $\{e_i\}_i$:

$$d_i = \sum_j \lambda_{ij} e_j.$$

Lo que queremos probar es que para cada i hay un único j tal que $\lambda_{ij} = 1$, y para todo $l \neq j$ se cumple $\lambda_{il} = 0$. Esto es, que la matriz de cambio de base $(\lambda_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ es una matriz de permutaciones. Primero que nada escribimos el producto entre dos elementos de la nueva base, y lo desarrollamos:

$$d_i d_{i'} = \left(\sum_j \lambda_{ij} e_j\right)\left(\sum_{j'} \lambda_{i'j'} e_{j'}\right) = \left(\sum_{j,j'} \lambda_{ij}\lambda_{i'j'} e_j e_{j'}\right) = \left(\sum_{j,j'} \lambda_{ij}\lambda_{i'j'}\delta_{j,j'} e_j\right) = \sum_j \lambda_{ij}\lambda_{i'j} e_j.$$

Sabemos que el producto anterior también es igual a

$$\delta_{i,i'} d_i = \sum_j \delta_{i,i'} \lambda_{ij} e_j.$$

Igualamos coordenada a coordenada, y para cada i, i', j tenemos la igualdad

$$\lambda_{ij}\lambda_{i'j} = \delta_{i,i'}\lambda_{ij}. \tag{4.4}$$

Para $i = i'$, la igualdad (4.4) nos queda

$$\lambda_{ij}^2 = \lambda_{ij} \Rightarrow \lambda_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Ahora, como $d_i \neq 0$, para cada i hay al menos un j tal que $\lambda_{ij} = 1$. Esto es, en la matriz $(\lambda_{ij})_{i,j}$ hay al menos un uno por fila, con lo cual en total hay al menos n unos. Además, si hay exactamente n, con esto sabemos que hay exactamente uno en cada fila.
Ahora veremos que hay a lo sumo n unos en la matriz. Observemos que para $i \neq i'$ la igualdad (4.4) nos queda $\lambda_{ij}\lambda_{i'j} = 0$, con lo cual deducimos que en la columna j hay a lo sumo un uno (si hubiera dos, llamamos i e i' a sus índices y obtenemos una contradicción con lo anterior). Con esto, sabemos que en la matriz hay a lo sumo n unos, y en caso de haber exactamente n sabemos que

hay exactamente uno en cada columna. Como hay al menos n y a lo sumo n, sabemos que hay exactamente n unos en la matriz $(\lambda_{ij})_{i,j}$, y por lo anterior sabemos que hay exactamente uno en cada fila y exactamente uno en cada columna. $\square$

Demostración:
(del Teorema 4.2.7)
Como sabemos, $\{e_s\}_{s\in G}$ es una base de k^G formada por elementos idempotentes y ortogonales. Como F actúa por automorfismos lineales, $\{x \rightharpoonup e_s\}_{s\in G}$ es una base para cada x, y como además estos automorfismos preservan la multiplicación, los elementos de esta base también van a ser idempotentes y ortogonales. Pero, por el lema anterior, dicha base es única, por lo cual $\{x \rightharpoonup e_s\}_{s\in G} = \{e_s\}_{s\in G}$. Como los automorfismos son biyecciones, restringidos a este conjunto finito van a ser permutaciones. $\square$

Proposición 4.2.9. *El mapa* $\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ *definido mediante la igualdad*

$$x \rightharpoonup e_s = e_{s\triangleleft x^{-1}} \quad \forall x \in F,\ s \in G$$

es una acción a derecha de F en G. Es decir,

$$s \triangleleft (xy) = (s \triangleleft x) \triangleleft y \quad \forall s \in G,\ x, y \in F,$$

$$s \triangleleft 1_F = s, \quad \forall s \in G.$$

Demostración:
Demostraremos que $e_{s\triangleleft(xy)} = e_{(s\triangleleft x)\triangleleft y}$, para s, x, y genéricos:

$$e_{s\triangleleft xy} = (xy)^{-1} \rightharpoonup e_s = (y^{-1}x^{-1}) \rightharpoonup e_s = y^{-1} \rightharpoonup (x^{-1} \rightharpoonup e_s) = y^{-1} \rightharpoonup e_{(s\triangleleft x)} = e_{(s\triangleleft x)\triangleleft y}.$$

También vemos que $e_{s\triangleleft 1_F} = e_s$ para un s genérico:

$$e_{s\triangleleft 1_F} = (1_F)^{-1} \rightharpoonup e_s = 1_F \rightharpoonup e_s = e_s.$$

Como la función que a $s \in G$ le asocia $e_s \in k^G$ es inyectiva, queda probado lo que queríamos. $\square$

Observación 4.2.10. *Con la acción de F en G así definida, resulta ser que $\rightharpoonup$ es la acción de F en k^G inducida por $\triangleleft$. Esto es,*

$$(x \rightharpoonup \alpha)(s) = \alpha(s \triangleleft x) \quad \forall x \in F,\ s \in G,\ \alpha \in k^G.$$

Demostración:
Lo probaremos para $\alpha = e_t$, esto nos alcanza porque tanto $\rightharpoonup$ como las evaluaciones son lineales.

$$(x \rightharpoonup e_t)(s) = e_{t\triangleleft x^{-1}}(s) = \delta_{t\triangleleft x^{-1},s} = \delta_{t,s\triangleleft x} = e_t(s \triangleleft x)$$

$\square$

Lo único que nos falta es escribir σ sin pasar por k^G. Lo que vamos a hacer es evaluarlo en un elemento genérico de G, con lo cual pasaremos de igualdades de funciones, a igualdades de números en $k^\times$.

En adelante identificaremos el cociclo σ con un mapa

$$\sigma : G \times F \times F \longrightarrow k^{\times},$$

simplemente evaluando:

$$\sigma(s; x, y) = \sigma(x, y)(s), \quad \forall x, y \in F,\ s \in G, .$$

Ya que pasamos todo a los grupos y al cuerpo, volvemos a escribir la ecuación de cociclo:

$$\sigma(s \triangleleft x; y, z)\sigma(s; x, yz) = \sigma(s; x, y)\sigma(s; xy, z), \quad \forall x, y, z \in F,\ s \in G;$$

y la condición de normalización:

$$\sigma(s; 1, x) = \sigma(s; x, 1) = 1, \quad \forall x \in F,\ s \in G.$$

Ahora, hagamos las cuentas para escribir la multiplicación en la base $\{e_s u_x\}_{(s,x)\in G\times F}$.
Quizá lo único que no es estrictamente operatorio y que usaremos en la siguiente cuenta, es el hecho de que

$$e_s\sigma(x, y) = \sigma(x, y)e_s = \sigma(s; x, y)e_s, \quad \forall x, y \in F,\ s \in G.$$

Aunque a simple vista sólo le estamos agregando una letra y un punto y coma, estamos cambiando una multiplicación de dos elementos de k^G, por una multiplicación de un elemento de k^G por un escalar de k. Esto nos es útil porque queremos dar una expresión de la multiplicación en términos de una base como k-espacio vectorial. La igualdad anterior vale porque, al estar multiplicando por e_s, el único valor de la función distinto de 0 va a ser justamente el valor en s.
Con esta aclaración hecha, operemos:

$$(e_s u_x)(e_t u_y) = e_s(x \rightharpoonup e_t)\sigma(x, y)u_{xy} = e_s e_{t\triangleleft x^{-1}}\sigma(x, y)u_{xy} = \delta_{s,t\triangleleft x^{-1}} e_s\sigma(x, y)u_{xy} = \delta_{s\triangleleft x,t}\sigma(s; x, y)e_s u_{xy}.$$

4.3. La comultiplicación de A (la multiplicación de A^*)

Lo que hemos hecho hasta ahora fue partir de A, una extensión cualquiera de kF por k^G, y fijarnos en su estructura de álgebra. Para ver la estructura de coálgebra, lo que vamos a hacer es fijarnos en la extensión dual:

$$k^F \xrightarrow{\pi^*} A^* \xrightarrow{\iota^*} kG.$$

Como podemos apreciar, se asemeja a la extensión original, sólo que F y G cambiaron de rol[1].
Vamos a trabajar igual, pero con un cambio. Recordemos que en la extensión original usamos la estructura de k^G-módulo a izquierda y kF-comódulo a derecha, los mapas eran

$$\cdot : k^G \otimes A \longrightarrow A,$$
$$\rho : A \longrightarrow A \otimes kF.$$

Si dualizamos estos mismos mapas, obtenemos

[1]El hecho de que esta sucesión sea una extensión se deduce de la demostración del teorema 2.1.2, que se encuentra en [1].

$$\cdot^* : A^* \longrightarrow kG \otimes A^*,$$
$$\rho^* : A^* \otimes k^F \longrightarrow A^*,$$

los que nos dan respectivamente una coacción y una acción, pero en este caso la coacción es por la izquierda y la acción es por la derecha (quedan iguales a las definidas en la observación 2.1.1). A su vez, el isomorfismo θ^* respeta estas estructuras, por lo tanto podemos usar $(\theta^*)^{-1} : kG \otimes k^F \longrightarrow A^*$ como el isomorfismo análogo al que nos da el teorema 2.3.1. Vamos a preferir trabajar con éstos aunque nos cambien las cosas de lado, porque tienen la ventaja de ser exactamente los duales de la extensión original, y las relaciones de compatibilidad entre la multiplicación y la comultiplicación de A nos van a quedar escritas de una manera más natural (ver por ejemplo el teorema 4.3.3).

Entonces, lo que vamos a obtener es una base de A^* como k^F-módulo a derecha, a la que llamaremos $\{v_s\}_{s\in G}$, una acción a derecha de G en k^F dada por

$$\alpha \leftharpoonup s = v_s^{-1} \alpha v_s,$$

y un cociclo normalizado $\tau : G \times G \longrightarrow (k^F)^\times$ definido por

$$\tau(s,t) = v_{st}^{-1} v_s v_t.$$

Observemos que la condición de que τ sea normalizado se escribe igual que la de σ, pero la de cociclo cambia porque en este caso la acción es por la derecha:

$$\tau(r,st)\tau(s,t) = \tau(rs,t)(\tau(r,s) \leftharpoonup t)$$

Análogamente al teorema 4.2.6 se obtiene el siguiente:

Teorema 4.3.1. *Si A es una extensión de kF por k^G, entonces existen una acción a derecha $\leftharpoonup$: $k^F \times G \longrightarrow k^F$ y un cociclo normalizado $\tau : G \times G \longrightarrow (k^F)^\times$, tales que A^* es isomorfo como álgebra al producto cruzado $G \ltimes_\tau k^F$.* □

Y finalmente, arreglamos las cosas para escribir todo solamente en términos de los grupos. Podemos escribir un teorema análogo al 4.2.7, que nos permita hacer la siguiente definición:

Definición 4.3.2. *Vamos a definir una acción a izquierda $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$, mediante la igualdad*

$$e_x \leftharpoonup s = e_{s^{-1}\triangleright x} \quad \forall x \in F,\ s \in G.$$

Con la acción de G en F así definida, resulta ser que $\leftharpoonup$ es la acción de G en k^F inducida por $\triangleright$. Esto es porque se verifica

$$(\alpha \leftharpoonup s)(x) = \alpha(s \triangleright x) \quad \forall x \in F,\ s \in G,\ \alpha \in k^F.$$

En adelante identificaremos el cociclo τ con un mapa

$$\tau : G \times G \times F \longrightarrow k^\times,$$

simplemente evaluando:

$$\tau(s,t;x) := \tau(s,t)(x).$$

En estos casos, las variaciones que hacemos entre las formas de esribir los cociclos σ y τ son para que siempre queden los elementos de G a la izquierda de los de F, así las fórmulas a las que lleguemos se ven mejor (un ejemplo es la siguiente).

La condición de cociclo queda:

$$\tau(r, st; x)\tau(s, t; x) = \tau(rs, t; x)\tau(r, s; t \triangleright x) \quad \forall x \in F, \ r, s, t \in G;$$

y la condición de normalización:

$$\tau(s, 1; x) = \tau(1, s; x) = 1 \quad \forall x \in F, \ s \in G.$$

Ahora, veamos cómo queda la multiplicación de dos elementos de la base de A^*:

$$(v_s e_x)(v_t e_y) = v_s v_t (e_x \leftharpoonup t) e_y = v_{st}\tau(s, t) e_{t^{-1} \triangleright x} e_y = v_{st}\tau(s, t)(\delta_{t^{-1} \triangleright x, y} e_y) = \delta_{x, t \triangleright y}\tau(s, t; y) v_{st} e_y.$$

Ahora que tenemos la multiplicación en A^*, como vimos en (1.1), sólo tenemos que dualizarla para obtener la comultiplicación de A. Dado un elemento $e_r u_z$, con $r \in G, \ z \in F$, supongamos que

$$\Delta(e_r u_z) = \sum_{(s,x),(t,y) \in G \times F} T^{r,z}_{s,x,t,y} \, e_s u_x \otimes e_t u_y, \tag{4.5}$$

donde $T^{r,z}_{s,x,t,y}$ son escalares de k. O sea, estamos expresando $\Delta(e_r u_z)$ como combinación lineal de los elementos de la base $\{e_s u_x \otimes e_t u_y\}_{(s,x),(t,y) \in G \times F}$. Para saber cuánto valen los escalares, tenemos que aplicarle a $\Delta(e_r u_z)$ algunos elementos de $(A \otimes A)^*$. Más en concreto, los elementos de la base dual de $\{e_s u_x \otimes e_t u_y\}_{(s,x),(t,y) \in G \times F}$. Para eso, tenemos que saber primero cuál es esa base dual. En esa dirección es que va el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3. *La base de A^* formada por $\{v_s e_x\}_{(s,x) \in G \times F}$, es la base dual de $\{e_s u_x\}_{(s,x) \in G \times F}$:*

$$(v_s e_x)(e_{s'} u_{x'}) = \delta_{s,s'}\delta_{x,x'}, \ \forall s, s' \in G, \ x, x' \in F.$$

Demostración:

$$v_s e_x = (s \# 1_{k^F})(1_{kG} \# e_x) = s \# e_x = \theta^*(s \otimes e_x).$$

$$e_{s'} u_{x'} = (e_{s'} \# 1_{kF})(1_{k^G} \# x') = e_{s'} \# x' = \theta^{-1}(e_{s'} \otimes x').$$

$$(v_s e_x)(e_{s'} u_{x'}) = (\theta^*(s \otimes e_x))(\theta^{-1}(e_{s'} \otimes x')) = ((s \otimes e_x) \circ \theta)(\theta^{-1}(e_{s'} \otimes x')) = (s \otimes e_x)(e_{s'} \otimes x') = \delta_{s,s'}\delta_{x,x'}.$$

□

Corolario 4.3.4. *La base de $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$ formada por $\{v_s e_x \otimes v_t e_y\}_{(s,x),(t,y) \in G \times F}$, es la base dual de $\{e_s u_x \otimes e_t u_y\}_{(s,x),(t,y) \in G \times F}$.*

Ahora que conocemos la base dual, podemos hallar los escalares $T^{r,z}_{s,x,t,y}$ que aparecen en (4.5). Para ver bien qué estamos haciendo, vamos a indicar con el subíndice correspondiente en dónde estamos haciendo las operaciones.

$$T^{r,z}_{s,x,t,y} = (e_s u_x \otimes e_t u_y)^*(\Delta_A(e_r u_z)) = (v_s e_x \otimes v_t e_y)(\Delta_A(e_r u_z)) = (\Delta_A)^*(v_s e_x \otimes v_t e_y)(e_r u_z) =$$

$$= m_{A^*}(v_s e_x \otimes v_t e_y)(e_r u_z) = ((v_s e_x)(v_t e_y))(e_r u_z) = (\delta_{x,t\triangleright y}\tau(s,t;y)v_{st}e_y)(e_r u_z) = \delta_{x,t\triangleright y}\tau(s,t;y)\delta_{st,r}\delta_{y,z}$$

Ahora que ya tenemos de forma explícita los $T^{r,z}_{s,x,t,y}$, los sustituimos en (4.5):

$$\Delta(e_r u_z) = \sum_{(s,x),(t,y)\in G\times F} \delta_{x,t\triangleright y}\tau(s,t;y)\delta_{st,r}\delta_{y,z}\ e_s u_x \otimes e_t u_y$$

Los deltas de Kronecker nos dicen que en esa sumatoria sólo serán distintos de 0 los términos correspondientes a los $(s,x),(t,y)$ que verifiquen $x = t\triangleright y$, $st = r$ e $y = z$. Aplicando esto llegamos a la fórmula deseada:

$$\Delta(e_r u_z) = \sum_{st=r} \tau(s,t;z)\ e_s u_{t\triangleright z} \otimes e_t u_z$$

4.4. Compatibilidad entre multiplicación y comultiplicación

En las dos secciones anteriores probamos que A es un álgebra y una coálgebra.

Teorema 4.4.1. *El álgebra y coálgebra A es una biálgebra si y sólo si las siguientes igualdades valen $\forall s,t \in G,\ \forall x,y \in F$:*

$$st \triangleleft x = (s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x) \tag{4.6}$$

$$1_G \triangleleft x = 1_G \tag{4.7}$$

$$s \triangleright xy = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y) \tag{4.8}$$

$$s \triangleright 1_F = 1_F \tag{4.9}$$

$$\sigma(st;x,y)\tau(s,t;xy) = \sigma(s;t\triangleright x,(t\triangleleft x)\triangleright y)\sigma(t;x,y)\tau(s,t;x)\tau(s\triangleleft(t\triangleright x);t\triangleleft x;y) \tag{4.10}$$

$$\sigma(1_G;x,y) = 1 \tag{4.11}$$

$$\tau(s,t;1_F) = 1 \tag{4.12}$$

Demostración:
Probaremos sólo que las condiciones anteriores son necesarias; la suficiencia se deduce inmediatamente de la misma prueba.

La condición de A de ser una biálgebra se traduce en cuatro compatibilidades, estamos relacionando los mapas m y u, que definen la estructura de álgebra, con Δ y ϵ, que definen la de coálgebra. La compatibilidad entre u y ϵ ya la tenemos, porque el teorema de la grieta nos afirma que la unidad y la counidad son las mismas que en $k^G \otimes kF$. O sea, no obtenemos información adicional. Veamos cómo se expresa la compatibilidad entre Δ y m, en elementos genéricos de la base:

$$\begin{aligned}\Delta((e_s u_x)(e_t u_y)) =& \Delta(\delta_{s\triangleleft x,t}\sigma(s;x,y)e_s u_{xy}) = \delta_{s\triangleleft x,t}\sigma(s;x,y)\Delta(e_s u_{xy}) = \\ =& \delta_{s\triangleleft x,t}\sigma(s;x,y)\sum_{s_1 s_2=s}\tau(s_1,s_2;xy)e_{s_1}u_{s_2\triangleright xy}\otimes e_{s_2}u_{xy}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\Delta(e_s u_x)\Delta(e_t u_y) =$$

$$= \left(\sum_{s_1 s_2 = s} \tau(s_1, s_2; x) e_{s_1} u_{s_2 \triangleright x} \otimes e_{s_2} u_x\right)\left(\sum_{t_1 t_2 = t} \tau(t_1, t_2; y) e_{t_1} u_{t_2 \triangleright y} \otimes e_{t_2} u_y\right) =$$

$$= \sum_{\substack{s_1 s_2 = s \\ t_1 t_2 = t}} \tau(s_1, s_2; x)\tau(t_1, t_2; y)(e_{s_1} u_{s_2 \triangleright x})(e_{t_1} u_{t_2 \triangleright y}) \otimes (e_{s_2} u_x)(e_{t_2} u_y) =$$

$$= \sum_{\substack{s_1 s_2 = s \\ t_1 t_2 = t}} \tau(s_1, s_2; x)\tau(t_1, t_2; y)(\delta_{s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), t_1} \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, t_2 \triangleright y) e_{s_1} u_{(s_2 \triangleright x)(t_2 \triangleright y)}) \otimes (\delta_{s_2 \triangleleft x, t_2} \sigma(s_2; x, y) e_{s_2} u_{xy}) =$$

$$= \sum_{\substack{s_1 s_2 = s \\ t_1 t_2 = t}} \delta_{s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), t_1} \delta_{s_2 \triangleleft x, t_2} \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, t_2 \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(t_1, t_2; y) e_{s_1} u_{(s_2 \triangleright x)(t_2 \triangleright y)} \otimes e_{s_2} u_{xy} =$$

$$= \sum_{\substack{s_2 \in G \\ t_2 \in G}} \delta_{s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x), t t_2^{-1}} \delta_{s_2 \triangleleft x, t_2} \sigma(s s_2^{-1}; s_2 \triangleright x, t_2 \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s s_2^{-1}, s_2; x)\tau(t t_2^{-1}, t_2; y) e_{s s_2^{-1}} u_{(s_2 \triangleright x)(t_2 \triangleright y)} \otimes e_{s_2} u_{xy}$$

Lo último que hicimos fue despejar s_1 en función de s_2 y s, y t_1 en función de t_2 y t. Lo que tenemos ahora es una sumatoria con varios índices fijos ($s, t \in G,\ x, y \in F$), y dos índices que varían libremente por todo G (s_2, t_2). Pero podemos observar que en cada sumando aparece el factor $\delta_{s_2 \triangleleft x, t_2}$, o sea que para cada s_2, al variar t_2 sólo sobrevive el sumando correspondiente a $t_2 = s_2 \triangleleft x$. Entonces podemos escribir lo de arriba como una sumatoria en la que varía sólo s_2, sustituyendo t_2 por $s_2 \triangleleft x$. Además vamos a cambiar el otro delta de Kronecker por uno equivalente, multiplicando ambos argumentos del delta por $s_2 \triangleleft x$. El último cambio lo hacemos en uno de los argumentos de τ, cuando aparece la expresión $t(s_2 \triangleleft x)^{-1}$, dado que vale 0 salvo cuando se cumple la igualdad del anterior delta de Kronecker, lo podemos cambiar por $s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x)$. Hechas estas aclaraciones, lo que queda es:

$$\sum_{s_2 \in G} \delta_{(s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x))(s_2 \triangleleft x), t} \sigma(s s_2^{-1}; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s s_2^{-1}, s_2; x)\tau(s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y)$$
$$e_{s s_2^{-1}} u_{(s_2 \triangleright x)((s_2 \triangleleft x) \triangleright y)} \otimes e_{s_2} u_{xy} \tag{4.14}$$

La condición de biálgebra es que los resultados de (4.13) y (4.14) sean siempre iguales. Los tenemos a los dos expresados como sumas de tensores elementales de $A \otimes A$, cuya segunda componente es $e_{s_2} u_{xy}$. El conjunto $\{e_{s_2} u_{xy}\}_{s_2 \in G}$ es linealmente independiente en A (es un subconjunto de la base de A con la que estamos trabajando). Entonces podemos afirmar que para cada tensor la componente de la izquierda debe ser igual en ambas expresiones, esto es:

$$\delta_{s \triangleleft x, t} \sigma(s; x, y)\tau(s s_2^{-1}, s_2; xy) e_{s s_2^{-1}} u_{s_2 \triangleright xy} =$$

$$= \delta_{(s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x))(s_2 \triangleleft x), t} \sigma(s s_2^{-1}; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s s_2^{-1}, s_2; x)\tau(s s_2^{-1} \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y) e_{s s_2^{-1}} u_{(s_2 \triangleright x)((s_2 \triangleleft x) \triangleright y)},$$

$\forall s, t, s_2 \in G,\ \forall x, y \in F.$

Escribiendo s de la forma $s = s_1 s_2$, la igualdad anterior equivale a:

$$\delta_{s_1 s_2 \triangleleft x, t}\sigma(s_1 s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; xy)e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy} =$$

$$= \delta_{(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x))(s_2 \triangleleft x), t}\sigma(s_1; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y)e_{s_1} u_{(s_2 \triangleright x)((s_2 \triangleleft x) \triangleright y)},$$

$\forall t, s_1, s_2 \in G,\ \forall x, y \in F.$

Ahora, si evaluamos esta igualdad en x, y, s_1, s_2 arbitrarios, pero para cierto $t := s_1 s_2 \triangleleft x$, el delta de Kronecker del primer miembro de la igualdad queda igual a 1, por lo tanto dicho miembro es distinto de 0. Esto es porque la imagen de los cociclos σ y τ está en $k^\times$, y el elemento $e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy}$ es distinto de 0.
Para que el segundo miembro sea distinto de 0, el delta de Kronecker que aparece tiene que ser distinto de 0, o sea, igual a 1, lo que nos da la igualdad (4.6).
Seguimos en este caso, en el que sabemos que el elemento al que hace referencia la igualdad es distinto de 0. Podemos apreciar que es un elemento homogéneo de la F-graduación de A a la que hacemos referencia en el teorema 4.1.2. El primer miembro de la igualdad nos dice que dicho elemento está en $A_{s_2 \triangleright xy}$, y el segundo nos dice que está en $A_{(s_2 \triangleright x)((s_2 \triangleleft x) \triangleright y)}$. Como tienen un elemento distinto de 0 en común, ambos subespacios son el mismo, por lo tanto sus subíndices deben ser iguales. Esto nos da la igualdad (4.8).
Lo que nos queda se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma(s_1 s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; xy)e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy} = \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y)e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy}$$

$$(\sigma(s_1 s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; xy) - \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y))\, e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy} = 0$$

Como $e_{s_1} u_{s_2 \triangleright xy} \neq 0$, entonces

$$\sigma(s_1 s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; xy) - \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y) = 0$$

$$\sigma(s_1 s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; xy) = \sigma(s_1; s_2 \triangleright x, (s_2 \triangleleft x) \triangleright y)\sigma(s_2; x, y)\tau(s_1, s_2; x)\tau(s_1 \triangleleft (s_2 \triangleright x), s_2 \triangleleft x; y)$$

Esto es la igualdad (4.10).

Ahora quedan cuentas un poco más fáciles. Vamos a escribir la condición de compatibilidad de la counidad con la multiplicación para los elementos $e_{1_G} u_x$ y $e_{1_G} u_y$, para $x, y \in F$ arbitrarios:

$$\epsilon(e_{1_G} u_x)\epsilon(e_{1_G} u_y) = \delta_{1_G, 1_G}\delta_{1_G, 1_G} = 1$$

$$\begin{aligned}
\epsilon((e_{1_G} u_x)(e_{1_G} u_y)) &= \epsilon(\delta_{1_G \triangleleft x, 1_G}\sigma(1_G; x, y)e_{1_G} u_{xy}) \\
&= \delta_{1_G \triangleleft x, 1_G}\sigma(1_G; x, y)\epsilon(e_{1_G} u_{xy}) \\
&= \delta_{1_G \triangleleft x, 1_G}\sigma(1_G; x, y)\delta_{1_G, 1_G} \\
&= \delta_{1_G \triangleleft x, 1_G}\sigma(1_G; x, y).
\end{aligned}$$

Esto implica que $\delta_{1_G \triangleleft x, 1_G}\sigma(1_G; x, y) = 1$. En particular, es distinto de 0, por lo que el delta de Kronecker tiene que valer 1. Esto nos da la igualdad (4.7). Sustituyendo el delta por 1, la igualdad que nos queda es justamente (4.11).

Lo que nos queda es plantear la compatibilidad entre la comultiplicación y la unidad. Recordemos que $1_A = u_{1_F} = \sum_{t\in G} e_t u_{1_F}$. Ahora la cuenta:

$$\begin{aligned}
\Delta(u_{1_F}) &= \sum_{s,t\in G} \tau(s,t;1_F) e_s u_{t\triangleright 1_F} \otimes e_t u_{1_F} \\
&= \sum_{t\in G} \left(\sum_{s\in G} \tau(s,t;1_F) e_s u_{t\triangleright 1_F} \right) \otimes e_t u_{1_F} \\
u_{1_F} \otimes u_{1_F} &= u_{1_F} \otimes \left(\sum_{t\in G} e_t u_{1_F} \right) = \sum_{t\in G} u_{1_F} \otimes e_t u_{1_F}
\end{aligned}$$

Tenemos $\Delta(1_A)$ y $1_A \otimes 1_A$ expresados como sumas de tensores elementales de $A\otimes A$, cuya segunda componente es $e_t u_{1_F}$. El conjunto $\{e_t u_{1_F}\}_{t\in G}$ es linealmente independiente en A (es un subconjunto de la base de A con la que estamos trabajando). Entonces podemos afirmar que para cada tensor la componente de la izquierda debe ser igual en ambas expresiones, esto es:

$$\sum_{s\in G} \tau(s,t;1_F) e_s u_{t\triangleright 1_F} = u_{1_F} = \sum_{s\in G} e_s u_{1_F}, \quad \forall t \in G.$$

Podemos apreciar que es un elemento homogéneo de la F-graduación de A a la que hacemos referencia en el teorema 4.1.2, y que es distinto de 0. El primer miembro de la igualdad nos dice que dicho elemento está en $A_{t\triangleright 1_F}$, y el segundo nos dice que está en A_{1_F}. Como tienen un elemento distinto de 0 en común, ambos subespacios son el mismo, por lo tanto sus subíndices deben ser iguales. Esto nos da la igualdad (4.9).
Lo que nos queda se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{s\in G} \tau(s,t;1_F) e_s u_{1_F} - \sum_{s\in G} e_s u_{1_F} = \sum_{s\in G} (\tau(s,t;1_F) - 1) e_s u_{1_F} = 0$$

Como $\{e_s u_{1_F}\}_{s\in G}$ es linealmente independiente, obtenemos para cualquier s (y para cualquier t), que $(\tau(s,t;1_F) - 1) = 0$, lo que nos da la igualdad (4.12). $\square$

4.5. Conclusión.

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo, y es el recíproco del teorema 3.2.5:

Teorema 4.5.1. *Sea*

$$k^G \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} kF$$

una extensión de álgebras de Hopf. Entonces existen acciones $\triangleleft : G\times F \to G$ y $\triangleright : G \times F \to F$ tales que $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ es un par ligado, y mapas $\sigma : G\times F\times F \to k^\times$ y $\tau : G \times G \times F \to k^\times$ que verifican las condiciones (3.5) a (3.11) del teorema 3.2.4, de forma tal que A es isomorfa a $k^G \#_{\sigma,\tau} kF$ como álgebra de Hopf.

Demostración:

En la sección 4.2, a partir de la base $\{e_s u_x\}_{(s,x)\in G\times F}$ de A, se definen $\triangleleft$ y σ con las siguientes igualdades:

$$u_x e_s = e_{s\triangleleft x^{-1}} u_x,$$

$$u_x u_y = \sigma(x,y) u_{xy}, \quad \sigma(s;x,y) = \sigma(x,y)(s).$$

Con esta definición se llega a escribir la multiplicación y la unidad tales como aparecen en el teorema 3.2.4. Del hecho de que A es un álgebra, se deduce que $\triangleleft$ es una acción a derecha, y que σ verifica las ecuaciones (3.5) y (3.6).

En la sección 4.3, a partir de la base $\{v_s e_x\}_{(s,x)\in G\times F}$ de A^*, se definen $\triangleright$ y τ con las siguientes igualdades:

$$e_x v_s = v_s e_{s^{-1}\triangleright x},$$

$$v_s v_t = v_{st}\tau(s,t), \quad \tau(s,t;x) = \tau(s,t)(x).$$

Con esta definición se llega a escribir la comultiplicación y la counidad tales como aparecen en el teorema 3.2.4. Del hecho de que A es una coálgebra, se deduce que $\triangleright$ es una acción a izquierda, y que τ verifica las ecuaciones (3.7) y (3.8).

En la sección 4.4 se deduce, partiendo de que A es una biálgebra, que $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ son un par ligado y que σ y τ verifican las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11).

Como la multiplicación, la unidad, la comultiplicación y la counidad están escritas de la misma forma que el teorema 3.2.4, la antípoda también tiene la misma forma que en dicho teorema, y la demostración de que efectivamente es una antípoda es la misma. $\square$

Bibliografía

[1] Masuoka, A. *Extensions of Hopf algebras*, notas de curso en la FaMAF, Universidad de Córdoba, en octubre de 1997.

[2] Montgomery, S. *Hopf algebras and their actions on rings*. CBMS **82**, Amer. Math. Soc.: 1993.

[3] Natale, S. *Sobre el problema de clasificación de las álgebras de Hopf semisimples* Notas del curso en el VI Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría Algebraica, Montevideo, Junio 2000.

[4] Pereira, M. *Biálgebras y categorías monoidales*, Monografía de Licenciatura en Matemática, UdelaR. http://www.cmat.edu.uy/cmat/monografias

[5] Schneider, H-J. *Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras*, Journal of Algebra, vol. 152, 1992, no.7, pp. 289–312.