

TRABAJO MONOGRÁFICO

Clasificación de Álgebras Hereditarias.

Dalia Artenstein

Orientador: Dr. Marcelo Lanzilotta

Centro de matemática

Licenciatura en matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

7 de Diciembre del 2007

Agradecimientos

Muchas gracias a todas las personas que de alguna forma u otra aportaron para que esta monografía sea posible y formaron parte de este proceso que la verdad son muchas.

A mamá, papá, Ilana Y David que me apoyaron SIEMPRE en todas las decisiones que fui tomando en estos años.

A Iani, que ocupa un lugar importantísimo en mi vida y esta ahí bancándome en todo.

A Mainu, mi compañerita de estudio y amiga que hizo que la carrera sea mucho más divertida. A Ceci y Naty por estar y darme una mano siempre que la necesité. A Vivi por la ayuda y a todo el Grupo de Representaciones que ira tomando más fuerza aún.

A Marcelo, que me escuchó siempre y me acompañó con mucha paciencia en todo este proceso que no fue fácil y del que aprendí mucho.

A toda la flia: abuelos, tíos y primos y a mis amigas Vivi, Yami Lore y Ronit.

Resumen

En este trabajo monográfico se clasificarán las álgebras hereditarias de tipo de representación infinito manso a través de los diagramas euclidianos también llamados Dynkin extendidos. En particular, se describirá completamente el comportamiento de la categoría de módulos finitamente generados de dichas álgebras.

Para esto estudiaremos a KQ el álgebra de caminos con \bar{Q} un diagrama euclidiano. Se estudiarán los módulos de dicha álgebra a partir de los módulos indescomponibles. Éstos se dividirán en dos según la anulación o no de un parámetro llamado **defecto** de la dimensión del módulo indescomponible.

Una vez hecha esta división, se probará que los de defecto no nulo se encuentran en biyección con su dimensión y se describirá su forma con la ayuda de un functor llamado **functor de coxeter**.

Los de defecto nulo serán llamados **módulos regulares**. Dentro de estos, distinguiremos los homogéneos y los no homogéneos.

Para la comprensión de los no homogéneos se obtendrá una lista completa de los módulos simples regulares no homogéneos. Y por último se probarán dos teoremas describiendo los módulos regulares (un teorema para homogéneos y otro para no homogéneos) a partir de los simples regulares.

Abstract

In this monograph tame Hereditary algebras of infinite representation type will be classified through euclidean diagrams (also called extended Dynkin). In particular, the category of finite generated modules will be completely described.

In order to achieve this, we will study KQ , the path algebra in which \bar{Q} is an euclidean diagram. The modules of this algebra will be studied by understanding the indecomposable modules. These modules may be divided in two parts according to the annihilation of a parameter called **defect** of the dimension of the indecomposable module.

Once this division is done, the modules with non zero defect will be in bijection with their dimension, and their form will be described with the help of a functor called **coxeter functor**.

The ones with zero defect will be called **regular modules**. In the regular modules we will distinguish the homogeneous and non-homogeneous ones.

In order to understand the non-homogeneous ones, a list of all the non-homogeneous simple regular modules will be obtained. Finally, two theorems will be demonstrated describing the regular modules from the simple ones.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Preliminares | 6 |
| 1.1. Álgebras y Módulos | 6 |
| 1.1.1. Estructuras básicas | 6 |
| 1.1.2. Teorema de Krull-Remak-Schmidt | 8 |
| 1.2. Teorema de Gabriel I | 8 |
| 1.3. Representaciones y módulos | 11 |
| 1.4. Tipos de representación | 15 |
| 1.4.1. Diagramas Dynkin y Euclidianos | 16 |
| 1.5. Forma cuadrática | 20 |
| 1.6. Gabriel II | 24 |
| 2. Módulos determinados por su dimensión | 26 |
| 2.1. Herramientas básicas acerca del vector dimensión | 27 |
| 2.1.1. El defecto y los cambios de orientación | 34 |
| 2.2. Raíces de q_Q | 35 |
| 2.3. El functor de reflexión | 42 |
| 2.4. Relacionando el functor de reflexión con las raíces de q_Q | 52 |
| 3. Los KQ-módulos Regulares | 55 |
| 3.1. Qué son y cuáles son sus propiedades fundamentales? | 55 |
| 3.2. Existencia de ecuaciones | 58 |
| 3.3. Forma de Tits y Extensiones | 64 |
| 3.4. Descripción de los módulos regulares indescomponibles | 71 |

Capítulo 1

Preliminares

El objeto de estudio de este trabajo está enmarcado dentro del área de la teoría de Representaciones de Álgebras, y dentro de esta, en el uso de carcajes como herramienta para la comprensión de la categoría de los módulos asociados a un álgebra.

Para poder situar al lector no familiarizado con estos temas dedicaremos este capítulo a aspectos generales relacionados a la teoría de Representaciones de álgebras y luego al lugar que ocupan los carcajes (que no son otra cosa que grafos orientados) en dicha teoría.

Nos limitaremos al caso de K -álgebras de dimensión finita con K algebraicamente cerrado aunque muchos de los resultados que citaremos se cumplen en un contexto un poco más general (álgebras de Artin).

1.1. Álgebras y Módulos

Uno de los objetivos centrales de la teoría de representaciones de álgebras (o de anillos en general) es poder entender un álgebra a través del estudio de los módulos asociados a la misma.

Definamos estas estructuras básicas (anillo, álgebra, módulo) y veamos que en nuestro contexto el estudio de los módulos se basa en el estudio de los indescomponibles.

1.1.1. Estructuras básicas

DEFINICIÓN 1.1.1. (Anillo) *Un anillo es un conjunto con dos operaciones $(A, +, \cdot)$ donde A con $+$ es un grupo abeliano (asociativa, conmutativa, neutro y opuesto) con el elemento 0 como neutro y donde se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $(a.b).c = a.(b.c)$
2. $a.(b + c) = a.b + a.c$ y $(b + c).a = b.a + c.a$ para $a, b, c \in A$.

OBSERVACIÓN 1.1.2. *Trataremos con anillos con unidad, o sea, existe un elemento llamado 1 que cumple que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in A$.*

DEFINICIÓN 1.1.3. (Cuerpo) *Un anillo A es un cuerpo si es conmutativo ($a.b = b.a, \forall a, b \in A$) y todo elemento tiene inverso, o sea, para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a.b = b.a = 1$.*

DEFINICIÓN 1.1.4. (Cuerpo Algebraicamente cerrado) *Sea K un cuerpo, decimos que K es algebraicamente cerrado si para todo polinomio no constante con una indeterminada t con coeficientes en K se cumple que todas las raíces están en K .*

DEFINICIÓN 1.1.5. (Álgebra) *Sea K un cuerpo, una K -álgebra A es un anillo con unidad tal que A como K -espacio vectorial es compatible con la multiplicación de A como anillo, en otras palabras*

$$\lambda(a.b) = (a.\lambda).b = a.(\lambda.b) = (a.b)\lambda \quad \forall \lambda \in K \quad a, b \in A$$

Dentro de las álgebras en general nos van a interesar las de dimensión finita siempre sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Recordemos de qué se tratan.

DEFINICIÓN 1.1.6. (Álgebra de dimensión finita) *Una K -álgebra A se dice de dimensión finita si su dimensión sobre K como espacio vectorial es finita.*

Podemos hablar de A -módulos siempre que A tenga estructura de anillo. En nuestro contexto A será un álgebra (que en particular es un anillo) así que definimos módulo en nuestro caso de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.1.7. (Módulo) *Sea A una K -álgebra. Un A -módulo a derecha es un par (M, \cdot) , donde M es un K -espacio vectorial y $M \times A \rightarrow M$ ($m \rightarrow m.a$) una operación binaria que satisface las siguientes condiciones:*

1. $(x + y).a = x.a + y.a$
2. $x.(a + b) = x.a + x.b$
3. $x.(ab) = (x.a)b$
4. $x \cdot 1 = x$
5. $(x\lambda).a = x.(a\lambda) = (x.a)\lambda, \forall x, y \in M, a, b \in A, \lambda \in K$.

OBSERVACIÓN 1.1.8. *Notemos que el propio A se puede ver como un A -módulo a derecha. Los ideales a derecha de A también tienen estructura de A -módulos considerando la multiplicación a derecha como la acción.*

DEFINICIÓN 1.1.9. (Submódulo) *Un K -subespacio vectorial N de M , A -módulo a derecha, se dice un submódulo de M si $na \in M \forall n \in N, a \in A$.*

DEFINICIÓN 1.1.10. (Homomorfismo de A -módulos a derecha) *Sean M y N A -módulos a derecha, un mapa K -lineal $h : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de A -módulos si $h(ma) = h(m)a \forall m \in M, a \in A$.*

Los A -módulos a derecha con los homomorfismos de A -módulos a derecha forman una categoría llamada $ModA$. Dentro de esta podemos considerar a los A -módulos a derecha finitamente generados. Éstos, con los homomorfismos correspondientes forman una subcategoría a la que llamaremos $modA$.

Con estas mismas ideas podemos definir A -módulo a izquierda y la categorías $AMod$ y $Amod$. A lo largo de este trabajo usaremos módulos a izquierda o derecha en el caso que corresponda.

1.1.2. Teorema de Krull-Remak-Schmidt

DEFINICIÓN 1.1.11. (Módulo indescomponible) *Sea M un A -módulo, M es indescomponible si M es no nulo y no se puede escribir de la forma $M \simeq N \oplus L$ con N y L A -módulos no nulos.*

Que un módulo sea indescomponible no implica necesariamente que no tenga submódulos propios (éstos serán los módulos simples).

Los módulos indescomponibles serán los elementos básicos para entender A -mod ya que todo módulo se escribe de forma única (a menos del orden) como suma directa de módulos indescomponibles y esto es lo que dice el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1.12. (Krull-Schmidt-Azumaya) *Sea A una K -álgebra. Supongamos que M y N son A -módulos con $M = M_1 \oplus M_2 \dots \oplus M_r$ y $N = N_1 \oplus N_2 \dots \oplus N_s$ siendo N_i y M_j indescomponibles para $i = 1 \dots s$, $j = 1 \dots r$. Entonces, si $M \simeq N$, $r = s$ y existe una permutación σ tal que $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$ para todo $1 \leq i \leq r$.*

1.2. Teorema de Gabriel I

En esta sección nos centraremos en entender la relación que existe entre los carcajes y las K -álgebras de dimensión finita. Esta relación nos la dará el Teorema de Gabriel pero primero veamos algunos conceptos básicos sobre los carcajes comenzando con su definición.

DEFINICIÓN 1.2.1. (Carcaj)

Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es una cuádrupla que consiste en dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados **puntos** o **vértices**) y Q_1 (cuyos elementos son llamados **flechas**), y dos mapas $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian a cada $\alpha \in Q_1$ su fuente $s(\alpha) \in Q_0$ y su destino $t(\alpha) \in Q_0$, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.2.2. (Carcaj finito)

Decimos que un carcaj Q es finito si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.

DEFINICIÓN 1.2.3. (Grafo subyacente)

El grafo subyacente \bar{Q} de un carcaj Q se obtiene de Q sin tomar en cuenta las orientaciones de las flechas.

DEFINICIÓN 1.2.4. (Carcaj conexo)

Decimos que un carcaj es conexo si \bar{Q} (el grafo subyacente) es conexo.

DEFINICIÓN 1.2.5. (Camino)

Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj $a, b \in Q_0$. Un camino de largo ℓ con fuente a y destino b (de a en b) es una secuencia $(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|b)$ donde $\alpha_k \in Q_1$ cumple que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ y $t(\alpha_\ell) = b$. Un camino de esta forma se escribe de forma abreviada de la forma $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_\ell$.

Notación: Llamaremos Q_l al conjunto de todos los caminos de largo l . Acordamos ver a los puntos de Q_0 como caminos de largo cero, los llamamos camino trivial o estacionario y se representan como $\varepsilon_a = (a || a)$.

OBSERVACIÓN 1.2.6. Los caminos de largo cero y uno están en biyección con los puntos y flechas del carcaj respectivamente.

DEFINICIÓN 1.2.7. (Ciclo)

Un camino de largo $l \geq 1$ que comienza y termina en el mismo punto se llama ciclo. Un carcaj que no contiene ciclos se llama acíclico.

Una primer relación entre los carcajes y las álgebras aparece con la construcción del álgebra de caminos. Ésta pasará a ser un caso particular del Teorema de Gabriel, veamos de que se trata.

DEFINICIÓN 1.2.8. (Álgebra de Caminos)

Sea Q un carcaj. El Álgebra de Caminos KQ es la K -álgebra tal que como espacio vectorial tiene de base los caminos en Q y el producto de dos vectores de la base se define de la siguiente manera:

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell|b)(c|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k|d)$$

En otras palabras, la operación es "pegar" los caminos si se puede, o sea, si el primer camino termina donde comienza el segundo.

Para poder definir otras álgebras a partir de un carcaj Q necesitamos más estructura. Es aquí donde aparecen los ideales admisibles \mathcal{I} y luego el álgebra KQ/\mathcal{I} .

DEFINICIÓN 1.2.9. (Ideal flecha)

Sea Q un carcaj finito y conexo. Llamaremos ideal flecha (R_Q) al ideal bilateral de KQ generado por las flechas de Q . Observemos que $R_Q = \bigoplus_{l \geq 1} KQ_l$ siendo KQ_l el subespacio de KQ generado por los caminos de largo l . A su vez, para cada $l \geq 1$, $R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} KQ_m$, es el ideal de KQ generado por los caminos de largo mayor o igual que l .

DEFINICIÓN 1.2.10. (Ideal admisible) Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos KQ . Un ideal bilateral \mathcal{I} de KQ se dice admisible si existe $m \geq 2$ tal que:

$$R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2.$$

Si \mathcal{I} es un ideal admisible de KQ , el par (Q, \mathcal{I}) se dice un carcaj acotado. Al álgebra cociente KQ/\mathcal{I} la llamaremos álgebra del carcaj acotado (Q, \mathcal{I}) .

Luego de definidas las álgebras KQ/\mathcal{I} es natural preguntarse cuando un álgebra se puede escribir de esta forma. Para esto daremos la definición de álgebra básica y conexa.

DEFINICIÓN 1.2.11. (Conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales)

Consideremos una K -álgebra de dimensión finita. Un elemento $e \in A$ se dice idempotente si cumple que $e^2 = e$. Los idempotentes e_1, e_2 se dicen ortogonales si $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. Un idempotente e se dice primitivo si no se puede escribir como $e_1 + e_2$ siendo e_1 y e_2 idempotenes ortogonales no nulos.

Al ser A de dimensión finita admite una descomposición como A -módulo a derecha $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$ siendo P_i , con $i = 1, \dots, n$, ideales a derecha indescomponibles y $P_i = e_i A$ con e_i un idempotente primitivo. El conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ se llama conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales.

DEFINICIÓN 1.2.12. (Álgebra básica)

Sea A una K -álgebra con el conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. El álgebra A es básica si $e_i A \neq e_j A, \forall i \neq j$.

DEFINICIÓN 1.2.13. (Álgebra conexa)

Un álgebra A es conexa (o indescomponible) si no se puede escribir como producto directo de dos álgebras no nulas.

Por último enunciaremos el Teorema de Gabriel para álgebras de dimensión finita (es el caso que nos interesa) y daremos un ejemplo de su aplicación.

TEOREMA 1.2.14. (Gabriel I)

Sea A una K -álgebra básica, conexa y de dimensión finita.

Entonces existe un ideal admisible \mathcal{I} y un carcaj Q_A tal que $A \simeq KQ_A/\mathcal{I}$

EJEMPLO 1.2.15. *Sin entrar en detalles de construcción y solo a modo de ejemplo si consideramos $A = K[t]/\langle t^m \rangle$, con $m \geq 1$, entonces $A \simeq KQ/\mathcal{I}$ con $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$ e $\mathcal{I} = \langle \alpha^m \rangle$:*



1.3. Representaciones y módulos

Luego de obtener una relación entre carcajes y álgebras y sabiendo que a partir de la categoría de módulos podemos comprender el álgebra encontraremos una forma de ver a los módulos en el carcaj. Para esto definiremos las representaciones y luego citaremos un resultado que relaciona los módulos de un álgebra y las representaciones de un carcaj.

DEFINICIÓN 1.3.1. (Representación)

Sea Q un carcaj y K un cuerpo algebraicamente cerrado. Una representación K -lineal M de Q (o simplemente una representación de M en Q) es definida de la siguiente manera:

- (a) *A cada punto $a \in Q_0$ del carcaj le asocia un K -espacio vectorial M_a ,*
- (b) *A cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 le asocia un mapa K -lineal $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.*

Podemos escribir $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ con $a \in Q_0$ y $\alpha \in Q_1$. Decimos que la representación M es de dimensión finita si cada M_a es un K -espacio vectorial de dimensión finita.

En esta primera definición de representación no aparece el ideal admisible. Veamos la definición de representación acotada por \mathcal{I} y para esto definamos primero relación.

DEFINICIÓN 1.3.2. (Relación)

Sea Q un carcaj. Una relación en Q con coeficientes en K es una combinación K -lineal de caminos de largo $l \geq 2$ que comienzan en un mismo vértice y terminan en un mismo vértice. Una relación ρ se escribe de la siguiente forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \text{ con } \lambda_i \in K \text{ y } w_i \text{ los caminos de largo por lo menos 2 tal que}$$

$$s(w_i) = s(w_j) \text{ y } t(w_i) = t(w_j) \text{ } i, j = 1, \dots, m.$$

LEMA 1.3.3. Si Q es un carcaj finito e \mathcal{I} un ideal admisible de KQ existe una cantidad finita de relaciones $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$.

Ahora si veamos el concepto de representación acotada por \mathcal{I} .

DEFINICIÓN 1.3.4. Dado $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ una relación, definimos $\varphi_\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{w_i}$ siendo φ_{w_i} la composición de las transformaciones lineales correspondientes.

DEFINICIÓN 1.3.5. (Representación acotada por un ideal admisible \mathcal{I}) Sea Q un carcaj finito, \mathcal{I} un ideal admisible de KQ . Una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de Q se dice acotada por el ideal admisible \mathcal{I} si cumple que $\varphi_\rho = 0$ para toda ρ relación del ideal.

Las representaciones indescomponibles jugarán el papel de los módulos indescomponibles.

DEFINICIÓN 1.3.6. (Suma directa de representaciones)

Dadas dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ definimos la representación suma directa $M \oplus M'$ como $(M \oplus M')_a = M_a \oplus M'_a$ y $(M \oplus M')_\alpha = M_\alpha \oplus M'_\alpha$.

DEFINICIÓN 1.3.7. (Representación indescomponible)

Una representación M de Q se dice indescomponible si no es isomorfa a la suma directa de dos representaciones no nulas.

Así como entre los anillos tenemos los homomorfismos de anillos y entre los módulos los homomorfismos de módulos veamos la definición de morfismo entre representaciones.

DEFINICIÓN 1.3.8. (Morfismo de representaciones)

Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q .

Un morfismo de representaciones $f : M \rightarrow M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de mapas K -lineales, con cada $f_a : M_a \rightarrow M'_a$ tal que para todo $\alpha : a \rightarrow b$, $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$, o sea, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ f_a \downarrow & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

El conjunto de las representaciones K -lineales de un carcaj Q junto a los morfismos de representaciones forman una categoría que llamaremos $Rep_K(Q)$. Dentro de esta podemos distinguir una subcategoría que consiste en considerar las representaciones de dimensión finita con los morfismos correspondientes; a esta la denotamos $rep_K(Q)$.

Veamos ahora el resultado que relaciona las categorías $ModA$ con $Rep_K(Q)$.

TEOREMA 1.3.9. *Sea $A = KQ/\mathcal{I}$ donde Q es un carcaj finito y conexo e \mathcal{I} es un ideal admisible de KQ . Existe una equivalencia K -lineal de categorías:*

$$F : ModA \xrightarrow{\cong} Rep_K(Q, \mathcal{I})$$

Además esta equivalencia entre categorías se restringe a:

$$F : modA \xrightarrow{\cong} rep_K(Q, \mathcal{I}).$$

Gracias al teorema anterior podemos ver los módulos de un álgebra (en las hipótesis del Teorema de Gabriel) como representaciones. Dentro de los módulos asociados a un álgebra podemos distinguir los indescomponibles que ya vimos, pero también los simples, proyectivos e inyectivos. Recordemos sus definiciones.

DEFINICIÓN 1.3.10. (Módulo simple)

Sea M un A -módulo, M es simple si es no nulo y no contiene submódulos propios.

DEFINICIÓN 1.3.11. (Módulo inyectivo) Un A -módulo a derecha E se dice inyectivo si para cualquier homomorfismo inyectivo (monomorfismo) de A -módulos a derecha $u : L \rightarrow M$, el mapa inducido $Hom_A(u, E) : Hom_A(M, E) \rightarrow Hom_A(L, E)$ es sobreyectivo. En otras palabras, para todo monomorfismo $u : L \rightarrow M$ y homomorfismo $g : L \rightarrow E$, existe $g' : M \rightarrow E$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M \\
 & & \downarrow g & \searrow g' & \\
 & & E & &
 \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.3.12. (Módulo proyectivo) Un A -módulo a derecha P se dice proyectivo si para cualquier homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo) de A -módulos a derecha $h : M \rightarrow N$, el mapa inducido $\text{Hom}_A(P, h) : \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N)$ es sobreyectivo. En otras palabras, para todo epimorfismo $h : M \rightarrow N$ y homomorfismo $f : P \rightarrow N$, existe $f' : P \rightarrow M$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \downarrow f & & \\
 & \swarrow f' & & \searrow & \\
 M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Veamos ahora la forma de las representaciones asociadas a los módulos simples, indescomponibles y dentro de éstos, a los proyectivos e inyectivos indescomponibles.

LEMA 1.3.13. Sea $A \simeq KQ/\mathcal{I}$. Consideremos F , el functor del teorema anterior.

(a) Los módulos simples se transforman bajo el functor F en las representaciones $S(i)$ con $i \in Q_0$ siendo:

$$S(i)_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K & i = j \end{cases}$$

$$S(i)_\alpha = 0, \forall \alpha \in Q_1;$$

(b) Los módulos indescomponibles se transforman en las representaciones indescomponibles;

(c) Los módulos proyectivos indescomponibles se transforman bajo el functor F en las representaciones $P(i)$ con $i \in Q_0$ siendo $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ de la siguiente forma:

$P(i)_j$ es el K -espacio vectorial con base $\{\bar{w} = w + \mathcal{I}\}$, los caminos de i en j .

Dado $\alpha : a \rightarrow b$, $\varphi_\alpha : P(i)_a \rightarrow P(i)_b$ está dada por la multiplicación a derecha de $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$;

(d) Los módulos inyectivos indescomponibles se transforman bajo el functor F en las representaciones $I(i)$ con $i \in Q_0$ siendo $I(i) = (I(i)_j, \psi_\alpha)$ de la siguiente forma:

$I(i)_j$ es el dual del K -espacio vectorial con base $\{\bar{v} = v + \mathcal{I}\}$ siendo v los caminos de j en i .

Dado $\alpha : a \rightarrow b$, $\psi_\alpha : I(i)_a \rightarrow I(i)_b$ está dada por el dual de la multiplicación a izquierda de $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$.

1.4. Tipos de representación

Dada un álgebra en las condiciones del teorema de Gabriel nos interesará estudiar los módulos indescomponibles. En este sentido, podríamos dividir a las álgebras en dos tipos: las que tiene un número finito de módulos indescomponibles (a menos de isomorfismos) y las que tienen infinitos módulos indescomponibles no isomorfos. A las primeras las llamaremos de tipo de representación finita mientras que las segundas serán de tipo de representación infinita.

Dentro de todas las álgebras en las condiciones del Teorema de Gabriel nos centraremos en las hereditarias y dentro de éstas, en las que su grafo subyacente es Dynkin o Euclideano. Veamos de que se tratan estas álgebras y que propiedades tienen.

DEFINICIÓN 1.4.1. (Álgebras hereditarias) Decimos que un álgebra A es hereditaria a derecha si cualquier ideal a derecha de A es proyectivo como A -módulo.

Decimos que un álgebra A es hereditaria a izquierda si cualquier ideal a izquierda de A es proyectivo como A -módulo.

En el contexto de álgebras de dimensión finita A es hereditaria a derecha si y solamente si lo es a izquierda y por lo tanto las llamaremos simplemente hereditarias.

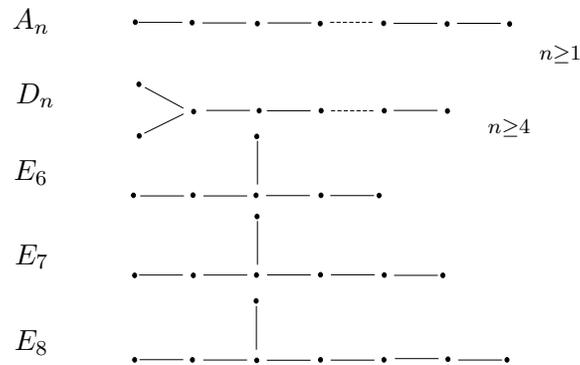
TEOREMA 1.4.2. (a) Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, entonces $A = KQ$ es hereditaria.

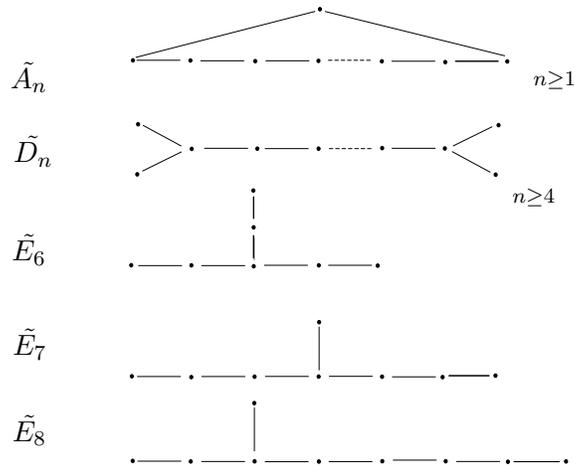
(b) Si A es un álgebra básica, conexa y hereditaria, consideremos $\{e_1, e_2 \dots e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales. Entonces $A \simeq KQ$ con Q un carcaj finito, conexo y acíclico ($|Q_0| = n$).

1.4.1. Diagramas Dynkin y Euclidianos

En el problema de clasificación de álgebras hereditarias, podemos pensar a dichas álgebras, gracias al resultado anterior, como álgebras de caminos KQ .

Dentro de todos los carcajes posibles vamos a distinguir ciertos carcajes cuyos grafos subyacentes son de la siguiente manera:





A los primeros cinco los llamaremos diagramas de Dynkin mientras que los siguientes cinco son los diagramas de Dynkin extendidos o Euclidianos. El subíndice en cada caso se refiere al número de puntos del grafo en los Dynkin y al número de puntos menos uno en los Euclidianos. Esto se debe a que los Euclidianos se construyen a partir de cada diagrama Dynkin agregando un punto y el nombre del diagrama hace referencia al Dynkin del cual proviene.

A partir de los diagramas anteriores podemos construir una familia de carcajes eligiendo alguna orientación para cada una de las aristas. Nos vamos a interesar en todos éstos salvo el caso \tilde{A}_n con las aristas orientadas todas en el mismo sentido. La razón es que el álgebra de caminos que se obtiene es de dimensión infinita y estas álgebras no serán nuestro objeto de estudio.

En varias ocasiones queremos obtener resultados para carcajes cuyos diagramas son Dynkin o Euclidianos (nos centraremos en los Euclidianos). Si quisieramos probar estos resultados a mano deberíamos considerar, en principio, todas las orientaciones posibles de dichos diagramas lo cual sería bastante extenso y de alguna forma repetitivo.

A continuación veremos una herramienta que nos servirá para reducir la cantidad de casos a probar.

DEFINICIÓN 1.4.3. reflexión (σ_a) Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj finito conexo y acíclico con $n = |Q_0|$. Para todo punto $a \in Q_0$ podemos definir un nuevo carcaj $\sigma_a Q = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ donde $Q_0 = Q'_0$ pero todas las flechas que comiencen o terminen en a se invierten.

DEFINICIÓN 1.4.4. (Sucesión admisible de pozos)

Una sucesión admisible de pozos es un orden para los vértices del carcaj $(a_1 a_2 \dots a_n)$ que cumple:

(i) a_1 es un pozo, o sea, en a_1 solo terminan flechas;

(ii) a_i es un pozo en $\sigma_{a_{i-1}} \dots \sigma_{a_1} Q$, para $2 \leq i \leq n$.

Este concepto será visto en el próximo capítulo como enumeración admisible. Allí se verá también que todo carcaj finito y acíclico admite una enumeración admisible (una sucesión admisible de pozos).

DEFINICIÓN 1.4.5. (Sucesión admisible de fuentes)

Una sucesión admisible de fuentes es un orden para los vértices del carcaj $(b_1 b_2 \dots b_n)$ que cumple:

(i) b_1 es una fuente, o sea, en b_1 solo comienzan flechas;

(ii) b_i es una fuente en $\sigma_{b_{i-1}} \dots \sigma_{b_1} Q$, para $2 \leq i \leq n$.

Claramente, si $(a_1 a_2 \dots a_n)$ es una sucesión admisible de pozos, $(a_n a_{n-1} \dots a_1)$ es una sucesión admisible de fuentes.

OBSERVACIÓN 1.4.6. Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico. Sea $(a_1 a_2 \dots a_n)$ una sucesión admisible de pozos.

(a) Si $1 \leq i \leq n$, entonces a_i es una fuente y a_{i+1} es un pozo en $\sigma_{a_i} \dots \sigma_{a_1} Q$.

(b) Si $1 \leq i \leq n$, entonces a_i es un pozo y a_{i-1} es una fuente en $\sigma_{a_i} \dots \sigma_{a_n} Q$.

(c) $\sigma_{a_n} \dots \sigma_{a_1} Q = \sigma_{a_1} \dots \sigma_{a_n} Q$

LEMA 1.4.7. Sean Q y Q' dos árboles que tienen el mismo grafo subyacente, o sea que cumplen $\bar{Q} = \bar{Q}'$, sin ciclos. Existe una sucesión de puntos de Q i_1, i_2, \dots, i_t tal que:

(a) Para cada $1 \leq s \leq t$, i_s es un pozo en $\sigma_{i_{s-1}} \dots \sigma_{i_1} Q$;

(b) $\sigma_{i_t} \dots \sigma_{i_1} Q = Q'$.

Demostración: Alcanza probar el resultado en el caso en que Q y Q' difieren en una flecha ya que podemos construir una sucesión de carcajes $Q = Q_1, Q_2, \dots, Q_t = Q'$ tal que Q_i y Q_{i+1} difieran en una flecha con $i = 1, \dots, p-1$.

Sea $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_1 tal que en Q'_1 es $\alpha' : j \rightarrow i$ la única flecha en la que difieren. Consideremos el siguiente subcarcaj de Q y Q' : $Q'' = (Q_0, Q_1/\{\alpha\})$. Como Q y Q' son árboles Q'' no es conexo. En particular, i y j se encuentran en componentes conexas distintas (las únicas dos componentes porque partimos de un carcaj conexo) y podemos escribir $Q'' = Q^i \cup Q^j$ donde Q^i es la componente conexa que contiene a i y Q^j la que contiene a j .

Tanto Q^i como Q^j serán árboles y por lo tanto podemos considerar una sucesión admisible de pozos para cada uno, $Q_0^i = \{1, 2, \dots, m\}$ y $Q_0^j = \{m+1, \dots, n\}$. Sabemos, por la observación anterior que para cada $1 \leq k \leq m$, k es un pozo en $\sigma_{k-1} \dots \sigma_1 Q^i$ y por lo tanto será un pozo en $\sigma_{k-1} \dots \sigma_1 Q$. Más aún, $\sigma_m \dots \sigma_1 Q = Q'$.

Luego de este resultado, dado un diagrama Dynkin o Euclideano distinto de \tilde{A}_n (son todos árboles) con una orientación arbitraria podemos pasar a cualquier otra orientación aplicando σ_a repetidas veces en forma adecuada.

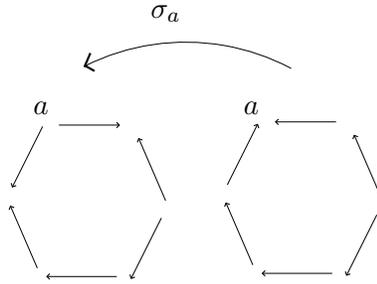
Para el caso de \tilde{A}_n nos servirá la siguiente observación:

OBSERVACIÓN 1.4.8. Si consideramos el diagrama \tilde{A}_n con una orientación que contenga exactamente m flechas antihorarias, podemos pasar con reflexiones (reiteradas veces y en forma adecuada) a cualquier otra orientación de \tilde{A}_n que tenga m flechas antihorarias.

Demostración: Consideremos el diagrama \tilde{A}_n con una orientación que contenga exactamente m flechas antihorarias.

Supondremos que $m < n+1$ ya que estamos excluyendo el caso en que todas las flechas están orientadas en el mismo sentido como ya observamos anteriormente y por lo tanto siempre habrá un pozo o una fuente. Consideremos un pozo a (con una fuente es análogo). Esto implica que habrá una flecha horaria que termina en a y una antihoraria que termina en a .

Al aplicar σ_a la flecha horaria pasa a ser antihoraria y la antihoraria pasa a ser horaria pero el número de flechas antihorarias m se mantiene. Veamos la siguiente figura:



Observemos que dado un carcaj de grafo subyacente \tilde{A}_n con m flechas antihorarias, aplicando σ_a para pozos o fuentes podemos ir corriendo las flechas de a una hasta que queden las m flechas antihorarias todas juntas al comienzo (fijando un v3rtice como primero); esto implica que puedo pasar de una orientaci3n de \tilde{A}_n a otra aplicando reflexiones.

1.5. Forma cuadr3tica

En esta secci3n presentaremos una herramienta que ser3 muy usada en el siguiente cap3tulo y que asigna a cada carcaj una forma cuadr3tica.

Veremos uno de los resultados b3sicos en los que se obtiene informaci3n del carcaj a partir de su forma cuadr3tica. Este resultado ser3 especialmente 3til en el caso de los diagramas de Dynkin y Euclidianos.

DEFINICI3N 1.5.1. (Forma cuadr3tica asociada a un carcaj Q)
 Sea Q un carcaj finito, conexo y ac3clico. Sea $n = |Q_0|$ el n3mero de puntos de Q .

Escribiremos como $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a la base can3nica de \mathbb{Z}^n (o \mathbb{Q}^n en el caso que sea necesario). La forma cuadr3tica asociada a Q se define como:

$$q_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$
 con $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Observemos que la forma cuadr3tica asociada a un carcaj depende solamente del grafo subyacente y no de la orientaci3n de las flechas.

Recordemos que una forma cuadr3tica q es **definida positiva** si $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ no nulo. Se dice que una forma cuadr3tica q es **semidefinida positiva** si $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$. Por 3ltimo, una forma cuadr3tica q es **indefinida** si existe $x \in \mathbb{Z}^n$ tal que $q(x) < 0$ e $y \in \mathbb{Z}^n$ tal que $q(y) > 0$. Observemos que en el caso de q_Q siempre van a haber vectores con $q_Q(x) > 0$ por ejemplo, $q_Q(e_i) = 1$, e_i de la base can3nica.

Para una forma cuadrática semidefinida positiva q , el conjunto

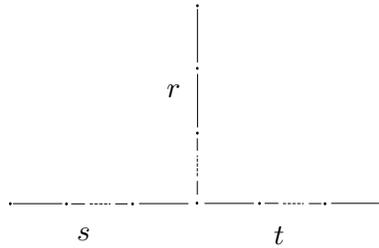
$$\text{rad } q = \{x \in Z^n / q(x) = 0\}$$

se llama **radical** de q . El **corrango** de q se define como el rango del radical.

Veamos ahora algunos lemas y ejemplos que nos llevarán al resultado principal de esta sección.

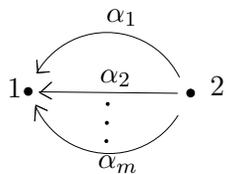
LEMA 1.5.2. *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico. Si el grafo subyacente de Q (\bar{Q}), no es Dynkin, entonces contiene un diagrama Euclideo como subgrafo.*

Demostración: Mostraremos que si Q no contiene un grafo Euclideo entonces es Dynkin. Como Q no contiene a \tilde{A}_n deberá ser un árbol. Como Q no contiene a \tilde{D}_4 ningún punto en \bar{Q} tendrá más de tres vecinos (puntos con los cuales tiene una flecha en común). La exclusión de \tilde{D}_n con $n \geq 5$ implica que a lo sumo un punto tendrá exactamente tres vecinos. Estamos en la siguiente situación:



siendo s , r y t la cantidad de puntos en cada rama (no contamos en ninguno el vértice que conecta las tres ramas). Podemos asumir que $r \leq s \leq t$. La exclusión de \tilde{E}_6 asegura que $r \leq 1$. Si $r = 0$ $\bar{Q} = A_{s+t+1}$. Si $r = 1$, al no poder contener a \tilde{E}_7 sabemos que $s \leq 2$. Si $s = 0$ es un A_n , si $s = 1$, entonces $\bar{Q} = D_{t+3}$ y si $s = 2$, como \tilde{E}_8 no es subgrafo de Q se concluye que $t \leq 4$. Si $t = 0$ o $t = 1$ pasamos a los casos anteriores y si $t = 2, 3, 4$ obtenemos E_6 , E_7 y E_8 respectivamente.

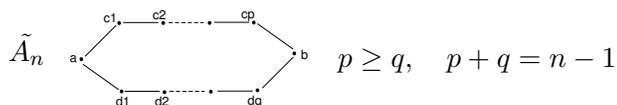
EJEMPLO 1.5.3. *Consideremos el siguiente carcaj:*



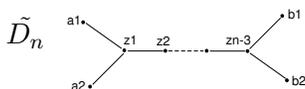
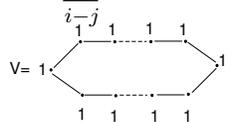
$q_Q = x_1^2 + x_2^2 - mx_1x_2 = (x_1 - m/2x_2)^2 + (1 - m^2/4)x_2^2$. Si $m=1$, q_Q es definida positiva, si $m = 2$ es semidefinida de corango 1 y si $m > 2$ es indefinida.

LEMA 1.5.4. Sea Q tal que su grafo subyacente \bar{Q} es Euclideo. Entonces q_Q es semidefinida positiva de corango uno.

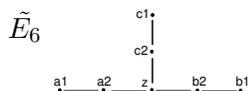
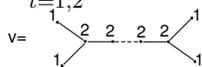
Demostración: El lema se demuestra simplemente hallando la forma cuadrática asociada a cada uno de los diagramas euclideos y un generador del radical (lo llamaremos v) en cada caso.



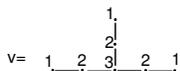
$$q_Q = \sum_{i-j} (x_i - x_j)^2$$



$$4q_Q = \sum_{t=1,2} (2a_t - z_1)^2 + 2 \sum_{1 \leq t \leq n-4} (z_t - z_{t+1})^2 + \sum_{t=1,2} (z_{n-3} - 2b_t)^2$$



$$36q_Q = (6a_1 - 3a_2)^2 + (6b_1 - 3b_2)^2 + (6c_1 - 3c_2)^2 + 3[(3a_2 - 2z)^2 + (3b_2 - 2z)^2 + (3c_2 - 2z)^2]$$



$$\tilde{E}_7 \quad \begin{array}{ccccccc} & & & c & & & \\ & & & | & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & z & b_3 & b_2 & b_1 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$24q_Q = 6[(2a_1 - a_2)^2 + (2b_1 - b_2)^2] + 2[(3a_2 - 2a_3)^2 + (3b_2 - 2b_3)^2] + (4a_3 - 3z)^2 + (4b_3 - 3z)^2 + 6(2c - z)^2$$

$$v = \begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & & | & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\tilde{E}_8 \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & c & \\ & & & & & | & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & z & b_2 & b_1 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

$$120q_Q = 30(2a_1 - a_2)^2 + 10(3a_2 - 2a_3)^2 + 5(4a_3 - 3a_4)^2 + 3(5a_4 - 4a_5)^2 + 30(2b_1 - b_2)^2 + 2(6a_5 - 5z)^2 + 10(3b_2 - 2z)^2 + 30(2c - z)^2$$

$$v = \begin{array}{ccccccc} & & & & & 3 & \\ & & & & & | & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

LEMA 1.5.5. *Sea Q un carcaj conexo tal que q_Q es semidefinida positiva y Q' un subcarcaj pleno, propio de Q . Entonces la restricción $q_{Q'}$ de q_Q en Q' es definida positiva.*

Demostración: Claramente $q_{Q'}$ es semidefinida positiva para cualquier subcarcaj pleno de Q . Supongamos que existe Q' tal que $q_{Q'}$ no es definida positiva. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que Q' es minimal con esta propiedad. Sea $x' = \sum_i x'_i e_i$ un vector no nulo tal que $q(x') = 0$. La minimalidad de Q' implica que $x'_i \neq 0$ para todo $i \in Q'_0$. Más aún, podríamos suponer que $x_i > 0$ ya que al ser semidefinida positiva se cumple que si $x'' = \sum_i |x'_i| e_i$, entonces $q_Q(x'') \leq q_Q(x')$.

Sea $j \in Q_0 \setminus Q'_0$ un vecino (predecesor o sucesor) de $k \in Q'_0$. Definimos el vector $x = \sum_i x_i e_i$ en Q^n de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} x'_i & \text{si } i \in Q'_0 \\ 1/2x'_k & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \in Q_0 \setminus Q'_0 \end{cases}$$

$$\text{Entonces } q_Q(x) = q_Q(x' + x_j e_j) = q_{Q'}(x') + x_j^2 - \sum_{l \in x_j^+ \cup x_j^-} x'_l x_j \leq x_j^2 -$$

$x'_k x_j = 1/4x_k'^2 - 1/2x_k'^2 = -1/4x_k'^2 < 0$ lo que contradice que q_Q es semidefinida positiva.

COROLARIO 1.5.6. *Sea Q un carcaj cuyo grafo subyacente es Dynkin. Entonces q_Q es definida positiva.*

Demostración: Dado un carcaj Q cuyo grafo subyacente \bar{Q} es Dynkin, es un subgrafo pleno de un grafo Euclideo Q' . Usando el lema 1.5.4 sabemos que la forma cuadrática asociada a un carcaj Euclideo $q_{Q'}$ es semidefinida positiva y por el lema 1.5.5 podemos asegurar que q_Q es definida positiva.

PROPOSICIÓN 1.5.7. *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, \bar{Q} el grafo subyacente asociado a Q .*

- (a) \bar{Q} es un diagrama de Dynkin si y solamente si q_Q es definida positiva.
- (b) \bar{Q} es un diagrama Euclideo si y solamente si q_Q es semidefinida positiva pero no definida positiva.
- (c) \bar{Q} no es un diagrama de Dynkin ni Euclideo si y solamente si q_Q es indefinida.

Demostración:

El directo de (a) es el corolario anterior.

El directo de (b) es el lema 1.5.4.

Supongamos ahora que q_Q es semidefinida positiva, entonces, gracias al ejemplo 1.5.3 sabemos que \bar{Q} no contiene dos puntos con más de dos flechas entre sí. Por lo tanto, si \bar{Q} no es Dynkin por el lema ?? sabemos que contiene a un diagrama Euclideo. Esta inclusión del diagrama Euclideo en \bar{Q} no puede ser estricta por el lema 1.5.5. Esto muestra el recíproco de (a) y (b).

Sea \bar{Q} ni Dynkin ni Euclideo. Por (a) y (b) q_Q no es semidefinida positiva y por lo tanto será indefinida. Usando nuevamente las partes anteriores, si q_Q es indefinida su grafo subyacente no puede ser ni Dynkin ni Euclideo.

1.6. Gabriel II

Por último en el capítulo, veremos el resultado que da una condición suficiente y necesaria para que un álgebra de caminos sea de tipo de representación finita. Omitiremos la demostración pero vale la pena resaltar que usa fuertemente la forma cuadrática asociada a un carcaj y algunos resultados que vimos en la sección anterior.

TEOREMA 1.6.1. *Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, K un cuerpo algebraicamente cerrado y $A = KQ$ el álgebra de caminos de Q .*

- (a) *El álgebra A es de tipo representación finita si y solamente si el grafo subyacente \bar{Q} es uno de los diagramas de Dynkin.*
- (b) *Si \bar{Q} es un diagrama Dynkin el mapa $\dim : M \rightarrow \dim M$ induce una biyección entre las clases de isomorfismo de los A -módulos indecomponibles y el conjunto $\{x \in N^n; q_Q(x) = 1\}$ de las raíces positivas de la forma cuadrática q_Q de Q .*
- (c) *El número de clases de isomorfismo de los A -módulos indecomponibles es $1/2n(n+1)$, $n^2 - n$, 36, 63 y 120 si \bar{Q} es el diagrama de Dynkin A_n , D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 y E_8 respectivamente.*

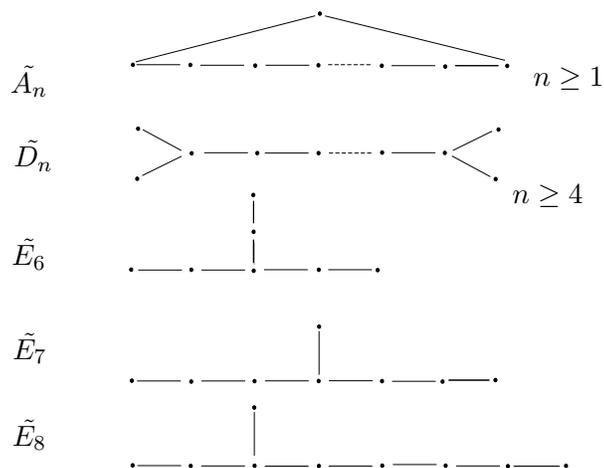
Para ver la demostración de este teorema, el lector puede dirigirse al libro [4], capítulo VII, sección 5.

Capítulo 2

Módulos determinados por su dimensión

En los próximos dos capítulos nos ocuparemos en describir las álgebras de caminos de dimensión finita (esto excluye al caso \tilde{A}_n con las flechas todas orientadas en el mismo sentido) que provienen de los diagramas Euclidianos llamados también Dynkin extendidos.

Recordemos cuales son los diagramas de Dynkin extendidos o Euclidianos:



Sabemos que un álgebra hereditaria de dimensión finita, básica y conexa sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado se puede escribir como KQ con Q un carcaj finito, conexo y acíclico, por lo cual, cuando pensamos en álgebras hereditarias (bajo las hipótesis anteriores) pensamos en un álgebra del tipo KQ . También sabemos que las álgebras hereditarias de tipo representación finita no son otras que las álgebras de caminos KQ con Q un diagrama de Dynkin.

Teniendo en cuenta este resultado resulta bastante natural interesarse en las álgebras de caminos KQ de dimensión finita con \bar{Q} un diagrama de Dynkin Extendido. Sabemos que estas van a ser de tipo representación infinita pero al ser tan pequeña la diferencia entre los diagramas de Dynkin y los Euclideos (es solamente extender por un punto en el lugar adecuado) es lógico pensar que va a haber una cierta estructura especial o un cierto orden a la hora de estudiar los módulos de dicha álgebra. A este tipo de álgebras (las de caminos de dimensión finita con \bar{Q} Euclideo) las llamaremos **mansas**.

Para estudiar la categoría A-mod, uno de nuestros objetivos centrales va a ser estudiar la estructura de los módulos indescomponibles. Éstos van a determinar la forma del carcaj de Auslander-Reiten (ver apéndice) asociado al álgebra, del cual aunque no estudiaremos en detalle, daremos una idea de su forma.

Este capítulo trata de relacionar un módulo con su dimensión y ver en que contexto esta relación es una biyección. Para plantear este resultado necesitaremos tanto herramientas asociadas a la dimensión de un módulo como ayuda de funtores adecuados.

El segundo capítulo, utilizando las herramientas introducidas anteriormente, estudia los módulos indescomponibles que no están en biyección con su dimensión. Una vez estudiado esto tendremos una idea clara del comportamiento de los módulos indescomponibles asociados al álgebra de caminos KQ con \bar{Q} un diagrama Euclideo.

2.1. Herramientas básicas acerca del vector dimensión

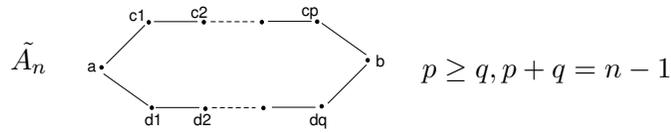
El primer resultado en la clasificación de álgebras hereditarias necesita manejar herramientas relacionadas a la dimensión de los módulos asociados a un carcaj. Recordemos la definición de forma cuadrática asociada a un carcaj y corango.

DEFINICIÓN 2.1.1. (Forma cuadrática asociada a un carcaj) Sea Q un carcaj con \bar{Q} Euclideo, tal que $|Q_0| = n$. La forma cuadrática asociada a Q , $q_Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, se define como $q_Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$ con $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

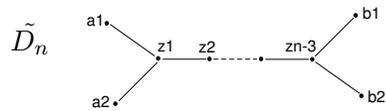
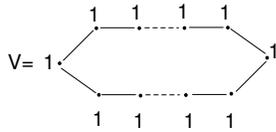
DEFINICIÓN 2.1.2. (Corango de q_Q) El corango de q_Q es el rango del radical, donde el radical es $N = \{x \in \mathbb{Z}^n / q_Q(x) = 0\}$.

OBSERVACIÓN 2.1.3. Podemos fijar un generador del radical v que cumpla que todas sus entradas son positivas y una de ellas es 1. Para esto

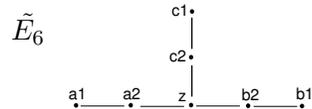
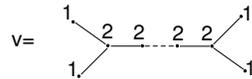
basta encontrar un v con estas condiciones para cada diagrama Euclideo.
 Veamos el generador del radical v asociado a cada diagrama Euclideo:



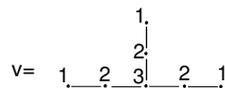
$q_Q =$



$$4q_Q = \sum_{t=1,2} (2a_t - z_1)^2 + 2 \sum_{1 \leq t \leq n-4} (z_t - z_{t+1})^2 + \sum_{t=1,2} (z_{n-3} - 2b_t)^2$$



$$36q_Q = (6a_1 - 3a_2)^2 + (6b_1 - 3b_2)^2 + (6c_1 - 3c_2)^2 + 3[(3a_2 - 2z)^2 + (3b_2 - 2z)^2 + (3c_2 - 2z)^2]$$



$$\tilde{E}_7 \quad \begin{array}{ccccccc} & & & c & & & \\ & & & | & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & z & b_3 & b_2 & b_1 \end{array}$$

$$24q_Q = 6[(2a_1 - a_2)^2 + (2b_1 - b_2)^2] + 2[(3a_2 - 2a_3)^2 + (3b_2 - 2b_3)^2] + (4a_3 - 3z)^2 + (4b_3 - 3z)^2 + 6(2c - z)^2$$

$$v = \begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & & | & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\tilde{E}_8 \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & c & \\ & & & & & | & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & z & b_2 & b_1 \end{array}$$

$$120q_Q = 30(2a_1 - a_2)^2 + 10(3a_2 - 2a_3)^2 + 5(4a_3 - 3a_4)^2 + 3(5a_4 - 4a_5)^2 + 30(2b_1 - b_2)^2 + 2(6a_5 - 5z)^2 + 10(3b_2 - 2z)^2 + 30(2c - z)^2$$

$$v = \begin{array}{ccccccc} & & & & & 3 & \\ & & & & & | & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

DEFINICIÓN 2.1.4. (*Forma bilineal simétrica asociada a q_Q*) La forma cuadrática q_Q define la forma bilineal simétrica (\cdot, \cdot) que cumple:

1. $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2(x, y)$;

o equivalentemente

2. $(x, y) = 1/4(q(x + y) - q(x - y))$.

DEFINICIÓN 2.1.5. (*Reflexión*) Dado $i \in Q_0$ definimos la reflexión $s_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ como $s_i(x) = x - 2(x, e_i)e_i$.

PROPOSICIÓN 2.1.6. (*Propiedades del functor de reflexión (s_i)*)

1. $s_i^2 = 1, \forall i \in Q_0$;

2. $(s_i(x), s_i(y)) = (x, y)$.

Para demostrar 1. utilizamos la definición de reflexión y obtenemos que:
 $s_i s_i(x) = s_i(x - 2(x, e_i)e_i) = x - 2(x, e_i)e_i - 2(x - 2(x, e_i)e_i, e_i)e_i = x - 2(x, e_i)e_i - 2(x, e_i)e_i + 4(x, e_i)(e_i, e_i)e_i = x - 4(x, e_i)e_i + 4(x, e_i)e_i = x$.
 Para demostrar 2. calculamos: $(s_i(x), s_i(y)) = (x - 2(x, e_i)e_i, y - 2(y, e_i)e_i) = (x, y) - 2(x, e_i)(e_i, y) - 2(y, e_i)(x, e_i) + 4(x, e_i)(y, e_i)(e_i, e_i) = (x, y)$.

DEFINICIÓN 2.1.7. (Enumeración admisible) Dado el carcaj Q , diremos que una enumeración de Q_0 es admisible si para cada flecha $\alpha \in Q_1$, $\alpha : i \rightarrow j$, entonces $i < j$.

OBSERVACIÓN 2.1.8. Todo carcaj Q finito y acíclico admite una enumeración admisible.

Demostración: En el caso particular de no haber flechas es claro que cualquier enumeración es admisible.

Si hay alguna flecha $\alpha : i \rightarrow j$ probemos primero que el carcaj tendrá al menos un pozo.

Supongamos que no tiene pozo. En ese caso debe haber alguna flecha $\beta : j \rightarrow k$. con k un vértice del carcaj o de lo contrario j sería pozo. Luego, $\alpha\beta$ será un camino de i en k . A su vez, k será el comienzo de alguna flecha $\gamma : k \rightarrow p$ (sino k sería pozo) y $\alpha\beta\gamma$ un camino de i en p . En definitiva, como el carcaj es finito, en un número finito de pasos este camino volverá a algún vértice por el que ya pasó y se formará un ciclo, contradiciendo la hipótesis, lo que prueba la existencia de un pozo.

Una vez probada la existencia de un pozo la enumeración admisible se construye de la siguiente manera:

Le asignaremos el número 1 a un pozo del carcaj (podría haber más de uno). Luego consideramos el subcarcaj pleno de Q que proviene de restringir los vértices a $Q(1) = Q_0/\{1\}$. Este subcarcaj es también finito y acíclico. Allí también habrá al menos un pozo y a uno de ellos le asignaremos el número 2. Con este procedimiento, en finitos pasos obtendremos la enumeración admisible buscada ya que en el i -ésimo paso todas las flechas que salen del vértice al que le asignamos el número i llegan a vértices que ya enumeramos anteriormente (de lo contrario i no sería pozo en el paso i -ésimo) y cumple la definición de enumeración admisible.

DEFINICIÓN 2.1.9. (Transformación de Coxeter) Dado Q y una enumeración admisible para Q_0 definimos la transformación de Coxeter asociada a la enumeración como $c = s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1$

DEFINICIÓN 2.1.10. (Grupo de Weyl) Llamamos Grupo de Weyl al subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ generado por las reflexiones.

PROPOSICIÓN 2.1.11. Sea Q un carcaj finito, acíclico y conexo. Consideremos s_i las reflexiones y c la transformación de Coxeter. Entonces si $cx = x$, $s_i x = x \forall i$.

Demostración: Dada una enumeración admisible $cx = s_n s_{n-1} \dots s_1 x$. Observemos que para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $x_i = (cx)_i = (s_n s_{n-1} \dots s_i x)_i$ ya que al aplicar s_1, s_2, \dots, s_{i-1} la coordenada i -ésima no se modifica. Si $i = n$

la igualdad anterior implica que $(s_n(x))_n = x_n$ y por lo tanto $s_n(x) = x$ ya que la reflexión s_n solo afecta la coordenada n -ésima de x . Si ahora consideramos $i = n - 1$ $(s_n s_{n-1}(x))_{n-1} = (s_n(x - 2(x, e_{n-1})e_{n-1}))_{n-1} = (s_n(x) - 2(x, e_{n-1})s_n(e_{n-1}))_{n-1} = (s_n(x) - 2(x, e_{n-1})e_{n-1} + 4(x, e_{n-1})(e_{n-1}, e_n)e_n)_{n-1}$. Usando que $s_n x = x$ y considerando la coordenada $n - 1$ obtenemos que $x_{n-1} = (s_n s_{n-1}(x))_{n-1} = (x - 2(x, e_{n-1})e_{n-1})_{n-1} = x - 2(x, e_{n-1}) = (s_{n-1}(x))_{n-1}$ y por lo tanto $s_{n-1}(x) = x$. Siguiendo el razonamiento anterior con todo $i \in Q_0$ obtenemos que $s_i x = x \forall i$.

PROPOSICIÓN 2.1.12. *Sea N el radical de q_Q y $B = \{x \in \mathbb{Z}^n / x \text{ es estable bajo } W\}$ donde W es el grupo de Weyl. Entonces $B = N$*

Demostración: (\subset) Si un elemento x está en B en particular cumple que $s_i(x) = x \forall i \in Q_0$, o sea, usando la definición de s_i , $x - 2(x, e_i) = x$ lo que implica que $(x, e_i) = 0 \forall i \in Q_0$. O sea, $q_Q(x) = (x, x) = \sum_{i \in Q_0} x_i(x, e_i) = 0$ y por lo tanto $B \subset N$.

(\supset) Sea $x \in N$ como \bar{Q} es un diagrama Euclideano, la forma cuadrática asociada es semidefinida positiva y por lo tanto se cumple que $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$. Entonces $(x, y) = 0 \forall y \in \mathbb{Z}^n$, en particular $(x, e_i) = 0 \forall i \in Q_0$. Luego $s_i(x) = x \forall i \in Q_0$ de lo que se deduce que x es estable bajo W .

OBSERVACIÓN 2.1.13. *La técnica que aparece en la segunda parte de la demostración en la proposición anterior se usará repetidas veces, cada vez que $x \in N$ se cumple que $(x, e_i) = 0$ para todo $i \in Q_0$.*

OBSERVACIÓN 2.1.14. *Cada elemento w de W induce una transformación $\bar{w} : \mathbb{Z}^n / N \rightarrow \mathbb{Z}^n / N$ de forma que $\bar{w}(x + N) = wx + N$. Llamaremos \bar{W} al conjunto de los \bar{w} .*

PROPOSICIÓN 2.1.15. *\bar{W} es finito.*

Demostración: Sea $M = \{x \in \mathbb{Z}^n / q_Q(x) \leq 1\}$, $\bar{M} = M/N$. Como W lleva a M en M ya que $q(x) = (x, x) = (s_i(x), s_i(x)) = q(s_i(x))$, entonces, \bar{W} lleva \bar{M} en \bar{M} .

Afirmamos que la acción de \bar{w} sobre \bar{M} es fiel, o sea, podemos identificar a \bar{W} con un subgrupo de permutaciones de \bar{M} . Para probar esta afirmación debemos ver que el mapa que lleva $\bar{w} \mapsto (\sigma_{\bar{w}} : \bar{x} \rightarrow \bar{w}\bar{x})$ que va de \bar{W} en el grupo de las permutaciones de \bar{M} es inyectivo. Si $\sigma_{\bar{w}} = \sigma_{\bar{v}}$ entonces $\bar{w}\bar{x} = \bar{v}\bar{x} \forall x \in M$. En particular, $\bar{w}\bar{e}_i = \bar{v}\bar{e}_i$ (recordemos que $q_Q(e_i) = 1$) y por lo tanto, utilizando la linealidad, $\bar{w}\bar{x} = \bar{v}\bar{x} \forall x \in \mathbb{Z}^n$ lo que implica que son la misma transformación, o sea, $\bar{v} = \bar{w}$.

Para concluir con la prueba faltaría ver que \bar{M} es finito lo que implicaría que su grupo de permutaciones lo es y \bar{W} también. Consideremos la forma cuadrática q_Q , existe una matriz P invertible con coeficientes en \mathbb{Q} que transforma a la forma cuadrática q_Q en una diagonal de la forma $\sum_{i=1}^t c_i y_i^2$ siendo $c_i > 0$ (por ser semidefinida positiva los c_i son mayores o iguales que cero, en caso de ser cero no los considero en la sumatoria) siendo $y = xP$. Si $x \in M$, entonces $q_Q(x) \leq 1$ y como $c_i > 0$ se cumple que $c_i y_i^2 \leq 1$, o sea, $|y_i| \leq \sqrt{1/c_i}$ $1 \leq i \leq t$. Además $N = \{x \in \mathbb{Z}^n / y_i = 0 \quad 1 \leq i \leq t\}$. En definitiva, $\bar{M} = M/N \subset \{x \in \mathbb{Z}^n / |y_i| \leq \sqrt{1/c_i}\} / \{x \in \mathbb{Z}^n / y_i = 0\} \quad 1 \leq i \leq t$ que es un conjunto finito (los y que verifican $|y_i| \leq \sqrt{1/c_i}, \forall i = 1, 2, \dots, t$ son una cantidad finita ya que su preimagen por la matriz P que es invertible es finita al estar en \mathbb{Z}^n y ser acotada) y por lo tanto \bar{M} también lo será.

Consideremos ahora la transformacin de Coxeter c para un cierto Q y una cierta enumeración admisible. Se desprende del resultado anterior que el orden de \bar{c} es finito y por lo tanto tenemos la siguiente situación:

$$c^m(x) = x + (\partial_c x)v \quad (2.1)$$

donde m es el orden de \bar{c} , v es el generador del radical y $(\partial_c x)$ es un entero (esto se debe a que el generador tiene alguna entrada uno) al que llamaremos **defecto de x respecto de c** .

OBSERVACIÓN 2.1.16. *Podemos ver al defecto como una forma lineal $\partial_c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada vector en \mathbb{Z}^n le asocia su defecto respecto de c o como un cierto vector $\partial_c = (\partial_c e_i)$ que en la entrada i -ésima tiene al defecto del elemento de la base canónica asociado a esa coordenada.*

PROPOSICIÓN 2.1.17 (Propiedades del defecto ∂_c). *Sea c la transformación de Coxeter para un cierto Q y m el orden de \bar{c} en \bar{W} entonces:*

1. $\partial_c(x) = \partial_c(cx)$;
2. $c^{tm}x = x + t(\partial_c x)v$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

1. Sabemos que $c^m(x) = x + (\partial_c x)v$ para un cierto m y si aplicamos c de ambos lados $c^m(cx) = cx + (\partial_c x)v$ ya que v es estable bajo c por lo que: $\partial_c(x) = \partial_c(cx)$.

2. Lo probaremos por inducción:

El paso base es la ecuación (2.1). Ahora, supongamos que $c^{(t-1)m}x = x + (t-1)(\partial_c x)v$. Esto implica que $c^{-m}c^{tm}x = x + (t-1)(\partial_c x)v$ y si multiplicamos por c^m de ambos lados nos queda que $c^{tm}x = c^m x + (t-1)(\partial_c x)v$ (volvemos a usar que v es estable bajo c). En conclusión, $c^{tm}(x) = (c^m x - \partial_c(x)v) + t\partial_c(x)v = x + t\partial_c(x)v$.

OBSERVACIÓN 2.1.18. Consideremos (e_i, e_j) , la forma bilineal aplicada a los vectores i, j de la base canónica. Por definición $(e_i, e_j) = q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)$ y al desarrollar $1 + 1 - k_{ij} - 2 = -k_{ij}$ donde k_{ij} es la cantidad de flechas de i en j .

PROPOSICIÓN 2.1.19. Dado un carcaj Q con $|Q_0| = n$, la transformación de Coxeter no depende de la enumeración admisible elegida en Q_0 , solo depende de la orientación de las flechas.

Demostración:

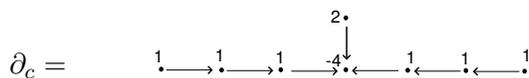
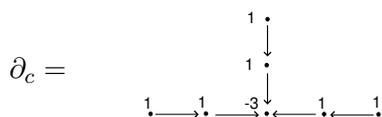
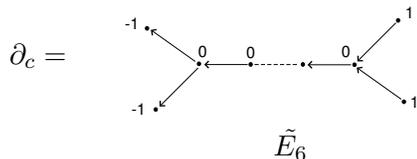
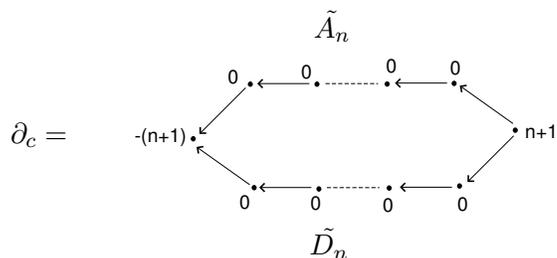
La idea básica de la demostración es observar que si tengo varias opciones en un cierto paso de la enumeración admisible la reflexiones correspondientes van a conmutar.

Consideremos dos enumeraciones admisibles que llamaremos $\{1, 2, \dots, n\}$ y $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Para todo $i < k_1$, por definición, no existen flechas de i a k_1 , tampoco existen flechas de k_1 en i , ya que k_1 está en primer lugar en la segunda enumeración.

Afirmamos entonces que $(e_i, e_{k_1}) = 0$ ya que, si no hay flechas entre ellos $q(e_i + e_{k_1}) = q(e_i) + q(e_{k_1})$ y $s_i s_{k_1} = s_{k_1} s_i$:
 $s_i s_{k_1}(x) = s_i(x - 2(x, e_{k_1})e_{k_1}) = s_i(x) - 2(x, e_{k_1})s_i(e_{k_1}) = x - 2(x, e_i)e_i - 2(x, e_{k_1})(e_{k_1} - 2(e_{k_1}, e_i)e_i)$
 $s_{k_1} s_i(x) = s_{k_1}(x - 2(x, e_i)e_i) = s_{k_1}(x) - 2(x, e_i)s_{k_1}(e_i) = x - 2(x, e_{k_1})e_{k_1} - 2(x, e_i)(e_i - 2(e_i, e_{k_1})e_{k_1}).$

Como $(e_i, e_{k_1}) = 0$ las expresiones son iguales y por lo tanto $s_n \dots s_2 s_1 = s_n \dots s_{k_1+1} s_{k_1-1} \dots s_1 s_{k_1}$ y repitiendo este procedimiento obtenemos que $s_{k_n} \dots s_{k_2} s_{k_1} = s_n \dots s_2 s_1$.

OBSERVACIÓN 2.1.20. Consideremos los diagramas Euclidianos como en la figura (2.1.3) pero ahora con una cierta orientación. Recordemos que en el caso de \tilde{A}_n todas las flechas no pueden estar orientadas hacia el mismo lado ya que el álgebra es de dimensión finita. Recordemos también que en \tilde{A}_n consideramos una familia de ejemplos distinguiendo la cantidad de flechas antihorarias (o horarias) en cada caso. Podemos calcular el vector de defectos y obtenemos:



2.1.1. El defecto y los cambios de orientación

Sea Q un carcaj con transformación de Coxeter $c = s_n \dots s_2 s_1$ y ∂_c el vector de los defectos. Consideremos ahora $Q' = \sigma_1 Q$, el carcaj que se obtiene invirtiendo las flechas de Q que salen o llegan a 1. En este caso particular, por ser una enumeración admisible, 1 es un pozo y por lo tanto solo hay flechas que llegan a él.

La transformación de Coxeter c' asociada a Q' es de la forma $c' = s_1 s_n \dots s_2$. Observemos también que $c' = s_1 c s_1$. Sabemos que $(c')^m e_i = e_i + (\partial_{c'} e_i) v$, al multiplicar por s_1 y usar la observación anterior obtenemos que $c'^m s_1(e_i) = s_1 e_i + (\partial_{c'} e_i) v$, o sea,

$$\partial_{c'} e_i = \partial_c(s_1 e_i) \tag{2.2}$$

OBSERVACIÓN 2.1.21. *Notemos que con la lista de defectos que obtuvimos en la observación anterior y la fórmula que acabamos de obtener sobre el defecto cuando aplicamos σ_1 , podemos calcular el vector de defectos para cualquier orientación sin ciclos elegida en los diagramas Euclidianos (Esto fue visto en el capítulo anterior en el lema(1.4.7) y observación (1.4.8)).*

2.2. Raíces de q_Q

Las raíces positivas de la forma cuadrática asociada a un carcaj Q con $|Q_0| = n$ (siempre pensando en diagramas Euclidianos) van a jugar un papel fundamental a la hora de clasificar los módulos indescomponibles. En este contexto, las raíces son los vectores que toman el valor uno al aplicarles la forma cuadrática q_Q , o sea, las raíces son los $x \in Z^n$ tal que $q_Q(x) = 1$. Estudiaremos la forma de dichas raíces y las clasificaremos según su defecto.

LEMA 2.2.1. *Sea Q conexo y β un vector positivo no nulo de Z^n en el radical. Las entradas de β son todas no nulas.*

Demostración:

Como $\beta \in N$ se cumple que: $q_Q(\beta) = 0$ y por lo tanto $(\beta, e_i) = 0 \forall i \in Q_0$. Supongamos que $\beta_p = 0$ para algún p . Luego $0 = (\beta, e_p) = \sum_{j=1}^n \beta_j (e_j, e_p) = \sum_{j=1, j \neq p}^n \beta_j (-k_{pj}) + \beta_p$, o sea, $\beta_p = \sum_{j=1, j \neq p}^n \beta_j (k_{pj}) = 0$. Como k_{pj} y β_j son mayores o iguales que cero concluimos que $\beta_j = 0$ para todo j que sea predecesor o sucesor de p (que exista una flecha de j en p o de p en j). Repitiendo el razonamiento anterior, partiendo de $\beta_j = 0$, vemos que también $\beta_k = 0$ para todo k sucesor o predecesor de j .

En definitiva, al ser el grafo conexo, todas las entradas de β serían nulas lo cual es absurdo ya que partimos de un vector β no nulo. El absurdo proviene de suponer que alguna de la entradas de β es nula por lo tanto probamos que las entradas de β son todas estrictamente positivas.

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea q_Q una forma cuadrática asociada a un cierto Q . Si q_Q es semidefinida positiva entonces las raíces de la forma cuadrática son positivas o negativas (una raíz es positiva o negativa si todas sus entradas lo son).*

Demostración:

Consideremos x raíz de q_Q : $x = x^+ + x^-$ siendo x^+ el vector que contiene las entradas positivas de x y x^- las negativas. Consideremos ahora $|x| = x^+ - x^-$. Observemos que $|x| > 0$ ya que al ser raíz x es no nulo.

Como estamos trabajando con una forma cuadrática semidefinida positiva, $q_Q(|x|) \geq 0$. Supongamos que $q_Q(|x|) > 0$. En este caso tenemos $0 < q_Q(|x|) = \sum_{i \in Q_0} |x|_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} |x|_{s(\alpha)} |x|_{t(\alpha)} \leq \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} = q_Q(x) =$

1. Entonces $q_Q(|x|) = 1$ ya que es el único entero mayor que cero y menor o igual a uno. Por lo tanto, $2 = q_Q(x) + q_Q(|x|) = q_Q(x^+ + x^-) + q_Q(x^+ - x^-) = q_Q(x^+) + q_Q(x^-) + 2(x^+, x^-) + q_Q(x^+) + q_Q(-x^-) - 2(x^+, x^-) = 2(q_Q(x^+) + q_Q(x^-))$ ya que $q_Q(x) = q_Q(-x)$. Esto nos lleva a dos posibles casos:

1. $q_Q(x^+) = 0$ y $q_Q(x^-) = 1$. Esto implica que $x^+ \in N$. Si $x \neq x^-$, entonces x^+ es no nulo y por el lema anterior todas sus entradas serían no nulas. Esto implicaría que $x^- = 0$ lo cual es absurdo al ser x^- raíz. La única posibilidad es que $x = x^-$.
2. $q_Q(x^+) = 1$ y $q_Q(x^-) = 0$. Con un razonamiento similar al del caso anterior deducimos que $x = x^+$

Nos faltaría ver el caso en que $q_Q(|x|) = 0$. En este caso $1 = q_Q(x) = q_Q(|x| - 2x^-) = q_Q(|x|) + q_Q(2x^-) - 2(|x|, 2x^-) = 4q_Q(x^-)$ ya que $|x|$ está en el radical. Por lo tanto, $q_Q(x^-) = 1/4$ y esto es absurdo.

LEMA 2.2.3. *Sea q_Q una forma cuadrática semidefinida positiva, x una raíz positiva de q_Q . Entonces para todo $i \in Q_0$ $s_i(x)$ es positiva o $x = e_i$.*

Demostración:

Como la forma es semidefinida positiva, dado $i \in Q_0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq q(x \mp e_i) &= q(x) + q(e_i) \mp 2(x, e_i) = 2 \mp 2(x, e_i) & (2.3) \\ &\Rightarrow -2 \leq 2(x, e_i) \leq 2 \end{aligned}$$

Dividiremos en casos:

1. Si $2(x, e_i) \leq 0$ entonces $s_i(x) = x - 2(x, e_i)e_i > 0$
2. Si $2(x, e_i) = 1$, al sustituir en la reflexión, $s_i(x) = x - e_i$. Si $x_i \neq 0$ entonces $s_i(x) > 0$ o $x = e_i$.
En el caso $x_i = 0$,

$$q_Q(x + e_i) = q_Q(x) + 1 - \sum_{j / \exists \alpha: i \rightarrow j} x_j \leq 2$$

pero por (2.3), $q_Q(x + e_i) = q_Q(x) + q_Q(e_i) + 2(x, e_i) = 3$ y esto es absurdo.

3. Si $2(x, e_i) = 2$ entonces por (2.3) $q_Q(x - e_i) = 0$ por lo que $x - e_i \in N$. Si Q es Dynkin, entonces, $x = e_i$ ya que los diagramas de Dynkin tienen una forma cuadrática asociada definida positiva. Si Q es Euclideo $x - e_i = \lambda v$ siendo v el generador de N .

Recordemos que v tiene todas sus entradas positivas y una de ellas es 1. Como x es positivo $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$ se deduce que $x = e_i$ y si $\lambda > 0$ se cumple que $s_i(x) = x - 2(x, e_i)e_i = x - 2e_i$ (ya que nos encontramos en el caso $2(x, e_i) = 2$). Por otro lado, $x - 2e_i = x - e_i - e_i = \lambda v - e_i > 0$ al ser las entradas de v todas positivas. Se concluye que $s_i(x) > 0$.

DEFINICIÓN 2.2.4. Sea \bar{Q} Euclideo, $|Q_0| = n$, c una transformación de Coxeter correspondiente a una enumeración admisible $1 \dots n$ de Q_0 . Definimos

$$p_i = s_1 s_2 \dots s_{i-1}(e_i), \quad q_i = s_n s_{n-1} \dots s_{i+1}(e_i), \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n.$$

PROPOSICIÓN 2.2.5. Para todo $i, j \in Q_0$ p_i y q_i son raíces positivas de q_Q .

Demostración:

Para todo $i, j \in Q_0$ tanto p_i como q_j son raíces:

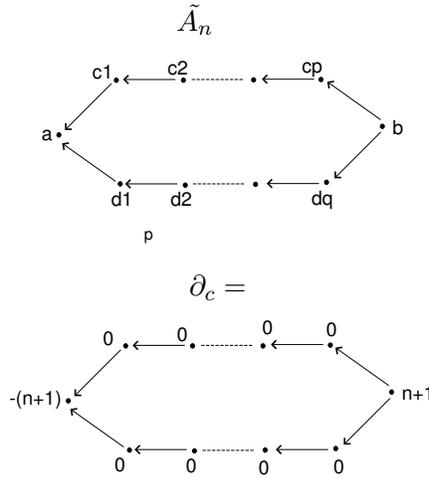
Basta ver la definición de cada una y observar que si x es raíz también lo es $s_i(x)$ ya que $(x, y) = (s_i(x), s_i(y))$.

Para todo $i, j \in Q_0$ p_i y q_j son positivas:

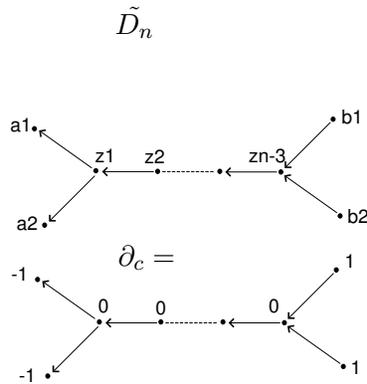
Consideremos el caso de p_i para algún $i \in Q_0$. Como e_i es una raíz positiva de q_Q , aplicando el lema anterior, $s_{i-1}(e_i)$ sigue siendo positiva.

En general, sea j algún número entre 1 e $i - 1$. La reflexión s_j modifica solamente la entrada j -ésima del vector al que se la aplica por lo que $s_{j+1} \dots s_{i-1}(e_i)$ tiene la entrada j -ésima nula. En particular, $s_{j+1} \dots s_{i-1}(e_i) \neq e_j$. Usando el lema anterior obtenemos que $s_j s_{j+1} \dots s_{i-1}(e_i)$ es una raíz positiva. En conclusión (el j es arbitrario) p_i es una raíz positiva. Con q_i el razonamiento es similar.

OBSERVACIÓN 2.2.6. Consideramos todos los diagramas Euclideos con una cierta orientación y una transformación de Coxeter c . Si hallamos los posibles $p(i)$ y $q(i) \forall i \in Q_0$ y calculamos sus defectos podremos verificar que $\partial_c(p_i) < 0$ y $\partial_c(q_i) > 0$. Utilizando la ecuación (2.2) y la observación siguiente obtenemos este mismo resultado sin importar la orientación elegida. Calculemos entonces p_i (los q_j se calculan de la misma forma) para los carcajes vistos en (2.1.20) y veamos sus defectos:

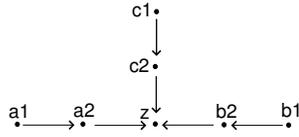


Una enumeración admisible es $a, c_1 \dots c_p, d_1, \dots, d_q, b$ $p_a = e_a, \partial_c(p_a) = -(n+1) < 0$
 $p_{c_i} = e_a + e_{c_1} + \dots + e_{c_i}, \partial_c(p_{c_i}) = -(n+1) + 0 + \dots + 0 < 0$ con $i = 1 \dots p$
 $p_{d_j} = e_a + e_{d_1} + \dots + e_{d_j}, \partial_c(p_{d_j}) = -(n+1) + 0 + \dots + 0 < 0$ con $j = 1 \dots q$
 $p_b = 2e_a + e_{c_1} + \dots + e_{c_p} + e_{d_1} + \dots + e_{d_q} + e_b, \partial_c(p_b) = -2(n+1) + (n+1) < 0;$

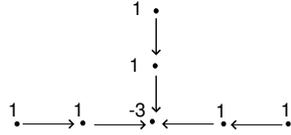


Una enumeración admisible es $a_1, a_2, z_1 \dots, z_{n-3}, b_2, b_1$ $p_{a_1} = e_{a_1}, \partial_c(p_{a_1}) = -1 < 0$
 $p_{a_2} = e_{a_2}, \partial_c(p_{a_2}) = -1 < 0$
 $p_{z_i} = e_{a_1} + e_{a_2} + e_{z_1} + \dots + e_{z_i}, \partial_c(p_{z_i}) = -2 < 0$ para $i = 1, \dots, n-3$
 $p_{b_1} = e_{a_1} + e_{a_2} + e_{z_1} + \dots + e_{z_{n-3}} + e_{b_1}, \partial_c(p_{b_1}) = -1 - 1 + 1 < 0$
 $p_{b_2} = e_{a_1} + e_{a_2} + e_{z_1} + \dots + e_{z_{n-3}} + e_{b_2}, \partial_c(p_{b_2}) = -1 - 1 + 1 < 0;$

\tilde{E}_6



$\partial_c =$



Una enumeración admisible es $z, a_2, b_2, c_2, a_1, b_1, c_1$ $p_z = e_z, \partial_c(p_z) = -3 < 0$

$$p_{a_2} = e_{a_2} + e_z, \partial_c(p_{a_2}) = -3 + 1 < 0$$

$$p_{b_2} = e_{b_2} + e_z, \partial_c(p_{b_2}) = -3 + 1 < 0$$

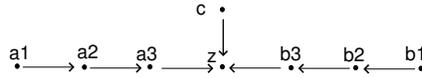
$$p_{c_2} = e_{c_2} + e_z, \partial_c(p_{c_2}) = -3 + 1 < 0$$

$$p_{a_1} = e_{a_2} + e_{a_1} + e_z, \partial_c(p_{a_1}) = -3 + 1 + 1 < 0$$

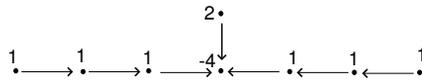
$$p_{b_1} = e_{b_2} + e_{b_1} + e_z, \partial_c(p_{b_1}) = -3 + 1 + 1 < 0$$

$$p_{c_1} = e_{c_2} + e_{c_1} + e_z, \partial_c(p_{c_1}) = -3 + 1 + 1 < 0;$$

\tilde{E}_7



$\partial_c =$



Una enumeración admisible es $z, c, a_3, a_2, a_1, b_3, b_2, b_1$ $p_z = e_z, \partial_c(p_z) = -4$

$$p_c = e_z + e_c, \partial_c(p_c) = -4 + 2 < 0$$

$$p_{a_3} = e_z + e_{a_3}, \partial_c(p_{a_3}) = -4 + 1 < 0$$

$$p_{b_3} = e_z + e_{b_3}, \partial_c(p_{b_3}) = -4 + 1 < 0$$

$$p_{a_2} = e_z + e_{a_3} + e_{a_2}, \partial_c(p_{a_2}) = -4 + 1 + 1 < 0$$

$$p_{b_2} = e_z + e_{b_3} + e_{b_2}, \partial_c(p_{b_2}) = -4 + 1 + 1 < 0$$

$$p_{a_1} = e_z + e_{a_3} + e_{a_2} + e_{a_1}, \partial_c(p_{a_1}) = -4 + 1 + 1 + 1 < 0$$

(\Leftarrow) Basta observar que $cp_i = -q_i$ ya que $s_n \dots s_2 s_1 (s_1 s_2 \dots s_{i-1}(e_i)) = s_n \dots s_i(e_i) = -q_i$ ($s_i(e_i) = e_i - 2q_Q(e_i)e_i = -e_i$) y como q_i es una raíz positiva $-q_i = cp_i \not\geq 0$.

2.(\Rightarrow) Esta parte es similar a la anterior, si $c^{-1}x \not\geq 0$, entonces, $\exists j$ tal que $s_{j+1} \dots s_n(x) = e_j$ y por lo tanto $x = q_j$.

(\Leftarrow) Basta observar que $cp_i = -q_i$ implica $-p_i = c^{-1}q_i \not\geq 0$.

LEMA 2.2.8. *Sea Q un carcaj con \bar{Q} Euclideo. Entonces toda raíz positiva x de q_Q es de la forma $x = x_0 + \lambda v$ donde v es el generador del radical N y x_0 es una raíz positiva que cumple $x_0 < v$ y $\lambda \geq 0 \in \mathbb{Z}$. Dado x , λ y x_0 son únicos con estas propiedades. A su vez, todo vector $y \in \mathbb{Z}^n$ que tenga esta forma ($y = x_0 + \lambda v$ con $x_0 < v$ raíz positiva y $\lambda \geq 0 \in \mathbb{Z}$) es una raíz positiva.*

Demostración:

Probemos en primer lugar que $x_0 + \lambda v$ es una raíz positiva:
 $q_Q(x_0 + \lambda v) = (x_0 + \lambda v, x_0 + \lambda v) = (x_0, x_0) + 2(x_0, v) + \lambda^2(v, v)$. Como v está en el radical el único término que no se anula es el (x_0, x_0) (recordemos que $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$). Por lo tanto $q_Q(x_0 + \lambda v) = (x_0, x_0) = 1$.

Partamos ahora de x una raíz positiva cualquiera, consideremos $\lambda \geq 0$, el máximo con la propiedad de ser $x - \lambda v$ raíz positiva. Sea $x_0 = x - \lambda v$ faltaría probar que $x_0 < v$: $x_0 - v$ también es raíz ($q_Q(x_0 - v) = (x_0, x_0) = 1$) pero no es positiva por la forma en que elegimos el λ . Por lo tanto $x_0 - v$ deberá ser negativa (ya probamos que las raíces son positivas o negativas) con lo cual $x_0 < v$.

Por último probemos que la elección de λ y x_0 son únicas:
 Supongamos que $x_0 + \lambda v = y_0 + \mu v$ con $x_0 < v$, $y_0 < v$ raíces positivas y $\lambda, \mu \geq 0 \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $x_0 - y_0 \leq v$ lo que implica que $(\lambda - \mu)v \leq 0$. A su vez $y_0 - x_0 \leq v$, o sea, también se cumple que $(\mu - \lambda)v \leq 0$. En conclusión, para que ambas desigualdades se cumplan, $\lambda = \mu$ y $x_0 = y_0$.

PROPOSICIÓN 2.2.9. *Sea Q un carcaj con \bar{Q} Euclideo, c la transformación de Coxeter correspondiente a una enumeración admisible de Q_0 . Entonces:*

1. *Toda raíz positiva x de defecto negativo cumple que $x = c^{-s}p_i$ para algún $s \geq 0$ y algún $1 \leq i \leq n$. Dado x la elección del s y el p_i son únicas. A su vez, todo z de la forma $z = c^{-s}p_i$ es una raíz positiva de defecto negativo.*

2. Toda raíz positiva y de defecto positivo cumple que $y = c^t q_j$ para algún $t \geq 0$ y para algún $1 \leq j \leq n$. Dado y la elección del t y el q_j son únicas. A su vez, todo z de la forma $z = c^t q_j$ es una raíz positiva de defecto positivo.
3. Toda raíz positiva de defecto nulo se escribe como $x = x_0 + \lambda v$ con $x_0 < v$ una raíz positiva de defecto nulo y $\lambda \geq 0$.

Demostración:

1. Sea x una raíz positiva de defecto negativo. Considerando la propiedad: $c^{tm}x = x + t(\partial_c x)v, \forall t \in \mathbb{Z}$, sabemos que para cierto t $c^{tm}(x) \not\geq 0$ y usando el lema (2.2.7) $c^{tm-1}(x) = p_i$. Sea $s = tm - 1$, aplicando c^{-s} de ambos lados obtenemos que $x = c^{-s}p_i$.

Todo $z = c^{-s}p_i$ es una raíz. Veamos que es positiva: si z no es positiva entonces es negativa (por el lema 2.2.2) y $c^{-1}(c^{-s+1}(p_i)) \not\geq 0$. Si $c^{-s+1}(p_i)$ es raíz positiva, usando (2.2.7) $c^{-s+1}(p_i) = q_j$. Si $c^{-s+1}(p_i) = c^{-1}c^{-s+2}(p_i) < 0$ vemos si $c^{-s+2}(p_i)$ es positiva y si lo es usamos (2.2.7). Este proceso va a detenerse en finitos pasos ya que p_i es una raíz positiva por lo cual existe $u < s$ tal que $c^{-u}p_i$ es raíz positiva y $c^{-u}p_i = q_j$. Esto implica que $\partial_c(c^{-s+1}(p_i)) = \partial_c(c^{-u}(p_i)) = \partial_c(q_j) > 0$. A su vez, $\partial_c(c^{-s+1}(p_i)) = \partial_c(p_i) < 0$ (por propiedad del defecto) y esto es absurdo, lo que nos lleva a concluir que z es raíz positiva de defecto negativo.

Por último veamos que los x de la forma $x = c^{-s}p_i$ son todos distintos: supongamos $c^{-s}p_i = c^{-t}p_j$ con $s, t \geq 0, 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n$. Supongamos $t > s$, entonces, $0 \not\leq cp_i = c(c^{-t+s}p_j) = c^{-(t-s-1)}p_j > 0$ y esto es absurdo.

2. Análogo al caso 1.

3. Sabemos, por el lema (2.2.8) que $x = x_0 + \lambda v$ con $x_0 < v$ y $\lambda \geq 0$. Queremos ver que $\partial_c(x_0) = 0$ pero esto es claro si observamos que $\partial_c(v) = 0$ por estar en el radical. Por otro lado si $\partial_c(x_0) = 0$ se cumple que $\partial_c(x) = 0$.

2.3. El functor de reflexión

Pensando ahora en todo el módulo y no solamente en su vector dimensión, definimos el functor de reflexión y luego el functor de Coxeter.

Como lo sugieren sus nombres, estarán fuertemente relacionados con la reflexión s_a y la transformación de Coxeter c que vimos anteriormente. Con todas estas herramientas llegaremos a la biyección buscada entre ciertos módulos y su dimensión.

DEFINICIÓN 2.3.1 (Functor de Reflexión). Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico con \mathbf{a} un pozo. Definimos el functor de reflexión $S_a^+ : KQ\text{-mod} \rightarrow K(\sigma_a Q)\text{-mod}$, dada una representación $M = (M_b, \varphi_\alpha)$ en $\text{Mod } KQ$ tenemos $S_a^+(M) = N$ con $N = (N_b, \psi_\beta)$ donde:

$$N_b = \begin{cases} M_b & b \neq a \\ \text{Ker}(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha : \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c \rightarrow M_a) & b = a \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha & t(\alpha) \neq a \\ \pi_\alpha i & t(\alpha) = a \end{cases}$$

siendo $\pi_\alpha : \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c \rightarrow M_{s(\alpha)}$ la proyección, e $i : N_a \rightarrow \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c$ la inclusión.

Ya definimos el functor sobre los objetos de la categoría faltaría definirlo sobre los mapas. Sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de representaciones definimos $g = S_a^+(f)$ de la siguiente forma:

Si $b \neq a$, $g_b = f_b$;

Si $b = a$, g_a es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (S_a^+ M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a \\ & & \downarrow g_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} f_c & & \downarrow f_a \\ 0 & \rightarrow & (S_a^+ M')_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M'_c & \rightarrow & M'_a \end{array}$$

Dualmente definimos $S_a^- : KQ\text{-mod} \rightarrow K(\sigma_a Q)\text{-mod}$ para \mathbf{a} una fuente. Dada una representación $M = (M_b, \varphi_\alpha)$ en $KQ\text{-mod}$ tenemos $(S_a^- M) = N$ con $N = (N_b, \psi_\beta)$ donde:

$$N_b = \begin{cases} M_b & b \neq a \\ \text{Coker}(\varphi_\alpha)_\alpha : M_a \rightarrow \bigoplus_{\beta:a \rightarrow c} M_c & b = a \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha & s(\alpha) \neq a \\ \pi i & s(\alpha) = a \end{cases}$$

siendo $\pi : \bigoplus_{\beta:a \rightarrow c} M_c \rightarrow N_a$ la proyección sobre el conúcleo e $i : N_c \rightarrow$

$\bigoplus_{\beta:a \rightarrow c} M_c$ la inclusión.

Sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de representaciones definimos $g = S_a^-(f)$ de la siguiente forma:

Si $b \neq a$, $g_b = f_b$;

Si $b = a$, g_a es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & M_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:a \rightarrow c} M_c & \rightarrow & (S_a^- M)_a \\
 & & \downarrow f_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} f_c & & \downarrow g_a \\
 0 & \rightarrow & M'_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:a \rightarrow c} M'_c & \rightarrow & (S_a^- M')_a
 \end{array}$$

OBSERVACIÓN 2.3.2. Luego de la definición faltaría probar que tanto S_a^+ como S_a^- son funtores. Lo probaremos para S_a^+ con \mathbf{a} un pozo (la prueba es básicamente la misma en ambos casos) y para esto probaremos :

1. $S_a^+(id) = id$;
2. $S_a^+(fg) = S_a^+(f)S_a^+(g)$ con $f : M \rightarrow P$ y $g : N \rightarrow M$ $M, N, P \in KQ$

En ambos casos basta probar que coinciden en el lugar \mathbf{a} ya que en los otros vértices coinciden por definición.

En el caso 1. tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & (S_a^+ M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a \\
 & & \downarrow g_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} id_c & & \downarrow id_a \\
 0 & \rightarrow & (S_a^+ M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a
 \end{array}$$

Claramente conmuta para $g_a = id_a$. En el caso 2. tenemos por definición de $S_a^+(f)$ y $S_a^+(g)$ que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & (S_a^+ N)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} N_c & \rightarrow & N_a \\
 & & \downarrow S_a^+ g_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} g_c & & \downarrow g_a \\
 0 & \rightarrow & (S_a^+ M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow S_a^+ f_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} f_c & & \downarrow f_a \\
0 & \rightarrow & (S_a^+ P)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} P_c & \rightarrow & P_a
\end{array}$$

Y por lo tanto el diagrama grande también lo hace y $S_a^+(fg) = S_a^+(f)S_a^+(g)$ por definición.

OBSERVACIÓN 2.3.3. Se cumple que $S_a^+(f+g) = S_a^+(f) + S_a^+(g)$ y $S_a^-(f+g) = S_a^-(f) + S_a^-(g)$ con $f, g : M \rightarrow N$.

Lo probaremos solo para S_a^+ . Observemos que basta probar que coinciden en el vértice a . Por definición de $S_a^+(f+g)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & (S_a^+ M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a \\
\downarrow & & \downarrow S_a^+(f+g)_a & & \downarrow \bigoplus_{\beta} (f+g)_c & & \downarrow (f+g)_a \\
0 & \rightarrow & (S_a^+ N)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} N_c & \rightarrow & N_a
\end{array}$$

Veamos que $(S_a^+(f) + S_a^+(g))_a$ hace conmutar este diagrama, o sea que, $\bigoplus_{\beta} (f+g)_{c_i} i_M = i_N((S_a^+(f) + S_a^+(g))_a)$ siendo i_M, i_N las inclusiones de

$(S_a^+ M)_a$ en $\bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} M_c$ y $(S_a^+ N)_a$ en $\bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} N_c$ respectivamente.

Sea $x = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_t}$ un elemento de $(S_a^+ M)_a$

$$\bigoplus_{\alpha_i: c_i \rightarrow a} (f+g)_{c_i}(x) = (f+g)_{c_1}(x_{\alpha_1}) + \dots + (f+g)_{c_t}(x_{\alpha_t}) = f_{c_1}(x_{\alpha_1}) +$$

$$g_{c_1}(x_{\alpha_1}) + \dots + f_{c_t}(x_{\alpha_t}) + g_{c_t}(x_{\alpha_t}) = \bigoplus_{\alpha_i: c_i \rightarrow a} f_{c_i}(x) + \bigoplus_{\alpha_i: c_i \rightarrow a} g_{c_i}(x) = i_N((S_a^+(f) +$$

$$S_a^+(g))_a)(x)$$

OBSERVACIÓN 2.3.4. El functor S_a^+ es exacto a izquierda y el functor S_a^- es exacto a derecha.

Demostración: Dado $f : M \rightarrow N$ un morfismo de representaciones inyectivo, queremos ver que $S_a^+ f : S_a^+ M \rightarrow S_a^+ N$ también lo es. Basta probar que $(S_a^+ f)_a$ es una transformación lineal inyectiva. Sea $x \in Ker((S_a^+ f)_a)$, $x \in \bigoplus_{\alpha: c \rightarrow a} M_c$ y lo podemos escribir de la forma $x = x_{c_1} + x_{c_2} + \dots + x_{c_t}$. Por definición de S_a^+ , $0 = (S_a^+ f)_a(x_{c_1} + x_{c_2} + \dots + x_{c_t}) = f_{c_1}x_{c_1} + f_{c_2}x_{c_2} + \dots + f_{c_t}x_{c_t}$ lo que implica que $f_{c_i}x_{c_i} = 0 \forall i$ y al ser f_{c_i} inyectiva $x_{c_i} = 0 \forall i$ y $(S_a^+ f)_a$ es inyectiva. Para S_a^- el razonamiento es análogo.

PROPOSICIÓN 2.3.5. Sea (M, φ) un KQ -Módulo:

- (a) Si a es un pozo $M \simeq S_a^- S_a^+(M) \bigoplus K$ con K una suma directa de copias de $S(a)$

(b) Si \mathbf{a} es una fuente $M \simeq S_a^+ S_a^-(M) \oplus L$ con L una suma directa de copias de $S(a)$

Demostración:

Probaremos solamente la parte (b), la parte (a) se demuestra en forma similar. Sea $(N, \chi) = (S_a^- S_a^+(M), S_a^- S_a^+(\varphi))$. Entonces $N_i = M_i \forall i \neq a$ ya que tanto al aplicar S_a^- como S_a^+ los espacios vectoriales asociados a i con $i \neq a$ no cambian.

Afirmamos que $N_a = Im(\varphi_\alpha)_\alpha$ donde $(\varphi_\alpha)_\alpha$ es el de la definición de S_a^- : Al aplicar las definiciones de los respectivos funtores (S_a^+ y S_a^-) sobre el espacio vectorial asociado a \mathbf{a} nos queda $N_a = Ker(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} (S_a^- \varphi)_\alpha : \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c \rightarrow (\bigoplus_{\alpha:a \rightarrow c} M_c / Im(\varphi_\alpha)_\alpha)$. Observemos que los M_c que aparecen en la definición primero con $\alpha : a \rightarrow c$ y luego con $\alpha : c \rightarrow a$ son los mismos sumandos que al aplicarles S_a^- las flechas que llegan a ellos cambian de orientación. Faltaría probar que el núcleo del mapa que claramente contiene a $Im(\varphi_\alpha)_\alpha$ es exactamente $Im(\varphi_\alpha)_\alpha$. Para esto veremos que pasa elemento a elemento.

Dado $x = x_{c_1} + x_{c_2} \dots + x_{c_t} \in \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c$
 $\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} (S_a^- \varphi)_\alpha(x) = (S_a^- \varphi)_{\alpha_1}(x_{c_1}) + (S_a^- \varphi)_{\alpha_2}(x_{c_2}) + \dots + (S_a^- \varphi)_{\alpha_t}(x_{c_t})$.
 Aplicando la definición de $S_a^- \varphi$ nos queda $\pi i_{s(\alpha_1)}(x_{c_1}) + \pi i_{s(\alpha_2)}(x_{c_2}) + \dots + i_{s(\alpha_t)}(x_{c_t}) = \pi(x)$
 Donde $\pi : \bigoplus_{\alpha:a \rightarrow c} M_c \rightarrow (\bigoplus_{\alpha:a \rightarrow c} M_c / Im(\varphi_\alpha)_\alpha)$ es la proyección. Por lo tanto $x \in Ker(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} (S_a^- \varphi)_\alpha)$ si y sólo si $\pi(x) = 0$ si y sólo si $x \in Im(\varphi_\alpha)_\alpha$ y esto prueba la afirmación.

Observemos ahora que la siguiente es una sucesión exacta:

$$0 \rightarrow K_a \rightarrow M_a \rightarrow N_a \rightarrow 0 \text{ donde } K_a = Ker(\varphi_\alpha)_\alpha.$$

Al tratarse de espacios vectoriales tenemos que $\exists \psi : M_a \rightarrow K_a$ tal que $\phi_a : M_a \rightarrow N_a \oplus K_a$ con $\phi_a(u) = (\varphi_\alpha)_\alpha(u), \psi(u)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Definimos ahora un morfismo ϕ entre las representaciones (N, χ) y $(M, \varphi) \oplus (K, 0)$ donde $(K, 0)$ es la representación que en el lugar a vale K_a y en el resto de los espacios vectoriales cero con los morfismos todos cero.

$$\text{si } b \neq a, \phi_b(u) = (u, 0)$$

si $b = a$, ϕ_a es la definida anteriormente.

Sabemos que ϕ_a es un isomorfismo y si $b \neq a$ el morfismo es la identidad ya que la representación K vale cero, así que es isomorfismo también. Lo único que resta probar es que ϕ es un morfismo de representaciones. Si $s(\beta) = a$ queremos que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
M_a & \rightarrow & M_b \\
\phi_a \downarrow & & \downarrow \phi_b \\
N_a \oplus P_a & \rightarrow & N_b \oplus 0
\end{array}$$

$\phi_b \varphi_\beta(u) = (\varphi_\beta(u), 0)$
 $\chi_\beta \phi_a(u) = \chi_\beta((\varphi_\alpha)_\alpha)(u), \psi(u) = (\chi_\beta(\varphi_\alpha)_\alpha(u), 0) = (\pi_\beta(\varphi_\alpha)_\alpha(u), 0) = (\varphi_\beta(u), 0)$ Observemos que en los casos en que $s(\beta) \neq a$ es inmediato que el diagrama conmuta y ϕ es el isomorfismo buscado.

COROLARIO 2.3.6. *Sea M un KQ -Módulo indescomponible.*

(a) *Si \mathbf{a} es un pozo entonces $M \simeq S(\mathbf{a})$ (es equivalente a decir $S_a^+(M) = 0$) o $M \simeq S_a^- S_a^+(M)$ (es equivalente a decir $S_a^+(M) \neq 0$). En el segundo caso $End(S_a^+ M)_{K(\sigma_a Q)} \simeq End(M)_{KQ}$ (en particular $S_a^+ M$ es indescomponible) y $dim S_a^+(M) = s_a(dim M)$.*

(b) *Si \mathbf{a} es una fuente entonces $M \simeq S(\mathbf{a})$ (es equivalente a decir $S_a^-(M) = 0$) o $M \simeq S_a S_a^-(M)$ (es equivalente a decir $S_a^-(M) \neq 0$). En el segundo caso $End(S_a^- M)_{K(\sigma_a Q)} \simeq End(M)_{KQ}$ (en particular $S_a^- M$ es indescomponible) y $dim S_a^-(M) = s_a(dim M)$.*

Demostración:

Demostraremos solamente la parte (a), para esto observemos que por el lema anterior tenemos que $M \simeq S_a^- S_a^+(M) \oplus K$ y como M es indescomponible hay dos opciones:

la primera es $M \simeq S(\mathbf{a})$ y en tal caso $(S_a^+(M))_b = S(\mathbf{a})_b = 0$ si $b \neq a$ y $(S_a^+(M))_a = Ker(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha : 0 \rightarrow S(\mathbf{a})_a) = 0$ Por lo tanto $S_a^+(M) = 0$ Si partimos de $S_a^+(M) = 0$ sabemos que el único espacio vectorial distinto de cero puede ser en el lugar \mathbf{a} por lo tanto la única opción, si M es indescomponible, es que ($M \neq 0$) $M \simeq S(\mathbf{a})$.

La segunda opción es que $M \simeq S_a^- S_a^+(M)$ en este caso $S_a^+(M) \neq 0$ (sino estaría en el caso anterior). Si partimos que $S_a^+(M) \neq 0$ entonces M no es isomorfa a $S(\mathbf{a})$ y $M \simeq S_a^- S_a^+(M)$.

En esta segunda opción probaremos que se cumple que $End(S_a^+ M)_{K(\sigma_a Q)} \simeq End(M)_{KQ}$. Definimos $\varphi : End(M)_{KQ} \rightarrow End(S_a^+ M)_{K(\sigma_a Q)}$ de forma que $\varphi(f) = S_a^+(f)$. Veamos primero que es un morfismo de anillos:
 $\varphi(f+g) = S_a^+(f+g) = S_a^+(f) + S_a^+(g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, usando la observación (2.3.3), $\varphi(fg) = S_a^+(fg) = S_a^+(f)S_a^+(g) = \varphi(f)\varphi(g)$ y $\varphi(1) = 1$ ya que S_a^+ es un functor.

φ es inyectiva:

Supongamos que $S_a^+(f) = S_a^+(g)$. Por definición $f_b = g_b$ para todo $b \neq a$. En el vértice a tenemos la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & (S_a^+M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a \\ & & \downarrow & & \downarrow \bigoplus_{\beta} (f)_c = \bigoplus_{\beta} (g)_c & & \downarrow (h)_a \\ 0 & \rightarrow & (S_a^+M)_a & \rightarrow & \bigoplus_{\beta:c \rightarrow a} M_c & \rightarrow & M_a \end{array}$$

Definiendo el h_a para que el diagrama conmute deberíamos ver que la elección es única y en este caso $h_a = f_a = g_a$. Si $\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha : \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c \rightarrow M_a$ es un epimorfismo la elección es única:

Supongamos que hay dos opciones h_a y k_a ; cumplen que $\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha h_a = \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha k_a$ ya que la otra parte del diagrama conmutativo es la misma en ambos casos. Usando la sobreyectividad de $\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha$ h_a y k_a son iguales.

$\bigoplus \varphi_\alpha$ es un epimorfismo:

Si $\bigoplus \varphi_\alpha$ no fuera un epimorfismo como tiene en cuenta a todas las transformaciones lineales que llegan a a , y a es un pozo, tendría algún subespacio de M_a al cual no le llega ninguna flecha y por lo tanto tendría a S_a como sumando de M . Esto es absurdo ya que estamos en el segundo caso en el cual $M \simeq S_a^- S_a^+(M)$, indescomponible.

φ es sobreyectiva:

Dado $g \in \text{End}(S_a^+M)_{K(\sigma_a Q)}$, defino $f \in \text{End}(M)_{KQ}$ como $f_b = g_b$ si $b \neq a$ y f_a de forma que el diagrama correspondiente conmute.

Veamos ahora que $\dim(S_a^+(M)) = s_a(\dim M)$:

Afirmamos que: $s_a(\dim M) = \sum_{b \neq a} (\dim M)_b e_b + ((\sum_{\alpha:b \rightarrow a} (\dim M)_b) - \dim M_a) e_a$:

$$s_a(\dim M) = \dim(M) - 2(\dim(M), e_a) e_a = \sum_{b \neq a} (\dim M)_b e_b + (-2(\dim(M), e_a) e_a)$$

$$+ \dim(M)_a e_a = \sum_{b \neq a} (\dim M)_b e_b + (\sum_{\alpha:b \rightarrow a} (\dim M)_b) - 2\dim(M)_a (e_a, e_a) +$$

$$\dim(M)_a e_a = \sum_{b \neq a} (\dim M)_b e_b + ((\sum_{\alpha:b \rightarrow a} (\dim M)_b) - \dim M_a) e_a.$$

En particular, $s_a(\dim M)_a = (\sum_{\alpha:b \rightarrow a} (\dim M)_b) - \dim M_a$ Por otro lado $\dim(S_a^+M) =$

$$\dim\left(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c\right) - \dim(\text{Im}\left(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha\right)), \text{ como vimos que } \bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} \varphi_\alpha \text{ es un epimorfismo, } \dim(S_a^+ M) = \dim\left(\bigoplus_{\alpha:c \rightarrow a} M_c\right) - \dim(M)_a = \sum_{\alpha:c \rightarrow a} \dim(M)_c - \dim(M)_a.$$

DEFINICIÓN 2.3.7. A partir de los funtores de reflexión definimos $C^+ = S_n^+ S_{n-1}^+ \dots S_2^+ S_1^+ : \text{Mod}KQ \rightarrow \text{Mod}KQ$ y $C^- = S_1^- S_2^- \dots S_n^- : \text{Mod}KQ \rightarrow \text{Mod}KQ$ y los llamaremos **Funtores de Coxeter**

OBSERVACIÓN 2.3.8. El functor C^+ es exacto a izquierda y C^- es exacto a derecha. Esto es consecuencia de la exactitud a izquierda de S_a^+ y la exactitud a derecha de S_a^- .

PROPOSICIÓN 2.3.9. Sean $P_i = S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)$ e $I_i = S_n^+ S_{n-1}^+ \dots S_{i+1}^+ S(i)$ definidos para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces P_i y I_i son los módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles de KQ .

Lo probaremos únicamente para los proyectivos, para los inyectivos el razonamiento es similar. Sea $P_i = S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)$, recordemos que $S(i)$ en este caso es el módulo simple en el lugar i en $\sigma_i \dots \sigma_n(Q)$. Claramente $S(i)$ es proyectivo indescomponible en $\sigma_i \dots \sigma_n(Q)$ al ser i un pozo allí.

Basta probar que $S_i^- P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)} = P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)}$ con $k < i$:
Si probamos esto, $S_{k-1}^- S(k) = P(k)_{\sigma_{k-1} \dots \sigma_n(Q)}$. Luego, $S_{k-2}^- S_{k-1}^- S(k) = S_{k-2}^- P(k)_{\sigma_{k-1} \dots \sigma_n(Q)} = P(k)_{\sigma_{k-2} \dots \sigma_n(Q)}$ y en finitos pasos obtenemos $S_1^- \dots S_{k-2}^- S_{k-1}^- S(k) = P(k)_{\sigma_1 \dots \sigma_n(Q)} = P_k$

Probemos ahora que $S_i^- P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)} = P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)}$ con $k < i$:
Para probar esto, recordemos primero, la forma de los proyectivos indescomponibles:

$P(a)_b$ es el espacio vectorial con base los caminos de a a b , $\forall b \in Q_0$. Si $\alpha : c \rightarrow d$, $P(a)_\alpha : P(a)_c \rightarrow P(a)_d$ es multiplicar por α a derecha.

Aplicando esto en nuestro caso tenemos,

$(P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_j = K^\# \{ \gamma / \gamma : k \rightarrow j \}$ (en $\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)$), y,
si $\alpha : p \rightarrow j$, $(P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_\alpha : (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_p \rightarrow (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_j$
lleva a $\alpha_1 \dots \alpha_l$ en $\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha$.

Aplicando la definición del functor de reflexión:

$$(S_i^- P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_j = \begin{cases} K^\# \{ \gamma / \gamma : k \rightarrow j \} (\text{en } \sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)) & j \neq i \\ \bigoplus_{\beta:i \rightarrow c} (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_c & j = i \end{cases}$$

$$(S_i^- P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_\alpha = \begin{cases} (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_\alpha & s(\alpha) \neq i \\ i : (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_{t(\alpha)} \rightarrow \bigoplus_{\beta:i \rightarrow c} (P(k)_{\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)})_c & s(\alpha) = i \end{cases}$$

con i la inclusión.

Por último, usando nuevamente la definición de proyectivo indescomponible obtenemos que:

$$(P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)})_j = K^\# \{ \gamma / \gamma : k \rightarrow j \} (\text{en } \sigma_i \dots \sigma_n(Q)), \text{ y, si } \alpha : p \rightarrow j, (P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)})_\alpha : (P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)})_p \rightarrow (P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)})_j \text{ lleva a } \alpha_1 \dots \alpha_l \text{ en } \alpha_1 \dots \alpha_l \alpha.$$

Observemos que si $i \neq j$ los caminos de k en j en $\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)$ y en $\sigma_i \dots \sigma_n(Q)$ son los mismos. Si $i = j$, los caminos de k en i en $\sigma_i \dots \sigma_n(Q)$ los podemos ver como los caminos de k en c con c otro vértice tal que $\exists \beta_c : i \rightarrow c$ en $\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)$ multiplicados por dicha β_c . Esto concluye que los espacios vectoriales coinciden.

Con las flechas también es bastante claro ya que si $s(\alpha) \neq i$ (en $\sigma_{i+1} \dots \sigma_n(Q)$) el comportamiento de las flechas es el mismo y si $s(\alpha) = i$ ($(P(k)_{\sigma_i \dots \sigma_n(Q)})_\alpha$) es inyectiva (se puede ver entonces como una inclusión).

LEMA 2.3.10. *Sea M un KQ -módulo entonces:*

- (a) $M \simeq C^- C^+ M \oplus P$ con P proyectivo
- (b) $M \simeq C^+ C^- M \oplus I$ con I inyectivo.

Demostración:

(a) Sea $1, 2, \dots, n$ una enumeración admisible. Sabemos por la proposición (2.3.5) que $M \simeq S_1^- S_1^+ M \oplus (\bigoplus S(1))$. Observemos que $S(1) = P(1)$ ya que al ser 1 un pozo $S(1)$ es el proyectivo indescomponible asociado al vértice 1.

Si aplicamos un razonamiento similar a $S_1^+(M)$, tomando en cuenta que allí es 2 el pozo, obtendremos $S_1^+(M) \simeq S_2^- S_2^+ S_1^+ M \oplus (\bigoplus S(2))$, sustituyendo en la primera expresión nos queda:
 $M \simeq S_1^- (S_2^- S_2^+ S_1^+ M) \oplus S_1^- (\bigoplus S(2)) \oplus (\bigoplus P(1))$. Observemos que $S_1^- (\bigoplus S(2))$ no es otra cosa que $P(2)$ y razonando inductivamente obtendremos el resultado esperado. La demostración de la parte (b) es dual a la de (a).

COROLARIO 2.3.11. *Sea M un KQ -módulo indescomponible, entonces:*

- (a) $M \simeq P_i$ para algún i (esto es equivalente a decir $C^+ M = 0$) o $M \simeq C^- C^+ M$ ($C^+(M) \neq 0$). En este caso $\text{End}_{KQ}(C^+ M) \simeq \text{End}_{KQ}(M)$ y $\dim(C^+ M) = c(\dim M)$
- (b) $M \simeq I_i$ para algún i (esto es equivalente a decir $C^- M = 0$) o $M \simeq C^+ C^- M$ ($C^-(M) \neq 0$). En este caso $\text{End}_{KQ}(C^- M) \simeq \text{End}_{KQ}(M)$ y $\dim(C^- M) = c^{-1}(\dim M)$

Demostración:

(a) Como $M \simeq C^-C^+M \oplus P$ con P proyectivo, al ser M indecomponible tenemos solamente 2 opciones: $M \simeq P_i$ para algún i o $M \simeq C^-C^+M$. En el primer caso $C^+M = C^+(P_i) = S_n^+ \dots S_1^+ S_1^- \dots S_{i-1}^-(S(i))$.

Usando el corolario (2.3.6) tenemos dos opciones posibles: si el proceso no para vamos tachando las S_j^+ con las S_j^- hasta el lugar $i - 1$ inclusive y $C^+P \simeq S_n^+ \dots S_i^+(S(i)) = 0$ ya que $S_i^+(S(i)) = 0$. Si el proceso se detiene entonces $S_j^- \dots S_{i-1}^- S(i) = S(k)$ para algún j .

Observemos que en este caso i debe ser igual a k , ya que la coordenada i -ésima no cambia al aplicarle los funtores de reflexión menores que i . Por lo tanto $S_{i-1}^+ \dots S_j^+ S(i) = S(i)$ y entonces $S_n^+ \dots S_1^+ S_1^- \dots S_{i-1}^-(S(i)) = S_n^+ \dots S_i^+(S(i)) = 0$. Supongamos que $C^+(M) = 0$ Entonces para algún j se cumple que $S_{j-1}^+ \dots S_1^+(M) \simeq S(j)$. Entonces $M \simeq S_1^+ \dots S_{j-1}^+ S(j)$ y por lo tanto $M \simeq P_j$.

Pasemos al caso en el cual $C^-C^+M \simeq M$. Así, $End(C^+M) = End(S_n^+ \dots S_1^+ M) \simeq End(S_{n-1}^+ \dots S_1^+ M) \simeq End(M)$ y $dim S_n^+ \dots S_1^+ M = s_n dim(S_{n-1}^+ \dots S_1^+) = s_n s_{n-1} \dots s_1 = c(dim M)$. La demostración de la parte (b) es dual.

DEFINICIÓN 2.3.12. Un KQ -Módulo M lo llamamos *preproyectivo* si $M \simeq C^{-s}P_j$ para algún s entero positivo y algún j desde 1 hasta n . Diremos que M es *preinyectivo* si $M \simeq C^{+s}I_j$ para algún s entero positivo y algún j .

PROPOSICIÓN 2.3.13. Sea M un KQ -Módulo indecomponible. (\bar{Q} Euclideo o Dynkin). Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) M es Proyectivo;

(b) $M \simeq P_i$;

(c) $C^+M = 0$;

(d) $c(dim M) \neq 0$.

Dualmente, son equivalentes:

(a) M es Inyectivo;

(b) $M \simeq I_i$;

(c) $C^-M = 0$;

(d) $c^{-1}(\dim M) \not\asymp 0$.

Demostración: (a) \Leftrightarrow (b) Se prueba observando que M es indescomponible y los proyectivos indescomponibles son los P_i con i variando en los vértices del carcaj.

(b) \Leftrightarrow (c) Lo probamos en el corolario (2.3.11)

(b) \Leftrightarrow (d) (\Rightarrow) $\dim(P_i) = \dim(S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)) = s_1 \dim(S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i))$ ya que la coordenada i -ésima permanece fija. Repitiendo esta idea tenemos que $\dim(P_i) = s_1 s_2 \dots s_{i-1} e_i = p_i$ y sabemos que $cp_i \not\asymp 0$.

(\Leftarrow) Si $c(\dim M) \not\asymp 0$ entonces $c(\dim M) \neq \dim(C^+M)$ por lo que sólo queda la opción que $C^+M = 0$ y $M \simeq P_i$. Las otras equivalencias son las duales.

2.4. Relacionando el functor de reflexión con las raíces de q_Q

OBSERVACIÓN 2.4.1. Consideremos las siguientes listas:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} & P_n & I_1 & I_2 & \dots & I_{n-1} & I_n \\
 C^-P_1 & C^-P_2 & \dots & \dots & C^-P_n & C^+I_1 & C^+I_2 & \dots & \dots & C^+I_n \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 C^{-s}P_1 & C^{-s}P_2 & \dots & \dots & C^{-s}P_n & C^{+s}I_1 & C^{+s}I_2 & \dots & \dots & C^{+s}I_n
 \end{array}$$

Si \bar{Q} es Euclideano los preproyectivos y preinyectivos listados aquí son no isomorfos:

Si $C^{-s}P_i \neq 0$ entonces, $\dim(C^{-s}P_i) = c^{-s} \dim(C^{-s+1}P_i) = c^{-s}p_i$ y sabemos que las raíces $c^{-s}p_i$ son todas distintas (lo mismo ocurre si $C^{+s}I_i \neq 0$ y $c^{+s}q_j$ son todas raíces distintas entre sí y distintas a las $c^{-t}p_j$ ya que difieren en el signo del defecto).

Ahora supongamos que $C^{-s}P_i = 0$, esto implica que $C^{-s+1}P_i \simeq I_j$ para algún j y por lo tanto $c^{-s+1}p_i = q_j$ y esto es absurdo porque los defectos tienen signo opuesto.

DEFINICIÓN 2.4.2. Definimos $\partial_c(M) = \partial_c(\dim M)$.

PROPOSICIÓN 2.4.3. Sea Q un carcaj con \bar{Q} Euclideano.

El mapa \dim que a cada módulo le asocia su dimensión induce una biyección entre las clases de isomorfismo de los KQ -Módulos indescomponibles de defecto no nulo y las raíces positivas de defecto no nulo de q_Q .

Demostración:

Sea M un KQ -Módulo indescomponible con $\partial_c(M) < 0$. Recordemos una de las propiedades del defecto:

$$c^{tm}(\dim M) = (\dim M) + t\partial_c(\dim M)v. \quad (2.4)$$

Podemos asegurar que para un t lo suficientemente grande $c^{tm}(\dim M) \not\geq 0$. Llamaremos $s + 1 = tm$, siendo $s+1$ el mínimo para el cual esto ocurre.

Por lo tanto $c^s \dim M = \dim C^s M$ y $C^s M \simeq P_i$ para algún i . De esta última observación deducimos fácilmente que $M \simeq C^{-s} P_i$ y por lo tanto $\dim M = \dim C^{-s} P_i = c^{-s} p_i$.

Si consideramos un módulo cuyo defecto es positivo, el razonamiento es similar. Partiendo de la propiedad del defecto (2.4) nuevamente observamos que para un cierto entero t negativo $c^{tm} \dim M \not\leq 0$ y por lo tanto $M \simeq C^{+t} I_j$ y $\dim M = c^{+t} q_j$.

Veamos que se trata de una biyección.

Inyectividad: Supongamos que tenemos $\dim M = \dim N$ y $\partial_c M = \partial_c N < 0$ (si el defecto es positivo el razonamiento es análogo). Entonces, $\dim M = \dim C^{-s} P_i = c^{-s} p_i = c^{-t} p_j = \dim N$. Esto implica que $s = t$ e $i = j$ ya que si $s < t$ obtendríamos $0 \not\leq c p_i = c^{-t+s-1} p_j \geq 0$ lo cual sería absurdo.

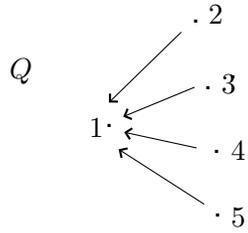
Sobreyectividad: Dada una raíz positiva de defecto no nulo ya sabemos que es de la forma $c^{-s} p_i$ o $c^{+t} q_j$. Basta considerar las preimágenes $C^{-s} P_i$ o $C^{+t} I_j$ respectivamente.

OBSERVACIÓN 2.4.4. *Si comenzamos a construir el carcaj de Auslander-Reiten asociado a KQ , el álgebra de caminos de dimensión finita de Q con \bar{Q} Euclideo, partiendo de los proyectivos e inyectivos indescomponibles, obtenemos que la componente que comienza en los proyectivos indescomponibles va a contener a los módulos preproyectivos (y únicamente a estos) mientras que la componente que termina en los inyectivos indescomponibles consta de los módulos indescomponibles preinyectivos.*

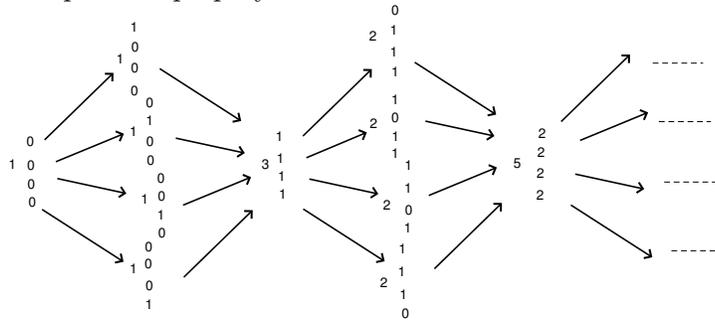
Por lo tanto, los módulos que se encuentran en ambas componentes estarán en biyección con su dimensión. Hay otra componente en el carcaj de Auslander-Reiten. Ésta estará relacionada a los módulos que veremos en la siguiente sección, los módulos regulares.

EJEMPLO 2.4.5. *Veamos un ejemplo y la forma de su componente preproyectiva y preinyectiva:*

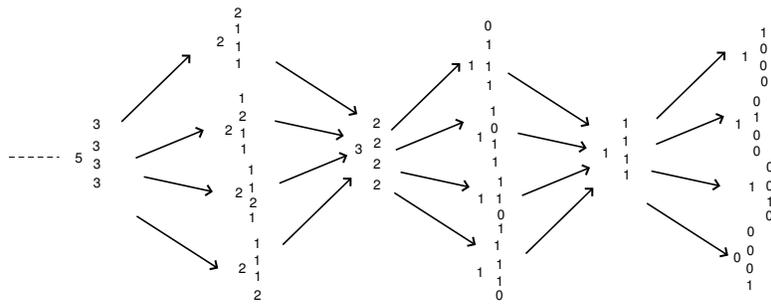
Ejemplo



Componente preproyectiva



Componente preinyectiva



Capítulo 3

Los KQ-módulos Regulares

Luego de estudiar y clasificar los KQ-módulos de defecto no nulo estudiaremos que ocurre con los módulos de defecto nulo.

3.1. Qué son y cuáles son sus propiedades fundamentales?

LEMA 3.1.1. *Sea M un KQ-módulo Euclideo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Si $M = \bigoplus_i M_i$ con M_i indescomponible, $\partial_c M_i = 0$;

(b) $\partial_c M = 0$ y $\partial_c M' \leq 0$ para todo submódulo M' de M ;

(c) $\partial_c M = 0$ y $\partial_c M'' \geq 0$ para todo M'' cociente de M .

Demostración:

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que $M = \bigoplus_i M_i$ con M_i indescomponible. Sabemos que $\partial_c M = 0$ y $\partial_c M_i \leq 0 \forall i$. Como el defecto es aditivo $0 = \partial_c M = \sum_i \partial_c M_i$, lo que implica que, $\partial_c M_i = 0 \forall i$.

(a) \Rightarrow (b) Como $M = \bigoplus_i M_i$ con M_i indescomponible y $\partial_c M_i = 0$ se cumple que $\partial_c M = 0$.

Sea M' un submódulo de M . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que M' es indescomponible. Como C^+ es exacto a izquierda si consideramos $i : M' \rightarrow M$ tenemos $C^+ i : C^+ M' \rightarrow C^+ M$, monomorfismo.

Tenemos dos alternativas:

- (1) $C^{+tm} M' = 0$ a partir de cierto t .
- (2) $C^{+tm} M'$ es indescomponible $\forall t$.

Si se cumple (1) \exists un $s > 0$ minimal tal que $C^{(s+1)}M' = 0$, en este caso $C^s M' \simeq P_i$ para algún i y por lo tanto M' es preproyectivo y $\partial_c M' < 0$.

Si nos encontramos en el caso (2) tenemos por un lado que $\dim C^{tm}(M') = \dim M' + t\partial_c M'$ y por otro $\dim C^{tm} M' \leq \dim C^{tm} M$. Como $\dim C^{tm} M = \dim M$ (recordemos que $\partial_c M = 0$) la única opción posible es que $\partial_c M' \leq 0$ ya que de lo contrario $\dim C^{tm}(M')$ crecería con t .

Para probar (b) \Leftrightarrow (c) basta observar que $\partial_c(M/M') = \partial_c M - \partial_c M'$.

DEFINICIÓN 3.1.2. Un KQ -módulo que cumpla con alguna de las tres propiedades mencionadas en el lema anterior es llamado **regular**. Llamaremos \mathcal{R} a la subcategoría plena de $KQ\text{-mod}$ de los KQ -módulos regulares.

PROPOSICIÓN 3.1.3. \mathcal{R} es una subcategoría abeliana y cerrada bajo extensiones.

Demostración:

Veamos primero que es cerrada bajo extensiones. Observemos que dada:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0 \text{ una sucesión exacta,}$$

$\dim Z = \dim \text{Im}(g) + \dim \text{Ker}(g) = \dim Y + \dim \text{Im}(f) = \dim Y + \dim X$ y por lo tanto $\partial_c Z = \partial_c X + \partial_c Y$. Esto implica que si dos de los KQ -módulos de la sucesión tienen defecto nulo el tercero lo tendrá.

Los submódulos de X son submódulos de Z . Los cocientes de Y son cocientes de Z y los submódulos de Z son extensiones de submódulos de X por submódulos de Y por lo tanto si dos de ellos son regulares el tercero lo será (usando en cada caso la equivalencia adecuada).

Dados $X, Y \in \mathcal{R}$, sea $\alpha : X \rightarrow Y$ un morfismo de módulos.

$\text{Im}(\alpha) \in \mathcal{R}$:

cada submódulo L de $\text{Im}(\alpha)$ (en particular para $L = \text{Im}(\alpha)$) es un submódulo de Y y por lo tanto $\partial_c L \leq 0$.

A su vez, $\text{Im}(\alpha) \simeq X/\text{Ker}(\alpha)$ y por lo tanto $\partial_c \text{Im}(\alpha) \geq 0$. Por lo tanto debe cumplirse que, $\partial_c \text{Im}(\alpha) = 0$ y $\partial_c L \leq 0$ para todo submódulo L de $\text{Im}(\alpha)$ lo que implica que $\text{Im}(\alpha)$ es regular.

Para ver que $\text{Ker}(\alpha)$ y $\text{Coker}(\alpha)$ son regulares basta considerar las siguientes sucesiones exactas:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\alpha} \text{Im}(\alpha) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{Im}(\alpha) \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y utilizar lo probado más arriba.

Los módulos homogéneos

Dentro de los módulos regulares vamos a distinguir un conjunto de módulos llamados homogéneos. Éstos se van a diferenciar de los no-homogéneos en su estructura y en el debido momento los trataremos en forma separada. Veamos su definición.

DEFINICIÓN 3.1.4. Un KQ -Módulo regular M se dice **homogéneo** si $\dim L = av$ con $a > 0$, v el generador del radical, para todo factor simple de composición L en \mathcal{R} de M . Llamaremos \mathcal{H} a la subcategoría plena de \mathcal{R} de los módulos homogéneos.

OBSERVACIÓN 3.1.5. \mathcal{H} es una subcategoría que al igual que \mathcal{R} es abeliana y cerrada bajo extensiones.

OBSERVACIÓN 3.1.6. Si M es un KQ -Módulo regular cumple que $c^m \dim M = \dim M$ (ya que $\partial_c M = 0$).

Supongamos ahora que M es simple regular.

M es homogéneo si y sólo si $c \dim M = \dim M$:

(\Rightarrow) Si partimos de M homogéneo, por ser simple regular es un factor simple de composición de él mismo y $\dim M = av$ por lo que $\dim M$ es estable bajo c , o sea, $c \dim M = \dim M$.

(\Leftarrow) Si partimos de $c \dim M = \dim M$, usando la proposición (2.1.11) vista en el capítulo anterior, esto alcanza para asegurar que $\dim M$ es estable bajo W (grupo de Weyl) y por lo tanto pertenece al radical. Entonces $\dim M = av$ con v el generador del radical y $a > 0$ por tratarse de una dimensión de un módulo.

PROPOSICIÓN 3.1.7. Sea M un KQ -Módulo indecomponible regular, a un pozo. Entonces $S_a^+ M$ es indecomponible regular. Si partimos de un M simple regular, también lo será $S_a^+ M$ y si además de ser simple regular es homogéneo también lo será al aplicarle el functor de reflexión.

Demostración:

Observemos en primer lugar que $M \neq S(a)$ ya que al ser a un pozo, $S(a)$ es proyectivo y por lo tanto su defecto es no nulo.

Consideremos c la transformación de Coxeter de Q y $c' = s_a c s_a$ la transformación de Coxeter de $Q' = \sigma_a Q$. Recordemos que $\partial_{c'} s_a e_i = \partial_c e_i$.

Como M es indecomponible, $M \in \mathcal{R}$ si y sólo si $\partial_c M = 0$. Sabemos que $\partial_c M = \partial_c(\dim M) = \partial_{c'}(s_a M) = \partial_{c'}(S_a^+ M)$ por lo cual si $M \in \mathcal{R}$, $S_a^+ M$ también (ya probamos que un módulo indecomponible no isomorfo a $S(a)$ sigue siendo indecomponible al aplicarle el functor de reflexión).

Partamos ahora de M es simple regular. Sea L un submódulo propio regular de S_a^+M que suponemos por absurdo que existe. Podemos considerar $N \neq S_a^+M$ regular tal que:

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{i} S_a^+M \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0$$

es exacta (basta considerar $N = \text{Coker}(i)$ con i la inclusión de L en S_a^+M).

Como S_a^- es un functor exacto a derecha de la sucesión anterior obtenemos:

$$M \simeq S_a^-S_a^+M \xrightarrow{\varphi} S_a^-N \rightarrow 0 \quad (1)$$

Como N es regular, S_a^-N lo es y también lo será $\text{Ker}\varphi$ al ser \mathcal{R} una subcategoría abeliana. Pero $\text{Ker}\varphi \subset M$ estrictamente ya que φ es sobreyectiva y $S_a^-N \neq 0$. Observemos que $\text{Ker}\varphi \neq 0$ ya que $\varphi = S_a^+\pi$ y usando la definición de S_a^+ obtendríamos que $L \simeq \bigoplus S(a)$ lo cual es absurdo al ser L regular. En conclusión, obtuvimos un submódulo propio no nulo de M lo que contradice la hipótesis de ser simple regular.

Por último, supondremos que M es además homogéneo. Al ser simple regular esto implica que $\dim M = bv$ con $b > 0$ y v el generador del radical. A partir de esto, $\dim S_a^+M = s_a \dim M = s_a bv = bv$ y por lo tanto S_a^+M resulta ser homogéneo.

3.2. Existencia de ecuaciones

Con el objetivo de comprender los módulos indescomponibles regulares no-homogéneos utilizaremos una herramienta llamada ecuación. La existencia de ecuaciones para ciertos módulos regulares nos ayudará a construir un conjunto de módulos simples regulares no homogéneos que luego serán las piezas con las que construiremos todos los módulos indescomponibles regulares.

DEFINICIÓN 3.2.1. *Sea E un KQ -módulo regular. Una forma lineal $\eta : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ es una ecuación para E si cumple:*

(i) $\eta(\dim E) > 0$;

(ii) Si $\eta(\dim M) > 0$ para M regular, entonces, $E \simeq M'$ con M' submódulo de M .

(iii) Si $\eta(\dim M) < 0$ para M regular, entonces, $C^+E \simeq M''$ con M'' un submódulo de M .

Notación: $\eta M = \eta(\dim M)$ y $E_s = C^{+s}E$ ($E_0 = E$).

OBSERVACIÓN 3.2.2. Dada una ecuación η para un cierto módulo regular E y a un pozo, tenemos una ecuación para S_a^+E .

Consideramos el vector $(\eta_i)_{i \in Q_0}$ donde cada entrada nos da el valor de $\eta(e_i)$.

Entonces podemos escribir $\eta E = \sum_{i \in Q_0} \eta_i(\dim E)_i$.

Definimos $\eta_i^a = \eta^a(e_i) = \eta(s_a e_i)$.

En definitiva:

$$\eta_i^a = \begin{cases} -\eta_i & i = a \\ \eta_i^a = \eta_i + k_{ia}\eta_a & i \neq a \end{cases}$$

donde k_{ia} son las flechas entre i y a .

De esta forma $\eta^a(S_a^+M) = \eta^a(s_a \dim M) = \eta(s_a^2 \dim M) = \eta M$.

Veamos que η^a cumple la definición de ecuación:

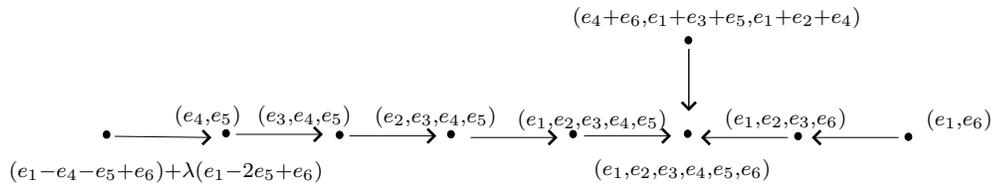
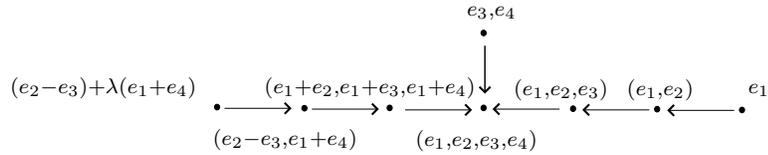
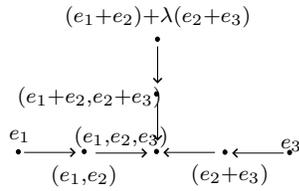
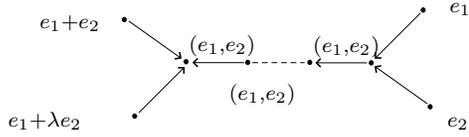
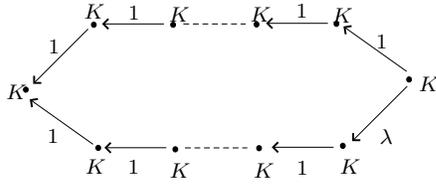
$$(i) \eta^a(S_a^+E) = \eta E > 0$$

(ii) Si $\eta^a M > 0$. Entonces $\eta^a M = \eta^a(S_a^+S_a^-M) > 0$ ya que $\eta^a(S_a^+S_a^-M) = \eta^a(M \oplus \oplus S(a))$ y como η^a debe ser lineal $\eta^a(M \oplus \oplus_{i=1}^n S(a)) = \eta^a M + n(\eta^a(S(a)))$ y $\eta^a S(a) = 0$ al ser $\eta^a S(a) = \eta^a(e_a)$ que por definición es $\eta(s_a e_a) = 0$. Sabemos que si $\eta^a(S_a^+S_a^-M) > 0$ entonces $\eta(S_a^-M) > 0$. Por lo tanto, $E \simeq N$ donde N es un submódulo de S_a^-M . Como el functor S_a^+ es exacto a izquierda se cumple que $S_a^+E \simeq S_a^+N$ donde S_a^+N es un submódulo de M .

(iii) De forma similar si $\eta^a M = \eta^a(S_a^+S_a^-M) < 0$, entonces, $\eta(S_a^-M) < 0$ y por lo tanto $C^+E \simeq N$ con N un submódulo de S_a^-M y $S_a^+C^+E = C^+S_a^+E \simeq S_a^+N$.

OBSERVACIÓN 3.2.3. Inductivamente si η es una ecuación para E dado $s \in N$ obtenemos una ecuación para $C^{+s}E$.

OBSERVACIÓN 3.2.4. En todos los diagrama Euclidianos podemos encontrar un cierto módulo tal que su dimensión sea igual al generador del radical v en cada caso. Veamos dicho módulo para una determinada orientación:



Esto lo usaremos en el siguiente Lema.

LEMA 3.2.5. Sea E un KQ -módulo regular con ecuación η tal que el largo l de la órbita de $\dim E$ bajo c es mayor o igual que dos.

Entonces:

(a) $E_l \simeq E_0$ y E_0, E_1, \dots, E_{l-1} son simples regulares no homogéneos, no isomorfos.

(b) $\eta M = 0$ para todo M simple regular tal que $M \neq E_0, E_1$ y $\eta E_0 = -\eta E_1$

Demostración:

(a) Probaremos en primer lugar que E_s es regular $\forall s$:

Sea $E = \bigoplus_i N_i$ con N_i indescomponibles, entonces, $C^+E = \bigoplus_i C^+N_i$.

Observemos que $C^+N_i \neq 0$ ya que N_i es regular y por lo tanto $\partial_c N_i = 0$. En estas condiciones N_i no puede ser proyectivo lo que en este caso es equivalente a decir que $C^+N_i \neq 0$.

C^+N_i es regular ya que N_i lo es y $\partial_c C^+N_i = 0$.

Como $C^+E = \bigoplus_i C^+N_i$ podemos deducir que $C^+E = E_1$ es regular. Repitiendo este

razonamiento probamos que E_s es regular $\forall s$.

Ahora veamos que $E_l \simeq E_0$:

$$\eta E_l = \eta(\dim C^{+l} E_0) = \eta(c^l \dim E_0) = \eta E_0 > 0.$$

Por definición de ecuación esto implica que E_0 es isomorfo a un submódulo de E_l pero $\dim E_l = \dim E_0$ de lo que se deduce que $E_0 \simeq E_l$.

E_s es simple y regular $\forall s$:

Basta probar que E_0 es simple regular:

Supongamos que E_0 es simple regular pero E_t no lo es para un cierto t . Sea L un submódulo regular dentro de E_t ; podemos considerar el mapa inclusión $i: L \rightarrow E_t$.

Como C^+ es exacto a izquierda $C^{+(l-t)}i: C^{+(l-t)}L \rightarrow C^{l-t}E_t \simeq E_0$ sigue siendo inyectivo y esto es absurdo ya que E_0 es simple regular.

Probemos ahora que E_0 es simple regular:

Consideremos la serie de composición de E_0 en \mathcal{R} con los factores simples de composición $M_1, M_2 \dots M_p$ en \mathcal{R} .

Tenemos que $\eta E = \sum_{i=1}^p \eta M_i > 0$ por lo cual $\exists j$ tal que $\eta M_j > 0$ lo que implica que E_0 es isomorfo a un submódulo de M_j y no queda otra alternativa que $E_0 \simeq M_j$. Como M_j es simple regular E_0 es también lo es.

Como E_0 no es homogéneo (el largo de la órbita de $\dim E_0$ bajo c, l , es mayor o igual que dos) E_t no lo es para ningún t :

Si E_t es homogéneo $c \dim C^{+t} E = \dim C^{+t} E$ y esto implica que $c^{t+1} \dim E = c^t \dim E$. Luego, aplicando de ambos lados c^{l-t} obtenemos que $c^{l+1} \dim E = c^l \dim E$ lo que implicaría que E_l es homogéneo lo cual es absurdo ya que $E_l \simeq E = E_0$.

Veamos que los E_s con $s = 1 \dots l - 1$ son no isomorfos:

si $E_s \simeq E_t$ con $s > t$ y $s - t < l$ entonces $c^s \dim E = c^t \dim E$ y multiplicando por c^{-t} de ambos lados obtenemos que $c^{s-t} \dim E = \dim E$ y esto no puede pasar al ser $s - t < l$.

(b) Supongamos que $\eta M > 0$ para M simple regular. Por definición de ecuación $E_0 \simeq L$ con L un submódulo de M . Al ser M simple regular $L = M$ y por lo tanto $E_0 \simeq M$.

Si ahora $\eta M < 0$ para M simple regular será $E_1 \simeq L$ siendo L un submódulo de M . Usando el mismo razonamiento que con el defecto positivo deberá ser $L = M$ y por lo tanto $E_1 \simeq M$.

Por último consideremos $\sum_{s=0}^{l-1} \dim E_s = \dim E_0 + c \dim E_0 + \dots + c^{l-1} \dim E_0$. Este vector pertenece al radical N ya que es estable bajo la transformación de Coxeter y por lo tanto $\sum_{s=0}^{l-1} (l-1) \dim E_s = av$ siendo v el generador del radical.

Recordemos que existe un simple regular homogéneo M tal que $\dim M = v$. Esto implica que $\eta v = 0$ ya que $v = \dim M$ y $M \neq E_0, E_1$.

En definitiva $\eta(\sum_{s=0}^{l-1} \dim E_s) = \eta(av) = a\eta(v) = 0$ y por otro lado $\eta(\sum_{s=0}^{l-1} \dim E_s) = \eta E_0 + \eta E_1$ (el resto de los términos dan cero) lo que implica que $\eta E_0 = -\eta E_1$.

OBSERVACIÓN 3.2.6. Si tenemos un conjunto de KQ -módulos regulares E^1, E^2, \dots, E^k que cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Las órbitas de $\dim E^1, \dim E^2, \dots, \dim E^k$ son disjuntas bajo c y de largo $l_i \geq 2$.
- (b) Cada E^i tiene una ecuación η^i

Podemos obtener el siguiente conjunto de simples regulares no homogéneos no isomorfos:

$$\begin{array}{cccc}
 E_0^1 & E_0^2 & \cdots & E_0^k \\
 E_1^1 & E_1^2 & \cdots & E_1^k \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 E_{l_1-1}^1 & E_{l_2-1}^2 & \cdots & E_{l_k-1}^k
 \end{array}
 \quad \text{Observemos que cada } E_j^i \text{ tiene una ecuación } \eta_j^i$$

PROPOSICIÓN 3.2.7. En el contexto de la observación anterior consideremos $K = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{j=0}^{l_i-1} \text{Ker} \eta_j^i$.

Si $K = \mathbb{Q}v$ (v generador del radical) entonces la lista contiene todos los KQ -Módulos simples regulares no homogéneos.

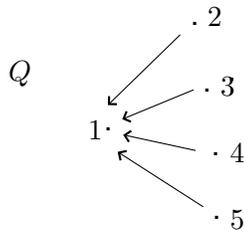
Demostración:

Notemos que siempre se cumple que $\mathbb{Q}v \subset K$:
 $\eta_j^i(\lambda v) = \lambda \eta_j^i(v) = 0$ ya que v corresponde a la dimensión de un módulo simple regular homogéneo.

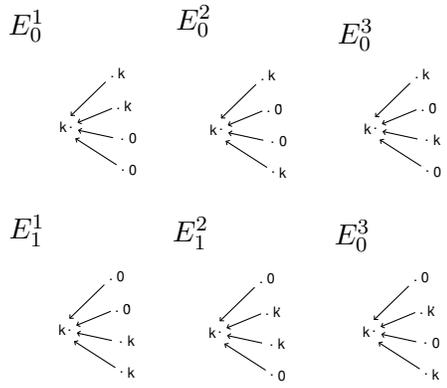
Supongamos que M es un simple regular que no aparece en la lista. Entonces $\eta_j^i M = 0 \forall i, j$ de lo que se deduce que $\dim M \in K$ y como $K = \mathbb{Q}v$, $\dim M$ es de la forma av . Concluimos que como M simple M debe ser homogéneo.

EJEMPLO 3.2.8. Consideremos el siguiente carcaj:

Ejemplo



La lista completa de los módulos simples regulares no homogéneos es la siguiente:



3.3. Forma de Tits y Extensiones

Generalizando de alguna manera la definición de q_Q (forma cuadrática asociada a un carcaj Q) introducimos la definición de forma de Tits. Luego, veremos algunos resultados que relacionan conceptos homológicos como Hom y Ext^1 con la forma de Tits. Finalmente, obtendremos los resultados (en el caso homogéneo y no-homogéneo) que describen los módulos indescomponibles regulares.

DEFINICIÓN 3.3.1. *Sea Q un carcaj con n vértices, finito, conexo y acíclico.*

La forma bilineal \mathcal{B} definida como:

$$\mathcal{B}(x, y) = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

*se llama **Forma de Tits***

PROPOSICIÓN 3.3.2. *Sean M, M' KQ -Módulos $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \psi_\alpha)$.*

Entonces $\mathcal{B}(\dim M, \dim M') = \dim_k Hom(M, M') - \dim_k Ext^1(M, M')$.

Demostración:

Definiremos el siguiente mapa:

$$C_{M, M'} : \bigoplus_{i \in Q_0} Hom_k(M_i, M'_i) \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_k(M_{s(\alpha)}, M'_{t(\alpha)})$$

de la siguiente manera:

Sea $(\gamma_i)_i \in \bigoplus_{i \in Q_0} Hom_k(M_i, M'_i)$, dado $\alpha \in Q_1$, $c_\alpha = \psi_\alpha \gamma_{s(\alpha)} - \gamma_{t(\alpha)} \varphi_\alpha$ y $(C_{M, M'}((\gamma_i)_i))_\alpha = c_\alpha$.

Observemos que $c_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_k(M_{s(\alpha)}, M'_{t(\alpha)})$:

En primer lugar c_α es una transformación lineal ya que se define a partir de sumas y composiciones de transformaciones lineales.

$\psi_\alpha \gamma_{s(\alpha)}, \gamma_{t(\alpha)} \varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M'_{t(\alpha)}$ y por lo tanto $c_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M'_{t(\alpha)}$ (sale y llega donde corresponde).

$Ker C_{M, M'} = Hom(M, M')$:

Sea $(\gamma_i)_i \in Ker C_{M, M'}$, entonces, $C_{M, M'}(\gamma_i)_i = 0$ y por lo tanto, $\psi_\alpha \gamma_{s(\alpha)} = \gamma_{t(\alpha)} \varphi_\alpha \forall \alpha \in Q_1$. Esto ocurre si y solamente si $\gamma \in Hom(M, M')$.

$Coker C_{M,M'} = Ext^1(M, M')$:

Dados $\Sigma = (\sigma_\alpha)_\alpha$ y $\Sigma' = (\sigma'_\alpha)_\alpha$ en $\bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_k(M_{s(\alpha)}, M'_{t(\alpha)})$ quedan definidas las siguientes extensiones de M' bajo M :

$$(*) \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} (M'_j \oplus M_j, \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}) \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

$$(**) \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} (M'_j \oplus M_j, \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma'_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}) \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

Considerando la inclusión i y la proyección π .

Veamos que la inclusión i y la proyección π son morfismos de representaciones:

i es un morfismo de representaciones si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M'_{s(\alpha)} & \xrightarrow{i_{s(\alpha)}} & M'_{s(\alpha)} \oplus M_{s(\alpha)} \\ \psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix} \\ M'_{t(\alpha)} & \xrightarrow{i_{t(\alpha)}} & M'_{t(\alpha)} \oplus M_{t(\alpha)} \end{array}$$

Para que el diagrama conmute se debe cumplir que $i_{t(\alpha)}\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}$

$i_{s(\alpha)}$, o sea, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y esto se cumple.

Para π el razonamiento es similar.

Observemos que todas las extensiones de M' bajo M van a tener esta forma para un cierto Σ .

(*) y (**) definen el mismo elemento en $Ext^1(M, M')$ si y solo si existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} (M'_j \oplus M_j, \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}) \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0 \\ \downarrow id \quad \quad \quad \downarrow \tau \quad \quad \quad \downarrow id \\ 0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} (M'_j \oplus M_j, \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma'_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}) \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0 (***) \end{array}$$

Si esto ocurre, considerando $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se debe cumplir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lo que implica que $a = id$ y $c = 0$.

Por otro lado, se debe cumplir también que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ lo que implica que $d = id$.

En conclusión, si existe dicha τ deberá ser de la forma $\begin{pmatrix} id & \tau_i \\ 0 & id \end{pmatrix}$.

Como τ deberá ser un morfismo de representaciones el siguiente diagrama deberá conmutar:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \psi_\alpha \quad \sigma_\alpha \\ 0 \quad \varphi_\alpha \end{array} & \\ & \rightarrow & \\ \begin{array}{c} M'_{s(\alpha)} \oplus M_{s(\alpha)} \\ \left(\begin{array}{cc} id & \tau_{s(\alpha)} \\ 0 & id \end{array} \right) \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} M'_{t(\alpha)} \oplus M_{t(\alpha)} \\ \downarrow \left(\begin{array}{cc} id & \tau_{s(\alpha)} \\ 0 & id \end{array} \right) \end{array} \\ & & \\ & \begin{array}{c} \psi_\alpha \quad \sigma'_\alpha \\ 0 \quad \varphi_\alpha \end{array} & \\ & \rightarrow & \\ \begin{array}{c} M'_{s(\alpha)} \oplus M_{s(\alpha)} \\ \end{array} & & \begin{array}{c} M'_{t(\alpha)} \oplus M_{t(\alpha)} \\ \end{array} \end{array}$$

se debe cumplir que $\begin{pmatrix} id & \tau_{t(\alpha)} \\ 0 & id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma'_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id & \tau_{s(\alpha)} \\ 0 & id \end{pmatrix}$

Haciendo las multiplicaciones correspondientes debe cumplirse la siguiente igualdad entre matrices:

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha & \sigma_\alpha + \tau_{t(\alpha)}\varphi_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha & \psi_\alpha\tau_{s(\alpha)} + \sigma'_\alpha \\ 0 & \varphi_\alpha \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, $\sigma_\alpha + \tau_{t(\alpha)}\varphi_\alpha = \psi_\alpha\tau_{s(\alpha)} + \sigma'_\alpha$ lo que implica que $\sigma_\alpha - \sigma'_\alpha = C_{M,M'}((\gamma_i)_\alpha)$ para un cierto $(\gamma_i)_i$.

En conclusión, si Σ y Σ' definen el mismo elemento en $Ext^1(M, M')$ entonces $\Sigma - \Sigma' \in Im(C_{M,M'})$. Recíprocamente, si partimos de $\Sigma - \Sigma' \in Im(C_{M,M'})$ y volvemos hacia atrás en el razonamiento realizado, llegaremos a que Σ y Σ' definen el mismo elemento en $Ext^1(M, M')$.

Por lo tanto, $Ext^1(M, M') \simeq \bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_k(M_{s(\alpha)}, M'_{t(\alpha)}) / Im(C_{M,M'}) \simeq Coker(C_{M,M'})$.

Con la ayuda de la función $C_{M,M'}$ y los resultados obtenidos sobre ella calculemos la forma de Tits asociada a M y M' : $\mathcal{B}(dimM, dimM') = dim_k Hom(M, M') - dim_k Ext^1(M, M')$:

$$\mathcal{B}(dimM, dimM') = \sum_{i \in Q_0} dimM_i dimM'_i - \sum_{\alpha \in Q_1} dimM_{s(\alpha)} M'_{t(\alpha)} = dim_k \left(\bigoplus_{i \in Q_0} Hom_k(M_i, M'_i) \right)^{(1)} - dim_k \left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} Hom_k(M_{s(\alpha)}, M'_{t(\alpha)}) \right)^{(2)}.$$

Observemos que (1) no es otra cosa que el dominio de la función $C_{M,M'}$ y (2) el codominio. Usando propiedades de espacios vectoriales, dada una transformación lineal cualquiera $T : X \rightarrow Y$ tenemos que $dimX - dimY = dimKerT + dimImT - (dimY/ImT + dimImT) = dimKerT - dimCokerT$.

En nuestro caso particular obtenemos el resultado buscado ya que nos queda: $\mathcal{B}(dimM, dimM') = dimKer(C_{M,M'}) - dimCoker(C_{M,M'}) = dim_k Hom(M, M') - dim_k Ext^1(M, M')$.

COROLARIO 3.3.3. (i) Sea \mathfrak{a} un pozo y M un KQ -módulo sin sumandos directos isomorfos a $S(\mathfrak{a})$. Entonces $dim_k Ext^1(M, S(\mathfrak{a})) = (s_\mathfrak{a} dimM)_\mathfrak{a}$.

(ii) Dualmente, sea \mathbf{a} una fuente y M un KQ -módulo sin sumandos directos isomorfos a $S(\mathbf{a})$. Entonces $\dim_k \text{Ext}^1(S(\mathbf{a}), M) = (s_{\mathbf{a}} \dim M)_{\mathbf{a}}$.

Demostración:

Probaremos sólo (i) ya que (ii) es dual. Observemos, en primer lugar, que $\text{Hom}_k(M, S(\mathbf{a})) = 0$ ya que si existiera $f : M \rightarrow S(\mathbf{a})$ no nula como $S(\mathbf{a})$ es un proyectivo tendría $g : S(\mathbf{a}) \rightarrow M$ no nula e inyectiva ($S(\mathbf{a})$ es indescomponible) lo que contradice que M no tiene sumandos directos isomorfos a $S(\mathbf{a})$.

Usando la proposición anterior tenemos que $-\dim \text{Ext}^1(M, S(\mathbf{a})) = \mathcal{B}(\dim M, \dim S(\mathbf{a})) = \sum_{i \in Q_0} \dim M_i \dim S(\mathbf{a})_i - \sum_{\alpha \in Q_1} \dim M_{s(\alpha)} \dim S(\mathbf{a})_{t(\alpha)} = \dim M_{\mathbf{a}} - \sum_{\alpha: s(\alpha) \rightarrow \mathbf{a}} \dim M_{s(\alpha)} = -(s_{\mathbf{a}} \dim M)_{\mathbf{a}}$.

LEMA 3.3.4. Sean M, N KQ -Módulos indescomponibles.

(i) Entonces $\text{Ext}^1(M, N) \simeq \text{Ext}^1(C^+M, C^+N)$.
Para M preproyectivo y no inyectivo además se cumple que $\text{Ext}^1(C^-M, M) \simeq K$.

(ii) Dualmente, $\text{Ext}^1(M, N) \simeq \text{Ext}^1(C^-M, C^-N)$.
Para M preinyectivo y no proyectivo además se cumple que $\text{Ext}^1(M, C^+M) \simeq K$.

Demostración:

Se probará solamente la parte (i) ya que la (ii) es dual. Si $C^+M = 0$ entonces $M \simeq P(i)$ y $\text{Ext}^1(P(i), N) = 0 = \text{Ext}^1(0, C^+N)$.

Supongamos que $C^+M \neq 0$ y sea $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ (1) una extensión de M bajo N con $M = (M_i, \varphi_{\alpha})$, $N = (N_i, \psi_{\alpha})$ y $L = (L_i, \tau_{\alpha})$.

Afirmamos que para \mathbf{a} un pozo, al aplicarle el functor $S_{\mathbf{a}}^+$ a (1) obtenemos otra sucesión exacta de la forma:

$$0 \rightarrow S_{\mathbf{a}}^+ N \xrightarrow{S_{\mathbf{a}}^+ f} S_{\mathbf{a}}^+ L \xrightarrow{S_{\mathbf{a}}^+ g} S_{\mathbf{a}}^+ M \rightarrow 0.$$

Es claro que lo único que debemos probar es que la sucesión es exacta en el lugar \mathbf{a} ya que los otros espacios vectoriales se mantienen iguales al aplicar $S_{\mathbf{a}}^+$.

En definitiva, debemos ver que:

$0 \rightarrow (S_{\mathbf{a}}^+ N)_{\mathbf{a}} \xrightarrow{(S_{\mathbf{a}}^+ f)_{\mathbf{a}}} (S_{\mathbf{a}}^+ L)_{\mathbf{a}} \xrightarrow{(S_{\mathbf{a}}^+ g)_{\mathbf{a}}} (S_{\mathbf{a}}^+ M)_{\mathbf{a}} \rightarrow 0$ es exacta. Observemos que $S_{\mathbf{a}}^+$ es exacto a izquierda y por lo tanto $(S_{\mathbf{a}}^+ f)_{\mathbf{a}}$ será inyectiva. Para ver que $(S_{\mathbf{a}}^+ g)_{\mathbf{a}}$ es sobreyectiva usaremos la definición de $S_{\mathbf{a}}^+$ que nos lleva al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & (S_a^+ N)_a & \xrightarrow{(S_a^+ f)_a} & (S_a^+ L)_a & \xrightarrow{(S_a^+ g)_a} & (S_a^+ M)_a \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} N_c & \xrightarrow{\bigoplus_{\beta} f_c} & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} L_c & \xrightarrow{\bigoplus_{\beta} g_c} & \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} M_c \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & N_a & \xrightarrow{f_a} & L_a & \xrightarrow{g_a} & M_a \rightarrow 0
\end{array}$$

Veamos ahora, a partir del diagrama que $(S_a^+ g)_a$ es sobreyectiva:

Para esto veremos primero que $(\varphi_\alpha)_\alpha : \bigoplus_{\beta: c \rightarrow a} N_c \rightarrow N_a$ es sobreyectiva:

Supongamos que no lo es. En ese caso, $N_a = \text{Im}(\varphi_\alpha)_\alpha \oplus V_a$ con V_a un subespacio no nulo. Pero, si así fuera, podría descomponer a N en dos representaciones P y V .

$$P_b = \begin{cases} N_b & b \neq a \\ \text{Im}(\varphi_\alpha)_\alpha & b = a \end{cases}$$

con las transformaciones lineales iguales a las de N

$$V_b = \begin{cases} 0 & b \neq a \\ V_a & b = a \end{cases}$$

con todas las transformaciones lineales cero, lo cual es absurdo ya que N es indescomponible.

Si aplicamos el lema de la serpiente a la segunda y tercera fila del diagrama obtenemos la sucesión exacta que necesitamos:

$$0 \rightarrow (S_a^+ N)_a = \text{Ker}(\varphi_\alpha)_\alpha \rightarrow (S_a^+ L)_a \rightarrow (S_a^+ M)_a \rightarrow \text{Coker}(\varphi_\alpha)_\alpha = 0$$

Con esto concluimos que $(S_a^+ g)_a$ es sobreyectiva.

Siguiendo con la demostración, aplicando reiteradas veces el functor de reflexión correspondiente, obtendremos que:

$$0 \rightarrow C^+ N \rightarrow C^+ L \rightarrow C^+ M \rightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Entonces C^+ induce un mapa $\tau : \text{Ext}^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}^1(C^+ M, C^+ N)$ con la inversa inducida por C^- (haciendo todo este procedimiento para C^-) y se tratará de un isomorfismo.

Consideremos M preproyectivo, o sea, $M \simeq C^{-s} P_i$ para algún $s \in N$ y algún $i \in Q_0$. Entonces, $\text{Ext}^1(C^- M, M) = \text{Ext}^1(C^{-(s+1)} P_i, C^{-s} P_i)$, que por la primer parte de este lema no es otra cosa que $\text{Ext}^1(C^- P_i, P_i)$.

A su vez, $\text{Ext}^1(C^- P_i, P_i) = \text{Ext}^1(S_1^- S_2^- \dots S_n^- S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^-(S(i)), S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^-(S(i)))$ por definición de P_i y C^- . Queda implícito en la prueba de la primer parte del lema que $\text{Ext}^1(S_a^+ M, S_a^+ N) \simeq \text{Ext}^1(M, N)$.

Usando esto tenemos que $\text{Ext}^1(C^- P_i, P_i) = \text{Ext}^1(S_i^- S_{i+1}^- \dots S_n^- S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i), S(i))$.

Observemos además que $S_i^- S_{i+1}^- \dots S_n^- S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^-$ es el functor C^- para una cierta enumeración admisible $i, i-1 \dots n, 1, 2 \dots i-1$ asociada a un cierto Q' que cumple $\bar{Q}' = \bar{Q}$. En definitiva, es suficiente probar que $Ext^1(C^- S(1), S(1)) \simeq K$ con 1 un pozo.

$$Ext^1(C^- S(1), S(1)) \simeq K:$$

Observemos que $C^- S(1)$ no tiene sumandos directos isomorfos a $S(1)$. Si los tuviera, como $C^- S(1)$ es indescomponible, se tendría que $C^- S(1) \simeq S(1)$. En particular se cumpliría que $cdim S(1) = dim S(1)$ y por lo tanto $S(1)$ sería simple regular homogéneo lo cual es absurdo ya que $S(1)$ es proyectivo. Podemos entonces usar el corolario (3.3.3) y obtenemos que $dim_k Ext^1(C^- S(1), S(1)) = (s_1 dim C^- S(1))_1 = (s_1 c^{-1} dim S(1))_1 = (s_2 \dots s_n dim S(1))_1 = 1$.

$$\text{En conclusión } Ext^1(C^- M, M) = Ext^1(C^- S(1), S(1)) \simeq K.$$

LEMA 3.3.5. *Sea E un KQ -módulo regular con ecuación η tal que el largo l de la órbita de $dim E$ bajo c es mayor o igual a dos.*

Entonces:

$$(i) \quad Ext^1(E_s, M) = 0 \text{ para todo } KQ\text{-módulo simple regular } M \text{ que cumple } M \neq E_s, E_{s+1}.$$

$$(ii) \quad Ext^1(M, E_s) = 0 \text{ para todo } KQ\text{-módulo simple regular } M \text{ que cumple } M \neq E_{s-1}, E_s.$$

Demostración: (i) Alcanza con probar que $Ext^1(E_0, M') = 0$ para M' simple regular con $M' \simeq C^{-s} M$ y $M' \neq E_0, E_1$ ya que por el lema anterior $Ext^1(E_0, C^{-s} M) \simeq Ext^1(C^s E_0, M)$.

Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} E_0 \rightarrow 0$$

Se cumple que $\eta L = \eta M' + \eta E_0$ ya que $dim L = dim M' + dim E_0$ y η es lineal.

Sabemos que $\eta M' = 0$ ya que $M' \neq E_0, E_1$ lo que implica que $\eta L = \eta E_0 > 0$. Por definición de ecuación $E_0 \simeq N$ con N un submódulo de L , o en otras palabras, $\exists h : E_0 \rightarrow L$ inyectiva. Si consideramos la función $g : L \rightarrow E_0$ que aparece en la sucesión exacta, $gh \in End(E_0)$ y al ser E_0 simple regular $gh = 0$ o gh es invertible (recordemos que dado un morfismo entre módulos regulares, su núcleo, conúcleo e imagen también son regulares).

Si $gh = 0$ se cumple que $E_0 \subset Kerg = M'$ y esto implicaría que $E_0 \simeq M'$ lo cual es absurdo al partir de $M' \neq E_0, E_1$. Por lo tanto, gh es invertible y la sucesión exacta de la que partimos escinde. De esto se deduce que $Ext^1(E_0, M') = Ext^1(E_s, M) = 0$. La parte (ii) se demuestra análogamente.

PROPOSICIÓN 3.3.6. *Sea E un KQ -módulo regular no homogéneo, indescomponible, \bar{Q} Euclideano, tal que $E_n = 0$ para una fuente n .*

Entonces, $End(E) \simeq K$, $Ext^1(E, E) = 0$ y $Ext^1(E, C^+E) \simeq K$.

Demostración: Sea \mathcal{M} la subcategoría plena formada por las representaciones de la forma $M' = (M'_i, \varphi_\alpha)$ con $M'_n = 0$. Entonces, $M = S_{n-1}^+ \dots S_2^+ S_1^+ E \in \mathcal{M}$ ya que E_n no se modifica con las reflexiones S_a^+ con $a = 1 \dots n-1$. Observemos que $C^+E = S_n^+ M$ y $M = (M_i, \psi_\alpha)$ es un KQ' -módulo con $Q' = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 Q$. En Q' , n es un pozo ya que dada $\alpha : n \rightarrow i$ será invertida por única vez en el paso i -ésimo σ_i . Por definición del functor de reflexión $S_n^+ M$ tendrá la siguiente forma:

$$S_n^+ M_b = \begin{cases} M_b & b \neq n \\ \bigoplus_{\alpha: c \rightarrow n} M_c & b = n \end{cases}$$

$$S_n^+ \psi_\alpha = \begin{cases} \psi_\alpha & t(\alpha) \neq n \\ \pi_{s(\alpha)} & t(\alpha) = n \end{cases}$$

Como $M_n = 0$ podemos ver a M como un KQ -módulo solamente invirtiendo las flechas que llegan a n que de todas formas van a tener asociada la transformación nula. Con $C^+E = S_n^+ M$ y M visto como KQ -módulo obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} C^+E \xrightarrow{\pi} \bigoplus S(n) \rightarrow 0$$

Aplicando el functor $Hom(E, \quad)$ obtenemos:

$$\dots \rightarrow Hom(E, S(n)) \rightarrow Ext^1(E, M) \rightarrow Ext^1(E, C^+E) \rightarrow Ext^1(E, \bigoplus S(n)) \rightarrow \dots$$

Por un lado, $Hom(E, S(n)) = 0$ ya que $E_n = 0$ y, a su vez, $Ext^1(E, \bigoplus S(n)) = 0$ al ser $\bigoplus S(n)$ inyectivo de lo que se deduce que $Ext^1(E, C^+E) \simeq Ext^1(E, M)$.

Como $E, M \in \mathcal{M}$, las podemos ver como representaciones asociadas al subcarcaj pleno de Q que se obtiene de restringir los vértices a $Q(n) = Q_0/\{n\}$, lo llamaremos Q'' .

Como M, E son representaciones indescomponibles, Q'' será conexo y si a cualquier diagrama euclideano le quitamos un vértice y sigue siendo conexo vamos a obtener un diagrama de Dynkin, o sea, Q'' es Dynkin.

Sea $C'^+ = S_{n-1}^+ \dots S_1^+$ el functor de Coxeter para Q'' , $M = C'^+ E$ y tanto M como E son preinyectivos como KQ'' -módulos (en el caso de diagramas de Dynkin todos los módulos son preinyectivos). Observemos que E es no proyectivo ya que si lo fuera $M = C'^+ E = 0$ y como $M_n = 0$, se cumple que $C^+E = 0$. El módulo E visto como KQ -módulo es regular y no puede ser proyectivo. Usando el lema (3.3.4) $Ext^1(E, M) \simeq Ext^1(E, C'^+ E) \simeq K$. Usando nuevamente el lema (3.3.4) $Ext^1(E, E) \simeq Ext^1(I_i, I_i) = 0$ por ser I_i inyectivo. Por último $End(E) = End(I_i) \simeq K$ por tratarse de un álgebra hereditaria.

3.4. Descripción de los módulos regulares indescomponibles

Como ya habíamos mencionado antes, si calculamos el carcaj de Auslander-Reiten del álgebra de caminos (siempre de dimensión finita) asociada a un carcaj Euclideo obtenemos tres componentes distintas. Dos de ellas contienen a los módulos preproyectivos y preinyectivos respectivamente. La tercer componente, que a su vez tendrá infinitas componentes conexas, tendrá a los indescomponibles regulares.

En esta sección veremos la estructura de los indescomponibles regulares a partir de los simples regulares.

OBSERVACIÓN 3.4.1. *Al calcular los simples regulares no homogéneos de un diagrama Euclideo Q con cierta orientación observamos que si podemos partir de t módulos distintos para ir aplicando en cada uno el functor de Coxeter y obtener todos los simples regulares no homogéneos existe alguna elección del E_0^h de forma que $E_0^h(n) = 0 \forall 0 \leq h \leq t$. Esta observación se utilizará para poder aplicar la proposición anterior en el siguiente teorema.*

TEOREMA 3.4.2. *Sea Q un carcaj tal que \bar{Q} es un diagrama euclideo. Entonces existe un número finito de representaciones simples regulares no homogéneas E^1, E^2, \dots, E^h tal que E_s^t con $1 \leq t \leq h$ y $0 \leq s \leq l_{t-1}$ siendo l_t el largo de la órbita de $\dim E^t$ bajo c forman una lista completa de todos los KQ -módulos simples regulares no homogéneos. Más aún, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^2 \times \dots \times \mathcal{R}^h \times \mathcal{H}$ de forma tal que los simples regulares en \mathcal{R}^t con $1 \leq t \leq h$ son $E_0^t, E_1^t, \dots, E_{l_t-1}^t$. Los módulos indescomponibles en \mathcal{R}^t tienen una serie de composición únicamente determinada de la forma:*

$$\begin{array}{c} E_{s-d}^t \\ \vdots \\ E_{s-1}^t \\ E_s^t \end{array}$$

para algún s y algún d .

Esta serie de composición está totalmente determinada por su zócalo regular y largo regular.

Demostración: La prueba de la primera parte del teorema que dice que E_s^t con $1 \leq t \leq h$ y $0 \leq s \leq l_{t-1}$ forma una lista completa de los módulos simples regulares no homogéneos ya la vimos anteriormente.

La segunda parte del teorema la probaremos por inducción. Si consideramos \mathcal{R}^t , la subcategoría de \mathcal{R} que contiene todos los módulos regulares con factores de composición en $\{E_0^t, E_1^t, \dots, E_{l_t-1}^t\}$ con $1 \leq t \leq h$. Como paso base de la inducción, todo módulo simple regular es homogéneo o pertenece a algún \mathcal{R}^t (si no es homogéneo el factor de composición es él mismo). Para el paso inductivo supongamos que todo indescomponible regular con largo de composición $l \geq 1$ es homogéneo o está en algún \mathcal{R}^t y tiene una única serie de composición como la descrita en el teorema.

Ahora, sea M un indescomponible regular no homogéneo de largo $(l+1)$. Como en el primer paso de la descomposición de Jordan-Holder pero restringiéndonos a los regulares, M tiene un submódulo indescomponible regular X tal que $M/X \simeq Y$ con Y simple regular. Sabemos que como M tiene largo de composición $l+1$, X tendrá largo de composición l . Usando la hipótesis inductiva X es de la forma:

$$\begin{array}{c} E_{s+1}^t \\ \vdots \\ E_{s+l-1}^t \\ E_{s+l}^t \end{array}$$

para $1 \leq t \leq h$, $0 \leq s \leq l_t - 1$.

Llamaremos $E_j = E_{s+j}^t$ con $j = 0, \dots, l$ para simplificar la notación.

Consideremos la sucesión exacta: $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ con X, M, Y los mencionados anteriormente.

Si calculamos $\dim_k \text{Ext}^1(Y, X)$ obtenemos que:
 $\dim_k \text{Ext}^1(Y, X) = \dim_k \text{Hom}(Y, X) - \mathcal{B}(Y, X) = \dim_k \text{Hom}(Y, X) - \sum_{j=1}^l \mathcal{B}(\dim Y, \dim E_j) =$
 $\dim_k \text{Hom}(Y, X) - \sum_{j=1}^l \dim_k \text{Hom}(Y, E_j) + \sum_{j=1}^l \dim_k \text{Ext}^1(Y, E_j).$

Distinguimos en los siguientes casos:

- (i) $Y \notin \mathcal{R}^t$
- (ii) $Y \in \mathcal{R}^t$

En el caso (i) $\text{Hom}(Y, X) = 0$ ya que si existiera $\alpha : Y \rightarrow X \neq 0$, $\text{Ker}(\alpha) = 0$ lo que implicaría que Y aparece en la serie de composición de X y nos encontramos en el caso en el que esto no ocurre. De la misma manera probamos que $\text{Hom}(Y, E_j) = 0$.

Por otro lado, $Ext^1(Y, E_j) = 0$ al ser $Y \neq E_j, E_{j-1}$. Sustituyendo en la expresión de $Ext^1(Y, X)$ vemos que $Ext^1(Y, X) = 0$ lo cual es absurdo ya que implicaría que

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} Y \rightarrow 0 \text{ escinde y } M \text{ es indescomponible.}$$

En el caso (ii) $Y \in \mathcal{R}^t$ y al ser Y simple regular, $Y \simeq E_i^t$ para algún $0 \leq i \leq l_t - 1$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que E_1, E_2, \dots, E_l son no isomorfos:

si hubieran módulos isomorfos entonces $l \geq l_t$ y aparecen módulos isomorfos a $E_0^t, E_1^t, \dots, E_{l_t-1}^t$. Tomemos como E_0^t aquel que cumple que $E_0^t(n) = 0$ que sabemos que existe. En este caso $\sum_{j=0}^{l_t-1} dim_k Ext^1(Y, E_j^t) = dim_k Hom(E_i^t, E_i^t) = dim_k Hom(E_0^t, E_0^t) = 1$. Por otro lado, $\sum_{j=0}^{l_t-1} dim_k Ext^1(Y, E_j^t) = dim_k Ext^1(E_i^t, E_i^t) + dim_k Ext^1(E_i^t, E_{i+1}^t) = dim_k Ext^1(E_0^t, E_0^t) + dim_k Ext^1(E_0^t, E_1^t) = 0 + 1 = 1$.

En conclusión, estos módulos que se repiten no aportan a la suma y por lo tanto se pueden despreciar.

Vamos a calcular ahora, en los distintos casos posibles, $Ext^1(Y, X)$ con la fórmula que obtuvimos anteriormente.

$$Ext^1(Y, X) = \begin{array}{l} 0 - 0 + 0 = 0 \quad Y \neq E_0, \dots, E_l \\ 0 - 1 + 1 = 0 \quad Y \simeq E_1, \dots, E_{l-1} \\ 1 - 1 + 0 = 0 \quad Y \simeq E_l, Y \neq E_0 \\ 0 - 0 + 1 = 1 \quad Y \neq E_l, Y \simeq E_0 \\ 1 - 1 + 1 = 1 \quad Y \simeq E_0, Y \simeq E_l \end{array}$$

En definitiva, $Ext^1(Y, X) \neq 0$ si y solamente si $Y \simeq E_0$ (en ese caso además $Ext^1(Y, X) = 1$).

Podemos tomar la extensión más natural:

$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} Y \rightarrow 0$. Como sabemos que es la única a menos de isomorfismos podemos asegurar que M tiene la serie de composición que queríamos:

$$\begin{array}{c} E_0^t \\ \vdots \\ E_{l-1}^t \\ E_l^t \end{array}$$

TEOREMA 3.4.3. *Sea \bar{Q} un diagrama Euclideo. La categoría de los KQ -módulos homogéneos \mathcal{H} se puede escribir de la forma: $\mathcal{H} = \prod_{H, H} \mathcal{U}_H$ recorriendo H las clases de isomorfismo de los simples homogéneos. Cada módulo indescomponible de \mathcal{H} tiene una única serie de composición de la forma:*

$$\begin{array}{c} H \\ H \\ \vdots \\ H \end{array}$$

Esta determinada por su zócalo regular y su largo regular.

Demostración: Sea \mathcal{U}_H la subcategoría de \mathcal{H} que consiste en todos los KQ-módulos homogéneos con factores de composición isomorfos a H , para un H fijo simple homogéneo.

En este caso, al igual que en el teorema anterior, el razonamiento será por inducción. Claramente, todo simple regular homogéneo va a estar en algún \mathcal{U}_H .

Supongamos ahora, que todo módulo homogéneo indescomponible de largo de composición $l \geq 1$ es de la forma:

$$\begin{array}{c} H \\ H \\ \vdots \\ H \end{array}$$

Sea M , un KQ-Módulo indescomponible de largo $l + 1$. Existe una sucesión exacta de la forma: $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$, en $Ext^1(Y, X)$ con Y simple regular y X (por hipótesis inductiva) con serie de composición:

$$\begin{array}{c} H \\ H \\ \vdots \\ H \end{array}$$

con H simple regular.

Observemos que $dim_k Hom^1(Y, X) = dim_k Ext^1(Y, X)$:

Tenemos que $dim X = \sum_{j=1}^l dim H = av$ para algún $a \in N$ y $dim Y = bv$ para algún $b \in N$. Si calculamos $\mathcal{B}(Y, X) = dim_k Hom^1(Y, X) - dim_k Ext^1(Y, X)$ obtenemos que $\mathcal{B}(Y, X) = \mathcal{B}(bv, av) = ab\mathcal{B}(v, v) = abq_Q(v) = 0$.

$$\text{En definitiva, } dim_k Ext^1(Y, X) = dim_k Hom^1(Y, X) = \begin{cases} 1 & Y \simeq H \\ 0 & Y \neq H \end{cases}$$

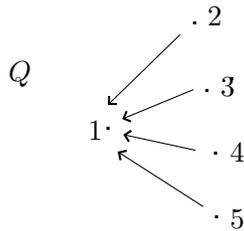
Como M es indescomponible, $Ext^1(Y, X) \neq 0$ y por lo tanto $Y \simeq H$ lo que nos lleva a la serie de composición de M buscada:

$$\begin{array}{c} H \\ H \\ \vdots \\ H \\ H \end{array}$$

con H simple regular.

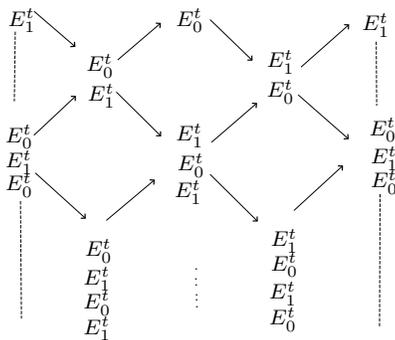
OBSERVACIÓN 3.4.4. *Consideremos el siguiente carcaj:*

Ejemplo



A través del teorema 3.4.2 sabemos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^2 \times \dots \mathcal{R}^h \times \mathcal{H}$ Ya sabemos cuales son los simples regulares no homogéneos y la estructura de los indescomponibles no homogéneos a partir de éstos. Los módulos indescomponibles regulares en \mathcal{R}^t , en el carcaj de Auslander-Reiten, se ubican en una componente a la que llamaremos Regular y está formada por tubos que tienen la siguiente forma:

Siendo E_0^t y E_1^t los simples regulares no homogéneos de \mathcal{R}^t



Apéndice

DEFINICIÓN .0.5. (Morfismo radical)

Sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de representaciones, decimos que $f \in \text{rad}_Q(M, M')$ si viendo f como una matriz de morfismos indescomponibles, ninguna entrada es un isomorfismo. En particular, si M y M' son indescomponibles $\text{rad}_Q(M, M')$ son los morfismos no invertibles entre M y M' .

Dado $f : M \rightarrow M'$ podemos definir también $\text{rad}_Q^2(M, M')$ que será $\text{rad}_Q^2(M, M') = \sum_N \text{rad}_Q(N, M')\text{rad}_Q(M, N)$.

DEFINICIÓN .0.6. (Morfismo irreducible)

Un morfismo $f : M \rightarrow M'$ es irreducible si $f \in \text{rad}_Q(M, M')$ pero f no está en $\text{rad}_Q^2(M, M')$.

DEFINICIÓN .0.7. (Carcaj de Auslander-Reiten) Dada $A \simeq KQ/\mathcal{I}$ definimos un nuevo carcaj Γ_Q llamado carcaj de Auslander-Reiten de la siguiente forma:

$(\Gamma_Q)_0$ son las clases de isomorfismo de los módulos indescomponibles de KQ/\mathcal{I} .

$(\Gamma_Q)_1$ son los morfismos irreducibles entre los módulos indescomponibles.

OBSERVACIÓN .0.8. Si el carcaj de Auslander-Reiten es finito, A será de tipo de representación finita.

Bibliografía

- [1] Vlastimil Dlab, Claus Michael Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society number 173, (1976).
- [2] Richard S. Pierce, *Asociative Algebras*, Board, (1980).
- [3] Ibrahim Assem, *Algèbres et modules*, Masson, (1997).
- [4] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, (2006).