El álgebra simétrica cuántica.

Natalia Castro

Orientador: Dr. Andrés Abella

Octubre de 2007

Trabajo monográfico

Licenciatura en matemática

Universidad de la República

Montevideo - Uruguay

Agradecimientos

Gracias...

a Andrés, por haber hecho posible la realización de este trabajo, por toda su dedicación y correcciones, por saber motivarme y por darme ánimo en los momentos difíciles.

a mi madre, Gladys y a mi hermana, Sylvia; porque mi decisión de continuar mis estudios se debe en gran parte a su ejemplo.

a Nacho, por creer en mí y por haberme apoyado siempre.

a Dalia, Cecilia y al negro Lanzilotta; por haber podido contar con ustedes y por haberme brindado todo su apoyo.

Resumen

El objetivo de este trabajo consiste en presentar las construcciones de tres álgebras de Hopf graduadas y estudiar algunas de sus propiedades. Dada un álgebra de Hopf H y un bimódulo de Hopf M, definiremos el álgebra tensorial $T_H(M)$, la coálgebra cotensorial $C_H(M)$ y el álgebra simétrica cuántica $S_H(M)$.

En la primera sección del primer capítulo se enuncian resultados que serán necesarios a lo largo del resto de la monografía, tales como las definiciones de álgebras y coálgebras graduadas, filtración corradical, etc. En la segunda sección se muestran estas construcciones en el caso particular en que $H = \Bbbk$ es un cuerpo y $M = V$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial. Esto aparece como motivación de lo que será el trabajo en los capítulos siguientes y para mostrar un ejemplo de las estructuras que definiremos.

En el segundo capítulo nos enfocamos por completo en la construcción del álgebra tensorial $T_A(M)$, la que construimos para A un álgebra y M un A-bimódulo. En el Teorema 2.3.4 mostramos con detalle cómo dar estructura de álgebra graduada a $T_A(M)$ y aún mostramos un poco más, probando que admite estructura de álgebra graduada en ${}_A\mathcal{M}_A$. La definición de álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$ junto a su caracterización se dan en la segunda sección del capítulo (Proposición 2.2.2). Para culminar el estudio de $T_A(M)$ mostramos que verifica una propiedad universal (Teorema 2.4.1), de interés por si misma y que será de utilidad en el Capítulo 4.

En el tercer capítulo nos enfocamos en la construcción de la coálgebra cotensorial $C_C(M)$, la que construimos para C una coálgebra y M un C-bicomódulo. En el Teorema 3.3.5 mostramos con detalle cómo dar estructura de coálgebra graduada, de forma dual al capítulo anterior probamos que admite estructura de coálgebra graduada en ${}^C\mathcal{M}^C$. En las secciones previas a este teorema se define el producto cotensorial y se demuestran algunas propiedades de éste y a su vez se define y caracteriza lo que es una coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$. Culminamos el estudio de $C_C(M)$ mostrando que verifica una propiedad universal (Teorema 3.4.1).

En el último capítulo generalizamos las construcciones del álgebra tensorial y la coálgebra cotensorial al caso en que H es un álgebra de Hopf y M es un bimódulo de Hopf. Para dar estructura de coálgebra graduada a $T_H(M)$ y de álgebra graduada a $C_H(M)$ aplicamos las propiedad universales demostradas en los dos capítulos anteriores. Las estructuras de biálgebra graduada se muestran explícitamente en las Proposiciones 4.2.1 y 4.2.3. La existencia de la antípoda se deduce a partir del Teorema (1.1.13), en el cual se da una idea de su construcción. A partir de lo anterior obtenemos que $T_H(M)$ y $C_H(M)$ son álgebras de Hopf graduadas.

Para culminar el trabajo se muestra que existe un mapa natural entre $T_H(M)$ y $C_H(M)$ de donde se desprende la existencia del álgebra simétrica cuántica.

Notaciones

En este trabajo $\Bbbk$ representa un cuerpo fijo. Todos los espacios vectoriales serán sobre $\Bbbk$ a menos que se indique lo contrario. Siempre escribiremos $\otimes$ para referirnos a $\otimes_{\Bbbk}$, el producto tensorial sobre $\Bbbk$.

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Hopf graduadas.

1.1. Graduaciones y filtraciones: preliminares.

En esta sección definiremos los conceptos de graduación y filtración de álgebras y coálgebras, introduciendo la filtración corradical. A su vez enunciaremos resultados que nos serán de utilidad en los capítulos siguientes. Las referencias para esta sección son [1] y [2].

Definición 1.1.1. Sea (A, m, u) un álgebra. Decimos que A es una *álgebra graduada* si existe una familia $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de subespacios de A que satisface:

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n, \quad 1_A \in A_0, \quad A_i A_j \subseteq A_{i+j},\ \forall i, j \geq 0.$$

Definición 1.1.2. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Decimos que C es una *coálgebra graduada* si existe una familia $\{C_n\}_{n\geq 0}$ de subespacios de C que satisface:

$$C = \bigoplus_{n\geq 0} C_n; \quad \varepsilon(C_n) = 0,\ \forall n \geq 1; \quad \Delta(C_n) \subseteq \sum_{i+j=n} C_i \otimes C_j,\ \forall n \geq 0.$$

Definición 1.1.3. Sea C una coálgebra, una *filtración en* C es una familia $\{C_n\}_{n\geq 0}$ de subespacios de C tal que:

- $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = C$,
- $C_n \subseteq C_{n+1},\ \forall n \geq 0$,
- $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i+j=n} C_i \otimes C_j,\ \forall n \geq 0$.

Observación 1.1.4. Si $C = \bigoplus_{n\geq 0} C_n$ es una coálgebra graduada y definimos $D_n := \bigoplus_{i=0}^{n} C_i$, entonces $\{D_n\}_{n\geq 0}$ es una filtración en C.

Definición 1.1.5. Una coálgebra C se dice *simple* si no tiene subcoálgebras propias.

Definición 1.1.6. Sea C una coálgebra, definimos el *corradical* de C como $corad(C) := \sum_{i\in I} D_i$, siendo $\{D_i : i \in I\}$ el conjunto de todas las subcoálgebras simples de C.

Proposición 1.1.7 (Lema 5.1.10, [1]). *Sean C y D coálgebras entonces $corad(C \otimes D) \subseteq corad(C) \otimes corad(D)$.* □

Proposición 1.1.8 (Proposición 11.1.1, [2]). *Sea $C = \bigoplus_{n\geq 0} C_n$ una coálgebra graduada entonces $corad(C) \subseteq C_0$.* □

Proposición 1.1.9 (Teorema 5.2.2, [1]). *Sea (C, Δ, ε) una coálgebra, para $n \geq 0$ se define C_n de la siguiente forma:*

- $C_0 = corad(C)$,
- $C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C), \ \forall n \geq 1.$

Entonces $\{C_n : n \geq 0\}$ es una familia de subcoálgebras que define una filtración en C, llamada la filtración corradical. □

Definición 1.1.10. Sea B una biálgebra. Decimos que B es una *biálgebra graduada* si existe una familia $\{B_n\}_{n\geq 0}$ de subespacios de B de forma tal que B es graduada como álgebra y como coálgebra.

Definición 1.1.11. Sea H un álgebra de Hopf. Decimos que H es un *álgebra de Hopf graduada* si H es una biálgebra graduada y el mapa antípoda $S_H : H \to H$ respeta la graduación $\{H_n\}_{n\geq 0}$; es decir, $S_H(H_n) \subseteq H_n, \ \forall n \geq 0$.

Lema 1.1.12 (Lema 5.2.10, [1]). *Sean C una coálgebra, A un álgebra y $f \in Hom(C, A)$. Luego f es invertible por convolución si y sólo si $f|_{corad(C)}$ es invertible por convolución.* □

Teorema 1.1.13 (Proposición 1.5.1, [3]). *Si $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es una biálgebra graduada tal que H_0 es un álgebra de Hopf, entonces H es un álgebra de Hopf graduada.*

Demostración: Por (1.1.8) tenemos que $corad(H) \subseteq H_0$, donde H_0 es un álgebra de Hopf. Luego $id_{corad(H)}$ es invertible por convolución y por lo tanto el lema anterior implica que id_H es invertible por convolución.
Para completar la prueba es necesario ver que $S : H \to H$, la antípoda de H, respeta la graduación. Para ello veamos como se construye la antípoda.

Tenemos $H = \bigoplus_{n\geq 0} H_n = H_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{n\geq 1} H_n\right)$. Como $corad(H) \subseteq H_0$ entonces existe un subespacio $V \subseteq H$ tal que $H_0 = corad(H) \bigoplus V$. Luego $H = corad(H) \bigoplus V'$, donde $V' = V \bigoplus \left(\bigoplus_{n\geq 1} H_n\right)$.
Sea $S_{corad(H)} : corad(H) \to corad(H) \subseteq H$ la inversa por convolución de $id_{corad(H)}$. Definimos $g' : H \to H$ por $g'|_{corad(H)} = S_{corad(H)}$ y $g'|_{V'} = 0$. Obsérvese entonces que

$$g'(H_n) = 0, \ \forall n \geq 1. \tag{1.1}$$

Luego definimos $\gamma : H \to H$ por $\gamma = u\varepsilon - id_H * g'$, es decir $\gamma = u\varepsilon - m(id_H \otimes g')\Delta$.
Sea $n \geq 0$ como H es una coálgebra graduada tenemos que:

$$(id_H * g')(H_n) = (m(id_H \otimes g')\Delta)(H_n) \subseteq (m(id_H \otimes g')) \left(\sum_{i+j=n} H_i \otimes H_j\right).$$

Es decir

$$(id_H * g')(H_n) \subseteq m\left(\sum_{i+j=n} H_i \otimes g'(H_j)\right).$$

Como se verifica (1.1) y H es un álgebra graduada obtenemos

$$(id_H * g')(H_n) \subseteq m(H_n \otimes g'(H_0)) \subseteq m(H_n \otimes H_0) \subseteq H_n.$$

Por otra parte $u\varepsilon(H_n) = 0, \ \forall n \geq 1$ y $u\varepsilon(H_0) \subseteq H_0$. En conclusión

$$\gamma(H_n) \subseteq H_n, \ \forall n \geq 0. \tag{1.2}$$

A continuación para $m \geq 0$ definimos $\gamma^m = \begin{cases} u\varepsilon & \text{si } m = 0 \\ \underbrace{\gamma * \cdots * \gamma}_{m \ veces} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$ En la demostración del Lema (1.1.12) se muestra que tiene sentido definir $\Gamma : H \to H$ por $\Gamma = \sum_{m\geq 0} \gamma^m$. A partir de

(1.2) es inmediato ver que $\Gamma(H_n) \subseteq H_n,\ \forall n \geq 0$.

Con ésto culminamos la construcción de la antípoda $S : H \to H$ que se define por $S = g' * \Gamma$, es decir $S = m(g' \otimes \Gamma)\Delta$. Entonces para $n \geq 0$ tenemos

$$S(H_n) \subseteq m\left(\sum_{i+j=n} g'(H_i) \otimes \Gamma(H_j)\right) = m(g'(H_0) \otimes \Gamma(H_n)) \subseteq m(H_0 \otimes H_n) \subseteq H_n.$$

Luego $S(H_n) \subseteq H_n,\ \forall n \geq 0$. □

1.2. Construcciones de álgebras de Hopf graduadas.

Una referencia para esta sección es [2].

Consideramos $\mathrm{V}ec_{\Bbbk}$ la categoria de los $\Bbbk$-espacios vectoriales. Sea $V \in \mathrm{V}ec_{\Bbbk}$.

$*$ **T(V): el álgebra tensorial.**

Sea $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$, donde $V_0 = \Bbbk$, $V_1 = V$ y $V_n = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\ veces},\ \forall n \geq 2$.

$T(V)$ se denomina *álgebra tensorial sobre V*. Es posible dar estructura de álgebra graduada a $T(V)$ definiendo mapas lineales $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ y $u : \Bbbk \to T(V)$ por

$$m(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu,\ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk,$$

$$m((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)) = v_1 \otimes \cdots v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m,$$

$$m(\lambda \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = m((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes \lambda) = \lambda v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,\ \forall \lambda \in \Bbbk, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in T(V)$$

y

$$u(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk.$$

Obsérvese que $T(V)$ es generada como álgebra por V_0 y V_1.
A su vez es posible dar estructura de coálgebra graduada a $T(V)$ de forma que resulte coconmutativa. Para ello definimos los siguientes mapas lineales:

- $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ tal que $\Delta = \sum_{n\geq 0} \Delta_n$, donde para cada $n \geq 0$ tenemos $\Delta_n : V_n \to \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes V_j$ definido por
  - $\Delta_0(\lambda) = \lambda \otimes 1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk} \otimes \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk$,

- $\Delta_1(v) = 1_{\Bbbk} \otimes v + v \otimes 1_{\Bbbk},\ \forall v \in V$ y
- $\Delta_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \Delta_1(v_1) \cdots \Delta_1(v_n),\ \forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_n,\ \forall n \geq 2.$

- $\varepsilon : T(V) \to \Bbbk$ tal que $\varepsilon = \pi_0$, donde π_0 es la proyección de $T(V)$ sobre $\Bbbk$. Es decir $\varepsilon(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk$ y $\varepsilon(V_n) = 0,\ \forall n \geq 1.$

Obsérvese que Δ y ε así definidos resultan morfismos de álgebras.
La coconmutatividad de $T(V)$ como coálgebra es inmediata debido a la definición de Δ_n para $n = 0, 1$ y de que Δ es un morfismo de álgebras. Por ejemplo:

$$\Delta_2(v_1 \otimes v_2) = 1_{\Bbbk} \otimes v_1v_2 + v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 + v_1v_2 \otimes 1_{\Bbbk} = (\tau \circ \Delta_2)(v_1 \otimes v_2),\ \forall v_1 \otimes v_2 \in T(V) \otimes T(V).$$

Obsérvese que obtuvimos que $T(V)$ tiene estructura de biálgebra graduada y entonces, aplicando el Teorema (1.1.13), obtenemos que $T(V)$ es un álgebra de Hopf graduada.

$*$ **C(V): la coálgebra cotensorial.**

Sea $C(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$, donde $V_0 = \Bbbk$, $V_1 = V$ y $V_n = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\ veces},\ \forall n \geq 2.$

$C(V)$ se denomina *coálgebra cotensorial sobre* V. Es posible dar estructura de coálgebra graduada a $C(V)$ definiendo mapas lineales $\Delta : C(V) \to C(V) \otimes C(V)$ y $\varepsilon : C(V) \to \Bbbk$ por

- $\Delta = \sum_{n \geq 0} \Delta_n$, donde para cada $n \geq 0$ tenemos $\Delta_n : V_n \to \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes V_j$ definido por
  - $\Delta_0(\lambda) = \lambda \otimes 1_{\Bbbk} = 1_{\Bbbk} \otimes \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk,$
  - $\Delta_1(v) = 1_{\Bbbk} \otimes v + v \otimes 1_{\Bbbk},\ \forall v \in V$ y
  - $\Delta_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1,\ \forall n \geq 2.$

- $\varepsilon = \pi_0$, donde π_0 es la proyección de $C(V)$ sobre $\Bbbk$. Es decir $\varepsilon(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk$ y $\varepsilon(V_n) = 0,\ \forall n \geq 1.$

A su vez es posible dar estructura de álgebra graduada a $C(V)$ de forma que resulte conmutativa. Con el objetivo de definir el producto en $C(V)$ introducimos la siguiente definición:

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{S}_n$ el grupo de las permutaciones de n elementos. Decimos que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es un *i-shuffle* $(1 \leq i < n)$ si σ preserva el orden de $\{1, \cdots, i\}$ y de $\{i+1, \cdots, n\}$.

Observación 1.2.2. Escribiremos $\mathcal{S}_{n,i}$ para referirnos al conjunto de i-shuffles de $\mathcal{S}_n$, $\forall i = 1, \cdots, n-1$. Entonces:

$$\sigma \in S_{n,i} \text{ si } \sigma(1) < \cdots < \sigma(i) \text{ y } \sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n).$$

Ejemplo 1.2.3. *Si* $n = 4$ *e* $i = 2$*, tenemos* $\mathcal{S}_{4,2} = \{(1234), (1324), (1423), (2314), (2413), (3412)\}$*, donde* (1324) *representa la permutación que verifica* $\sigma(1) = 1$*,* $\sigma(2) = 3$*,* $\sigma(3) = 2$ *y* $\sigma(4) = 4$*.*

Luego definimos el mapa lineal $m : C(V) \otimes C(V) \to C(V)$ por $m = \sum_{n \geq 0} m_n$, donde para cada $n \geq 0$ tenemos $m_n : \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes V_j \to V_n$ tal que $m_n = \sum_{i+j=n} m_n^{ij}$ con $m_n^{ij} : V_i \otimes V_j \to V_n$ definido de la siguiente forma:

- para $n = 0$: $m_0^{00}(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu,\ \forall \lambda, \mu \in \Bbbk$,
- para $n = 1$: $m_1^{01}(\lambda \otimes v) = \lambda v = v\lambda = m_1^{10}(v \otimes \lambda),\ \forall \lambda \in \Bbbk,\ v \in V$ y
- para $n \geq 2$:
  - Si $i = 0$: $m_n^{0j}(\lambda \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j)) = \lambda v_1 \otimes \cdots \otimes v_j,\ \forall \lambda \in \Bbbk, v_1 \otimes \cdots \otimes v_j \in V_j$.
  - Si $i, j \geq 1$: $m_n^{ij}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,i}} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$, $\forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \in V_i,\ v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \in V_j$.
  - Si $j = 0$: $m_n^{i0}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes \lambda) = \lambda v_1 \otimes \cdots \otimes v_i,\ \forall \lambda \in \Bbbk, v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \in V_i$.

Por otra parte definimos el mapa lineal $u : \Bbbk \to C(V)$ como $u(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk$.
Como mencionamos antes con estas definiciones resulta que $C(V)$ es un álgebra graduada y conmutativa.
Obsérvese que los mapas m y u así definidos son morfismos de coálgebras y que por lo tanto tenemos en $C(V)$ estructura de biálgebra graduada. Luego, por el Teorema (1.1.13), tenemos que $C(V)$ es un álgebra de Hopf graduada.

Observación 1.2.4. Notar que en el caso que V sea de dimensión finita, $C(V)$ es isomorfa al dual graduado de $T(V^*)$ (Ver [2]).

$*$ **S(V): el álgebra simétrica.**

Probaremos más adelante que existe un único $\psi : T(V) \to C(V)$ morfismo de álgebras de Hopf que verifica que $\psi(\lambda) = \lambda,\ \forall \lambda \in \Bbbk$ y $\psi(v) = v,\ \forall v \in V$. La imagen de este morfismo es una subálgebra de Hopf de $C(V)$ que escribimos $S(V)$ y su núcleo es $\Bbbk < u \otimes v - v \otimes u : u, v \in V >$. Luego $S(V)$ es isomorfa al *álgebra simétrica*

$$\frac{T(V)}{\Bbbk < u \otimes v - v \otimes u,\ u, v \in V >}.$$

Capítulo 2

El álgebra tensorial.

2.1. Bimódulos sobre un álgebra

A partir de esta sección A denota una $\Bbbk$-álgebra.

Definición 2.1.1. Decimos que un espacio vectorial M tiene estructura de A-*bimódulo* si M tiene estructura de A-módulo a izquierda y de A-módulo a derecha y ambas estructuras son compatibles, en el sentido

$$(a \cdot m) \cdot a' = a \cdot (m \cdot a') \ \forall a, a' \in A \ \forall m \in M.$$

Escribiremos $B \in {}_A\mathcal{M}_A$ para decir que B es un A-bimódulo.

Ejemplo 2.1.2. *A es un A-bimódulo con el producto como acción.*

Observación 2.1.3. Si M es un espacio vectorial que tiene estructura de A-módulo a izquierda y de A-módulo a derecha, entonces M es un A-bimódulo si y sólo si la acción por la izquierda $A \otimes M \to M$ es un morfismo de A-módulos a derecha si y sólo si la acción por la derecha $M \otimes A \to M$ es un morfismo de A-módulos a izquierda.
En lo anterior consideramos $A \otimes M$ como A-módulo a derecha mediante $(a \otimes m) \cdot a' = a \otimes (m \cdot a')$ y $M \otimes A$ como A-módulo a izquierda mediante $a \cdot (m \otimes a') = (a \cdot m) \otimes a'$.

Proposición 2.1.4. *Si $M_i \in {}_A\mathcal{M}_A \ \forall i \in I$ entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i \in {}_A\mathcal{M}_A$.*

Demostración: Sea $m = \sum_{i \in I} m_i \in \bigoplus_{i \in I} M_i$, donde sólo una cantidad finita de los m_i son no nulos.
Definimos $*_l : A \otimes (\bigoplus_{i \in I} M_i) \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ por

$$a *_l m = a *_l (\sum_{i \in I} m_i) = \sum_{i \in I} a \cdot m_i$$

y $*_r : (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes A \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ por

$$m *_r a = (\sum_{i\in I} m_i) *_r a = \sum_{i\in I} m_i \cdot a$$

Con estas definiciones $\bigoplus_{i\in I} M_i$ resulta un A-módulo a izquierda y a derecha.
Para ver que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un A-bimódulo sólo falta ver que $*_l$ y $*_r$ son compatibles:

$$\begin{aligned}(a * (\sum_{i\in I} m_i)) * a' &= (\sum_{i\in I} a \cdot m_i) * a' = \sum (a \cdot m_i) \cdot a' = \\ &= \sum a \cdot (m_i \cdot a') = a * (\sum m_i \cdot a') = a * ((\sum m_i) * a'),\ \forall a, a' \in A\end{aligned}$$

□

Observación 2.1.5. Notar que en la construcción anterior la inclusión $\iota_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$, $\forall j \in J$, luego esto prueba que ${}_A\mathcal{M}_A$ tiene coproductos.

Definición 2.1.6. Si $M \in \mathcal{M}_A$ y $N \in {}_A\mathcal{M}$, definimos el espacio vectorial $M \otimes_A N$ mediante:

$$M \otimes_A N = \frac{M \otimes N}{\Bbbk\{m \cdot a \otimes n - m \otimes a \cdot n :\ a \in A,\ m \in M, n \in N\}}.$$

Escribiremos $m \otimes_A n$ para indicar la clase de $m \otimes n$ en $M \otimes_A N$, aunque cuando no haya lugar a confusión utilizaremos sólo $m \otimes n$.

La prueba de la siguiente Proposición es inmediata.

Proposición 2.1.7. *Si $\varphi : M \to M'$ es un morfismo en $\mathcal{M}_A$ y $\psi : N \to N'$ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}$, entonces existe un único mapa lineal $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ tal que $m \otimes_A n \mapsto \varphi(m) \otimes_A \psi(n)$.* □

Observación 2.1.8. Observar que si $M \in \mathcal{M}_A$ y $N \in {}_A\mathcal{M}$ entonces

$$(A \otimes M) \otimes_A N \simeq A \otimes (M \otimes_A N)$$

como espacios vectoriales, identificando $(a \otimes m) \otimes_A n \simeq a \otimes (m \otimes_A n)$.
De la misma forma

$$M \otimes_A (N \otimes A) \simeq (M \otimes_A N) \otimes A$$

identificando $m \otimes_A (n \otimes a) \simeq (m \otimes_A n) \otimes a$.

Proposición 2.1.9. *Sean $M, N \in {}_A\mathcal{M}_A$, entonces $M \otimes_A N \in {}_A\mathcal{M}_A$.*

Demostración: Dado que $M \in {}_A\mathcal{M}_A$, por la Observación 2.1.3, tenemos que la acción por la izquierda $A \otimes M \xrightarrow{\cdot} M$ es un morfismo en $\mathcal{M}_A$ y es claro que $id_N : N \to N$ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}$. Luego por la Proposición 1.1.6 tenemos que $\cdot \otimes id_N : (A \otimes M) \otimes_A N \to M \otimes_A N$ es un mapa lineal. A su vez $(A \otimes M) \otimes_A N \simeq A \otimes (M \otimes_A N)$, entonces componiendo $\cdot \otimes id_N$ con este isomorfismo damos estructura de A-módulo a izquierda a $M \otimes_A N$ de forma tal que:

$$a *_l (m \otimes_A n) = (a \cdot m) \otimes_A n, \ \forall a \in A, \ m \in M, \ n \in N.$$

Análogamente damos estructura de A-módulo a derecha a $M \otimes_A N$ de forma tal que:

$$(m \otimes_A n) *_r a = m \otimes_A (n \cdot a), \ \forall a \in A, \ m \in M, \ n \in N.$$

Para ver que $M \otimes_A N$ es un A-bimódulo falta ver que $*_l$ y $*_r$ son compatibles:

$$\begin{aligned} a' * ((m \otimes_A n) * a) &= a' * (m \otimes_A n \cdot a) = a' \cdot m \otimes_A n \cdot a = \\ &= (a' \cdot m \otimes_A n) * a = (a' * (m \otimes_A n)) * a \quad \forall a, a' \in A, \ m \in M, \ n \in N. \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.10. Si $M_i \in {}_A\mathcal{M}_A \ \forall i = 1, \cdots, n$, definimos:

$$M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n = \frac{M_1 \otimes \cdots \otimes M_n}{V}$$

donde $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, con

$V_i = \Bbbk\{m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \cdot_r a \otimes m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n - m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes a \cdot_l m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_n\}, \ \forall i = 1, \cdots, n.$

Observación 2.1.11. En forma análoga a la Proposición 2.1.8, se prueba que si $M_i \in {}_A\mathcal{M}_A \ \forall i = 1, \cdots, n$ entonces $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n \in {}_A\mathcal{M}_A$.

Observación 2.1.12. Dados $M, N, P \in {}_A\mathcal{M}_A$ vale:

$$M \otimes_A N \otimes_A P \simeq (M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$$

como A-bimódulos. Lo mismo puede extenderse para n tensorandos.

Definición 2.1.13. Sean $M, N \in {}_A\mathcal{M}_A$. Decimos que un mapa lineal $f : M \to N$ es un *morfismo de A-bimódulos* si f es un morfismo de módulos a izquierda y a derecha, es decir si verifica:

$$f(a \cdot m \cdot b) = a \cdot f(m) \cdot b, \ \forall a, b \in A, \ m \in M.$$

Escribiremos f *es un morfismo en* ${}_A\mathcal{M}_A$ para decir que f es un morfismo de A-bimódulos.

A continuación veremos la propiedad universal de la suma directa en el contexto de A-bimódulos y morfismos de A-bimódulos.

Proposición 2.1.14. *Sean $N \in {}_A\mathcal{M}_A$, $M_i \in {}_A\mathcal{M}_A$, $\forall i \in I$, y $\varphi_i : M_i \to N$ morfismos en ${}_A\mathcal{M}_A$ $\forall i \in I$. Entonces existe un único φ morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\varphi"] & N . \\ M_j \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Por la propiedad universal de la suma directa en espacios vectoriales el mapa $\varphi : \oplus_{i\in I} M_i \to N$ necesariamente está definido por $\varphi(\sum_{i\in I} m_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(m_i)$.
El mapa φ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$ pues cada φ_i lo es. Además $\varphi\mid_{M_j} = \varphi_j$ y por lo tanto φ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. $\square$

Observación 2.1.15. Si $M \in {}_A\mathcal{M}_A$ entonces $M \otimes_A A \simeq M$ en ${}_A\mathcal{M}_A$ mediante $m \otimes a \mapsto m \cdot_r a$ y $m \mapsto m \otimes 1_A$. Análogamente $A \otimes_A M \simeq M$ en ${}_A\mathcal{M}_A$ definiendo $a \otimes m \mapsto a \cdot_l m$ y $m \mapsto 1_A \otimes m$.

2.2. Álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$

Definición 2.2.1. Una terna (B, m, u) es un *álgebra en* ${}_A\mathcal{M}_A$ si:

1. $B \in {}_A\mathcal{M}_A$ y

2. $m : B \otimes_A B \to B$, $\;u : A \to B$ son morfismos en ${}_A\mathcal{M}_A$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, "id\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes id"'] & B \otimes_A B , \arrow[d, "m"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "m"'] & B \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A B \arrow[r, "u\otimes id_B"] \arrow[dr, "\simeq"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "m"] & B \otimes_A A . \arrow[l, "id_B\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Proposición 2.2.2. *Sea B un A-bimódulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen mapas lineales $m : B \otimes_A B \to B$ y $u : A \to B$ tales que (B, m, u) es un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$.*

2. *Existen mapas lineales $m_B : B \otimes B \to B$ y $u_B : \Bbbk \to B$ tales que (B, m_B, u_B) es una $\Bbbk$-álgebra, y si $1_B = u_B(1_\Bbbk)$ y escribimos $m_B(b \otimes b') = bb'$, $\forall b, b' \in B$, entonces se verifican las siguientes condiciones:*

   a) $(a \cdot b)b' = a \cdot (bb')$, $\forall a \in A$, $b, b' \in B$

   b) $b(b' \cdot a) = (bb') \cdot a$, $\forall a \in A$, $b, b' \in B$

   c) $(b \cdot a)b' = b(a \cdot b')$, $\forall a \in A$, $b, b' \in B$

   d) $a \cdot 1_B = 1_B \cdot a$, $\forall a \in A$.

Demostración: Notar que (B, m_B, u_B) es una $\Bbbk$-álgebra si y sólo si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \otimes B \arrow[r, "id \otimes m_B"] \arrow[d, "m_B \otimes id"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ B \otimes B \arrow[r, "m_B"'] & B \end{tikzcd} \quad y \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes B \arrow[r, "u_B \otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] & B \otimes \Bbbk \arrow[l, "id \otimes u_B"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

- Observar que dado $m : B \otimes_A B \to B$, si definimos $m_B : B \otimes B \to B$ por $m_B = m \circ \pi$, donde π es la proyección canónica de $B \otimes B$ sobre $B \otimes_A B$, entonces m_B verifica 2.c).

- Recíprocamente, dado $m_B : B \otimes B \to B$ que verifica 2.c), la propiedad universal del cociente aplicada a $\pi : B \otimes B \to B \otimes_A B$ implica que existe un único mapa lineal $m : B \otimes_A B \to B$ tal que $m_B = m \circ \pi$.

- Sean entonces $m : B \otimes_A B \to B$ y $m_B : B \otimes B \to B$ relacionados por $m_B = m \circ \pi$. La condición de que m sea un morfismo de A-bimódulos equivale a que m_B verifique 2.a) y 2.b). También es claro que la sobreyectividad de π implica que (2.1) conmuta si y sólo si (2.3) conmuta.

- Dado $u : A \to B$ morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$, definimos $u_B : \Bbbk \to B$ por $u_B = u \circ u_A$, donde u_A es el mapa unidad de A como $\Bbbk$-álgebra. Sean $1_A = u_A(1_\Bbbk)$ y $1_B = u(1_A) = u_B(1_\Bbbk)$. Como u es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$ tenemos que:

$$a \cdot 1_B = a \cdot u(1_A) = u(a1_A) = u(a) = u(1_A a) = u(1_A) \cdot a = 1_B \cdot a, \ \forall a \in A,$$

luego 1_B verifica 2.d).

- Recíprocamente, dado $u_B : \Bbbk \to B$ que verifica 2.d), definimos $u : A \to B$ mediante $u(a) = a \cdot 1_B = 1_B \cdot a,\ \forall a \in A$.
  Es inmediato probar que u definido de esta manera es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$. Además $(u \circ u_A)(1_\Bbbk) = u(1_A) = 1_B = u_B(1_\Bbbk)$ entonces $u \circ u_A = u_B$.

- Sean entonces $u : A \to B$ y $u_B : \Bbbk \to B$ relacionados por $u_B = u \circ u_A$ con u morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$. Observar que (2.2) equivale a: $b = u(1_A)b = bu(1_A),\ \forall b \in B$ y que (2.4) equivale a: $b = u_B(1_\Bbbk)b = bu_B(1_\Bbbk),\ \forall b \in B$. Como $u(1_A) = u_B(1_\Bbbk) = 1_B$, entonces u verifica (2.2) si y sólo si u_B verifica (2.4).

□

Observación 2.2.3. Si (B, m, u) es un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$, escribiremos $1_B = u(1_A)$ y $bb' = m(b \otimes_A b'),\ \forall b, b' \in B$.

Definición 2.2.4. Sean (B, m, u_B), $(B', m', u_{B'})$ álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$. Decimos que $\varphi : B \to B'$ es un *morfismo de álgebras en* ${}_A\mathcal{M}_A$ si φ es un morfismo de A-bimódulos que además hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[d, "m"'] & B' \otimes_A B' \arrow[d, "m'"] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] & B' \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] & B' \\ A \arrow[u, "u_B"] \arrow[ur, "u_{B'}"'] & \end{tikzcd} .$$

Observación 2.2.5. Notar que la conmutatividad de los diagramas anteriores es equivalente a $\varphi(b_1 b_2) = \varphi(b_1)\varphi(b_2),\ \forall b_1, b_2 \in B$ y $\varphi(1_B) = 1_{B'}$.

Observación 2.2.6. Sea $\varphi : B \to B'$ un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$. Notar que de la proposición 2.2.2 se deduce que φ es un morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ si y sólo si φ es un morfismo de álgebras.

2.3. Álgebra tensorial

Definición 2.3.1. Sea $M \in {}_A\mathcal{M}_A$, definimos

$$T_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$$

donde $M_0 = A,\ \ M_1 = M$ y $M_n = \underbrace{M \otimes_A \ldots \otimes_A M}_{n \text{ veces}}\ \forall n \geq 2$.

Observación 2.3.2. Observar que la Proposición (2.1.4) implica que $T_A(M) \in {}_A\mathcal{M}_A$. Explícitamente la estructura de A-bimódulo de $T_A(M)$ es la siguiente:

1. Si $n = 0$: $M_0 = A$ con la estructura de A-bimódulo de A (dada por el producto).
2. Si $n = 1$: $M_1 = M$ con la estructura de A-bimódulo de M.
3. Si $n \geq 2$: $M_n = \underbrace{M \otimes_A \ldots \otimes_A M}_{n \text{ veces}}$ donde las acciones son:

$$a *_l (m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (a \cdot m_1) \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n$$

y

$$(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) *_r a = m_1 \otimes \cdots \otimes m_{n-1} \otimes (m_n \cdot a)$$

Observación 2.3.3. Notar que existe un isomorfimo de A-bimódulos:

$$\left(\bigoplus_{m \geq 0} M_m\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{n \geq 0} M_n\right) \simeq \bigoplus_{m,n \geq 0} M_m \otimes_A M_n$$

obtenido identificando $(\sum_m x_m) \otimes_A (\sum_n y_n) \simeq \sum_{m,n} x_m \otimes_A y_n,\ \forall x_m \in M_m,\ y_n \in M_n$.

Teorema 2.3.4. *Si $M \in {}_A\mathcal{M}_A$, entonces $T_A(M)$ admite una estructura de álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$.*

Demostración: Tiene sentido definir $m_{j,k} : M_j \otimes_A M_k \to M_{j+k},\ \forall j,k \geq 0$ de la siguiente manera:

- Para $j = k = 0$, $m_{0,0}(a \otimes b) = ab$.
- Para $j = 0$ y $k \geq 1$, $m_{0,k}(a \otimes (m_1 \otimes \cdots \otimes m_k)) = a *_l (m_1 \otimes \cdots \otimes m_k) = (a \cdot m_1) \otimes \cdots \otimes m_k$.
- Para $j \geq 1$ y $k = 0$, $m_{j,0}((m_1 \otimes \cdots \otimes m_j) \otimes a) = (m_1 \otimes \cdots \otimes m_j) *_r a = m_1 \otimes \cdots \otimes (m_j \cdot a)$.
- Para $j \geq 1$ y $k \geq 1$, $m_{j,k}$ es concatenar los elementos de M_j con los de M_k, es decir:

$$m_{j,k}((m_1 \otimes \cdots \otimes m_j) \otimes (n_1 \otimes \cdots \otimes n_k)) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_j \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_k.$$

Luego $m_{j,k} : M_j \otimes_A M_k \to M_{j+k} \subseteq T_A(M)$ es morfismo de A-bimódulos, $\forall j,k \geq 0$. La propiedad universal de la suma directa (Prop. (2.1.14)) implica que existe un único morfismo m en ${}_A\mathcal{M}_A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j,k \geq 0} M_j \otimes_A M_k \arrow[r, "m"] & T_A(M) \\
M_j \otimes_A M_k \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "m_{j,k}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la observación (2.3.3) sabemos que $\bigoplus_{j,k\geq 0} M_j \otimes_A M_k \simeq T_A(M) \otimes_A T_A(M)$. Entonces componiendo m con este isomorfismo obtenemos, abusando de la notación, $m : T_A(M) \otimes_A T_A(M) \to T_A(M)$ morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$.

Por otra parte definimos $u : A \to T_A(M)$ como la inclusión $u : A = M_0 \hookrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} M_n = T_A(M)$, claramente es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$.

- Veamos que m hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_A(M) \otimes_A T_A(M) \otimes_A T_A(M) \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"'] & T_A(M) \otimes_A T_A(M) \arrow[d, "m"] \\ T_A(M) \otimes_A T_A(M) \arrow[r, "m"'] & T_A(M) \end{tikzcd}$$

  Utilizando nuevamente la propiedad universal de la suma directa alcanza con probar que el siguiente diagrama conmuta $\forall m, n, p \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} M_m \otimes_A M_n \otimes_A M_p \arrow[r, "m_{m,n}\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m_{n,p}"'] & M_{m+n} \otimes_A M_p \arrow[d, "m_{m+n,p}"] \\ M_m \otimes_A M_{n+p} \arrow[r, "m_{m,n+p}"'] & M_{m+n+p} \end{tikzcd} .$$

  Observar que la conmutatividad de este diagrama se deduce de lo siguiente:

  - Si $m = n = p = 0$, el diagrama resulta ser el que corresponde a la propiedad asociativa en el álgebra A.
  - Si $m = 1$ y $n = p = 0$, el diagrama resulta ser el que corresponde a que M sea un A-módulo a derecha.
  - Si $m = 0$, $n = 1$ y $p = 0$, el diagrama resulta ser el que corresponde a la compatibilidad de las acciones en $M \in {}_A\mathcal{M}_A$.
  - Si $m = n = 0$ y $p = 1$, el diagrama resulta ser el que corresponde a que M sea un A-módulo a izquierda.
  - Si $m, n \geq 1$ y $p = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&(m_{m+n,0} \circ (m_{m,n} \otimes id))((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) \otimes a) = \\
&= m_{m+n,0}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) \otimes a) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m+n-1} \otimes (x_{m+n} \cdot a) = \\
&= m_{m,n}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n} \cdot a)) = \\
&= (m_{m,n} \circ (id \otimes m_{n,0}))((x_1 \otimes \cdots x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) \otimes a).
\end{aligned}$$

- Si $m = 0$ y $n, p \geq 1$, es análogo al caso anterior, utilizando la definición de $*_l$.
- Si $m \geq 1$, $n = 0$ y $p \geq 1$, tenemos:

  $(m_{m+p} \circ (m_{m,0} \otimes id))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes a \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m-1} \otimes (x_m \cdot_r a) \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$

  y

  $(m_{m+p} \circ (id \otimes m_{0,p}))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes a \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes (a \cdot_l y_1) \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p$

  Estos dos resultados son iguales debido a la definición de M_n.
- Si $m, n, p \geq 1$ entonces:

$$\begin{aligned}
&(m_{m+n,p} \circ (m_{m,n} \otimes id))((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_p)) = \\
&= x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \otimes z_1 \otimes \cdots \otimes z_p = \\
&= (m_{m,n+p} \circ (id \otimes m_{n,p}))((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \otimes (z_1 \otimes \cdots \otimes z_p)).
\end{aligned}$$

- Veamos que u y m hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A T_A(M) \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & T_A(M) \otimes_A T_A(M) \arrow[d, "m"] \\
& T_A(M)
\end{tikzcd}$$

  Por la propiedad universal de la suma directa es suficiente probar que el siguiente diagrama conmuta $\forall m, n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A M_n \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & A \otimes_A M_n \arrow[d, "m_{0,n}"] \\
& M_n
\end{tikzcd}$$

  donde el isomorfismo entre $A \otimes_A M_n$ y M_n es el que está definido en la Observación (2.1.8). Calculamos

$$(m_{0,n} \circ (u \otimes id))(a \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (a \cdot x_1) \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \simeq a \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n.$$

  Por lo tanto el diagrama conmuta.

- Análogamente probamos que u y m hacen conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_A(M) \otimes_A T_A(M) \arrow[d, "m"'] & T_A(M) \otimes_A A \arrow[l, "id \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
T_A(M)
\end{tikzcd}$$

En conclusión $(T_A(M), m, u)$ es un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$. $\square$

Definición 2.3.5. Llamamos *álgebra tensorial de M sobre A* a $T_A(M)$ con la estructura de álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$ definida en el teorema anterior.

Observación 2.3.6. Notar que el álgebra tensorial es un álgebra graduada.

2.4. Propiedad universal del álgebra tensorial

Teorema 2.4.1. *Sean $M \in {}_A\mathcal{M}_A$, B un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$ y $\varphi : M \to B$ un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$. Entonces existe un único $\hat{\varphi} : T_A(M) \to B$ morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "inc"'] & B \\ T_A(M) \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Demostración: Para cada $j = 0, 1, \cdots$ definimos $\hat{\varphi}_j : M_j \to B$ de la siguiente manera:

- Si $j = 0$, $\hat{\varphi}_0(a) = a \cdot 1_B$. Obsérvese que como B es un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$, entonces $\hat{\varphi}_0(a) = 1_B \cdot a$.
- Si $j = 1$, $\hat{\varphi}_1 = \varphi$.
- Si $j \geq 2$. Generalizando la Proposición 2.1.6 para una cantidad j de morfismos en ${}_A\mathcal{M}_A$ y aplicándola a φ, obtenemos que existe un único mapa lineal $\varphi^{\otimes_A^j} := \underbrace{\varphi \otimes_A \cdots \otimes_A \varphi}_{j\ veces}$ tal que:

  $$m_1 \otimes_A \cdots \otimes_A m_j \mapsto \varphi(m_1) \otimes_A \cdots \otimes_A \varphi(m_j).$$

  A su vez, a partir de la multiplicación $m_B : B \otimes_A B \to B$, tenemos mapas lineales $m^1 = m_B$ y $m^n = {m_B}^{n-1} \circ (m_B \otimes id_{n-1})$, $\forall n \geq 2$, donde $id_{n-1} = \underbrace{id_B \otimes_A \cdots \otimes_A id_B}_{n-1\ veces}$.

  Luego componiendo estos mapas tiene sentido definir $\hat{\varphi}_j := m^{j-1} \circ \varphi^{\otimes_A^j}$, $\forall j \geq 2$; es decir:

  $$\hat{\varphi}_j(m_1 \otimes \cdots \otimes m_j) = \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_j).$$

Es claro que $\hat{\varphi}_j$ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$, $\forall j \geq 0$. Entonces por la propiedad universal de la suma directa tenemos que existe un único $\hat{\varphi} : \bigoplus_{n \geq 0} M_n \to B$ morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$, que extiende a cada $\hat{\varphi}_j$. Es inmediato que $\hat{\varphi}$ hace conmutar el diagrama (2.5).

A continuación mostraremos que $\hat{\varphi}$ es un morfismo de álgebras.

- Veamos que $\hat{\varphi}$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_A(M)\otimes_A T_A(M) \arrow[r, "\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi}"] \arrow[d, "m"'] & B\otimes_A B \arrow[d, "m_B"] \\ T_A(M) \arrow[r, "\hat{\varphi}"'] & B \end{tikzcd}$$

donde m y m_B son los productos en $T_A(M)$ y B como álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$. Utilizando nuevamente la propiedad universal de la suma directa es suficiente probar que el siguiente diagrama conmuta $\forall n, p \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} M_n\otimes_A M_p \arrow[r, "\hat{\varphi}_n\otimes\hat{\varphi}_p"] \arrow[d, "m_{n,p}"'] & B\otimes_A B \arrow[d, "m_B"] \\ M_{n+p} \arrow[r, "\hat{\varphi}_{n+p}"'] & B \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de este diagrama se deduce de lo siguiente:

- Si $n = p = 0$, tenemos $(m_B\circ(\hat{\varphi}_0\otimes\hat{\varphi}_0))(a\otimes a') = m_B((1_B\cdot a)\otimes(a'\cdot 1_B))$. Como estamos trabajando en $B\otimes_A B$ se verifica que $(1_B\cdot a)\otimes(a'\cdot 1_B) = (1_B\otimes a\cdot(a'\cdot 1_B)) = 1_B\otimes((aa')\cdot 1_B))$ y por lo tanto $(m_B\circ(\hat{\varphi}_0\otimes\hat{\varphi}_0))(a\otimes a') = m_B(1_B\otimes((aa')\cdot 1_B)) = 1_B((aa')\cdot 1_B) = (aa')\cdot 1_B = (\hat{\varphi}_0\circ m_{0,0})(a\otimes a'), \forall a, a' \in A$. Es decir $m_B\circ(\hat{\varphi}_0\otimes\hat{\varphi}_0) = \hat{\varphi}_0\circ m_{0,0}$.
- Si $n = 0$ y $p = 1$, tenemos: $(\hat{\varphi}_0\otimes\varphi)(a\otimes m) = (1_B\cdot a)\otimes\varphi(m)$. Como estamos trabajando en $B\otimes_A B$ se verifica que $(1_B\cdot a)\otimes\varphi(m) = 1_B\otimes(a\cdot\varphi(m))$ y por lo tanto $(m_B\circ(\hat{\varphi}_0\otimes\varphi))(a\otimes m) = 1_B(a\cdot\varphi(m)) = a\cdot\varphi(m)$. Como φ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$ entonces $a\cdot\varphi(m) = \varphi(a\cdot m) = \varphi(m_{0,1}(a\otimes m))$ y en conclusión $m_B\circ(\hat{\varphi}_0\otimes\varphi) = \varphi\circ m_{0,1}$.
- Si $n = 1$ y $p = 0$, tenemos: $(\varphi\otimes\hat{\varphi}_0)(m\otimes a) = \varphi(m)\otimes(a\cdot 1_B)$. Como estamos trabajando en $B\otimes_A B$ se verifica que $\varphi(m)\otimes(a\cdot 1_B) = (\varphi(m)\cdot a)\otimes 1_B$ y por lo tanto $(m_B\circ(\varphi\otimes\hat{\varphi}_0))(m\otimes a) = (\varphi(m)\cdot a)1_B = \varphi(m)\cdot a$. Como φ es un morfismo en ${}_A\mathcal{M}_A$ entonces $\varphi(m)\cdot a = \varphi(m\cdot a)$ y en conclusión $m_B\circ(\varphi\otimes\hat{\varphi}_0) = \varphi\circ m_{1,0}$.
- Si $n, p \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}&(m_B\circ(\hat{\varphi}_n\otimes\hat{\varphi}_p))((m_1\otimes\cdots\otimes m_n)\otimes(m_1'\otimes\cdots\otimes m_p')) = \\ &= m_B(\varphi(m_1)\cdots\varphi(m_n))\otimes(\varphi(m_1{}')\cdots\varphi(m_p{}')) = \\ &= \varphi(m_1)\cdots\varphi(m_n)\varphi(m_1')\cdots\varphi(m_p')\end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned}&(\hat{\varphi}_{n+p}\circ m_{n,p})((m_1\otimes\cdots\otimes m_n)\otimes(m_1'\otimes\cdots\otimes m_p')) = \\ &= \hat{\varphi}_{n+p}(m_1\otimes\cdots m_n\otimes m_1{}'\otimes\cdots\otimes m_p{}') = \\ &= \varphi(m_1)\cdots\varphi(m_n)\varphi(m_1')\cdots\varphi(m_p').\end{aligned}$$

- Veamos que $\hat{\varphi}$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & T_A(M) \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

  donde u y u' son los mapas unidad de $T_A(M)$ y de B como álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$, respectivamente. Como indica la Proposición 2.2.2, u' esta definido de forma tal que $u'(a) = a \cdot 1_B = 1_B \cdot a, \ \forall a \in A$.
  Luego
  $$(\hat{\varphi} \circ u)(a) = \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}_0(a) = a \cdot 1_B = u'(a), \ \forall a \in A.$$

Para finalizar la prueba, veamos la unicidad de $\hat{\varphi}$.
Si existe $\hat{\psi} : T_A(M) \to B$ un morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ que hace conmutar el diagrama (2.5), entonces:

- por definición de morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ tenemos $\hat{\psi}(1_{T_A(M)}) = 1_B$. Como $1_{T_A(M)} = 1_A$ se verifica que $\hat{\psi}(a) = \hat{\psi}(a1_A) = a \cdot \hat{\psi}(1_A) = a \cdot 1_B, \ \forall a \in A$.
- como $\hat{\psi}$ hace conmutar el diagrama (2.5) se verifica que $\hat{\psi}(m) = \varphi(m), \ \forall m \in M$.
- por definición de morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ tenemos $\hat{\psi}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \hat{\psi}(m_1) \cdots \hat{\psi}(m_n) = \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_n)$, donde $m_i \in M \ \forall i = 1, \cdots, n$.

Luego $\hat{\psi}$ coincide con el mapa $\hat{\varphi}$ definido anteriormente. $\square$

Observación 2.4.2. Dado $\varphi : A \to B$ un morfismo de álgebras, podemos dar estructura de A-bimódulo a B via φ definiendo acciones a derecha e izquierda de la siguiente manera

$$a \cdot b \cdot a' = \varphi(a)\, b\, \varphi(a'), \ \forall a, a' \in A, \ b \in B.$$

Con estas acciones, la multiplicación de B verifica las condiciones del punto 2 de la Proposición 2.2.2 y por lo tanto existen mapas lineales $m : B \otimes_A B \to B$ y $u : A \to B$ tales que (B, m, u) es un álgebra en ${}_A\mathcal{M}_A$. Explícitamente:

$$m(b \otimes_A b') = bb', \ \forall b, b' \in B \text{ y}$$

$$u(a) = a \cdot 1_B = \varphi(a), \ \forall a \in A.$$

Corolario 2.4.3. *Sea* $M \in {}_A\mathcal{M}_A$. *Sean* B *un álgebra,* $\varphi_0 : A \to B$ *un morfismo de álgebras y* $\varphi_1 : M \to B$ *un mapa lineal que verifica*

$$\varphi_1(a \cdot m \cdot a') = \varphi_0(a)\varphi_1(m)\varphi_0(a'), \ \forall m \in M, a, a' \in A. \tag{2.6}$$

Entonces existe un único $\varphi : T_A(M) \to B$ *morfismo de álgebras en* ${}_A\mathcal{M}_A$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "inc"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ T_A(M) \arrow[r, "\varphi"] & B. \\ A \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "\varphi_0"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Observar que la condicición (2.6) equivale a que $\varphi_1 : M \to B$ sea un morfismo de A-bimódulos con $B \in {}_A\mathcal{M}_A$ via φ_0.
Aplicando la propiedad universal de $T_A(M)$ obtenemos que existe un único $\varphi : T_A(M) \to B$ morfismo de álgebras en ${}_A\mathcal{M}_A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "inc"'] & B \, . \\ T_A(M) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Finalmente observar que la condición $\varphi(1_{T_A(M)}) = 1_B$ (ver observación 2.2.5) equivale a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "inc"'] & B \, . \\ T_A(M) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Capítulo 3

La coálgebra cotensorial

El lector que no esté familiarizado con los conceptos básicos de coálgebras y comódulos puede encontrarlos en [1] y [2].

3.1. Bicomódulos sobre una coálgebra

A partir de esta sección C denota una coálgebra sobre $\Bbbk$.

Definición 3.1.1. Decimos que (M, δ_l, δ_r) es un C-*bicomódulo* si (M, δ_l) es un C-comódulo a izquierda, (M, δ_r) es un C-comódulo a derecha y las coacciones δ_l y δ_r son compatibles, en el sentido

$$(id_C \otimes \delta_r) \circ \delta_l(m) = (\delta_l \otimes id_C) \circ \delta_r(m), \ \forall m \in M.$$

Escribiremos $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ para decir que M es un C-bicomódulo.

Observación 3.1.2. Con la notación de Sweedler, si

$$\delta_r(m) = \sum_{(m)} m_0 \otimes m_1 \quad y \quad \delta_l(n) = \sum_{(n)} n_{-1} \otimes n_0,$$

la condición de compatibilidad queda:

$$\sum m_{-1} \otimes m_0 \otimes m_1 := \sum_{(m),(m_0)} m_{-1} \otimes (m_0)_0 \otimes (m_0)_1 = \sum_{(m),(m_0)} (m_0)_{-1} \otimes (m_0)_0 \otimes m_1$$

Ejemplo 3.1.3. *C es un C-bicomódulo con el coproducto como coacción.*

Observación 3.1.4. Notar que si M es un espacio vectorial que tiene estructura de comódulo a izquierda y de comódulo a derecha, entonces M es un bicomódulo si y sólo si la coacción por la izquierda $\delta_l : M \to C \otimes M$ es un morfismo de comódulos a derecha, si y sólo si la coacción por la derecha $\delta_r : M \to M \otimes C$ es un morfismo de comódulos a izquierda.
En lo anterior consideramos $C \otimes M$ como comódulo a derecha mediante $id_C \otimes \delta_r$ y $M \otimes C$ como comódulo a izquierda mediante $\delta_l \otimes id_C$.

Proposición 3.1.5. *Si* $M_i \in {}^C\mathcal{M}^C$, $\forall i \in I$, *entonces* $\bigoplus_{i\in I} M_i \in {}^C\mathcal{M}^C$.

Demostración: Llamemos δ_l^i y δ_r^i a las coacciones a izquierda y derecha en M_i. Sea $x \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces $x = \sum_{i\in I} x_i$, donde sólo una cantidad finita de los x_i son no nulos.
Definimos $\delta_l : \bigoplus_{i\in I} M_i \to C \otimes (\bigoplus_{i\in I} M_i)$ por

$$\delta_l(x) = \sum_{i\in I} \delta_l^i(x_i) = \sum (x_i)_{-1} \otimes (x_i)_0$$

y $\delta_r : \bigoplus_{i\in I} M_i \to (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes C$ por

$$\delta_r(x) = \sum_{i\in I} \delta_r^i(x_i) = \sum (x_i)_0 \otimes (x_i)_1.$$

Con estas definiciones $\bigoplus_{i\in I} M_i$ resulta un comódulo a izquierda y a derecha.
Para ver que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un bicomódulo sólo falta ver que δ_l y δ_r son compatibles:

$$((id_C \otimes \delta_r) \circ \delta_l)(x) = \sum (x_i)_{-1} \otimes \delta_r^i((x_i)_0) = \sum (x_i)_{-1} \otimes ((x_i)_0)_0 \otimes ((x_i)_0)_1 =$$
$$= \sum ((x_i)_0)_{-1} \otimes ((x_i)_0)_0 \otimes (x_i)_1 = \sum \delta_l^i((x_i)_0) \otimes (x_i)_1 = ((\delta_l \otimes id_C) \circ \delta_r)(x).$$

□

Observación 3.1.6. Notar que en la construcción anterior la inclusión $\iota_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$, $\forall j \in J$, luego esto prueba que ${}^C\mathcal{M}^C$ tiene coproductos.

Definición 3.1.7. Si $M \in \mathcal{M}^C$ y $N \in {}^C\mathcal{M}$, definimos el *producto cotensorial de* M y N como

$$M \boxtimes_C N = ker(\delta_r^M \otimes id_N - id_M \otimes \delta_l^N).$$

A veces escribiremos $\sum_{i=1}^l m_i \boxtimes n_i$ para decir $\sum_{i=1}^l m_i \otimes n_i \in M \boxtimes_C N$.

Observación 3.1.8. Notar que con la notación de Sweedler tenemos:

$$\sum_{i=1}^{l} m_i \otimes n_i \in M \boxtimes_C N \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{l} \sum_{(m_i)} (m_i)_0 \otimes (m_i)_1 \otimes n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{(n_i)} m \otimes (n_i)_{-1} \otimes (n_i)_0$$

La prueba de la siguiente Proposición es inmediata.

Proposición 3.1.9. *Sean $\varphi : M \to M'$ un morfismo en $\mathcal{M}^C$ y $\psi : N \to N'$ un morfismo en ${}^C\mathcal{M}$, entonces existe un único mapa lineal $\varphi \boxtimes \psi : M \boxtimes_C N \to M' \boxtimes_C N'$ tal que $m \boxtimes n \mapsto \varphi(m) \boxtimes \psi(n)$.*

$\square$

Proposición 3.1.10. *Si $M \in \mathcal{M}^C$ y $N \in {}^C\mathcal{M}$ entonces*

$$(C \otimes M) \boxtimes_C N \simeq C \otimes (M \boxtimes_C N)$$

como espacios vectoriales, y de la misma forma

$$M \boxtimes_C (N \otimes C) \simeq (M \boxtimes_C N) \otimes C.$$

Demostración: Sabemos que $C \otimes (M \otimes N) \simeq (C \otimes M) \otimes N$ como espacios vectoriales, donde $(C \otimes M) \in \mathcal{M}^C$ mediante $id \otimes \delta_M$. Sea $\varphi : C \otimes (M \otimes N) \to (C \otimes M) \otimes N$ tal isomorfismo.
Tenemos que $C \otimes (M \boxtimes_C N) \subseteq C \otimes (M \otimes N)$, luego queremos ver $\varphi(C \otimes (M \boxtimes_C N)) = (C \otimes M) \boxtimes_C N$.
Sea $\sum_{i=1}^{l} c \otimes (m_i \otimes n_i) \in C \otimes (M \boxtimes_C N)$ entonces $\varphi(\sum_{i=1}^{l} c \otimes (m_i \otimes n_i)) = \sum_{i=1}^{l} (c \otimes m_i) \otimes n_i$.
Como $\sum_{i=1}^{l} c \otimes (m_i \otimes n_i) \in C \otimes (M \boxtimes_C N)$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{(m_i)} c \otimes (m_i)_{-1} \otimes (m_i)_0 \otimes n_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{n_i} c \otimes m_i \otimes (n_i)_0 \otimes (n_i)_1,$$

es decir que

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{(m_i)} (c \otimes m_i)_{-1} \otimes (c \otimes m_i)_0 \otimes n_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{(n_i)} c \otimes m_i \otimes (n_i)_0 \otimes (n_i)_1$$

y por lo tanto, $\sum_{i=1}^{l} (c \otimes m_i) \otimes n_i \in (C \otimes M) \boxtimes_C N$.
En conclusión $\varphi(\sum_{i=1}^{l} c \otimes m_i \otimes n_i) \in (C \otimes M) \boxtimes_C N$. Análogamente se prueba para φ^{-1}. Luego $(C \otimes M) \boxtimes_C N \simeq C \otimes (M \boxtimes_C N)$.

Análogamente se prueba que $M \boxtimes_C (N \otimes C) \simeq (M \boxtimes_C N) \otimes C$. $\square$

Proposición 3.1.11. *Si $M, N \in {}^C\mathcal{M}^C$, entonces $M \boxtimes_C N \in {}^C\mathcal{M}^C$.*

Demostración: Tenemos que $M \otimes N \in {}^C\mathcal{M}^C$ definiendo como coacción a derecha $\delta_r : M \otimes N \to M \otimes N \otimes C$ por

$$\delta_r(m \otimes n) = \sum_{(n)} m \otimes n_0 \otimes n_1$$

y como coacción a izquierda $\delta_l : M \otimes N \to C \otimes M \otimes N$ por

$$\delta_l(m \otimes n) = \sum_{(m)} m_{-1} \otimes m_0 \otimes n.$$

Observar que $((id_C \otimes \delta_r) \circ \delta_l)(m \otimes n) = ((\delta_l \otimes id_C) \circ \delta_r)(m \otimes n) = \sum_{(m),(n)} m_{-1} \otimes m_0 \otimes n_0 \otimes n_1$. Entonces δ_r y δ_l son compatibles. Luego, para probar que $M \boxtimes_C N \in {}^C\mathcal{M}^C$ alcanza con ver que $M \boxtimes_C N$ es un subcomódulo a izquierda y a derecha de $M \otimes N$, es decir que $\delta_r(M \boxtimes_C N) \subseteq (M \boxtimes_C N) \otimes C$ y $\delta_l(M \boxtimes_C N) \subseteq C \otimes (M \boxtimes_C N)$.
Probaremos que $\delta_r(M \boxtimes_C N) \subseteq (M \boxtimes_C N) \otimes C$ y análogamente se prueba que $\delta_l(M \boxtimes_C N) \subseteq C \otimes (M \boxtimes_C N)$.
Sea $x \in M \boxtimes_C N$, entonces si $x = \sum_i m_i \boxtimes n_i$ tenemos que:

$$\sum_i \sum_{(m_i)} (m_i)_0 \otimes (m_i)_1 \otimes n_i = \sum_i \sum_{(n_i)} m_i \otimes (n_i)_{-1} \otimes (n_i)_0 \tag{3.1}$$

Llamemos $y = \delta_r(x) = (id_M \otimes \delta_r^N)(x)$, luego $y \in M \otimes N \otimes C$ e $y = \sum_i \sum_{(n_i)} m_i \otimes (n_i)_0 \otimes (n_i)_1$. Aplicando a ambos lados de la ecuación (3.1) el mapa $id_M \otimes id_C \otimes \delta_r^N$ obtenemos:

$$\sum_i \sum_{(m_i)} \sum_{(n_i)} (m_i)_0 \otimes (m_i)_1 \otimes (n_i)_0 \otimes (n_i)_1 = \sum_i \sum_{(n_i)} \sum_{((n_i)_0)} m_i \otimes (n_i)_{-1} \otimes (n_i)_0 \otimes (n_i)_1,$$

es decir:

$$(\delta_r^M \otimes id_N \otimes id_C)(y) = (id_M \otimes \delta_l^N \otimes id_C)(y). \tag{3.2}$$

Como $y \in M \otimes N \otimes C$, podemos escribir $y = \sum_{h=1}^n p_h \otimes e_h$ donde $p_h \in M \otimes N$, $\forall h = 1, \cdots, n$ y $\{e_1, \cdots, e_n\} \subseteq C$ es linealmente independiente. Entonces, por (3.2):

$$\sum_{h=1}^n (\delta_r^M \otimes id_N)(p_h) \otimes e_h = \sum_{h=1}^n (id_M \otimes \delta_l^N)(p_h) \otimes e_h.$$

Luego como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente, tenemos que $(\delta_r^M \otimes id_N)(p_h) = (id_M \otimes \delta_l^N)(p_h)$, $\forall h$ y por lo tanto $p_h \in M \boxtimes_C N$, $\forall h = 1, \cdots, n$. Entonces $y \in (M \boxtimes_C N) \otimes C$. $\square$

Definición 3.1.12. Si $M_i \in {}^C\mathcal{M}^C$, $\forall i = 1, \cdots, n$, definimos:

$$M_1 \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C M_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i \subseteq M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$$

donde

$V_i = ker(id_{M_1} \otimes \cdots id_{M_{i-1}} \otimes \delta_r^i \otimes \cdots \otimes id_{M_n} - id_{M_1} \otimes \cdots \otimes id_{M_i} \otimes \delta_l^{i+1} \otimes \cdots \otimes id_{M_n})$, $\forall i = 1, \cdots, n-1$.

Observación 3.1.13. En forma análoga a la Proposición 3.1.10, se prueba que si $M_i \in {}^C\mathcal{M}^C$, $\forall i = 1, \cdots, n$ entonces $M_1 \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C M_n \in {}^C\mathcal{M}^C$.

Observación 3.1.14. Dados $M, N, P \in {}^C\mathcal{M}^C$ los isomorfismos naturales

$$M \otimes N \otimes P \simeq (M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$$

inducen isomorfismos

$$M \boxtimes_C N \boxtimes_C P \simeq (M \boxtimes_C N) \boxtimes_C P \simeq M \boxtimes_C (N \boxtimes_C P)$$

como C-bicomódulos. Lo mismo puede extenderse para n tensorandos.

Definición 3.1.15. Sean $M, N \in {}^C\mathcal{M}^C$. Decimos que $f : M \to N$ es un *morfismo* de C-bicomódulos si f es un morfismo de comódulos a izquierda y a derecha, es decir si verifica:

$$\sum (f(m))_{-1} \otimes (f(m))_0 = \sum m_{-1} \otimes f(m_0) \quad y \quad \sum (f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = \sum f(m_0) \otimes m_1.$$

Observar que estas dos condiciones son equivalentes a

$$\sum m_{-1} \otimes f(m_0) \otimes m_1 = \sum (f(m))_{-1} \otimes (f(m))_0 \otimes (f(m))_1, \ \forall m \in M.$$

Escribiremos f *es un morfismo en* ${}^C\mathcal{M}^C$ para decir que f es un morfismo de C-bicomódulos.

A continuación veremos la propiedad universal de la suma directa en el contexto de C-bicomódulos y morfismos de C-bicomódulos.

Proposición 3.1.16. *Sean $N \in {}^C\mathcal{M}^C$, $M_i \in {}^C\mathcal{M}^C$, $\forall i \in I$ y $\varphi_i : M_i \to N$ morfismos en ${}^C\mathcal{M}^C$, $\forall i \in I$. Entonces existe un único φ morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[r, "\varphi"] & N . \\ M_j \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Por la propiedad universal de la suma directa en espacios vectoriales $\varphi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ necesariamente está definido por $\varphi(\sum_{i \in I} m_i) = \sum_{i \in I} \varphi_i(m_i)$.
El mapa φ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ pues cada φ_i lo es. Además $\varphi |_{M_j} = \varphi_j$ y por lo tanto φ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. $\square$

Proposición 3.1.17. *Si $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ entonces $M \boxtimes_C C \simeq M$ y $C \boxtimes_C M \simeq M$ como C-bicomódulos.*

Demostración: Tenemos que $M \boxtimes_C C = \{x \in M \otimes C \ / \ (\delta_r \otimes id_C)(x) = (id_M \otimes \Delta)(x)\}$. Entonces, si $\sum_{i=1}^{l} m_i \otimes c_i \in M \boxtimes_C C$ se verifica que

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{(m_i)} (m_i)_0 \otimes (m_i)_1 \otimes c_i = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes \sum_{(c_i)} (c_i)_1 \otimes (c_i)_2.$$

Aplicando $id_M \otimes id_C \otimes \varepsilon$ a ambos lados de la ecuación vemos que

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{(m_i)} (m_i)_0 \otimes (m_i)_1 \otimes \varepsilon(c_i) = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes \sum_{(c_i)} (c_i)_1 \otimes \varepsilon((c_i)_2),$$

lo cual implica que $\sum_{i=1}^{l} \varepsilon(c_i)\delta_r(m_i) = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes c_i$.

Por otra parte, como δ_r es coacción a derecha en M tenemos que $(\delta_r \otimes id_C)\delta_r(m) = (id_M \otimes \Delta)\delta_r(m), \ \forall m \in M$; esto implica que $\delta_r(m) \in M \boxtimes_C C, \ \forall m \in M$ y por lo tanto $Im(\delta_r) \subseteq M \boxtimes_C C$.
Luego, podemos definir mapas lineales $\varphi : M \to M \boxtimes_C C$ por $\varphi(m) = \delta_r(m) \ \forall m \in M$ y $\psi : M \otimes C \to M$ por $\psi(m \otimes c) = \varepsilon(c)m \ \forall m \in M, \, c \in C$. Abusando de la notación llamaremos también ψ al mapa anterior restringido a $M \boxtimes_C C$.

Queremos ver que φ y ψ son inverso uno del otro:

- $\psi(\varphi(m)) = \psi(\delta_r(m)) = \psi(\sum_{(m)} m_0 \otimes m_1) = \sum_{(m)} \varepsilon(m_1)m_0 = m, \ \forall m \in M$
- $\varphi\left(\psi\left(\sum_{i=1}^{l} m_i \otimes c_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{l} \varphi\left(\varepsilon(c_i)m_i\right) = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon(c_i)\varphi(m_i) = \sum_{i=1}^{l} \varepsilon(c_i)\delta_r(m_i) =$
  $= \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes c_i, \ \forall m \otimes c \in M \boxtimes_C C.$

Es inmediato probar que $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ implica que φ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$, luego M y $M \boxtimes_C C$ son isomorfos como C-bicomódulos.

Análogamente se prueba que $C \boxtimes_C M \simeq C$. $\square$

Observación 3.1.18. Notar que de la prueba anterior se deduce que $Im(\delta_r) = M \boxtimes_C C$ e $Im(\delta_l) = C \boxtimes_C M$. En particular $Im(\Delta_C) = C \boxtimes_C C$.

3.2. Coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$

Definición 3.2.1. Una terna (D, Δ, ε) es una *coálgebra en* ${}^C\mathcal{M}^C$ si:

1. $D \in {}^C\mathcal{M}^C$ y
2. $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$, $\varepsilon : D \to C$ son morfismos en ${}^C\mathcal{M}^C$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & D \boxtimes_C D \arrow[d, "\Delta\otimes id_D"] \\ D \boxtimes_C D \arrow[r, "id_D\otimes\Delta"'] & D \boxtimes_C D \boxtimes_C D \end{tikzcd} , \tag{3.3}$$

y

$$\begin{tikzcd} D \boxtimes_C C & D \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\Delta"] & C \boxtimes_C D \\ & D \boxtimes_C D \arrow[ul, "id_D\otimes\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon\otimes id_D"'] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Proposición 3.2.2. *Sea D un C-bicomódulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen mapas lineales $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$ y $\varepsilon : D \to C$ tales que (D, Δ, ε) es una coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$.*
2. *Existen mapas lineales $\Delta_D : D \to D \otimes D$ y $\varepsilon_D : D \to \Bbbk$ tales que $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ es una coálgebra y se verifican las siguientes condiciones:*

   a) $(\delta_r \otimes id_D)\Delta_D = (id_D \otimes \delta_l)\Delta_D$,

   b) *los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\Delta_D"] \arrow[d, "\delta_l"'] & D \otimes D \arrow[d, "\delta_l\otimes id_D"] \\ C \otimes D \arrow[r, "id_C\otimes\Delta_D"'] & C \otimes D \otimes D \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "\Delta_D"] \arrow[d, "\delta_r"'] & D \otimes D \arrow[d, "id_D\otimes\delta_r"] \\ D \otimes C \arrow[r, "\Delta_D\otimes id_C"'] & D \otimes D \otimes C \end{tikzcd} ,$$

   c) *el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} D \otimes C \arrow[d, "\varepsilon_D\otimes id_C"'] & D \arrow[l, "\delta_r"'] \arrow[r, "\delta_l"] & C \otimes D \arrow[d, "id_C\otimes\varepsilon_D"] \\ \Bbbk \otimes C \arrow[r, "\simeq"'] & C & C \otimes \Bbbk \arrow[l, "\simeq"] \end{tikzcd} .$$

Demostración: Notar que $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ es un coálgebra si y sólo si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\Delta_D"] \arrow[d, "\Delta_D"'] & D \otimes D \arrow[d, "\Delta_D \otimes id"] \\ D \otimes D \arrow[r, "id \otimes \Delta_D"'] & D \otimes D \otimes D \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

y

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes D & D \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\Delta_D"] & D \otimes \Bbbk\ . \\ & D \otimes D \arrow[ul, "\varepsilon_D \otimes id"] \arrow[ur, "id \otimes \varepsilon_D"'] & \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Observar que la condición 2.a) equivale a $Im(\Delta_D) \subseteq D \boxtimes_C D$. Sea $\iota : D \boxtimes_C D \hookrightarrow D \otimes D$ la inclusión.

- Dado un mapa lineal $\Delta_D : D \to D \otimes D$ que verifica 2.a), es decir $Im(\Delta_D) \subseteq D \boxtimes_C D$, luego podemos escribir $\Delta_D = \iota \circ \Delta$ siendo $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$ un mapa lineal.

- Recíprocamente, dado $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$ lineal, si definimos $\Delta_D = \iota \circ \Delta$, entonces Δ_D es lineal y verifica 2.a).

- Sean entonces $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$ y $\Delta_D : D \to D \otimes D$ relacionados por $\Delta_D = \iota \circ \Delta$. La condición de que Δ sea un morfismo de C-bicomódulos equivale a que Δ_D verifique 2.b). Además es claro que (3.3) conmuta si y sólo si (3.5) conmuta.

- Dado $\varepsilon : D \to C$, definimos $\varepsilon_D = \varepsilon_C \circ \varepsilon$, donde ε_C es el mapa counidad de C como coálgebra.
  Si ε es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ tenemos que:

$$\begin{aligned} &((id_c \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_l)(d) = \sum d_{-1} \otimes \varepsilon_D(d_0) = \sum d_{-1} \otimes \varepsilon_C(\varepsilon(d_0)) \overset{\star}{=} \\ &= \sum (\varepsilon(d))_1 \otimes \varepsilon_C((\varepsilon(d)_2)) \simeq \varepsilon(d) \simeq \sum \varepsilon_C((\varepsilon(d)_1)) \otimes (\varepsilon(d))_2 = \\ &\overset{\star\star}{=} \sum \varepsilon_C(\varepsilon(d_0)) \otimes d_1 = \sum \varepsilon_D(d_0) \otimes d_1 = ((\varepsilon_D \otimes id_C) \circ \delta_r)(d),\ \forall d \in D, \end{aligned}$$

  luego ε_D verifica 2.c). ($\star$ y $\star\star$ provienen de la conmutatividad del diagrama (3.4)).

- Recíprocamente, dado $\varepsilon_D : D \to \Bbbk$ que verifica 2.c) podemos definir $\varepsilon : D \to C$ por $\varepsilon = (\varepsilon_D \otimes id_C) \circ \delta_r = (id_C \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_l$, es decir

$$\varepsilon(d) := \sum \varepsilon_D(d_0)d_1 = \sum d_{-1}\varepsilon_D(d_0),\ \forall d \in D.$$

Es inmediato probar que ε definido de esta manera es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$. Además

$$(\varepsilon_C \circ \varepsilon)(d) = \sum \varepsilon_C(\varepsilon_D(d_0)d_1) = \sum \varepsilon_D(d_0)\varepsilon_C(d_1) = \varepsilon_D(\sum d_0\varepsilon_C(d_1)) = \varepsilon_D(d),\ \forall d \in D,$$

es decir $\varepsilon_D = \varepsilon_C \circ \varepsilon$.

- Sean entonces $\varepsilon : D \to C$ y $\varepsilon_D : D \to \Bbbk$ relacionados por $\varepsilon_D = \varepsilon_C \circ \varepsilon$, con ε morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$. Observar que (3.4) equivale a $\sum \varepsilon_C(\varepsilon(d_1))\, d_2 = d = \sum d_1\, \varepsilon_C(\varepsilon(d_2))$ y que (3.6) equivale a $\sum \varepsilon_D(d_1)\, d_2 = d = \sum d_1\, \varepsilon_D(d_2)$. Entonces ε verifica (3.4) si y sólo si ε_D verifica (3.6).

$\square$

Observación 3.2.3. Notar que el mapa lineal $\varepsilon : D \to C$ definido en la Proposición anterior es un morfismo de coálgebras.
Veamos que ε verifica $\Delta_C \circ \varepsilon = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta$, $d \in D$ entonces

$$\Delta_C(\varepsilon(d)) = \sum \varepsilon(d)_1 \otimes \varepsilon(d)_2 \overset{*}{=} \sum \varepsilon(d_0) \otimes d_1 = (\varepsilon \otimes id)(\delta_r(d)) \overset{**}{=}$$
$$= (\varepsilon \otimes id)((id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_D)(d) = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\Delta_D)(d).$$

(La condición $*$ se verifica pues $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ y $**$ pues ε hace conmutar el diagrama (3.4)).

Definición 3.2.4. Sean $(D_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ y $(D_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$. Decimos que $\varphi : D_1 \to D_2$ es un *morfismo de coálgebras en* ${}^C\mathcal{M}^C$ si φ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ que hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & D_2 \arrow[d, "\Delta_2"] \\ D_1 \boxtimes_C D_1 \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"'] & D_2 \boxtimes_C D_2 \end{tikzcd} ,$$

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_1"'] & D_2 \arrow[dl, "\varepsilon_2"] \\ C & \end{tikzcd} . \tag{3.7}$$

Proposición 3.2.5. *Sean $(D_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$, $(D_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ y $\varphi : D_1 \to D_2$ un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$. Entonces φ es un morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ si y sólo si φ es un morfismo de coálgebras.*

Demostración: D_1 y D_2 son coálgebras con los mismos coproductos y, utilizando la misma notación de la Proposición 3.2.2, con counidades $\varepsilon_{D_i} : D_i \to \Bbbk$, $i = 1, 2$ con ε_{D_i} y ε_i relacionados por $\varepsilon_{D_i}(d) = \varepsilon_C(\varepsilon_i(d))$, $\forall d \in D_i$. Es decir $\varepsilon_i(d) = \sum \varepsilon_{D_i}(d_0)d_1$.
Lo único que hay que probar es que la conmutatividad de (3.7) es equivalente a la de

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_{D_1}"'] & D_2 \arrow[dl, "\varepsilon_{D_2}"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd} . \tag{3.8}$$

- Es inmediato probar que la conmutatividad de (3.7) implica la de (3.8).
- Luego, si (3.8) conmuta tenemos que

  $$\varepsilon_1(d) = \sum \varepsilon_{D_1}(d_0)d_1 = \sum \varepsilon_{D_2}(\varphi(d_0))d_1 = \sum \varepsilon_{D_2}(\varphi(d)_0)\varphi(d)_1 = \varepsilon_2(\varphi(d)), \forall d \in D,$$

  y entonces (3.7) conmuta.

$\square$

3.3. Coálgebra cotensorial

Definición 3.3.1. Sea $M \in {}^C\mathcal{M}^C$, definimos

$$C_C(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$$

donde $M_0 = C$, $M_1 = M$ y $M_n = \underbrace{M \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C M}_{n \ veces}$, $\forall n \geq 2$.

Observación 3.3.2. Observar que la Proposición 3.1.5 implica que $C_C(M) \in {}^C\mathcal{M}^C$.
Explícitamente la estructura de C-bicomódulo de $C_C(M)$ es la siguiente:

1. Si $n = 0$: $M_0 = C$ y es la estructura de C-bicomódulo de C (dada por el coproducto).
2. Si $n = 1$: $M_1 = M$ y es la estructura de C-bicomódulo de M.
3. Si $n \geq 2$: $M_n = \underbrace{M \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C M}_{n \ veces}$ donde la coacción a derecha es $\underbrace{id_M \otimes \cdots \otimes id_M}_{n-1 \ veces} \otimes \delta_r$ y a izquierda es $\delta_l \otimes \underbrace{id_M \otimes \cdots \otimes id_M}_{n-1 \ veces}$.

Observación 3.3.3. Notar que en $C_C(M)$ escribimos M_n para referirnos a $\underbrace{M \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C M}_{n\ veces}$ mientras que en $T_A(M)$ lo utilizamos para referirnos a $\underbrace{M \otimes_A \cdots \otimes_A M}_{n\ veces}$, es decir que utilizamos el mismo símbolo pero en general los objetos a los que se refieren son distintos.

Observación 3.3.4. Notar que existe un isomorfismo de C-bicomódulos:

$$\left(\bigoplus_{m\geq 0} M_m\right) \boxtimes_C \left(\bigoplus_{n\geq 0} M_n\right) \simeq \bigoplus_{m,n\geq 0} M_m \boxtimes_C M_n$$

obtenido identificando $(\sum_m x_m) \boxtimes (\sum_n y_n) \simeq \sum_{m,n} x_m \boxtimes y_n,\ \forall x_m \in M_m,\ y_n \in M_n$.

Teorema 3.3.5. *Sea $M \in {}^C\mathcal{M}^C$ entonces $C_C(M)$ admite una estructura de coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$.*

Demostración: Definimos $\Delta_n : M_n \to \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes M_j,\ \forall n \geq 0$ de la siguiente forma:

- para $n = 0$, $\Delta_0 = \Delta_C$.
- para $n = 1$, $\Delta_1 = \delta_r + \delta_l$. Observar que en esta definición estamos considerando

$$\delta_r : M_1 = M \to M \otimes C = M_1 \otimes M_0 \hookrightarrow \bigoplus_{i+j=1} M_i \otimes M_j$$

  y

$$\delta_l : M_1 = M \to C \otimes M = M_0 \otimes M_1 \hookrightarrow \bigoplus_{i+j=1} M_i \otimes M_j.$$

- para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) &= \delta_l(x_1) \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes \delta_r(x_n)\end{aligned}$$

  es decir:

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) &= \sum (x_1)_{(-1)} \otimes (x_1)_{(0)} \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + \sum x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes (x_n)_{(0)} \otimes (x_n)_{(1)}.\end{aligned}$$

Es claro por la Observación 3.1.18 que $Im(\Delta_n) \subseteq \bigoplus_{i+j=n}(M_i \boxtimes_C M_j)$, $\forall n \geq 0$.
Veremos a continuación que $\Delta_n : M_n \to \bigoplus_{i+j=n}(M_i \boxtimes_C M_j) \subseteq C_C(M) \boxtimes_C C_C(M)$ es un morfismo de C-bicomódulos, $\forall n \geq 0$.

- Para $n = 0$ y $n = 1$ es claro debido a las definiciones de Δ_0 y Δ_1.
- Para $n \geq 2$, probaremos que Δ_n es un morfismo de C-comódulos a derecha, es decir:

$$(\Delta_n \otimes id_C) \circ (id_{n-1} \otimes \delta_r) = \left(\sum_{i+j=n} id_{M_i} \otimes \delta_r^j \right) \circ \Delta_n \,, \tag{3.9}$$

donde $id_j = \underbrace{id_M \otimes \cdots \otimes id_M}_{j\ veces}$, $\forall j \geq 1$ y $\delta_r^j = \begin{cases} \Delta_C & \text{si } j = 0 \\ \delta_r & \text{si } j = 1 \\ id_{j-1} \otimes \delta_r & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$.

Calculamos el lado izquierdo de (3.9) para $x = x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n \in M_n$,

$$\begin{aligned} ((\Delta_n \otimes id_C) \circ (id_{n-1} \otimes \delta_r))(x) = & \sum (x_1)_{(-1)} \otimes \big((x_1)_{(0)} \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}\big) \otimes (x_n)_{(1)} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}) \otimes (x_n)_{(1)} + \\ & + \sum \big(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes ((x_n)_{(0)})_{(0)}\big) \otimes ((x_n)_{(0)})_{(1)} \otimes (x_n)_{(1)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

y el lado derecho de la misma,

$$\begin{aligned} \left(\left(\sum_{i+j=n} (id_{M_i} \otimes \delta_r^j) \right) \circ \Delta_n \right)(x) = & \sum (x_1)_{(-1)} \otimes \big((x_1)_{(0)} \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}\big) \otimes (x_n)_{(1)} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}) \otimes (x_n)_{(1)} + \\ & + \sum \big(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes ((x_n)_{(0)})\big) \otimes ((x_n)_{(1)})_{(1)} \otimes ((x_n)_{(1)})_{(2)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como $M_n \in \mathcal{M}^C$ entonces (3.10) es igual a (3.11) y por lo tanto se verifica la ecuación (3.9).

Análogamente se prueba que Δ_n es un morfismo de C-comódulos a la izquierda, luego $\Delta_n : M_n \to C_C(M) \boxtimes_C C_C(M)$ es un morfismo de C-bicomódulos, $\forall n \geq 0$. La propiedad universal de la suma directa (Prop. 3.1.15) implica que existe un único morfismo Δ en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n\geq 0} M_n \arrow[r, "\Delta"] & C_C(M)\boxtimes_C C_C(M)\ , \ \forall n \geq 0. \\
M_n \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "\Delta_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos $\varepsilon : C_C(M) \to C$ como la proyección $\varepsilon = \pi_0 : C_C(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n \to M_0 = C$. Claramente ε es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$. Observar que $\varepsilon = \sum_{n\geq 0} \varepsilon_n$, siendo $\varepsilon_n : M_n \to C$, $\forall n \geq 0$, $\varepsilon_0 = id_C$ y $\varepsilon_n = 0$, $\forall n \geq 1$.

A continuación mostraremos que Δ y ε asi definidos hacen conmutar los diagramas de la definición 3.2.1.

- Veamos que Δ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_C(M) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C_C(M)\boxtimes_C C_C(M) \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\
C_C(M)\boxtimes_C C_C(M) \arrow[r, "id\otimes\Delta"'] & C_C(M)\boxtimes_C C_C(M)\boxtimes_C C_C(M)
\end{tikzcd} .$$

Para ver esto es suficiente con probar que Δ_n verifica

$$\left(\sum_{i+j=n} \Delta_i \otimes id_{M_j}\right) \circ \Delta_n = \left(\sum_{i+j=n} id_{M_i} \otimes \Delta_j\right) \circ \Delta_n, \forall n \geq 0. \tag{3.12}$$

Observar que (3.12) se verifica debido a lo siguiente:

- Si $n = 0$, la ecuación resulta ser la que corresponde a la propiedad coasociativa en la coálgebra C.
- Si $n = 1$, la ecuación resulta ser la que corresponde a las condiciones de que $M \in {}^C\mathcal{M}^C$.
- Si $n \geq 2$, sea $x = \sum x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n \in M_n$, entonces:

A) calculamos el lado izquierdo de (3.12) en x:

$$\left(\left(\sum_{i+j=n}\Delta_i\otimes id_{M_j}\right)\circ\Delta_n\right)(x)= \tag{3.13}$$

$$=\sum(x_1)_{(-2)}\otimes(x_1)_{(-1)}\otimes((x_1)_{(0)}\boxtimes x_2\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.14}$$

$$+\sum(x_1)_{(0)}\otimes(x_1)_{(1)}\otimes(x_2\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.15}$$

$$+\sum(x_1)_{(-1)}\otimes(x_1)_{(0)}\otimes(x_2\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.16}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}(x_1)_{(-1)}\otimes((x_1)_{(0)}\boxtimes x_2\boxtimes\cdots\boxtimes x_i)\otimes(x_{i+1}\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.17}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{i-1}(x_1\boxtimes\cdots\boxtimes x_a)\otimes(x_{a+1}\boxtimes\cdots\boxtimes x_i)\otimes(x_{i+1}\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.18}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}(x_1\boxtimes\cdots\boxtimes(x_i)_{(0)})\otimes(x_i)_{(1)}\otimes(x_{i+1}\boxtimes\cdots\boxtimes x_n)+ \tag{3.19}$$

$$+\sum(x_1)_{(-1)}\otimes((x_1)_{(0)}\boxtimes x_2\boxtimes\cdots\boxtimes(x_n)_{(0)})\otimes(x_n)_{(1)}+ \tag{3.20}$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}(x_1\boxtimes\cdots\boxtimes x_a)\otimes(x_{a+1}\boxtimes\cdots\boxtimes(x_n)_{(0)})\otimes(x_n)_{(1)}+ \tag{3.21}$$

$$+\sum(x_1\boxtimes\cdots\boxtimes(x_n)_{(0)})\otimes(x_n)_{(1)}\otimes(x_n)_{(2)} \tag{3.22}$$

B) calculamos el lado derecho de (3.12) en x:

$$\left(\left(\sum_{i+j=n} id_{M_i} \otimes \Delta_j\right) \circ \Delta_n\right)(x) = \tag{3.23}$$

$$= \sum (x_1)_{(-2)} \otimes (x_1)_{(-1)} \otimes ((x_1)_{(0)} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + \tag{3.24}$$

$$+ \sum_{a=2}^{n-1} (x_1)_{(-1)} \otimes ((x_1)_{(0)} \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_a) \otimes (x_{a+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + \tag{3.25}$$

$$+ \sum (x_1)_{(-1)} \otimes ((x_1)_{(0)} \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}) \otimes (x_n)_{(1)} + \tag{3.26}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1})_{(-1)} \otimes ((x_{i+1})_{(0)} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + \tag{3.27}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes (x_n)_{(0)}) \otimes (x_n)_{(1)} + \tag{3.28}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{a=i+1}^{n-1} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_a) \otimes (x_{a+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + \tag{3.29}$$

$$+ \sum (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1}) \otimes (x_n)_{(0)} \otimes (x_n)_{(1)} + \tag{3.30}$$

$$+ \sum (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1}) \otimes (x_n)_{(-1)} \otimes (x_n)_{(0)} + \tag{3.31}$$

$$+ \sum (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes (x_n)_{(0)}) \otimes (x_n)_{(1)} \otimes (x_n)_{(2)} \tag{3.32}$$

C) veamos que ambos lados son iguales:

- Los términos (3.14) y (3.22) son iguales a los términos (3.24) y (3.32) respectivamente.
- El término (3.15) corresponde, por definición de M_n, con el término de (3.27) de índice $i = 1$.
- El término (3.16) es igual al término (3.25) de índice $a = 1$.
- El término (3.17) es igual al término (3.25) de índice $a = 2$.
- El término (3.18) es igual al término (3.29).
- El término (3.19) con índice $i = n - 1$ corresponde, por definición de M_n, con el término (3.31).
- Los términos de (3.19) con índices $i = 2, \cdots, n-2$ corresponden, por definición de M_n, a los términos de (3.27) con índices $i = 2, \cdots, n-2$.
- El término (3.20) es igual al término (3.26).

- El término (3.21) con índice $a = n - 1$ es igual al término (3.30).
- El término (3.21) con índices $a > 0$ y $b > 1$ es igual al término (3.28).

- Veamos que ε y Δ hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_C(M) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & C_C(M) \boxtimes_C C_C(M) \arrow[d, "id_{C_C(M)} \otimes \varepsilon"] \\ & C_C(M) \boxtimes_C C \end{tikzcd} \tag{3.33}$$

La conmutatividad de (3.33) equivale a la de:

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \bigoplus_{i+j=n}(M_i \boxtimes_C M_j) \arrow[d, "\sum_{i+j=n}(id_{M_i} \otimes \varepsilon_j)"] \\ & M_n \boxtimes_C C \end{tikzcd} \quad , \ \forall n \geq 0.$$

- Si $n \geq 2$, la Proposición 3.1.10 implica

$$\left(\left(\sum_{i+j=n} id_{M_i} \otimes \varepsilon_j\right) \circ \Delta_n\right)(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) = \sum x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes (x_n)_{(0)} \boxtimes (x_n)_{(1)}$$
$$\simeq x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n.$$

- Los casos $n = 0, 1$ son inmediatos.

- Análogamente se prueba que ε y Δ hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_C(M) \boxtimes_C C_C(M) \arrow[d, "\varepsilon \otimes id_{C_C(M)}"'] & C_C(M) \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ C \boxtimes_C C_C(M) & \end{tikzcd}$$

En conclusión $(C_C(M), \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$. □

Definición 3.3.6. Llamamos *coálgebra cotensorial de M sobre C* a $C_C(M)$ con la estructura de coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$ definida en el teorema anterior.

Observación 3.3.7. Notar que la coálgebra cotensorial es una coálgebra graduada.

Observación 3.3.8. Notar que en la definición de Δ_n para $n \geq 2$, si escribimos

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) &= \delta_l(x_1) \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes \delta_r(x_n),\end{aligned}$$

entonces $x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i \otimes x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n = x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ en $M^{\otimes n}$, $\forall i = 1, \cdots, n-1$.

3.4. Propiedad universal de la coálgebra cotensorial

Teorema 3.4.1. *Sean $M \in {}^C\mathcal{M}^C$, D coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$ y $\varphi : D \to M$ morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que $\varphi(corad(D)) = 0$. Entonces existe un único $\hat{\varphi} : D \to C_C(M)$ morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi"'] & C_C(M) \arrow[dl, "\pi_1"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{3.34}$$

Demostración: En esta demostración utilizaremos la siguiente notación: $D^{\ \ n} = \underbrace{D \boxtimes_C \cdots \boxtimes_C D}_{n\ veces}$ y $f^{\otimes n} = \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n\ veces}$, $\forall n \geq 1$.

Para cada $n = 0, 1, \cdots$ definimos $\hat{\varphi_n} : D \to M_n$ de la siguiente manera:

- Si $n = 0$, $\hat{\varphi_0} = \varepsilon$, donde ε es el mapa counidad de D como coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$.
- Si $n = 1$, $\hat{\varphi_1} = \varphi$.
- Si $n \geq 2$, $\hat{\varphi_n} = \varphi^{\otimes n} \circ \Delta_D^{n-1}$, donde Δ_D es el mapa comultiplicación de D como coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$ y $\Delta_D^{n-1} = \begin{cases} \Delta_D, & \text{si } n = 2, \\ (\Delta_D \otimes id_{D^{\otimes n-2}}) \circ \Delta_D^{n-2}, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

Como $D \in {}^C\mathcal{M}^C$ tenemos que $\Delta_D(D) \subseteq D \boxtimes_C D$ y por lo tanto $\Delta^n(D) \subseteq D^{\ \ n+1}, \forall n \geq 1$. Como φ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ entonces $\varphi^{\otimes n}(D^{\ \ n}) \subseteq M^{\ \ n}$, lo que implica que $\hat{\varphi_n}(D) \subseteq M_n, \forall n \geq 0$. Claramente $\hat{\varphi_n}$ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$, $\forall n \geq 0$.

- Veamos que tiene sentido definir $\hat{\varphi} : D \to C_C(M)$ por $\hat{\varphi} = \sum_{n \geq 0} \hat{\varphi_n}$.

Tenemos $D = \bigcup_{n\geq 0} D_n$, donde $\{D_n\}_{n\geq 0}$ es la filtración corradical de D, observar que entonces $D_0 = corad(D)$.
Luego
$$\Delta_D(D_n) \subseteq \sum_{i+j=n} D_i \otimes D_j$$
entonces
$$\Delta_D^2(D_n) \subseteq \sum_{i+j=n} \Delta_D(D_i) \otimes D_j = \sum_{i+j+k=n} D_i \otimes D_j \otimes D_k$$
y por inducción obtenemos
$$\Delta_D^m(D_n) \subseteq \sum_{i_0+\cdots+i_m=n} D_{i_0} \otimes \cdots \otimes D_{i_m},\ \forall m, n \geq 0.$$
Si $m \geq n$, como $i_j \geq 0, \forall j \geq 0$ e $i_0+\cdots+i_m = n$ entonces existe $j \in \{0, \cdots, m\}$ tal que $i_j = 0$ y por lo tanto $D_{i_j} = D_0$, el corradical de D. Luego $\hat{\varphi_{m+1}}(D_n) = (\varphi^{\otimes m+1} \circ \Delta_D^m)(D_n) = 0$, pues $\varphi(D_0) = \varphi(corad(D)) = 0$.
Ahora, si $d \in D$ entonces existe $n \geq 0$ tal que $d \in D_n$. Luego $\hat{\varphi_{m+1}}(d) = 0,\ \forall m \geq n$ y por lo tanto $\hat{\varphi}$ está bien definido.

- Como $\hat{\varphi_n}$ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$, $\forall n \geq 0$ tenemos que $\hat{\varphi}$ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}^C$ y claramente, hace conmutar el diagrama (3.34).

- A continuación mostraremos que $\hat{\varphi}$ es un morfismo de coálgebras.

  - La conmutatividad del siguiente diagrama es inmediata:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C_C(M) \arrow[dl, "\pi_0"] \\ C & \end{tikzcd}$$

    donde $\pi_0 : C_C(M) \to C$ es el mapa counidad de $C_C(M)$ como coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$

  - Veamos ahora que $\hat{\varphi}$ verifica

$$((\hat{\varphi} \otimes \hat{\varphi}) \circ \Delta_D)(d) = (\Delta \circ \hat{\varphi})(d), \forall d \in D \tag{3.35}$$

    donde Δ es el mapa comultiplicación de $C_C(M)$ como coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$.

(A) Calculamos el lado izquierdo de la ecuación (3.35):

$$\begin{aligned}((\hat{\varphi}\otimes\hat{\varphi})\circ\Delta_D)(d) &= \sum \hat{\varphi}(d_{(1)})\otimes\hat{\varphi}(d_{(2)}) = \\ &= (\varepsilon\otimes\varepsilon)(\Delta_D(d)) + && (3.36)\\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{(d)} \varepsilon\left(d_{(1)}\right)\otimes\left(\varphi^{\otimes m}\circ\Delta_D^{m-1}\right)\left(d_{(2)}\right) + && (3.37)\\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(d)} \left(\varphi^{\otimes n}\circ\Delta_D^{n-1}\right)\left(d_{(1)}\right)\otimes\varepsilon\left(d_{(2)}\right) + && (3.38)\\ &+ \sum_{n,m=1}^{+\infty}\sum_{(d)} \left(\varphi^{\otimes n}\circ\Delta_D^{n-1}\right)\left(d_{(1)}\right)\otimes\left(\varphi^{\otimes m}\circ\Delta_D^{m-1}\right)\left(d_{(2)}\right) && (3.39)\end{aligned}$$

Obsérvese que (3.36)$\in C\otimes C$, (3.37)$\in \bigoplus_{m\geq 1} C\otimes M_m$, (3.38)$\in \bigoplus_{n\geq 1} M_n\otimes C$ y (3.39)$\in \bigoplus_{n,m\geq 1} M_n\otimes M_m$.

(B) Calculamos el lado derecho de la ecuación (3.35):

$$\begin{aligned}(\Delta\circ\hat{\varphi})(d) &= \Delta\left(\varepsilon(d) + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi^{\otimes n}\circ\Delta_D^{n-1})(d)\right) = \\ &= \Delta_C(\varepsilon(d)) + && (3.40)\\ &+ \delta_r(\varphi(d)) + && (3.41)\\ &+ \delta_l(\varphi(d)) + && (3.42)\\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty}\Delta_n\left((\varphi^{\otimes n}\circ\Delta_D^{n-1})(d)\right) && (3.43)\end{aligned}$$

Obsérvese que (3.40)$\in C\otimes C$, (3.41)$\in M\otimes C$ y (3.42)$\in C\otimes M$.
Obsérvese también que para todo $n\geq 2$

$$\Delta_n\left((\varphi^{\otimes n}\circ\Delta_D^{n-1})(d)\right)\in C\otimes M_n+M\otimes M_{n-1}+M_2\otimes M_{n-2}+\cdots+M_{n-2}\otimes M_2+M_{n-1}\otimes M+M_n\otimes C$$

y por lo tanto

$$(3.43)\in\bigoplus_{n\geq 2}(C\otimes M_n+M\otimes M_{n-1}+M_2\otimes M_{n-2}+\cdots+M_{n-2}\otimes M_2+M_{n-1}\otimes M+M_n\otimes C).$$

(C) Veamos que ambos lados de la ecuación (3.35) son iguales:

$*$ Los términos de (A) y (B) en $C \otimes C$ son (3.36) y (3.40) respectivamente, que son iguales pues ε es un morfismo de coálgebras como se muestra en la Observación 3.2.3.

$*$ El término de (A) en $C \otimes M$ es (3.37) de índice $m = 1$ y el de (B) es (3.42), luego queremos ver que:

$$\sum \varepsilon(d_1) \otimes \varphi(d_2) = \sum (\varphi(d))_{-1} \otimes (\varphi(d))_0. \tag{3.44}$$

Como $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ es una coálgebra y Δ_D es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}$ tenemos que $(\varepsilon \otimes id_D) \circ \Delta_D = \delta_l^D$, es decir

$$\sum \varepsilon(d_1) \otimes d_2 = \sum d_{-1} \otimes d_0.$$

Como φ es un morfismo en ${}^C\mathcal{M}$ tenemos que $(id_C \otimes \varphi) \circ \delta_l^D = \delta_l^M \circ \varphi$, entonces:

$$\sum (\varphi(d))_{-1} \otimes (\varphi(d))_0 = (id_C \otimes \varphi) \left(\sum d_{-1} \otimes d_0 \right) = (id_C \otimes \varphi) \left(\sum \varepsilon(d_1) \otimes d_2 \right) = \sum \varepsilon(d_1) \otimes \varphi(d_2).$$

$*$ Análogamente, el término de (A) en $M \otimes C$ es (3.38) de índice $n = 1$ y el de (B) es (3.41), que son iguales pues $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ es una coálgebra y Δ_D, φ son morfismos en $\mathcal{M}^C$.

Para comparar los siguientes términos es importante recordar la definición de $\Delta_n : M_n \to \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes M_j$ con $n \geq 2$ pues (3.43) involucra la aplicación de estos mapas.
Entonces, si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} &\Delta_n(x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) := \delta_l^M(x_1) \boxtimes x_2 \boxtimes \cdots \boxtimes x_n + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_i) \otimes (x_{i+1} \boxtimes \cdots \boxtimes x_n) + x_1 \boxtimes \cdots \boxtimes x_{n-1} \boxtimes \delta_r^M(x_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta_n \left((\varphi^{\otimes_n} \circ \Delta_D^{n-1})(d) \right)$ tiene un sumando en $C \otimes M_n$ que es

$$(\delta_l^M \otimes id_M{}^{\otimes_{n-1}}) \left((\varphi^{\otimes_n} \circ \Delta_D^{n-1})(d) \right),$$

$(n-1)$ sumandos en $M_i \otimes M_j$ con $i + j = n$ e $i, j \geq 1$ que son los correspondientes al segundo sumando de la definición de Δ_n y por último, un sumando en $M_n \otimes C$ que es

$$(id_M{}^{\otimes_{n-1}} \otimes \delta_r^M) \left((\varphi^{\otimes_n} \circ \Delta_D^{n-1})(d) \right).$$

$*$ Para $j \geq 2$ los términos de (A) y (B) en $C \otimes M_j$ son respectivamente

1. (3.37) de índice $m = j$, es decir: $((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D^{j-1}) \circ \Delta_D)(d)$
2. y el primer sumando de (3.43) correspondiente al índice $n = j$, es decir :

$$(\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \left((\varphi^{\otimes_j} \circ \Delta_D^{j-1})(d)\right).$$

Explícitamente 1. vale:

$$((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D^{j-1}) \circ \Delta_D)(d) = ((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D^{j-1})) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)}\right) =$$
$$= \left((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}}) \circ \cdots \circ (id_D \otimes \Delta_D \otimes id_D)\right) \left(\sum d_{(1)} \otimes \Delta_D(d_{(2)})\right) =$$
$$= \left((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}}) \circ \cdots \circ (id_D \otimes \Delta_D \otimes id_D)\right) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \otimes d_{(3)}\right) =$$
$$= \cdots = \left((\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \circ (id_D \otimes \Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}})\right) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \otimes \cdots \otimes d_{(j)}\right) =$$
$$= (\varepsilon \otimes \varphi^{\otimes_j}) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \otimes \cdots \otimes d_{(j+1)}\right) = \sum \varepsilon(d_{(1)}) \otimes \varphi(d_{(2)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_{(j+1)}).$$

Por su parte, 2. vale:

$$((\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \circ (\varphi^{\otimes_j} \circ \Delta_D^{j-1}))(d) =$$
$$= \left((\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \circ (\varphi^{\otimes_j}) \circ (\Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}}) \circ \cdots \circ (\Delta_D \otimes id_D) \circ \Delta_D\right)(d) =$$
$$= \left((\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \circ (\varphi^{\otimes_j}) \circ (\Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}}) \circ \cdots \circ (\Delta_D \otimes id_D)\right) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)}\right) =$$
$$= \cdots = \left((\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \circ (\varphi^{\otimes_j}) \circ (\Delta_D \otimes id_{D^{\otimes_{j-2}}})\right) \left(\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \otimes \cdots \otimes d_{(j-1)}\right) =$$
$$= (\delta_l^M \otimes id_{M^{\otimes_{j-1}}}) \left(\sum \varphi(d_{(1)}) \otimes \varphi(d_{(2)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_{(j)})\right) =$$
$$= \sum (\varphi(d_{(1)}))_{(-1)} \otimes \varphi((d_{(1)}))_{(0)} \otimes \varphi(d_{(2)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_{(j)})$$

Observése que a partir de (3.44) se deduce:

$$\sum (\varphi(d_{(1)}))_{(-1)} \otimes \varphi((d_{(1)}))_{(0)} \otimes \varphi(d_{(2)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_{(j)}) =$$
$$= \sum \varepsilon((d_1)_1) \otimes \varphi((d_1)_2) \otimes \varphi(d_2) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_j) = \sum \varepsilon(d_{(1)}) \otimes \varphi(d_{(2)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(d_{(j+1)}).$$

Por lo cual los términos de (A) y (B) en $C \otimes M_j$ son iguales.

$*$ Análogamente se prueba que para $j \geq 2$ los términos en $M_j \otimes C$ coinciden en (A) y (B). Estos términos son

1. (3.38) de índice $m = j$, es decir: $(\varphi^{\otimes j} \circ (id_D \otimes \Delta_D^{j-1}) \otimes \varepsilon) \circ \Delta_D)(d)$
2. y el último sumando de (3.43) correspondiente al índice $n = j$, es decir:

$$((\varphi^{\otimes j} \otimes \varepsilon) \circ (\Delta_D^{j-1} \otimes id_D) \circ \Delta_D)(d).$$

$*$ Por último, para $i, j \geq 1$ los términos de (A) y (B) en $M_i \otimes M_j$ son (3.39) con índices $n = i$, $m = j$ y los que corresponden al segundo sumando de la definición de Δ_n en (3.43) con índice $n = i + j$.
Explicítamente en (3.39) tenemos $\left(\left((\varphi^{\otimes i} \circ \Delta_D^{i-1}) \otimes (\varphi^{\otimes j} \circ \Delta_D^{j-1})\right) \circ \Delta_D\right)(d)$ y en (3.43) $\left(\varphi^{\otimes i+j} \circ \Delta_D^{i+j-1}\right)(d)$ que claramente son iguales.

- Para finalizar la prueba probaremos la unicidad de $\hat{\varphi}$.
Sea $\psi : D \to C_C(M)$ un morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ que verifica $\pi_1 \circ \psi = \varphi$. Para probar que $\psi = \hat{\varphi}$ alcanza con ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\hat{\varphi_m}"'] & C_C(M) \arrow[d, "\pi_m"] \\ & M_m \end{tikzcd}, \ \forall m \geq 0.$$

Es decir que si llamamos $f_m = \pi_m \circ \psi$, entonces $\psi = \sum_{m \geq 0} f_m$ y la conmutatividad del diagrama anterior es equivalente a $f_m = \hat{\varphi_m}$, $\forall m \geq 0$.

Por inducción en m:

- Si $m = 0$, entonces $f_0 = \hat{\varphi}_0$ equivale a $\pi_0 \circ \psi = \varepsilon$ que se cumple pues ψ es un morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$.
- Si $m = 1$, entonces $f_1 = \hat{\varphi}_1$ equivale a $\pi_1 \circ \psi = \varphi$ que se cumple por hipótesis.
- Sea $m \geq 2$ y supongamos que $f_m = \varphi^{\otimes m} \circ \Delta_D^{m-1}$. Queremos probar $f_{m+1} = \varphi^{\otimes m+1} \circ \Delta_D^m$.

  Para cada $d \in D$ escribimos $\Delta_D(d) = \sum d_{(1)} \otimes d_{(2)}$; como ψ es un morfismo de coálgebras entonces $(\psi \otimes \psi)\Delta_D(d) = \Delta(\psi(d))$, luego:

  1. $$\Delta(\psi(d)) = \Delta(\sum_{n \geq 0} f_n(d)) = \sum_{n \geq 0} \Delta(f_n(d)),$$

     con $\Delta(f_n(d)) \in C \otimes M_n + M \otimes M_{n-1} + \cdots + M_{n-1} \otimes M + M_n \otimes C$.

2.

$$((\psi \otimes \psi)\Delta_D)(d) = \sum_{(d)} \psi(d_{(1)}) \otimes \psi(d_{(2)}) = \sum_{n,m \geq 0} \sum_{(d)} f_n(d_{(1)}) \otimes f_m(d_{(2)}) =$$
$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} \sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)}),$$

con $\sum_{i+j=n} \sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)}) \in C \otimes M_n + M \otimes M_{n-1} + \cdots + M_{n-1} \otimes M + M_n \otimes C$.

Luego

$$\sum_{n \geq 0} \Delta(f_n(d)) = \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} \sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)}),$$

y por lo tanto: $\Delta(f_n(d)) = \sum_{i+j=n} \sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)}),\ \forall n \geq 0$.

Obsérvese que $f_n(d) \in M_n$ y $\sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)}) \in M_i \otimes M_j$. Luego, por definición de Δ, comparando los términos pertenecientes a $M_i \otimes M_j$ y teniendo en cuenta la Observación (3.3.8) se obtiene que $f_n(d) = \sum_{(d)} f_i(d_{(1)}) \otimes f_j(d_{(2)})$ en $M^{\otimes n},\ \forall i, j$ tales que $i \neq 0,\ j \neq 0$, e $i + j = n$.

En conclusión

$$f_{m+1}(d) = \sum_{(d)} f_m(d_{(1)}) \otimes f_1(d_{(2)}) = \sum_{(d)} (\varphi^{\otimes m} \circ \Delta_D^{m-1})(d_{(1)}) \otimes f_1(d_{(2)}) =$$
$$= ((\varphi^{\otimes m} \circ \Delta_D^{m-1}) \otimes \varphi)\Delta(d) = \left(\varphi^{\otimes m+1} \circ \Delta_D^{m}\right)(d).$$

$\square$

Observación 3.4.2. Dado $\varphi : D \to C$ un morfismo de coálgebras podemos dar estructura de C-bicomódulo a D via φ definiendo como coacción a derecha $\delta_r : D \to D \otimes C$ por $\delta_r = (id_D \otimes \varphi) \circ \Delta_D$ y como coacción a izquierda $\delta_l : D \to C \otimes D$ por $\delta_l = (\varphi \otimes id_D) \circ \Delta_D$.
Claramente con estas definiciones se verifican las condiciones del punto 2 de la Proposición 3.2.2. y por lo tanto existen mapas lineales $\Delta : D \to D \boxtimes_C D$ y $\varepsilon : D \to C$ tales que (D, Δ, ε) es una coálgebra en ${}^C\mathcal{M}^C$. Explícitamente:

$$\Delta(d) = \sum d_1 \otimes d_2,\ \forall d \in D \text{ y}$$

$$\varepsilon(d) = \sum \varepsilon_D(d_1)\varphi(d_2) = \varphi\left(\sum \varepsilon_D(d_1) d_2\right) = \varphi(d),\ \forall d \in D.$$

Corolario 3.4.3. *Sea $M \in {}^C\mathcal{M}^C$. Sean D una coálgebra, $\varphi_0 : D \to C$ un morfismo de coálgebras y $\varphi_1 : D \to M$ mapa lineal que verifica*

$$\sum \varphi_1(d_{(1)}) \otimes \varphi_0(d_{(2)}) = \sum (\varphi_1(d))_{(0)} \otimes (\varphi_1(d))_{(1)}, \tag{3.45}$$

$$\sum \varphi_0(d_{(1)}) \otimes \varphi_1(d_{(2)}) = \sum (\varphi_1(d))_{(-1)} \otimes (\varphi_1(d))_{(0)}, \tag{3.46}$$

y $\varphi_1(corad(D)) = 0$. Entonces existe un único $\varphi : D \to C_C(M)$ morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & C \\
D \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & C_C(M) \arrow[u, "\pi_0"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

donde π_0 y π_1 son los proyecciones de $C_C(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ sobre $M_0 = C$ y $M_1 = M$ respectivamente.

Demostración: Las condiciones (3.45) y (3.46) equivalen a que $\varphi_1 : D \to M$ sea un morfismo de C-bicomódulos con $D \in {}^C\mathcal{M}^C$ via φ_0.
Aplicando la propiedad universal de $C_C(M)$ obtenemos que existe un único $\varphi : D \to C_C(M)$ morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & C_C(M) \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & M
\end{tikzcd} .$$

Finalmente observar que el hecho de que φ sea un morfismo de coálgebras en ${}^C\mathcal{M}^C$ implica $\pi_0(\varphi(d)) = \varepsilon(d)$, $\forall d \in D$, pero por la observación anterior $\varepsilon(d) = \varphi_0(d)$, $\forall d \in D$, luego el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & C_C(M) \arrow[d, "\pi_0"] \\
 & M
\end{tikzcd} .$$

□

Capítulo 4

El álgebra simétrica cuántica.

4.1. Bimódulos de Hopf sobre una biálgebra.

A partir de esta sección $\Bbbk$ denota un cuerpo fijo y H una biálgebra sobre $\Bbbk$. Todos los espacios vectoriales y todos los productos tensoriales serán sobre $\Bbbk$, a menos que se diga lo contrario.

Definición 4.1.1. Decimos que M es un *H-bimódulo de Hopf* si M es un H-bimódulo, H-bicomódulo y las acciones a derecha e izquierda son morfismos de H-comódulos a derecha e izquierda o equivalentemente las coacciones a derecha e izquierda son morfismos de H-módulos a derecha e izquierda.

Escribiremos $M \in {}_H^H\mathcal{M}_H^H$ para decir que M es un H-bimódulo de Hopf.

Observación 4.1.2. Explícitamente, $M \in {}_H^H\mathcal{M}_H^H$ si:

$$\star\ (h \cdot m) \cdot h' = h \cdot (m \cdot h'),\ \forall h, h' \in H,\ m \in M. \tag{4.1}$$

$$\star\ \sum m_{-1} \otimes (m_0)_0 \otimes (m_0)_1 = \sum (m_0)_{-1} \otimes (m_0)_0 \otimes m_1,\ \forall m \in M. \tag{4.2}$$

$$\star\ \sum (h_1 m_{-1}) \otimes (h_2 \cdot m_0) = \sum (h \cdot m)_{-1} \otimes (h \cdot m)_0,\ \forall h \in H,\ m \in M. \tag{4.3}$$

$$\star\ \sum (h_1 \cdot m_0) \otimes (h_2 m_1) = \sum (h \cdot m)_0 \otimes (h \cdot m)_1,\ \forall h \in H,\ m \in M. \tag{4.4}$$

$$\star\ \sum (m_{-1} h_1) \otimes (m_0 \cdot h_2) = \sum (m \cdot h)_{-1} \otimes (m \cdot h)_0,\ \forall h \in H,\ m \in M. \tag{4.5}$$

$$\star\ \sum (m_0 \cdot h_1) \otimes (m_1 h_2) = \sum (m \cdot h)_0 \otimes (m \cdot h)_1,\ \forall h \in H,\ m \in M. \tag{4.6}$$

4.2. El álgebra simétrica cuántica.

A continuación veremos que dados H una biálgebra y $M \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$ es posible dar en $T_H(M)$ y $C_H(M)$ estructura de biálgebra graduada. Además mostraremos que en el caso en que H sea un álgebra de Hopf resulta que $T_H(M)$ y $C_H(M)$ también lo son.

Proposición 4.2.1. *Sean H una biálgebra y $M \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Entonces $T_H(M)$ admite estructura de biálgebra graduada.*

Demostración: Ya probamos que $T_H(M)$ admite estructura de álgebra graduada (Teo. (2.3.4)), por lo tanto sólo nos resta ver que existen morfismos de álgebras $\Delta : T_H(M) \to T_H(M) \otimes T_H(M)$ y $\varepsilon : T_H(M) \to \Bbbk$ tales que $(T_H(M), \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra graduada.

Consideramos $\Delta_H : H \to H \otimes H$, el coproducto de H. Dado que H es una biálgebra tenemos que Δ_H es un morfismo de álgebras y $H \otimes H \subseteq T_H(M) \otimes T_H(M)$ es una subálgebra, luego $\Delta_H : H \to H \otimes H \subseteq T_H(M) \otimes T_H(M)$ es un morfismo de álgebras.

Consideramos también $\Delta_M : M \to M \otimes H + H \otimes M \subseteq T_H(M) \otimes T_H(M)$ definido por $\Delta_M = \delta_l + \delta_r$, donde δ_l y δ_r son las coacciones de M como H-bicomódulo.
Veamos que Δ_M verifica

$$\Delta_M(x \cdot m \cdot x') = \Delta_H(x)\Delta_M(m)\Delta_H(x'),\ \forall x, x' \in H, m \in M.$$

Sabemos que $\Delta_M(x \cdot m \cdot x') = \delta_l(x \cdot m \cdot x') + \delta_r(x \cdot m \cdot x')$. Luego por (4.3) y (4.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta_l(x \cdot m \cdot x') &= \sum (x \cdot m \cdot x')_{(-1)} \otimes (x \cdot m \cdot x')_{(0)} = \\
&= \sum x_{(1)}(m \cdot x')_{(-1)} \otimes x_{(2)} \cdot (m \cdot x')_{(0)} = \sum x_{(1)} m_{(-1)} x'_{(1)} \otimes x_{(2)} \cdot m_{(0)} \cdot x'_{(2)} = \\
&= \left(\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) \cdot \left(\sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}\right) \cdot \left(\sum x'_{(1)} \otimes x'_{(2)}\right) = \Delta_H(x) \cdot \delta_l(m) \cdot \Delta_H(x').
\end{aligned}$$

Análogamente, utilizando (4.4) y (4.6) obtenemos

$$\delta_r(x \cdot m \cdot x') = \Delta_H(x)\delta_r(m)\Delta_H(x').$$

Luego

$$\Delta_M(x \cdot m \cdot x') = \Delta_H(x)\left(\delta_l(m) + \delta_r(m)\right)\Delta_H(x') = \Delta_H(x)\Delta_M(m)\Delta_H(x').$$

Entonces podemos aplicar el Corolario 2.4.3, obteniendo que existe un único morfismo de álgebras en ${}_H\mathcal{M}_H$, $\Delta : T_H(M) \to T_H(M) \otimes T_H(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "inc"'] \arrow[dr, "\Delta_M"] & \\ T_H(M) \arrow[r, "\Delta"] & T_H(M) \otimes T_H(M). \\ H \arrow[u, "inc"] \arrow[ur, "\Delta_H"'] & \end{tikzcd}$$

Explícitamente $\Delta = \sum_{j\geq 0} \Delta_j$, donde

- $\Delta_0 = \Delta_H$, $\Delta_1 = \Delta_M$ y
- para $j \geq 2$, $\Delta_j(m_1 \otimes_H \cdots \otimes_H m_j) = \Delta_M(m_1) \cdots \Delta_M(m_j)$, $\forall m_1 \otimes_H \cdots \otimes_H m_j \in M_j$.

Obsérvese que entonces

$$\Delta(M_n) \subseteq \sum_{i+j=n} M_i \otimes M_j, \ \forall n \geq 0. \tag{4.7}$$

pues si $n \geq 2$ tenemos que

$$\Delta(M_n) \subseteq \underbrace{\Delta_M(M_1) \cdots \Delta_M(M_1)}_{n \ veces} \subseteq \underbrace{(M_0 \otimes M_1 + M_1 \otimes M_0) \cdots (M_0 \otimes M_1 + M_1 \otimes M_0)}_{n \ veces}$$

y como $T_H(M)$ es un álgebra graduada resulta $\Delta(M_n) \subseteq \sum_{i+j=n} M_i \otimes M_j$. Los casos para $n = 0, 1$ son inmediatos.

Por otra parte definimos $\varepsilon : T_H(M) \to \Bbbk$ por $\varepsilon = \varepsilon_H \circ \pi_0$, que es claramente un morfismo de álgebras. Obsérvese que $\varepsilon(M_n) = 0$, $\forall n \geq 1$.
Luego queremos ver que Δ y ε definen en $T_H(M)$ una estructura de coálgebra, es decir que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} T_H(M) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & T_H(M) \otimes T_H(M) \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ T_H(M) \otimes T_H(M) \arrow[r, "id \otimes \Delta"'] & T_H(M) \otimes T_H(M) \otimes T_H(M) \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

y

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes T_H(M) \arrow[r, "\simeq"] & T_H(M) & T_H(M) \otimes \Bbbk \arrow[l, "\simeq"'] . \\ & T_H(M) \otimes T_H(M) \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "id \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

- Para ver que (4.8) conmuta, por el corolario (2.4.3), es suficiente probar que

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta \circ \iota_j = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \circ \iota_j \text{ para } j = 0, 1,$$

  donde ι_0 e ι_1 son las inclusiones de H y M en $T_H(M)$ respectivamente.

  - Para $j = 0$ es inmediato pues es la coasociatividad de Δ_H.
  - Para $j = 1$ es necesario ver que $(\Delta_H \otimes id_M + \delta_l \otimes id_H + \delta_r \otimes id_H) \circ (\delta_r + \delta_l)$ es igual a $(id_H \otimes \delta_r + id_H \otimes \delta_l + id_M \otimes \Delta_H) \circ (\delta_r + \delta_l)$, y esto vale debido a que $M \in {}^H\mathcal{M}^H$.

- Veamos ahora que el lado derecho de (4.9) conmuta. Por el Corolario (2.4.3) es suficiente probar que

$$\chi \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \circ \iota_j = id_j \text{ para } j = 0, 1,$$

  donde $id_0 = id_H$, $id_1 = id_M$ y χ es el isomorfismo natural entre $T_H(M) \otimes \Bbbk$ y $T_H(M)$.

  - Para $j = 0$ queda $\chi \circ (id \otimes \varepsilon_H) \circ \Delta_H \circ \iota_0 = id_H$, lo cual vale pues $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ es una coálgebra.
  - Para $j = 1$ tenemos para $m \in M$

$$(\chi \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_M \circ \iota_1)(m) = (\chi \circ (id \otimes \varepsilon)) \left(\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} + \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \right) =$$
$$= \sum m_{(0)} \varepsilon(m_1) = id_M(m),$$

    lo cual vale pues $M \in \mathcal{M}^H$.

- Análogamente se prueba la conmutatividad del lado izquierdo de (4.9).

Luego $(T_H(M), \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra graduada. □

Corolario 4.2.2. *Sean H un álgebra de Hopf y $M \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Entonces $T_H(M)$ admite estructura de álgebra de Hopf graduada.*

Demostración: Sabemos que $T_H(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ es una biálgebra graduada tal que $M_0 = H$ es un álgebra de Hopf, luego aplicando el Teorema (1.1.13) obtenemos que $T_H(M)$ admite estructura de álgebra de Hopf graduada. □

Proposición 4.2.3. *Sean H una biálgebra y $M \in {}_H^H\mathcal{M}_H^H$. Entonces $C_H(M)$ admite estructura de biálgebra graduada.*

Demostración: Ya probamos que $C_H(M)$ admite estructura de coálgebra graduada (Teo. (3.3.5)) , por lo tanto sólo nos resta ver que existen morfismos de coálgebras $m : C_H(M) \otimes C_H(M) \to C_H(M)$ y $u : \Bbbk \to C_H(M)$ tales que $(C_H(M), m, u)$ es una álgebra graduada.

Consideramos para $i, j \geq 0$ los mapas lineales $m_0^{i,j} : M_i \otimes M_j \to M_0$ definidos de la siguiente forma:

- $m_0^{0,0}(h \otimes h') = m_H(h \otimes h') = hh',\ \forall h, h' \in H$, donde m_H es el producto de H.
- $m_0^{i,j} \equiv 0$ si $i + j > 0$.

Claramente $m_0^{i,j}$ son morfismos en ${}_H\mathcal{M}_H,\ \forall i, j \geq 0$. Luego, aplicando la propiedad universal de la suma directa, existe un único $m_0 : C_H(M) \otimes C_H(M) \to H$ morfismo en ${}_H\mathcal{M}_H$ tal que $m_0|_{H\otimes H} = m_H$. Explícitamente $m_0 = \sum_{i,j\geq 0} m_0^{i,j}$ y por lo tanto $m_0(M_i \otimes M_j) = 0,$ si $i + j > 0$. Observar que m_0 es la proyección sobre $M_0 \otimes M_0 = H \otimes H$ compuesta con el producto de H, luego como H es una biálgebra tenemos que m_H es un morfismo de coálgebras y por lo tanto m_0 es un morfismo de coálgebras.

También consideramos para $i, j \geq 0$ los mapas lineales $m_1^{i,j} : M_i \otimes M_j \to M_1$ definidos de la siguiente forma:

- $m_1^{1,0}(h \otimes n) = h \cdot_l n,\ \forall h \in H, n \in M,$
- $m_1^{0,1}(n \otimes h) = n \cdot_r h,\ \forall h \in H, n \in M$ y
- $m_1^{i,j} \equiv 0$ si $i + j \neq 1$.

La propiedad universal de la suma directa nos permite definir $m_1 : C_H(M) \otimes C_H(M) \to M$ por $m_1 = \sum_{i,j\geq 0} m_1^{i,j}$. Obsérvese que $m_1(M_i \otimes M_j) = 0,$ si $i + j \neq 1$. Veamos que m_1 verifica las condiciones (3.45) y (3.46) del Corolario 3.4.3, es decir

$$\sum m_1(d_{(1)}) \otimes m_0(d_{(2)}) = \sum (m_1(d))_{(0)} \otimes (m_1(d))_{(1)},\ \forall d \in C_H(M) \otimes C_H(M), \tag{4.10}$$

$$\sum m_0(d_{(1)}) \otimes m_1(d_{(2)}) = \sum (m_1(d))_{(-1)} \otimes (m_1(d))_{(0)},\ \forall d \in C_H(M) \otimes C_H(M). \tag{4.11}$$

Tenemos $C_H(M) \otimes C_H(M) = \bigoplus_{i,j\geq 0} M_i \otimes M_j$, entonces podemos considerar $d \in M_i \otimes M_j$. Además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d = n_i \otimes n_j$, con $n_i \in M_i,\ n_j \in M_j$.

Veamos que se verifica (4.10). Obsérvese que el lado izquierdo de (4.10) es aplicar a d el mapa $(m_1 \otimes m_0)\Delta$, donde Δ es el coproducto de $C_H(M) \otimes C_H(M)$ como coálgebra. Como $C_H(M)$ es una coálgebra graduada para $i, j \geq 0$ tenemos que:

$$\Delta(M_i \otimes M_j) \subseteq \sum_{\substack{a+b=i \\ c+d=j}} (M_a \otimes M_c) \otimes (M_b \otimes M_d).$$

Luego

$$\begin{aligned}((m_1 \otimes m_0)\Delta)(M_i \otimes M_j) &\subseteq \sum_{\substack{a+b=i \\ c+d=j}} m_1(M_a \otimes M_c) \otimes m_0(M_b \otimes M_d) = \\ &= m_1(M_i \otimes M_j) \otimes m_0(M_0 \otimes M_0),\end{aligned}$$

como $m_0|_{M_0 \otimes M_0} = m_H$ obtenemos

$$((m_1 \otimes m_0)\Delta)(M_i \otimes M_j) \subseteq m_1(M_i \otimes M_j) \otimes M_0.$$

Entonces $((m_1 \otimes m_0)\Delta)(M_i \otimes M_j) = 0$ si $i + j \neq 1$. Luego sólo debemos calcular $(m_1 \otimes m_0)\Delta$ en $M_i \otimes M_j$ cuando $i + j = 1$. Si $d = h \otimes n$, el lado izquierdo de (4.10) queda

$$((m_1 \otimes m_0)\Delta)(h \otimes n) = \sum (h_{(1)} \cdot n_{(0)}) \otimes (h_{(2)} n_{(1)}). \tag{4.12}$$

Obsérvese ahora que el lado derecho de (4.10) es aplicar a d el mapa $\delta_r \circ m_1$. Como $m_1(M_i \otimes M_j) = 0$ si $i + j \neq 1$ sólo debemos calcular $\delta_r \circ m_1$ en $M_i \otimes M_j$ con $i + j = 1$. Entonces el lado derecho de (4.10) queda

$$(\delta_r \circ m_1)(h \otimes n) = \sum (h \cdot n)_{(0)} \otimes (h \cdot n)_{(1)}. \tag{4.13}$$

Análogamente se hace la cuenta para el caso $d = n \otimes h$, con $h \in H$ y $n \in M$. Luego la condición (4.4) implica que (4.12) y (4.13) son iguales y la condición (4.6) implica que $((m_1 \otimes m_0)\Delta)(n \otimes h) = (\delta_r \circ m_1)(n \otimes h)$, por lo tanto m_1 verifica (4.10). Análogamente, utilizando (4.3) y (4.5), podemos ver que m_1 verifica (4.11).

A su vez obsérvese que $m_1(corad(C_H(M) \otimes C_H(M))) = 0$, pues por la Proposición (1.1.7) tenemos $corad(C_H(M) \otimes C_H(M)) \subseteq corad(C_H(M)) \otimes corad(C_H(M))$ y por la Proposición (1.1.8) tenemos $corad(C_H(M)) \subseteq M_0 = H$ entonces $corad(C_H(M) \otimes C_H(M)) \subseteq H \otimes H$ y

$m_1(H \otimes H) = 0$.

Luego podemos aplicar el Corolario (3.4.3) obteniendo que existe un único morfismo de coálgebras en ${}^H\mathcal{M}^H$, $m : C_H(M) \otimes C_H(M) \to C_H(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & H \\ C_H(M) \otimes C_H(M) \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & C_H(M). \arrow[u, "\pi_0"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Explícitamente $m = \sum_{n \geq 0} m_n$ donde $m_n = m_1^{\otimes n} \circ \Delta^{n-1}$, $\forall n \geq 2$, donde Δ es el coproducto de $C_H(M) \otimes C_H(M)$ como coálgebra. Es inmediato observar que $m(M_i \otimes M_j) \subseteq M_{i+j}$, $\forall i, j \geq 0$.

Por otra parte definimos $u : \Bbbk \to C_H(M)$ por $u = \iota \circ u_H$, donde ι es la inclusión de H en $C_H(M)$ y u_H es el mapa unidad de H. Claramente u es un morfismo de coálgebras.
Luego queremos ver que m y u definen en $C_H(M)$ una estructura de álgebra, es decir que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C_H(M) \otimes C_H(M) \otimes C_H(M) \arrow[r, "id \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id"'] & C_H(M) \otimes C_H(M) \arrow[d, "m"] \\ C_H(M) \otimes C_H(M) \arrow[r, "m"'] & C_H(M) \end{tikzcd} \tag{4.14}$$

y

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C_H(M) \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & C_H(M) \otimes C_H(M) \arrow[d, "m"] & C_H(M) \otimes \Bbbk \, . \arrow[l, "id \otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & C_H(M) & \end{tikzcd} \tag{4.15}$$

- Para ver que (4.14) conmuta, por el Corolario 3.4.3, es suficiente probar que

$$\pi_j \circ m \circ (id \otimes m) = \pi_j \circ m \circ (m \otimes id) \text{ para } j = 0, 1.$$

  - Para $j = 0$ es inmediato pues es la asociatividad de m_H.

- Para $j = 1$ es necesario ver que

  $$(id_H \otimes \cdot_r + id_H \otimes \cdot_l + id_M \otimes m_H) \circ (\cdot_r + \cdot_l) = (\cdot_r \otimes id_H + \cdot_l \otimes id_H + m_H \otimes id_M) \circ (\cdot_r + \cdot_l),$$

  y esto vale debido a que $M \in {}_H\mathcal{M}_H$.

▪ Veamos ahora que el lado derecho de (4.15) conmuta. Obsérvese que por el Corolario 3.4.3 es equivalente a probar

$$m(x \otimes 1_H) = x, \ \forall x \in M_n, \ \forall n \geq 0. \tag{4.16}$$

Dado que $m(x \otimes 1_H) = m_n(x \otimes 1_H)$ si $x \in M_n, \ \forall n \geq 0$ entonces (4.16) es equivalente a probar

$$m_n(x \otimes 1_H) = x, \ \forall x \in M_n, \forall n \geq 0.$$

- Para $n = 0, 1$ es inmediato.
- Para $n = 2$. Es suficiente ver que $m_2(m \boxtimes n \otimes 1_H) = m \boxtimes n, \ \forall m \boxtimes n \in M_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
&m_2(m \boxtimes n \otimes 1_H) = \\
&= (m_1 \otimes m_1) \left(\sum (m_{(-1)} \otimes 1_H) \otimes (m_{(0)} \boxtimes n \otimes 1_H)\right) + \\
&+ (m_1 \otimes m_1) \left((m \otimes 1_H) \boxtimes (n \otimes 1_H) + \sum (m \boxtimes n_{(0)} \otimes 1_H) \otimes (n_{(1)} \otimes 1_H)\right) = \\
&= (m \cdot 1_H) \boxtimes (n \cdot 1_H) = m \boxtimes n.
\end{aligned}$$

- Para $n \geq 3$ los casos son análogos al anterior.

▪ De la misma forma se prueba la conmutatividad del lado izquierdo de (4.15).

Luego $(C_H(M), m, u)$ es una álgebra graduada. □

Corolario 4.2.4. *Sean H un álgebra de Hopf y $M \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Entonces $C_H(M)$ admite estructura de álgebra de Hopf graduada.*

Demostración: Sabemos que $C_H(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ es una biálgebra graduada tal que $M_0 = H$ es un álgebra de Hopf, luego aplicando el Teorema (1.1.13) obtenemos que $C_H(M)$ admite estructura de álgebra de Hopf graduada. □

Proposición 4.2.5. *Sean H una biálgebra y $M \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$. Consideramos las inclusiones $\iota_0 : H \to T_H(M)$, $\hat{\iota_0} : H \to C_H(M)$, $\iota_1 : M \to T_H(M)$, $\hat{\iota_1} : M \to C_H(M)$. Entonces existe un único $\psi : T_H(M) \to C_H(M)$ morfismo de biálgebras tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\hat{\iota_1}"] & \\
T_H(M) \arrow[r, "\psi"] & C_H(M). \\
H \arrow[u, "\iota_0"] \arrow[ur, "\hat{\iota_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Obsérvese que $\hat{\iota_0}$ es un morfismo de álgebras, pues por las definiciones del producto m y la unidad u en $C_H(M)$ se verifica $m \circ (\hat{\iota_0} \otimes \hat{\iota_0}) = \hat{\iota_0} \circ m_H$, y $u = \hat{\iota_0} \circ u_H$.
Además $\hat{\iota_1}$ es un mapa lineal que verifica $\hat{\iota_1}(h \cdot m \cdot h') = h \cdot m \cdot h' = \hat{\iota_0}(h)\hat{\iota_1}(m)\hat{\iota_0}(h'),\ \forall h, h' \in H,\ m \in M$.
Luego, dado que $C_H(M)$ es un álgebra, podemos aplicar el Corolario 2.4.3 obteniendo que existe un único $\psi : T_H(M) \to C_H(M)$ morfismo de álgebras tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\iota_1"'] \arrow[dr, "\hat{\iota_1}"] & \\
T_H(M) \arrow[r, "\psi"] & C_H(M). \\
H \arrow[u, "\iota_0"] \arrow[ur, "\hat{\iota_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Explícitamente ψ está dado por $\psi = \sum_{j\geq 0} \psi_j$ donde $\psi_0 = \hat{\iota_0}$, $\psi_1 = \hat{\iota_1}$ y para $j \geq 2$, $\psi_j(x_1 \otimes_H \cdots \otimes_H x_j) = \hat{\iota_1}(x_1) \cdots \hat{\iota_1}(x_j)$. Obsérvese que ψ así definido respeta la graduación:

$$\psi(H) = H,\ \psi(M) = M,\ \text{y } \psi(M^{\otimes^n_H}) \subseteq M^{\ \ n}_{\ \ H},\ \forall n \geq 2. \tag{4.17}$$

Veamos ahora que ψ es un morfismo de coálgebras, es decir que hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
T_H(M) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\psi"'] & T_H(M) \otimes T_H(M) \arrow[d, "\psi\otimes\psi"] \\
C_H(M) \arrow[r, "\Delta'"'] & C_H(M) \otimes C_H(M)
\end{tikzcd} , \tag{4.18}$$

donde Δ y Δ' son los mapas comultiplicación de $T_H(M)$ y $C_H(M)$ respectivamente y

$$\begin{tikzcd} T_H(M) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C_H(M), \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd} \tag{4.19}$$

donde ε y ε' son los mapas counidad de $T_H(M)$ y $C_H(M)$ respectivamente.

- Para ver que (4.18) conmuta, por el Corolario 2.4.3, es suficiente probar que

$$(\psi \otimes \psi) \circ \Delta \circ \iota_j = \Delta' \circ \psi \circ \iota_j \text{ para } j = 0, 1.$$

  - Para $j = 0$ la ecuación (4.18) queda $(\hat{\iota_0} \otimes \hat{\iota_0}) \circ \Delta_H = \Delta_H \circ \hat{\iota_0}$, pues $\Delta|_H = \Delta_H = \Delta'|_H$ y $\psi|_H = \hat{\iota_0}$. Su validez es inmediata.
  - Para $j = 1$ la ecuación (4.18) queda $(\hat{\iota_1} \otimes \hat{\iota_1}) \circ (\delta_l + \delta_r) = (\delta_l + \delta_r) \circ \hat{\iota_1}$, pues $\Delta|_M = \delta_l + \delta_r = \Delta'|_M$ y $\psi|_M = \hat{\iota_1}$. Su validez también es inmediata.

- La conmutatividad de (4.19) se verifica de forma clara dado que $\varepsilon = \varepsilon_H \circ \pi_0 = \varepsilon'$ y ψ verifica (4.17).

En conclusión $\psi : T_H(M) \to C_H(M)$ es un morfismo de biálgebras. □

Observación 4.2.6. Notar que en la proposición anterior $Im(\psi)$ es la subálgebra de $C_H(M)$ generada por H y M.

Definición 4.2.7. Si H es un álgebra de Hopf llamamos *álgebra simétrica cuántica* asociada al par (H, M) al álgebra de Hopf $S_H(M) = Im(\psi)$, donde ψ es el morfismo de biálgebras de la proposición anterior.

Bibliografía

[1] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, AMS, CBMS, 82, (1993).

[2] M. Sweedler, *Hopf Algebras,* Benjamin, New York, (1969).

[3] W.D. Nichols, *Bialgebras of Type One*, Comm. in Algebra, 6, 15, (1978).

[4] Xiao-Wu Chen, Hua-Lin Huang, Pu Zhang, *Dual Gabriel Theorem with applications*, (2004).