TRABAJO MONOGRÁFICO

Problemas de Parada Óptima

Federico Dalmao Artigas

Orientador: Ernesto Mordecki - Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

20/2/2006

Resumen

En este trabajo se presentan varios ejemplos de problemas de parada óptima, es decir, de optimización de funcionales de procesos estocásticos. La mayoría de los ejemplos están enmarcados en la valuación de opciones en un mercado regido por el modelo de Black - Scholes. Los procesos estocásticos considerados están definidos a partir del proceso de Wiener.

Los primeros ejemplos son resueltos con herramientas elementales, como la verificación directa de la condición de martingala (y de súper martingala) y la desigualdad de Jensen. A continuación, se introduce en las demostraciones el cálculo estocástico de Itô. Finalmente, se realiza un cambio de medida, basado en el teorema de Girsanov, para reducir un problema bidimensional a uno unidimensional

Abstract

We show several examples on optimal stopping problems, namely, on optimization of random processes´functionals. Most examples are framed in Black - Scholes model of a financial market. Stochastic processes are constructed from Wiener process.

Proving firsts examples involve only elementary tools like the straigthforward verification of martingale (super martingale) condition and Jensen‘s inequality. Following proofs rely on Itô‘s stochastic calculus. Finally, based on Girsanov‘s theorem we change measure and reduce the problem from two dimensions to one.

Palabras clave: Desigualdad de Jensen. Proceso de Wiener. Fórmula de Itô. Parada óptima. Opciones rusas y americanas. Modelo de Black - Scholes. Teorema de Girsanov.

Key words: Jensen´s inequality. Wiener´s process. Itô´s Formula. Optmal stopping. Russians and americans options. Black - Scholes model. Girsanov´s theorem.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Al observar un fenómeno a medida que transcurre el tiempo, naturalmente surge la pregunta de en qué momento este fenómeno alcanzará sus valores extremos. Además, surge el problema de detener dicho fenómeno al alcanzar estos niveles, pero en general, para esto no se cuenta con más información que los datos obtenidos por la observación de su evolución, por lo cual, la decisión de cuando detenerlo tiene que tomarse sólo a partir de los valores pasados.

Es más, no se puede esperar que siempre se pueda detener un fenómeno en sus niveles extremos, pero es razonable poder hacerlo en promedio.

Para ser más precisos, consideremos la siguiente situación, un mercado donde hay dos activos básicos, a saber, los bonos y las acciones. La evolución del precio de los bonos no está sujeta al azar, es decir, no hay ninguna incertidumbre acerca de su valor en un momento dado. Sin embargo, el precio de las acciones en un instante futuro no es previsible, por lo cual se puede suponer que evoluciona de forma aleatoria.

En este mercado se introduce un activo derivado, llamado opción, que es un compromiso entre dos partes en el que una de ellas, el poseedor, adquiere el derecho de comprar (o vender) a precio acordado, en el momento de firmar el compromiso, una unidad de la acción cierto tiempo después de firmado el contrato.

En el caso que nos interesa, el poseedor puede elegir a su conveniencia cualquier momento posterior a la firma del compromiso para realizar la compra, aunque usualmente el continuar observando la evolución de los precios tiene un costo.

Naturalmente, no se conoce la evolución futura de los precios, y por lo tanto la única información disponible para elegir el momento para comprar son los precios de los bonos y de las acciones desde el momento inicial (en que se firmó el compromiso) al presente.

El problema consiste en hallar el precio justo de una opción, que por la Teoría de valuación de opciones es el supremo (calculado sobre todas las estrategias admisibles de elección del momento de compra) del promedio de la razón entre el precio acordado y el precio de los bonos. Una estrategia es admisible si está basada únicamente en los datos observados. Asimismo, se busca (si existe) la estrategia en la que se obtiene dicho valor.

Para describir esta situación, tomamos el siguiente modelo matemático. En primer lugar, consideramos un conjunto T (que usualmente es un intervalo de los reales) que representa el tiempo; luego, para representar el precio de los bonos tomamos una función del tiempo. Por otra parte, consideramos un proceso estocástico indexado por T para describir el precio de las acciones. Finalmente, el pago de la opción es indicado por una función del precio de las acciones (y eventualmente del tiempo).

En 1900, Bachelier propuso para las fluctuaciones del precio de las acciones un modelo "lineal", en el cual la componente aleatoria del precio está descrita por un proceso de Wiener estándar. Es decir, el precio de las acciones, S_t, responde a la fórmula

$$S_t = x - \mu\, t + \sigma W_t,\ t \geq 0$$

donde t es el tiempo, x, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener estándar.

En este modelo está basado el primer ejemplo.

En 1973, Black y Scholes propusieron el movimiento browniano geométrico para modelar estas fluctuaciones, que al igual que el modelo de Bachelier utiliza el proceso de Wiener (o movimiento browniano) para describir la componente aleatoria de los precios. Aquí, el precio de las acciones viene dado por

$$S_t = x e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t},\ t \geq 0$$

donde t, x, μ, σ y $\{W_t\}$ son como arriba.

Este modelo es ampliamente aceptado hoy en día y en él están basados (salvo el primero) todos los ejemplos de la monografía.

El problema consiste en hallar el supremo del promedio del cociente entre los precios de acciones y bonos y el tiempo en que éste se alcanza.

Dicho tiempo en general no es fijo, sino que depende de los valores observados. Por estar determinado a partir de los valores pasados de los precios, el tiempo elegido para comprar será un tiempo de parada.

El objetivo de esta monografía es mostrar algunos de los métodos utilizados frecuentemente para resolver este tipo de problemas, así como las herramientas involucradas.

En 1963 Dynkin caracterizó la solución al problema de parada óptima para procesos markovianos, probando que el supremo buscado es la menor mayorante superarmónica de la función de pago y que el tiempo en el que se alcanza dicho valor es el primer tiempo de arribo a la región de detención de las observaciones.

A partir de esta condición y de otras condiciones *ad hoc* (como el conocido *principio de pegado suave* propuesto por Kolmogorov), usualmente se construye una solución tentativa y luego se verifica que efectivamente lo sea.

La complejidad de los recursos usados para las demostraciones va creciendo desde la integración directa y la desigualdad de Jensen al cálculo estocástico de Itô y a un cambio de medida basado en el Teorema de Girsanov.

Las referencias se dan en la secuela.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Definiciones básicas

1 Trabajaremos en un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}= \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}, P\right)$ en donde:

a Ω es un conjunto no vacío.

b $\mathcal{F}$ es una *σ-álgebra* (de sucesos de Ω), es decir, una familia de subconjuntos de Ω tal que: $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$ y si $A_j \in \mathcal{F};\ j = 1, 2, \cdots, n, \cdots \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

c $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ es una *filtración*, es decir, una familia creciente de sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$, i.e.: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, siempre que $s < t$. Dado $\Omega' \subset \Omega$ llamamos *σ-álgebra generada por* Ω' a $\sigma(\Omega') = \bigcap\limits_{\Omega'\subset F} F$, con F σ-álgebra en Ω. En $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ usaremos siempre la *σ-álgebra de Borel* $\mathbf{B_n}$ que es generada por los intervalos abiertos.

d $\mathbf{P}$ es una *medida de probabilidad* en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, o sea, , una función definida sobre $\mathcal{F}$ tal que $\mathbf{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$; $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; si $A_j \in \mathcal{F}; j = 1, 2, \cdots, A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j \Longrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j)$.

A $(\Omega, \mathcal{F})$ le llamamos *espacio de medida* y a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ le llamamos *espacio de probabilidad.*

Notación 1 *Si* A_j; $j = 1, 2, \cdots,$ *con* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$ *pondremos* $\biguplus\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ *y omitiremos* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$.

Una familia de conjuntos $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ se llama una *completación* de $\mathcal{F}$ con respecto a la medida (de probabilidad) $\mathbf{P}$ si $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ contiene todos los conjuntos $A \in \Omega$ para los que existen $A_1,\ A_2 \in \mathcal{F}$ tales que $A_1 \subset A \subset A_2$ y $\mathbf{P}\left(A_2 - A_1\right) = 0$. Se puede ver que $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ es una σ - álgebra y que $\mathbf{P}$ se extiende de forma única a $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$. El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se dice *completo* si $\mathcal{F}^{\mathbf{P}}$ coincide con $\mathcal{F}$. De ahora en adelante supondremos que todos los espacios de probabilidad son completos.

Un espacio de probabilidad filtrado y completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ es una *base estocástica* si la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\,\geq\,0}$ verifica las condiciones (usuales):

1. Continuidad por la derecha: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Siendo $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap\limits_{u\,>\,t} \mathcal{F}_u$.

2. Completitud: $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^{\mathbf{P}}$.

2 Una *variable aleatoria* ξ en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ tal que $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ para todo $A \in \mathbf{B_n}$.

La *esperanza matemática* de la variable aleatoria ξ es $\mathbf{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi dP$ y su *varianza* es $\mathbf{Var}\xi = \mathbf{E}\left(\xi - \mathbf{E}\xi\right)^2$.

Dos conjuntos $A,\ B \in \mathcal{F}$ son *independientes* si $\mathbf{P}\left(A \cap B\right) = \mathbf{P}\left(A\right)\mathbf{P}\left(B\right)$.

Las familias $H_1,\ H_2, \cdots \subset \mathcal{F}$ son *independientes* si

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \prod_{j\,=\,1}^{k} \mathbf{P}\left(A_{i_j}\right)$$

para todos $A_{i_j} \in H_{i_j}$, $j = 1, 2, \cdots, k$; para todo k.

Las variables aleatorias $X_1,\ X_2, \cdots$ son *independientes* si las σ - álgebras $H_i = \sigma\left\{X^{-1}(B)\ :\ B \in \mathbf{B_n}\right\}$ lo son.

3 Un *proceso estocástico,* $X = \{X_t\}_{t\,\in\,T}$, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es una familia de variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y con codominio $(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbf{B_n})$ indexada en T, esto es, para cada t en T tenemos una variable aleatoria $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbf{B_n})$.

Análogamente, podemos ver el proceso X como una función $X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. Si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función $X(., \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ que llamamos una trayectoria del proceso.

Si el conjunto índice T coincide con los esnteros (o algún subconjunto de éstos) el proceso se dice de tiempo *discreto.* En cambio, si el conjunto índice T coincide con un intervalo de $\mathbb{R}$ (no necesariamente acotado) el proceso se dice de tiempo *continuo.*

Decimos que dos procesos estocásticos, $X = \{X_t\}_{t\,\geq\,0}$ e $Y = \{Y_t\}_{t\,\geq\,0}$ definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ son (*estocásticamente*) *equivalentes* si $\mathbf{P}\left(X_t = Y_t\right) = 1$ para todo $t \geq 0$. Todas las definiciones siguientes son módulo equivalencia estocástica.

Decimos que el proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\in T}$ es *adaptado* a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ si X_t es $\mathcal{F}_t -$ medible, o sea, si $X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t$ para todo $A \in \mathbf{B_n}$ y todo $t \in T$.

El proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\in T}$ es una *martingala* (respectivamente *súper martingala, sub martingala*) respecto de $\mathbb{F}$ (o una $\mathbb{F}$ - martingala, respectivamente súper, sub) si:

1. $\mathbf{E}\,|X_t| < \infty$, para todo $t \in T$.

2. X es $\mathbb{F}$**-** adaptado.

3. $\mathbf{E}\,(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ c.s., para todo $s < t$ (respectivamente $\leq$, $\geq$).

Aquí $\mathbf{E}\,(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ denota la *esperanza condicional de* X_t a $\mathcal{F}_s$. Recordar que dadas una σ - álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y una variable aleatoria Y, la esperanza condicional de Y a $\mathcal{G}$ es

$$\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) = \frac{d\mu}{d\mathbf{P}}$$

con $\mu(A) = \mathbf{E}\,Y\,\mathbb{I}_A$, para todo $A \in \mathcal{G}$, donde $\mathbb{I}_A$ es la *función indicatriz* (o característica) de A, esto es $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

La esperanza condicional, $\mathbf{E}\ (Y \mid \mathcal{G})$, queda caracterizada por las dos siguientes condiciones:

$$\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) \text{ es } \mathcal{G} - \text{ medible y si } A \in \mathcal{G} : \int_A Y\,d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G})\,d\mathbf{P}$$

Obsevar que:

1. $\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) \geq 0$ c.s., si $Y \geq 0$.

2. $\mathbf{E}\,(1 \mid \mathcal{G}) = 1$ c.s..

3. $\mathbf{E}\,(Y + Z \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) + \mathbf{E}\,(Z \mid \mathcal{G})$ c.s. (si $\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) + \mathbf{E}\,(Z \mid \mathcal{G})$ está definida).

4. $\mathbf{E}\,(Y\,Z \mid \mathcal{G}) = Y\mathbf{E}\,(Z \mid \mathcal{G})$ c.s. si Y es $\mathcal{G}$ - medible.

5. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ entonces $\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{H}) = \mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H})$ c.s..

6. Si Y es independiente de $\mathcal{G}$ (es decir, si Y es independiente de $\mathbb{I}_A$ para todo $A \in \mathcal{G}$) entonces $\mathbf{E}\,(Y \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\,Y$ c.s..

4 Sea $T = [0, \infty)$. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{\infty\}$ es un *tiempo de parada* respecto de $\mathbb{F}$ (o un $\mathbb{F}-$ tiempo de parada) si:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ para todo } t \in T.$$

Observación 2 *Algunos autores usan en este caso el término tiempo de Markov, dejando el nombre tiempo de parada para el caso finito, $\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$.*

Para todo $t \in T :\ \tau \equiv t$ es un tiempo de parada.

Si $X = \{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico y $B \in \mathbf{B_n}$, definiendo $\tau_B = \inf\{t \in T :\ X_t \in B\}$ se obtiene un tiempo de parada.

Si τ_1, τ_2 son tiempos de parada, entonces $\tau_1 \wedge \tau_2$ y $\tau_1 \vee \tau_2$ también lo son.

Si $X = \{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico $\mathbb{F}-$ adaptado y τ es un $\mathbb{F}-$tiempo de parada, definimos el *proceso parado* $X^\tau = \{X_t^\tau\}_{t \in T}$ mediante:

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$$

5 Un proceso $\mathbb{F}-$adaptado, $X = \{X_t\}_{t \in T}$, es una *martingala local* si existe una sucesión $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de tiempos de parada tal que $\tau_k \leq \tau_{k+1}$ (**P**-c.s.), $\tau_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty$ (**P**-c.s.) y para cada $k \in \mathbb{N}$ el proceso parado X^{τ_k} es una $\mathbb{F}$ - martingala.

2.2 Resultados básicos

1 Llamamos *límite inferior* de la sucesión $A_1, A_2, \dots \subset \mathcal{F}$ al conjunto

$$\begin{aligned}\liminf A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{\omega : \omega \text{ pertenece a todos los } A_n \text{ salvo a una cantidad finita}\}\end{aligned}$$

y *límite superior a:*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega : \omega \text{ pertenece a infinitos } A_n\}$$

Lema 3 (Borel Cantelli) *Consideremos la sucesión* $A_1,\, A_2,\, \cdots \subset \mathcal{F}$.

1. *Si* $\sum \mathbf{P}\,(A_n) < \infty$, *entonces:* $\mathbf{P}\,(\limsup A_n) = 0$.
2. *Si* $\sum \mathbf{P}\,(A_n) = \infty$ y $A_1,\, A_2,\, \cdots$ *son independientes entonces:*

$$\mathbf{P}\,(\limsup A_n) = 1$$

2 Dado Ω, una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es un *álgebra* si: $\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}$ y cada vez que $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B$ y $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Una función de conjunto μ_0 en $(\Omega, \mathcal{A})$ es una *premedida* si $\mu_0\,(\varnothing) = 0$ y $\mu_0\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\,(A_k)$ cada vez que $\biguplus_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Una medida (o premedida) μ en $(\Omega, \mathcal{A})$ se dice $\sigma -$ *finita* si Ω se puede escribir como $\Omega = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$, con $\mu\,(A_n) < \infty$, para todo n.

Teorema 4 (Carathèodory) *Sean* Ω *un conjunto,* $\mathcal{A}$ *un álgebra en* Ω *y* $\mathcal{B} = \sigma\,(\mathcal{A})$ *la* $\sigma -$ *álgebra generada por* $\mathcal{A}$. *Sea* μ_0 *una premedida* $\sigma -$ *finita en* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Entonces, existe una única medida* μ *en* $(\Omega, \mathcal{B})$ *que extiende a* μ_0, *es decir:*

$$\mu\,(A) = \mu_0\,(A)\,, \ \textit{para todo}\ A \in \mathcal{A}$$

3 Decimos que $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,I intervalo, es *convexa* si para todo $x \in I$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\phi\,(y) \geq \phi\,(x) + \lambda\,(y - x)$, para todo $y \in I$.

Teorema 5 (Desigualdad de Jensen) *Sean* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa,* $\mathcal{G}$ *una sub* σ *- ágebra de* $\mathcal{F}$ *y* X *una variable aleatoria integrable (*$\mathbf{E}\,|X| < \infty$, *en este caso decimos:* $X \in \mathbf{L}^1$*) y tal que* $Y = \phi \circ X \in \mathbf{L}^1$. *Entonces:*

$$\phi\,(\,\mathbf{E}\,(X \mid \mathcal{G}))\ \leq \mathbf{E}\,(\phi\,(X) \mid \mathcal{G}) \quad c.s.$$

4

Teorema 6 (Teorema del muestreo opcional de Doob) *Sea* $X = \{X_t\}$ *una* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *- martingala (respectivamente súper, sub). Sea* τ *un* $\mathbb{F}$ *- tiempo de parada tal que* $0 \leq \tau \leq N$, *para todo* $\omega \in \Omega$. *Entonces:*

$$\mathbf{E}\,X_N = \mathbf{E}\,X_\tau = \mathbf{E}\,X_0 \quad \textit{(respectivamente} \leq, \geq \textit{)}$$

2.3 Proceso de Wiener

1 El proceso de Wiener (o movimiento browniano) es uno de los procesos estocásticos más importantes en la Teoría de la Probabilidad y con mayor cantidad de aplicaciones. Daremos a continuación su definición y enunciaremos algunas de sus principales propiedades.

El proceso $W = \{W_t\}_{t \in [0,\infty)}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un *proceso de Wiener* (estándar) si:

1. $W_0 = 0$ ($\mathbf{P}$ - c.s.).
2. W es un proceso con incrementos estacionarios e independientes. Esto es, las variables $W_t - W_s$ y W_{t-s} tienen la misma distribución, normal con media cero y varianza $|t-s|$ para todos $t > s$, y la variable $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^W = \sigma\{W_u : u \leq s\}$ para todos $t, s : t > s$.
3. Para casi todo $\omega \in \Omega$ las funciones (trayectorias) $W_t = W_t(\omega)$ son continuas para todo t.

La existencia de dichos procesos (en espacios suficientemente ricos) se puede establecer a través del Teorema de extensión de Kolmogorov.

Definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un proceso de Wiener $W = \{W_t\}_{t \in [0,\infty)}$, resulta que la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t^0\}_{t \geq 0}$, donde para cada $t \geq 0 : \mathcal{F}_t^0$ es la completación de $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s : s \leq t\}$, es continua por la derecha. Entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ es una base estocástica (ver página 87 de [**10**]) y se mantiene la independencia de los incrementos. Por lo tanto, supondremos que los procesos de Wiener están definidos sobre bases estocásticas.

Algunas de las propiedades del proceso de Wiener son:

1. Las trayectorias tienen **variación** total **no acotada** c.s. en todo intervalo, o sea, $V(W, [a,b]) = \infty$ c.s..
2. **Principio de reflexión:** Sean $a > 0$, $W = \{W_t\}$ un proceso de Wiener estándar y $M_T = \max_{0 \leq t \leq T} W_t$. Entonces $\mathbf{P}(M_T > a) = 2\,\mathbf{P}(W_T > a)$.

2 Dado un proceso de Wiener $W = \{W_t\}$, introducimos en este numeral las integrales estocásticas de la forma $\int_a^b f(t,\omega)\, dW_t$ para ciertas clases de funciones aleatorias. Como las trayectorias de W son de variación no acotada en todo intervalo esta integral no puede definirse como una integral de Lebesgue en cada trayectoria.

Decimos que una función medible (respecto de dos variables (t, ω)) es *independiente del futuro* con respecto de $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ si es $\{\mathcal{F}_t\}$ - adaptada. De- cimos que la función independiente del futuro $f = f(t, \omega)$ es de clase $\mathcal{P}_T$ si $\mathbf{P}\left(\int_0^T f^{\,2}(t, \omega)\, dt < \infty\right) = 1$. Decimos que la función independiente del futuro $f = f(t, \omega)$ es de clase $\mathcal{M}_T$ si $\mathbf{E}\int_0^T f^{\,2}(t, \omega)\, dt < \infty$.

Al igual que en la teoría de integración convencional, se define primero la integral sobre una clase sencilla pero suficientemente rica de funciones. En este sentido, decimos que una función $\phi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ es *simple* si existen una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ de $[0, T]$ y variables aleatorias $\alpha, \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ con α $\mathcal{F}_0$ - medible y α_i $\mathcal{F}_{t_i}$ - medibles, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, tales que:

$$\phi(t, \omega) = \alpha(\omega)\, \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\omega)\, \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

Para la función simple $\phi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ se define, para $0 \le t \le T$, la *integral estocástica* por:

$$I_t(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t}\right)$$

que también denotamos por $\int_0^t \phi(t, \omega)\, dW_t$.

Observar que:

1. $I_t(a\phi_1 + b\phi_2) = aI_t(\phi_1) + bI_t(\phi_2)$, siendo a, b constantes.
2. $\int_0^t \phi dW_t = \int_0^u \phi dW_t + \int_u^t \phi dW_t$.
3. $I_t(\phi)$ es continua en t.
4. $\mathbf{E}(I_t(\phi) \mid \mathcal{F}_s) = I_s(\phi)$. En particular: $\mathbf{E}(I_t(\phi)) = 0$.
5. $\mathbf{E}\left(\int_0^t \phi_1 dW_s\right)\left(\int_0^t \phi_2 dW_s\right) = \mathbf{E}\int_0^t \phi_1\phi_2 ds$

Definimos ahora la *integral estocástica* para $f \in \mathcal{M}_T$, partiendo de funciones simples y del siguiente lema:

Lema 7 *Si $f \in \mathcal{M}_T$, existe una sucesión de funciones simples f_n, $n = 1, 2, \cdots$ tal que $\mathbf{E}\int_0^T (f(t, \omega) - f_n(t, \omega))^2\, dt \underset{n \to \infty}{\to} 0$*

Luego si $f \in \mathcal{M}_T$ y si f_n son funciones simples tales que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\int_0^T (f(t, \omega) - f_n(t, \omega))^2\, dt = 0$$

entonces (por la propiedad **5**)

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\left[I_T\ (f_n) - I_T\ (f_m)\right]^2 = \lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T \left[f_n - f_m\right]^2 dt = 0$$

Por lo tanto la sucesión $\{I_T\ (f_n)\}$ es de Cauchy en el sentido de la convergencia en media cuadrática y entonces converge a algún límite (porque $\mathbf{L}^2$ es completo) que denotamos por $I_T\ (f)$ o por $\int_0^T f\ (t,\omega)\ dW_t$. Es fácil ver que $I_T\ (f)$ está bien definido. Para $0 \leq t \leq T$, ponemos $I_t\ (f) = I_T\ \left(f\ \mathbb{I}_{[0,t]}\right)$.

Las propiedades básicas de la integral estocástica para $f \in \mathcal{M}_T$ son:

1. $I_t\ (af_1 + bf_2) = aI_t\ (f_1) + bI_t\ (f_2)$, siendo a, b constantes.
2. $\int_0^t f dW_t = \int_0^u f dW_s + \int_u^t f dW_s$.
3. $I_t\ (f)$ es continua en t con $0 \leq t \leq T$.
4. $\{I_t\ (f)\}_{0\leq t\leq T}$ es martingala de cuadrado integrable.

Análogamente se construye la integral estocástica para $f \in \mathcal{P}_T$, aunque en este caso tenemos, apenas, que el proceso $\{I_t\ (f)\}_{0\leq t\leq T}$ es martingala local (en general no es martingala).

Observar que todo lo anterior vale para $T = \infty$. También es posible definir para un tiempo de parada $\tau \leq T : I_\tau\ (f)$ por $I_\tau\ (f) = I_T\ \left(f\ \mathbb{I}_{\{t\leq\tau\}}\right)$.

3 Procesos de Itô y Fórmula de Itô.

Sea $W = \{W_t\}$ un proceso de Wiener definido en una base estocástica $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P}\right)$. Decimos que el proceso continuo $X = \{X_t\}$ es un *proceso de Itô* si existen procesos $a = \{a_t\}$ y $b = \{b_t\}$ independientes del futuro tales que $\mathbf{P}\left(\int_0^T |a|\ dt < \infty\right) = \mathbf{P}\left(\int_0^T b^2 dt < \infty\right) = 1$ y c.s. para todo t se tiene

$$X_t = X_0 + \int_0^t a\ (s,\omega)\ ds + \int_0^t b\ (s,\omega)\ dW_s$$

siendo la primer integral una integral de Lebesgue, para cada $\omega \in \Omega$, y la segunda una integral estocástica como definimos en el numeral anterior.

Para abreviar decimos que X tiene *diferencial* dado por (o que satisface la ecuación diferencial)

$$dX_t = a\ (t,\omega)\ dt + b\ (t,\omega)\ dW_t$$

Teorema 8 (Fórmula de Itô) ***a)*** *Sea la función* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *continua con derivadas* $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ *y* $f_{xx}(t,x)$ *continuas. Si el proceso* X *tiene diferencial dado por* $dX_t=a(t,\omega)\,dt+b(t,\omega)\,dW_t$ *entonces el proceso* $f(t,\,X_t)$ *también tiene diferencial y*

$$\begin{aligned} df(t,\,X_t)=&\left[f_t(t,\,X_t)+f_x(t,\,X_t)\,a(t,\omega)+\frac{1}{2}f_{xx}(t,\,X_t)\,b^2(t,\omega)\right]dt\\ &+f_x(t,\,X_t)\,b(t,\omega)\,dW_t\end{aligned}$$

b) *Sea* X *un proceso vectorial,* $X_t=(X_1(t),\cdots,X_m(t))$*, con diferencial* $dX_t=a(t,\omega)\,dt+b(t,\omega)\,dW_t$ *donde* $W=\{W_t\}, W_t=(W_1(t),\cdots,W_m(t))$ *es un proceso de Wiener* m *dimensional (*W_i *es un proceso de Wiener para* $1\leq i\leq m$ *y son independientes), los procesos* $a(t,\omega)=(a_1(t,\omega),\cdots,a_m(t,\omega))$ *y la matriz* $b(t,\omega)=((b_{ij}))$ $i,j=1,\cdots,m$ *consisten de procesos independientes del futuro tales que*

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T|a_i|\,dt<\infty\right)=\mathbf{P}\left(\int_0^T b_{i\,j}^2dt<\infty\right)=1$$

para todo i,j. *Si la función* $f(t,x_1,\cdots,x_m)$ *es continua con derivadas parciales* $f_t(t,x_1,\cdots,x_m)$, $f_{x_i}(t,x_1,\cdots,x_m)$ *y* $f_{x_i\,x_j}(t,x_1,\cdots,x_m)$ *continuas, entonces el proceso* $f(t,X_1,\cdots,X_m)$ *tiene diferencial y:*

$$\begin{aligned} &df(t,X_1(t),\cdots,X_m(t))=\\ &=\left[f_t(t,X_1,\cdots,X_m)+\sum_{i=1}^m f_{x_i}(t,X_1,\cdots,X_m)\,a_i(t,\omega)+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^m f_{x_i\,x_j}(t,X_1,\cdots,X_m)\sum_{k=1}^m b_{i\,k}(t,\omega)\,b_{j\,k}(t,\omega)\right]dt+\\ &+\sum_{i,\,j=1}^m f_{x_i}(t,X_1,\cdots,X_m)\,b_{i\,j}^1(t,\omega)\,dW_t\end{aligned}$$

Para el proceso de Itô X con diferencial

$$dX_t=a(t,\omega)\ dt+b(t,\omega)\ dW_t$$

que verifica

$$\begin{aligned} a(t,\omega)&=a(t,X_t(\omega))\\ b(t,\omega)&=b(t,X_t(\omega))\end{aligned}$$

definimos el *operador (o generador) infinitesimal* que para una función $f\in C^2$ vale:

$$L_X\ (f)=\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\tag{1}$$

Luego, la fórmula de Itô se escribe:

$$df\,(t,\, X_t) = L_X\,(f)\,(t,\, X_t)\,dt + f_x\,(t,\, X_t)\,b\,(t, X_t)\,dW_t$$

2.4 Problema de la parada óptima y opciones

2.4.1 Problema de la parada óptima

Dados:

1. Un proceso de Itô en $\mathbb{R}$ con diferencial $dX_t = \mu\ (t, X_t)\,dt + \sigma\ (t, X_t)\,dW_t\ (t \geq 0)$ donde $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener estándar y $X_0 = x,\ x \in \mathbb{R}$.
2. Una función Borel medible, $G : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, llamada *función de pago* (o *premio*).
3. La clase $\mathcal{M} = \{\tau : \Omega \to [0, \infty]\ \text{ tal que } \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t \geq 0\}$

El problema de parada óptima consiste en encontrar una función V, llamada *valor* (del problema), y un tiempo de parada τ^*, llamado *tiempo de parada óptimo*, tales que:

$$V\,(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}\,G\,(X_\tau) = \mathbf{E}\,G\,(X_{\tau^*}) \tag{2}$$

Donde se asume que:

$$G\,(X_\tau)\ \mathbb{I}_{\{\tau = \infty\}} = \limsup_{t \to \infty}\ G\,(X_t) \tag{3}$$

Es decir, que a partir de lo observado en el pasado (esto es, para cada momento $t : \{X_s : s \leq t\}$) queremos hallar una estrategia (representada por τ^*) para detener el proceso X de forma que, en promedio, el valor de $G\,(X)$ sea el máximo posible.

Dados una función $\overline{V}$ y un tiempo de parada $\overline{\tau} \in \mathcal{M}$, si somos capaces de verificar las condiciones:

(A) $\quad \overline{V}\,(x) = \mathbf{E}\,G\,(X_{\overline{\tau}})$

(B) $\quad \overline{V}\,(x) \geq \mathbf{E}\,G\ (X_\tau)$, para todo $\tau \in \mathcal{M}$

habremos probado que $\left(\overline{V},\, \overline{\tau}\right)$ es la solución al problema (2).

En 1963 Dynkin (ver [**2**]) estableció el principio clave de la teoría de la parada óptima, llamado la *caracterización súper armónica* del valor:

1. El valor V es la menor mayorante súper armónica (con respecto de X) de G.

2. El tiempo óptimo es $\tau^* = \inf\limits_{\tau \in \mathcal{M}} \{t > 0 : X_t \notin C\}$

donde $\mathbf{C} = \{x : V(x) > G(x)\}$ es la *región de continuación* (de las observaciones) y $\mathbf{D} = \mathbf{C}^c$ es la *región de detención* (de las observaciones). Entonces $\partial\mathbf{C}$ define la *frontera de parada óptima.* Una función V es *súper armónica* respecto de un proceso $X = \{X_t\}$ si $\{V(X_t)\}$ es súper martingala, para lo que es suficiente verificar que $L_X(V) \leq 0$, siendo L_X el generador infinitesimal de X.

Es bastante usual que para resolver problemas de parada óptima: **(I)** se trate de adivinar la naturaleza de la frontera de parada óptima como miembro de una familia razonable; **(II)** se calcule la esperanza; **(III)** se maximice ésta sobre la familia y **(IV)** se trate de argumentar que el tiempo de parada hallado es óptimo en general.

2.4.2 Opciones

Consideremos el modelo de un mercado financiero con dos activos, un bono, $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ y una acción, $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$. La evolución de $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ es determinística y está descrita por la ecuación:

$$B_t = B_0 e^{r\,t}, \;\; B_0 = 1, \, r > 0 \tag{4}$$

mientras que la evolución de la acción es aleatoria y está regida por la ecuación:

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \;\; S_0 > 0 \tag{5}$$

donde el proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, llamado *proceso director*, es un proceso estocástico adaptado definido en una base estocástica $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \mathbf{P}\right)$. Asumimos que el proceso $\left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}$ es una $\mathbb{F}$ - martingala.

El modelo de Black - Scholes

El modelo anterior recibe este nombre en el caso en que el proceso director, $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, se expresa de la forma

$$X_t = \sigma\, W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t \tag{6}$$

es decir, si:

$$dS_t = S_t \left[\sigma\, dW_t + r dt\right] \tag{7}$$

donde $\sigma > 0$ es la *volatilidad*, r es la *tendencia* y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener estándar.

En este modelo se introduce un tercer activo, al que llamamos *opción*. Una opción de compra (respectivamente de venta) es un acuerdo, que se hace en $t = 0$, entre dos partes por el cuál una de ellas, el *lanzador*, se compromete a vender (respectivamente a comprar) una unidad de S (una acción) a la otra parte, el *poseedor*, en el tiempo τ a precio K acordado de antemano.

Si $\tau \equiv T$ (fijo), la opción se llama *europea* y T se llama *maduración* o *tiempo de ejercicio* de la opción. En este caso (para una opción de compra), el poseedor de la opción la ejecuta si y sólo si $S_T > K$. Por esto, es equivalente pensar que el compromiso consiste en pagar al poseedor $S_T - K$, si esta cantidad es positiva y nada en otro caso. Por lo tanto, el poseedor recibe en tiempo T la cantidad $(S_T - K)^+$, que es llamado el *premio* de la opción. En definitiva, una opción previene al poseedor del hecho de que el precio de S en el momento T sea mayor que K.

Si el poseedor puede elegir cualquier tiempo (de parada) $\tau \leq T$ (T fijo) para ejecutar la opción, decimos que la opción es *americana*. Si $T = \infty$, la opción se dice *perpetua*.

Más en general, el premio de la opción puede ser una función de S, $G(S)$. Además es posible introducir un descuento, con tasa r, y así el premio toma la forma $e^{-rt}G(S_t)$.

Dada una opción con premio G y tasa de descuento r, el problema consiste en hallar (el precio de la opción):

$$V(S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}\, e^{-r\tau} G(S_\tau)$$

y (si existe) el tiempo de parada en que se alcanza este supremo. Dicho problema, es un problema de parada óptima.

Capítulo 3

Pruebas elementales

En este capítulo se ven dos ejemplos de problemas de parada óptima, para cuyas pruebas no son necesarios más que la desigualdad de Jensen y la verificación directa de que ciertos procesos auxiliares forman martingalas o súper martingalas para probar las condiciones **(A)** y **(B)** en la sección **2.4.1**. Es en ese sentido que las pruebas son elementales (ya que no se recurre al Cálculo estocástico de Itô).

La principal referenci de este capítulo es [**3**].

3.1 Problema lineal

1 En primer lugar consideremos el proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ que satisface la ecuación diferencial

$$dX_t = -adt + \sigma\, dW_t, \;\; X_0 = x \tag{8}$$

o sea,

$$X_t = x - at + \sigma W_t$$

en donde $x, a, \sigma \in \mathbb{R}$, $a > 0, \sigma > 0$, y $W = \{W_t\}_{t\in[0,\infty)}$ es un proceso de Wiener estándar definido en una base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$.

El proceso X es llamado *proceso de Wiener con tendencia* y en este caso $(a > 0)$ tenemos:

Lema 9 *Si el proceso X está definido como en (8) entonces*

$$X_t \underset{t \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} -\infty \quad c.s.$$

Demostración. Como $X_t = x - at + \sigma W_t$, con $a > 0$, tenemos que $\frac{X_t}{t} = \frac{x}{t} - a + \sigma \frac{W_t}{t}$ y por lo tanto es suficienete probar que $\frac{W_t}{t} \underset{t \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ c.s..

Primeramente veamos que $\frac{W_n}{n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$.

Podemos escribir

$$\frac{W_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (W_j - W_{j-1})$$

Ahora, por las propiedades del proceso de Wiener (ver sección **2.3**) se tiene que las variables aleatorias $W_1 - W_0, W_2 - W_1, \cdots$ son independientes e identicamente distribuidas (normales estándar), por lo que podemos aplicar la Ley fuerte de los grandes números, con lo cual obtenemos:

$$\frac{W_n}{n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ c.s.} \tag{9}$$

Consideremos ahora la diferencia $\frac{W_t}{t} - \frac{W_n}{n}$ con $t \in [n, n+1]$.

Primero observemos que podemos escribir

$$\frac{W_t}{t} - \frac{W_n}{n} = W_t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{n} \right) + \frac{W_t - W_n}{n}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\sup_{n \le t \le n+1} \left| \frac{W_t}{t} - \frac{W_n}{n} \right| \ge \varepsilon \right) \\
&\le \mathbf{P}\left(\sup_{n \le t \le n+1} |W_t| \, \frac{t-n}{nt} \ge \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbf{P}\left(\sup_{n \le t \le n+1} \frac{|W_t - W_n|}{n} \ge \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&= \mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n
\end{aligned}$$

Miremos por separado $\mathbf{I}_n$ y $\mathbf{II}_n$.

En primer lugar

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_n &= \mathbf{P}\left(\sup_{n \le t \le n+1} |W_t| \, \frac{t-n}{nt} \ge \frac{\varepsilon}{2} \right) = \mathbf{P}\left(\sup_{n \le t \le n+1} \sqrt{t}\, |W_1| \, \frac{t-n}{nt} \ge \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
&\le \mathbf{P}\left(|W_1| \ge \frac{\varepsilon n^2}{2\sqrt{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

siendo W_1 una variable normal estándar, podemos aplicar la desigualdad (ver Capítulo 7 de [**8**])

$$1-\Phi\left(x\right)<\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^{2}},\,x>0$$

donde Φ la distribución de una variable normal estándar, con lo cual obtenemos

$$\mathbf{P}\left(|W_1|\geq\frac{\varepsilon n^{2}}{2\sqrt{n+1}}\right)<\frac{2\sqrt{n+1}}{\varepsilon n^{2}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^{2}n^{4}}{8(n+1)}}$$

y entonces

$$\mathbf{I}_n<\frac{2\sqrt{n+1}}{\varepsilon n^{2}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^{2}n^{4}}{8(n+1)}}$$

Es decir, $\mathbf{I}_n$ está acotado por el término general de una serie convergente.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{II}_n&=\mathbf{P}\left(\sup_{n\,\leq\,t\,\leq\,n+1}\frac{|W_t-W_n|}{n}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\\&=\mathbf{P}\left(\sup_{n\,\leq\,t\,\leq\,n+1}|W_t-W_n|\geq\frac{\varepsilon n}{2}\right)\\&=\mathbf{P}\left(\sup_{0\,\leq\,t\,\leq\,1}|W_t|\geq\frac{\varepsilon n}{2}\right)\end{aligned}$$

y esto es igual, por el Principio de reflexión, a

$$2\left[\int_{-\,\infty}^{-\,\varepsilon\,n}\varphi\left(t\right)dt+\int_{\varepsilon\,n}^{\infty}\varphi\left(t\right)dt\right]=4\int_{\varepsilon\,n}^{\infty}\varphi\left(t\right)dt$$

siendo φ la densidad de una variable normal estándar. Para finalizar, notemos que la serie

$$\sum_{n\,=\,0}^{\infty}4\int_{\varepsilon\,n}^{\infty}\varphi\left(t\right)dt$$

es convergente, pues para $t>2$ tenemos $e^{-\frac{t^{2}}{2}}\leq e^{-\frac{t}{2}}$ y por lo tanto la integral es convergente para cada $n\in\mathbb{N}$ y además

$$\int_{\varepsilon\,n}^{\infty}\varphi\left(t\right)dt\leq\int_{\varepsilon\,n}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}dt=2e^{-\,\varepsilon\,n}$$

que es el término general de una serie convergente.

En definitiva hemos probado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{n \leq t \leq n+1}\left|\frac{W_t}{t}-\frac{W_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$$

es convergente. Aplicando el lema de Borel - Cantelli, tenemos que

$$\mathbf{P}\left(\omega: \sup_{n \leq t \leq n+1}\left|\frac{W_t}{t}(\omega)-\frac{W_n}{n}(\omega)\right| \geq \varepsilon \text{ para infinitos valores de } n\right)=0 \qquad (10)$$

De (9) y (10) encontramos que $\frac{W_t}{t} \longrightarrow 0$ c.s., pues, por (9) existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, salvo en un conjunto, N_1, de medida nula se tiene

$$\left|\frac{W_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ n \geq n_1$$

y por (10) existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, excepto en un conjunto, N_2, de medida nula tenemos

$$\sup_{n \leq t \leq n+1}\left|\frac{W_t}{t}(\omega)-\frac{W_n}{n}(\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ n \geq n_2$$

luego, salvo en el conjunto de medida nula $N_1 \cup N_2$, se tiene para $t \geq n_1 \vee n_2$

$$\left|\frac{W_t}{t}\right|<\varepsilon.$$

■

2 Para X definido como en (8) consideramos un problema de parada óptima con función de pago dada por $G(x)=x^{+}$.

Por simplicidad hemos tomado $r=0$, el caso con $r>0$ es análogo.

El siguiente teorema nos da el valor para dicho problema.

Teorema 10 *Sean $X=\{X_t\}_{t \in[0, \infty)}$ un proceso estocástico definido como en (8) y $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x)=x^{+}$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces el valor del problema de parada óptima (ver (2) en la sección **2.4.1**)*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}\, G(X_\tau)=\mathbf{E}\, G(X_{\tau^*})=V(x)$$

viene dado por:

$$V(x)=\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2a} \exp\left(\frac{2a}{\sigma^2} x-1\right) & , \quad si\ x \leq x^* \\ x & , \quad si\ x \geq x^*\end{cases} \qquad (11)$$

en donde:

$$x^*=\frac{\sigma^2}{2a} \quad y \quad \tau^*=\inf\{t>0: X_t \geq x^*\} \qquad (12)$$

Demostración. Por lo observado en la sección **2.4.1**, es suficiente verificar las condiciones, que en este caso se expresan como (ver página 18):

(A) $V(x) = \mathbf{E}(X_{\tau^*})^+$

(B) $V(x) \geq \mathbf{E}(X_\tau)^+$ para todo $\tau \in \mathcal{M}$.

Para probar **(A)**, consideramos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{\sigma^2}{2a} \exp\left(\frac{2a}{\sigma^2}x - 1\right),\ x \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Luego, podemos ver que el proceso $\{h(X_t)\}_{t \in [0,\infty)}$ es una $\mathbb{F}-$ martingala. En efecto, si $s > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[h(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}\left[\frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2a}{\sigma^2}X_{t+s} - 1\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2a}{\sigma^2}[x - a(t+s) + \sigma W_{t+s}] - 1\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2a}{\sigma^2}[x - a(t+s)] - 1\right)\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Veamos esta última esperanza:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}[(W_{t+s} - W_t) + W_t]\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}(W_{t+s} - W_t)\right)\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_t\right)\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}[W_{t+s} - W_t]\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_t\right)\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}[W_{t+s} - W_t]\right)\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

En la penúltima igualdad hemos usado que $\exp\left[\frac{2a}{\sigma}W_t\right]$ es $\mathcal{F}_t$ - medible y propiedades de la esperanza condicional (ver sección **2.1**), mientras que para la última igualdad observamos que la variable aleatoria $W_{t+s} - W_t$ es independiente de la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_t$ y por tanto al aplicarle la función boreliana $x \mapsto \exp\left(\frac{2a}{\sigma}x\right)$ se obtiene una nueva variable aleatoria independiente de $\mathcal{F}_t$ a la que le aplicamos la última propiedad de las esperanzas condicionales listadas en la sección **2.1**.

Como la esperanza de una variable aleatoria depende únicamente de su distribución, podemos escribir la última esperanza como

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_s\right)\right] \tag{16}$$

que se calcula directamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_s\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2a}{\sigma}x\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{1}{2s}x^2\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{1}{2s}\left[x-\frac{2as}{\sigma}\right]^2+\frac{2a^2s}{\sigma^2}\right)dx \\
&= \exp\left(\frac{2a^2s}{\sigma^2}\right)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{1}{2s}\left[x-\frac{2as}{\sigma}\right]^2\right)dx \\
&= \exp\left(\frac{2a^2s}{\sigma^2}\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

puesto que la última integral da uno por ser $\mathbb{R}$ el dominio de integración y por ser el integrando la densidad de una variable aleatoria normal con media $\frac{2as}{\sigma}$ y varianza s.

Sustituyendo (17) en (15) y luego en (14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[h\left(X_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] &= \frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2a}{\sigma^2}\left[x-a\left(t+s\right)\right]-1\right)\exp\left(\frac{2a}{\sigma}W_t\right)\exp\left(\frac{2a^2s}{\sigma^2}\right) \\
&= \mathbf{E}\,h\left(X_t\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

y por lo tanto $\{h\left(X_t\right)\}_{t\in[0,\infty)}$ es martingala.

Si $x \leq x^*$, entonces $h\left(x\right) = V\left(x\right)$.

Para todo t tenemos que $\tau^* \wedge t$ es un tiempo de parada acotado, luego, por el Teorema del Muestreo Opcional de Doob (Teorema (**6**)):

$$\mathbf{E}\,h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right) = \mathbf{E}\,h\left(X_0\right) = h\left(x\right) \tag{19}$$

Además, por definición de h sabemos que $0 \leq h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right) \leq x^*$. Si $\tau^* < \infty$ es claro que $X_{\tau^*\wedge t} \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} X_{\tau^*}$, y por ser h continua tenemos que $h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right) \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} h\left(X_{\tau^*}\right)$. Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada obtenemos que $\mathbf{E}\,h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right)\mathbb{I}_{\{\tau^*<\infty\}} \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}h\left(X_{\tau^*}\right)\mathbb{I}_{\{\tau^*<\infty\}}$. Si $\tau^* = \infty$, por el Lema (**9**) se tiene $X_t \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ y luego $\mathbf{E}h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right)\mathbb{I}_{\{\tau^*=\infty\}} \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{E}\,h\left(X_{\tau^*\wedge t}\right) \underset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\,h\left(X_{\tau^*}\right)\mathbb{I}_{\{\tau^*<\infty\}} \tag{20}$$

y como $h(X_{\tau^*}) = G(X_{\tau^*})$ c.s.

$$\mathbf{E}\,h(X_{\tau^*})\,\mathbb{I}_{\{\tau^*<\infty\}} = \mathbf{E}G(X_{\tau^*}) \tag{21}$$

De las definiciones de h y de G, y por las ecuaciones (19), (20) y (21) obtenemos:

$$\mathbf{E}\,G(X_{\tau^*}) = h(x) = V(x) \tag{22}$$

Por otro lado, si $x \geq x^*$, claramente es $\tau^* = 0$ y por lo tanto:

$$V(x) = G(x) = \mathbf{E}\,G(X_0) = \mathbf{E}\,G(X_{\tau^*}) \tag{23}$$

Estas dos últimas ecuaciones establecen la condición **(A)**.

Para probar la condición **(B)**, buscamos una función cóncava, Φ, tal que $V(x) = \Phi(h(x))$. Pues si Φ es una tal funcion, tenemos para todo $\sigma \in \mathcal{M}$ acotado:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,G(X_\sigma) \leq \mathbf{E}\,V(X_\sigma) = \mathbf{E}\;\Phi(h(X_\sigma)) \\ &\leq \Phi(\mathbf{E}\,h(X_\sigma)) = \Phi(h(x)) \\ &= V(x) \end{aligned} \tag{24}$$

La segunda desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Jensen (Teorema (**5**)) y la penúltima igualdad es debida al Teorema del Muestreo Opcional de Doob (Teorema (**6**)). Si $\sigma \in \mathcal{M}$ no es acotado, el resultado sigue siendo válido (por el Lema de Fatou) pues $V(X_t) \geq 0$ y el proceso $\{V(X_t)\}$ es una súper martingala.

Sólo nos resta hallar Φ.

Si $x \geq x^*$, $V(x) = x$. Luego debe ser:

$$x = \Phi\left(\frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2s}{\sigma^2}x - 1\right)\right) \tag{25}$$

Si llamamos $y = \frac{\sigma^2}{2a}\exp\left(\frac{2s}{\sigma^2}x - 1\right)$ tenemos:

$$x = \frac{\sigma^2}{2a}\left[\log\left(\frac{2a}{\sigma^2}y\right) + 1\right] \tag{26}$$

Por lo tanto

$$\Phi(y) = \begin{cases} y & , y \leq x^* \\ \frac{\sigma^2}{2a}\left[\log\left(\frac{2a}{\sigma^2}y\right) + 1\right] & , \text{si } y \geq x^* \end{cases} \tag{27}$$

que es, efectivamente, cóncava. ■

3.2 Opción americana perpetua de compra

1 En segundo lugar consideremos una opción americana perpetua de compra con descuento en un mercado regido por el modelo de Black - Scholes. Es decir (ver sección **2.4.2**), consideremos los procesos:

$$X_t = \sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \tag{28}$$

y

$$S_t = S_0 \, e^{X_t} \tag{29}$$

donde $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{R}$ y $\{W_t\}_{t \in [0, \infty)}$ es un proceso de Wiener estándar.

El proceso $S = \{S_t\}_{t \in [0, \infty)}$ representa el precio de las acciones. El poseedor de la opción tiene el derecho de comprar una unidad de S en el momento que decida a precio K acordado de antemano, su ganancia es $(S - K)^+$, descontada a tasa $\delta > 0$.

La solución al problema de parada óptima asociado (ecuación (30)) fue dada por Merton en 1973 (ver [**1**]).

El próximo teorema da el valor de este problema.

Teorema 11 *Consideremos el proceso $S = \{S_t\}$ definido por (29) y con proceso director dado por (28). Si $G(S) = (S - K)^+$ y $\delta > 0$, la solución al problema de parada óptima*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E} \, e^{-(r+\delta)\tau} G(S_\tau) \tag{30}$$

con $\mathcal{M} = \{\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty], \ \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \ge 0\}$, está dada por:

$$C(S_0) = \begin{cases} A S_0^{\gamma} & ; \ 0 \le S_0 \le S_c^* \\ S_0 - K & ; \quad S_c^* \le S_0 \end{cases} \tag{31}$$

donde:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2\delta}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2(r+\delta)}{\sigma^2}} \end{aligned} \tag{32}$$

y

$$S_c^* = K\frac{\gamma}{\gamma - 1} \qquad y \qquad A = \frac{1}{\gamma^\gamma}\left(\frac{\gamma - 1}{K}\right)^{\gamma - 1} \tag{33}$$

El tiempo de parada óptimo es

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : \; S_t \geq S_c^*\}$$

Demostración. (Ver [**1**]) Para probar **(A)**, que en este caso es

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ = C\left(S_0\right)$$

debemos hallar

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ \tag{34}$$

Comencemos observando que

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ \mathbb{I}_{\{\tau_c^* = \infty\}} = 0 \tag{35}$$

debido a que (ver Lema (**9**))

$$\begin{gathered} \lim_{t \longrightarrow \infty}\left[\gamma X_t - (r + \delta)\, t\right] = -\infty \\ \lim_{t \longrightarrow \infty}\left[X_t - (r + \delta)\, t\right] = -\infty \end{gathered} \tag{36}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{E} \limsup\left(e^{-(r+\delta)\,t}e^{X_t} - e^{-(r+\delta)\,t}K\right)^+ = 0 \tag{37}$$

Las ecuaciones (36) se desprenden de

$$\mathbf{E}\left[\gamma X_1 - (r + \delta)\right] < \mathbf{E}\left[e^{X_1 - (r+\delta)} - 1\right] = e^{-\delta} - 1 < 0 \tag{38}$$

Ahora podemos escribir (34) como

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ = \mathbf{E}\; e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ \mathbb{I}_{\{\tau_c^* < \infty\}} \tag{39}$$

Pero, si $S_0 < S_c^*$, tenemos que $S_{\tau_c^*} = S_c^*$ (c.s.) y entonces observamos que

$$\begin{aligned} AS_{\tau_c^*}^{\gamma} &= AS_c^{*\,\gamma} = \frac{1}{\gamma^\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{K}\right)^{\gamma-1} K^\gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{\gamma} \\ &= \frac{K}{\gamma-1} = K\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-1\right) = K\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}-1\right)^{+} \\ &= \left(S_{\tau_c^*}-K\right)^{+} \end{aligned} \tag{40}$$

Sustituyendo esto en (39)

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*}\left(S_{\tau_c^*}-K\right)^{+}\mathbb{I}_{\{\tau_c^*<\infty\}} = A\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*} S_{\tau_c^*}^{\gamma}\mathbb{I}_{\{\tau_c^*<\infty\}} \tag{41}$$

Para seguir, observemos que el proceso $\left\{e^{-(r+\delta)\,t} S_t^{\gamma}\right\}_{t\geq 0}$ es una $\mathbb{F}-$ martingala. En efecto, si $s > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)(t+s)} S_{t+s}^{\gamma} - e^{-(r+\delta)t} S_t^{\gamma} \;\mid\; \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}\left[S_0 e^{-(r+\delta)(t+s)+\gamma\sigma W_{t+s}+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t+s)} - S_0 e^{-(r+\delta)t+\gamma\sigma W_t+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \;\mid\; \mathcal{F}_t\right] \\ &= S_0 e^{-(r+\delta)\,t+\gamma\sigma W_t+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)s+\gamma\sigma(W_{t+s}-W_t)+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)h} - 1 \;\mid\; \mathcal{F}_t\right] \end{aligned} \tag{42}$$

Por ser $W_{t+s} - W_t$ independiente de $\mathcal{F}_t$, la última esperanza condicional se reduce a la esperanza matemática (no condicional). Ésta depende únicamente de la distribución de probabilidad de $W_{t+s} - W_t$ que es igual a la disribución de W_s, por tanto, recordando la definición de S, podemos expresar el último miembro de (42) de la siguiente forma

$$e^{-(r+\delta)\,t} S_t^{\gamma}\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)\,s+\gamma\sigma\, W_s+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\,s} - 1\right] \tag{43}$$

Esta esperanza se calcula directamente, como en (17), y da cero gracias a la elección de γ. Por lo tanto

$$\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)(t+s)} S_{t+s}^{\gamma} \mid\; \mathcal{F}_t\right] = e^{-(r+\delta)\,t} S_t^{\gamma} \tag{44}$$

es decir, $\left\{e^{-(r+\delta)t} S_t^{\gamma}\right\}_{t\geq 0}$ es una $\mathbb{F}-$martingala como queríamos verificar.

Luego, para $\tau_c^* < \infty$ podemos escribir $\tau_c^* = \lim_{t\longrightarrow\infty} \tau_c^* \wedge t$, siendo $\tau_c^* \wedge t$ un tiempo de parada acotado para cada $t \geq 0$, entonces, por el Teorema de Doob sabemos que:

$$A\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\,(\tau_c^*\wedge t)} S_{\tau_c^*\wedge t}^{\gamma} = A\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\,0} S_0^{\gamma} = AS_0^{\gamma} \tag{45}$$

Sustituyendo en (41) obtenemos:

$$A\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\,\tau_c^*} S_{\tau_c^*}^{\gamma} \mathbb{I}_{\{\tau_c^* < \infty\}} = A \lim_{t \longrightarrow \infty} \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\,(\tau_c^* \wedge t)} S_{\tau_c^* \wedge t}^{\gamma} = A S_0^{\gamma} \tag{46}$$

Por las ecuaciones (46), (41) y (39) tenemos para $S_0 < S_c^*$ que:

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*} \left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ = A S_0^{\gamma} \tag{47}$$

Por otro lado, si $S_0 \geq S_c^*$ tenemos $\tau_c^* = 0$ y por lo tanto:

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*} \left(S_{\tau_c^*} - K\right)^+ = S_0 - K \tag{48}$$

Las ecuaciones (47) y (48) establecen **(A)**.

Para probar **(B)**, que en este caso es:

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau} \left(S_\tau - K\right)^+ \leq C\left(S_0\right) \quad \text{para todo } \tau \in \mathcal{M}$$

(ver (24)) consideramos para $y \geq 0$ las funciones $\nu = \nu(y)$ y $\Phi = \Phi(y)$ dadas por:

$$\nu(y) = A y^{\gamma}$$

$$\Phi(y) = \begin{cases} y & , \quad 0 \leq y \leq S_c^* - K \\ \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma}} & , \quad S_c^* - K < y \end{cases}$$

Fácilmente se verifica que:

$\Phi(\nu(y)) = C(y)$ con C definida en (31)

Φ es cóncava por ser $\gamma > 1$

$\Phi(\alpha y) \leq \alpha \Phi(y)$ para $\alpha \geq 1$

Probemos que el proceso no negativo $\left\{e^{-(r+\delta)\,t} C\left(S_t\right)\right\}$ es una súper martingala. Si $s > 0$:

$$\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)(t+s)} C\left(S_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{-(r+\delta)(t+s)} \mathbf{E}\left[\Phi\left(\nu\left(S_{t+s}\right)\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{49}$$

Por la segunda de las desigualdades anteriores y por la Desigualdad de Jensen, el segundo miembro de (49) es menor o igual que:

$$\begin{aligned} & e^{-(r+\delta)(t+s)} \Phi\left(\mathbf{E}\left[\nu\left(S_{t+s}\right) \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \\ &= e^{-(r+\delta)(t+s)} \Phi\left(\mathbf{E}\left[A S_{t+s}^{\gamma} \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \\ &= e^{-(r+\delta)(t+s)} \Phi\left(e^{(r+\delta)(t+s)} A\mathbf{E}\left[e^{-(r+\delta)(t+s)} S_{t+s}^{\gamma} \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \\ &= e^{-(r+\delta)(t+s)} \Phi\left(e^{(\mu r+\delta)(t+s)} A e^{-(r+\delta)t} S_t^{\gamma}\right) \\ &= e^{-(r+\delta)(t+s)} \Phi\left(e^{(r+\delta)\,s} A S_t^{\gamma}\right) \leq e^{-(r+\delta)(t+s)} e^{(r+\delta)\,s} \Phi\left(A S_t^{\gamma}\right) \\ &= e^{-(r+\delta)t}\, \Phi\left(\nu\left(S_t\right)\right) = e^{-(r+\delta)t}\, C\left(S_t\right) \end{aligned} \tag{50}$$

donde hemos usado que el proceso $\left\{e^{-(r+\delta)t}\,S_t^{\gamma}\right\}$ es una martingala, como hemos visto en **(A),** y la tercer condición de Φ.

Luego

$$\mathbf{E}\,e^{-\,(r+\delta)\,\tau}\,(S_\tau - K)^{+} \le \mathbf{E}\,e^{-\,(r+\delta)\,\tau}C\,(S_\tau) = C\,(S_0)$$

que prueba la condición **(B)**. ■

Capítulo 4

Parada óptima con cálculo de Itô

En este capítulo daremos una nueva prueba del problema de la opción americana perpetua de compra, ver Teorema **11**. Esta vez acudiendo al cálculo estocástico de Itô para la verificación de las propiedades **(A)** y **(B)** en la sección **2.4.1**. Los resultados más importantes de este cálculo que usamos son la fórmula de Itô y la propiedad que dice que la integral estocástica respecto del proceso de Wiener forma una martingala local.

La principal referencia de este capítulo es [**6**].

Demostración. (Segunda versión del Teorema 11) *
Sea $V^*(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau} G(S_\tau)$, con

$$\mathcal{M} = \{\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]\,,\ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ para todo } t \geq 0\}$$

Debemos probar que $V^*(s) = C(s)$, $s \geq 0$ con $C(s)$ definida como en (31). Para esta prueba es suficiente establecer las condiciones (ver sección **2.4.1**):

(A) $\quad \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau} C(S_\tau) \leq C(s)$, $s \geq 0$, para todo $\tau \in \mathcal{M}$

(B) $\quad \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau_c^*} G\left(S_{\tau_c^*}\right) = C(s)$, $s \geq 0$

pues **(A)** y la desigualdad $G(s) \leq C(s)$ implican que $V^*(s) \leq C(s)$ y **(B)** implica la igualdad $V^*(s) = C(s)$, $s \geq 0$.

Podemos aplicar la fórmula de Itô (Itô - Meyer) al proceso $\left\{e^{-(r+\delta)t} C(S_t)\right\}_{t \geq 0}$, con lo cual resulta, para todo $\tau \in \mathcal{M}$:

*Ver [**6**].

$$e^{-(r+\delta)\tau}C(S_\tau) = C(S_0) + \int_0^\tau e^{-(r+\delta)u}\left[LC(S_u) - (\mu+\delta)C(S_u)\right]du \qquad (51)$$
$$+ \int_0^\tau e^{-(r+\delta)u}\sigma S_u C'(S_u)\, dW_u$$

donde L es el operador infinitesimal de S y está dado, para funciones $f \in C^2$, por:

$$Lf = S\, r\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \qquad (52)$$

Observación: En realidad la función $C \notin C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ pues no tiene derivada segunda en el punto $s = S_c^*$, si tiene derivada primera continua y derivadas segundas laterales en este punto. En los demás puntos C tiene derivada segunda continua. En este caso, podemos usar el Teorema de Itô - Meyer para aplicar la Fórmula de Itô (ver [**13**]).

Miremos con un poco más de detalle la primer integral. En la región $\mathbf{C} = \{s \geq 0 : s < S_c^*\}$, se verifica por observación directa que $LC(s) - (r+\delta)C(s) = 0$ y en la región $\mathbf{D} = \{s \geq 0 : s \geq S_c^*\}$ se cumple $LC(s) = r\, s$, puesto que aquí $C(s) = (s-K)^+$.

Teniendo en cuenta las definiciones de las constantes S_c^* y A en (32) y (33) y observando que en la región $\mathbf{D} = \{s \geq 0 : s \geq S_c^*\}$ se tiene $s > K$ obtenemos:

$$LC(s) - (r+\delta)C(s) = r\, s - (r+\delta)(s-K)^+ = Kr - \delta(s-K) \qquad (53)$$
$$\leq Kr - \delta(S_c^* - K) = K\left(\frac{\gamma r - (r+\delta)}{\gamma - 1}\right)$$

Ahora, por definición de γ tenemos

$$\frac{r\,\gamma - (r+\delta)}{\sigma^2} = -\frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \qquad (54)$$

y además que $\gamma > 1$, luego, se desprende que en la región $\mathbf{D}$ se cumple:

$$LC(s) - (r+\delta)C(s) \leq 0 \qquad (55)$$

Denotemos

$$I_t = \int_0^t e^{-(r+\delta)u}\sigma S_u C'(S_u)\, dW_u, \;\; t \geq 0 \qquad (56)$$

De las ecuaciones (51) y (55) concluimos que:

$$I_t \geq e^{-(r+\delta)\,t} C\,(S_t) - C\,(S_0) \geq -\,C\,(S_0) \tag{57}$$

Luego, gracias a las propiedades de las integrales estocásticas respecto del proceso de Wiener, tenemos que el proceso $\{I_t\}_{t\,\geq\,0}$ es una martingala local uniformemente acotada por abajo por la constante $-C\,(S_0)$ y por lo tanto es una súper martingala. Luego, $\mathbf{E}\,I_\tau \leq \mathbf{E}\,I_0 = 0$, para todo $\tau \in \mathcal{M}$ finito c.s. (por el Teorema del Muestreo Opcional).

Si ahora tomamos esperanzas, $\mathbf{E}$, en ambos miembros de (51) obtenemos, para $\tau \in \mathcal{M}$ finito c.s., la desigualdad

$$\mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau} C\,(S_\tau) \leq C\,(s) \tag{58}$$

y como $G\,(s) \leq C\,(s)$ se ve que

$$\sup\left\{\mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau} G\,(S_\tau)\,,\;\; s \geq 0,\, \tau \in \mathcal{M} \text{ finito c.s.}\right\} \leq C\,(s) \tag{59}$$

Queda por probar que esta desigualdad vale para cualquier tiempo de parada $\tau \in \mathcal{M}$.

Como la súper martingala $\{I_t\}_{t\,\geq\,0}$ está acotada por debajo, c.s. existe $\lim\limits_{t\,\longrightarrow\,\infty} I_t$ $(= I_\infty)$ y el proceso $\{I_t\}_{0\,\leq\,t\,\leq\,\infty}$ es una súper martingala (Ver la sección 3.2 de [**10**]), luego, para todo $\tau \in \mathcal{M}$

$$\mathbf{E}\,I_\tau \leq \mathbf{E}\,I_0 = 0 \tag{60}$$

Si observamos que

$$\limsup_{t\,\longrightarrow\,\infty}\, e^{-(r+\delta)\,t} C\,(S_t) = \limsup_{t\,\longrightarrow\,\infty}\, e^{-(r+\delta)\,t} G\,(S_t) = 0 \tag{61}$$

obtenemos, de (51), para $\tau \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau} G\,(S_\tau) &\leq \mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau} C\,(S_\tau) = \mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau} C\,(S_\tau)\,\mathbb{I}_{\{\tau\,<\,\infty\}} \\ &\leq \mathbf{E}\,C\,(S_0)\,\mathbb{I}_{\{\tau\,<\,\infty\}} + \mathbf{E}\,I_\tau \mathbb{I}_{\{\tau\,<\,\infty\}}\end{aligned} \tag{62}$$

Ahora, si en (51) ponemos $\tau = t$ y hacemos t tender a infinito, se tiene

$$0 \leq C\,(S_0) + I_\infty \tag{63}$$

multiplicando de ambos lados de esta ecuación por $\mathbb{I}_{\{\tau\,=\,\infty\}}$ y tomando esperanzas obtenemos

$$0 \leq \mathbf{E}\, C\left(S_0\right) \mathbb{I}_{\{\tau\,=\,\infty\}} + \mathbf{E}\, I_{\infty} \mathbb{I}_{\{\tau\,=\,\infty\}} \tag{64}$$

Luego, de las ecuaciones (61), (62) y (64):

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\, e^{-(r\,+\,\delta)\,\tau} G\left(S_\tau\right) \\ &\leq \mathbf{E}\, C\left(S_0\right) \mathbb{I}_{\{\tau\,<\,\infty\}} + \mathbf{E}\, C\left(S_0\right) \mathbb{I}_{\{\tau\,=\,\infty\}} + \mathbf{E}\, I_\tau \mathbb{I}_{\{\tau\,<\,\infty\}} + \mathbf{E}\, I_\infty \mathbb{I}_{\{\tau\,=\,\infty\}} \\ &= \mathbf{E}\, C\left(S_0\right) + \mathbf{E}\, I_\tau = C\left(s\right) + 0 \leq C\left(s\right) \end{aligned} \tag{65}$$

En conclusión:

$$V^*\left(s\right) \leq C\left(s\right)$$

Miremos ahora la propiedad **(B)**. Debido a (51) tenemos para $\tau = t \wedge \tau_c^*$

$$\begin{aligned} &e^{-(r\,+\,\delta)(t \wedge \tau_c^*)} C\left(S_{t \wedge \tau_c^*}\right) \\ &= C\left(S_0\right) + \int_0^{t \wedge \tau_c^*} e^{-(r+\,\delta)\,u} \left[LC\left(S_u\right) - \left(\mu + \delta\right) C\left(S_u\right)\right] du + I_{t \wedge \tau_c^*} \end{aligned} \tag{66}$$

Pero, si $S_0 > S_c^*$, se tiene $\tau_c^* = 0$, pues $C\left(S_0\right) = G\left(S_0\right)$ c.s., y por lo tanto, en este caso la propiedad se cumple trivialmente.

Pongamos entonces $S_0 \leq S_c^*$.

En esta región se cumple $LC\left(S_u\right) - \left(r + \delta\right) C\left(S_u\right) = 0$ para todo $u \leq t \wedge \tau_c^*$ ($\mathbf{P}-$ c.s.) y luego:

$$-C\left(S_0\right) \leq I_{t \wedge \tau_c^*} = e^{-(r\,+\,\delta)(t \wedge \tau_c^*)} C\left(S_{t \wedge \tau_c^*}\right) - C\left(S_0\right) \leq C\left(S_c^*\right) - C\left(S_0\right) \tag{67}$$

Por lo tanto, la martingala local $\left\{I_{t \wedge \tau_c^*}\right\}$ está acotada uniformemente por encima y por debajo por constantes, entonces es una martingala uniformemente integrable. En consecuencia tenemos, para todo $S_0 > 0$, que ($\mathbf{P}-$ c.s.) existe el $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} I_{t \wedge \tau_c^*}$ $(= I_{\tau_c^*})$ y

$$\mathbf{E}\, I_{\tau_c^*} = 0 \tag{68}$$

Si hacemos tender t a infinito en (66), vemos que en el conjunto $\{\omega : \tau_c^* < \infty\}$ es

$$e^{-(r+\delta)\,\tau_c^*} G\left(S_{\tau_c^*}\right) = e^{-(r+\delta)\,\tau_c^*} C\left(S_{\tau_c^*}\right) = C\left(S_0\right) + I_{\tau_c^*} \tag{69}$$

y en el conjunto $\{\omega : \tau_c^* = \infty\}$ es

$$0 = C\left(S_0\right) + I_\infty \tag{70}$$

puesto que ($\mathbf{P}-$ c.s.) $\limsup\, e^{-(r+\delta)\,t} G\left(S_t\right) = \limsup\, e^{-(r+\delta)\,t} C\left(S_t\right) = 0.$

Al tomar $\mathbf{E}$ obtenemos, para $S_0 > 0$:

$$\mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\,\tau_c^*} G\left(S_{\tau_c^*}\right) = C\left(S_0\right) \tag{71}$$

Luego, hemos probado que $V^*\left(S_0\right) = C\left(S_0\right)$. $\blacksquare$

Capítulo 5

Opciones rusas

1 Presentamos a continuación las *opciones rusas*, introducidas por Shepp y Shiryaev en 1994 (ver [**5**].) que le pagan al poseedor el máximo (descontado) que el proceso haya alcanzado hasta el momento de ejercicio (este momento no está acotado y el poseedor puede elegirlo). Por estar considerando el máximo histórico del proceso, el poseedor está protegido de las eventuales caídas en el precio. El costo de continuar observando la evolución del proceso es debido únicamente al descuento, que es una cantidad determinística, es decir, no está sujeta al azar.

Esta clase de opciones no se comercializa en ningún mercado, fue introducida por el interés en el problema matemático.

Las principales referencias de este capítulo son [**4**], [**5**]. Ver también [**7**].

Consideremos el modelo de Black - Scholes de un mercado, como en la sección **2.4.2**. Es decir, consideremos que el precio de los bonos está dado para cada $t \geq 0$ por

$$B_t = e^{-r\,t} \tag{72}$$

Mientras tanto, el precio de una acción viene dado por el proceso

$$S_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right), \quad t \geq 0 \tag{73}$$

donde $x > 0$, $\sigma > 0$ y $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener estándar.

Consideremos también el proceso $M = \{M_t\}$ dado por

$$M_t = \max\left\{s, \sup_{0 \leq u \leq t} S_t\right\} \tag{74}$$

siendo $s \geq x$.

La función de pago de la opción de venta rusa es

$$f_t = e^{-\delta t} M_t \tag{75}$$

donde $\delta > 0$.

Luego, el problema es el de hallar el precio de la opción rusa, que por la teoría general de las opciones, es

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau} M_\tau \tag{76}$$

Esta opción permite al poseedor elegir la fecha de ejercicio, que está representada por τ, y le paga el máximo que el proceso haya alcanzado hasta ese momento, si éste es mayor a s y en caso contrario le paga s, descontado por $e^{-\delta\tau}$. Luego, al dejar correr el tiempo sólo se pierde el factor determinístico $e^{-\delta t}$, no hay pérdidas ocasionadas por la fluctuación de S_t. Esto le permite al poseedor tener una cierta tranquilidad.

El supremo en (76) es finito (puesto que $\delta > 0$).

5.1 Primera prueba

El próximo teorema da la fórmula explícita del valor de la opción y la expresión del tiempo óptimo de ejercicio.

Teorema 12 (Opciones rusas) *(Ver [4]) Consideremos el proceso estocástico* $S = \{S_t\}$ *que verifica la ecuación*

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \quad t \geq 0 \tag{77}$$

con $S_0 = x > 0$, $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{R}$ *y* $\{W_t\}$ *un proceso de Wiener estándar definido en una base estocástica* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, P\right)$.

Entonces el problema de parada óptima

$$V^*(x,\, s) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\tau} M_\tau \tag{78}$$

con $\delta > 0$ *y* $\mathcal{M} = \{\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty],\ \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t \geq 0\}$ *tiene solución*

$$V\left(x,\,s\right)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{s}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1}-\gamma_1\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\right] & ;\ \frac{s}{\alpha}\leq x\leq s\\ s & ;\ 0<x\leq\frac{s}{\alpha}\end{array}\right. \tag{79}$$

siendo $\gamma_1<0<1<\gamma_2$ *las raíces de la ecuación* $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2+\gamma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)=r+\delta$. *Esto es*

$$\gamma_{2\,,\,1}=\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\left(r+\delta\right)}{\sigma^2}} \tag{80}$$

y

$$\alpha=\left(\frac{1-\frac{1}{\gamma_1}}{1-\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}} \tag{81}$$

El tiempo de parada óptimo es

$$\tau^*=\inf\left\{t\geq 0:S_t\geq\frac{M_t}{\alpha}\right\} \tag{82}$$

2 Se verá primero una prueba directa debida a Shepp y Shiryaev (ver [**4**]) y luego se atacará el mismo problema desde otro punto de vista

Demostración. (1)

Para probar que $V^*\equiv V$, comenzamos verificando directamente que V cumple las siguientes propiedades en $\frac{s}{\alpha}\leq x\leq s$:

$$\left(r+\delta\right)V\left(x,\,s\right)=r\,xV_x\left(x,\,s\right)+\frac{1}{2}\sigma^2V_{xx}\left(x,\,s\right) \tag{83}$$

$$V\left(x,\,s\right)\geq s \tag{84}$$

$$V_s\left(s,\,s\right)=\frac{\partial V}{\partial s}\left(x,\,s\right)\bigg|_{x\,=\,s}=0 \tag{85}$$

1 Verifiquemos (83)

$$V_x\left(x,\,s\right)=\frac{s}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\frac{\alpha\gamma_1\gamma_2}{s}\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1-1}-\frac{\alpha\gamma_1\gamma_2}{s}\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2-1}\right]$$

$$V_{xx}\left(x,\,s\right)=\frac{s}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\frac{\alpha^2\gamma_1\gamma_2\left(\gamma_1-1\right)}{s^2}\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1-2}-\frac{\alpha^2\gamma_1\gamma_2\left(\gamma_2-1\right)}{s^2}\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2-2}\right]$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\mu\, x V_x\,(x,\ s) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx}\,(x,\ s) \\
&= \frac{\mu\, s}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\right] \\
&+ \frac{\sigma^2 s}{2\,(\gamma_2 - \gamma_1)}\left[\gamma_1\gamma_2\,(\gamma_1 - 1)\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\gamma_2\,(\gamma_2 - 1)\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\right] \\
&= \frac{s}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1}\left[r\,\gamma_1 + \frac{\sigma^2}{2}\gamma_1\,(\gamma_1 - 1)\right] - \gamma_1\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\left[r\,\gamma_2 + \frac{\sigma^2}{2}\gamma_2\,(\gamma_2 - 1)\right]\right] \\
&= \frac{s}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1}[r\ + \delta] - \gamma_1\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}[r\ + \delta]\right] = (r + \delta)\, V\,(x,\ s)
\end{aligned}$$

2 Verifiquemos (84)

$$\begin{aligned}
\frac{V\,(x,\ s)}{s} &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\right] \\
&= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1 - \gamma_2} - \gamma_1\right] \\
&\geq \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2 \alpha^{\gamma_1 - \gamma_2}\left(\frac{x}{s}\right)^{\gamma_1 - \gamma_2} - \gamma_1\right] \\
&\geq \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2 \alpha^{\gamma_1 - \gamma_2} - \gamma_1\right] \\
&= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} > 1
\end{aligned}$$

La primer desigualdad se debe a que $\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2} \geq 1$ y la segunda a que $\frac{x}{s} < 1$.

3 Verifiquemos (85)

$$\begin{aligned}
V_s\,(s,\ s) &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{\alpha x}{s}\right)^{\gamma_2}\right]\Bigg|_{x\,=\,s} \\
&- \frac{s}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\frac{\gamma_1\gamma_2\,(\alpha x)^{\gamma_1}}{s^{1+\gamma_1}} - \frac{\gamma_1\gamma_2\,(\alpha x)^{\gamma_2}}{s^{1+\gamma_2}}\right]\Bigg|_{x\,=\,s} \\
&= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\gamma_2 \alpha^{\gamma_1}\,(1 - \gamma_1) + \gamma_1 \alpha^{\gamma_2}\,(\gamma_2 - 1)\right] \\
&= \frac{\alpha^{\gamma_1}}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[-\gamma_2\,(\gamma_1 - 1) + \alpha^{\gamma_2 - \gamma_1}\gamma_1\,(\gamma_2 - 1)\right] \\
&= \frac{\alpha^{\gamma_1}}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[-\gamma_2\,(\gamma_1 - 1) + \frac{\gamma_2\,(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1\,(\gamma_2 - 1)}\gamma_1\,(\gamma_2 - 1)\right] = 0
\end{aligned}$$

Nota: la función V tiene derivadas segundas continuas en todos los puntos salvo en los de la forma $x = \frac{s}{\alpha}$, en donde hay derivadas de primer orden continuas y hay derivadas laterales de segundo orden. En este caso, en él que no es C^2, la Fórmula de Itô continúa siendo válida gracias al Teorema de Itô - Meyer.

Ahora, S satisface la ecuación

$$dS_t = r\, S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{86}$$

y por tanto, podemos ver que el proceso

$$Y_t = e^{-(r+\delta)\,t} V\left(S_t,\, M_t\right) \tag{87}$$

es una súper martingala. En efecto, en la región $0 < \; S_t \; \leq \frac{M_t}{\alpha}$ se tiene, por la fórmula de Itô, que:

$$\begin{aligned} dY_t &= d\left(e^{-\,(r+\delta)\,t}\, M_t\right) \\ &= -\;(r+\delta)\; e^{-\,(r+\delta)\,t}\, M_t\; dt + e^{-\,(r+\delta)\,t}\; dM_t \\ &= -\;(r+\delta)\; e^{-\,(r+\delta)\,t}\;\, M_t\, dt \end{aligned} \tag{88}$$

dado que en esta región M_t es constante, el último término del penúltimo miembro es nulo.

En la región $\frac{M_t}{\alpha} \leq S_t \leq M_t$, debido a que M_t crece sólo cuando $M_t = S_t$ y $V_s\left(s,\, s\right) = 0$, por (85), se anulan los términos en dM_t y $\left(dM_t\right)^2$ en la fórmula de Itô, con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{-(r+\delta)\;t}\left[V_x\left(S_t,\, M_t\right) dS_t + \frac{1}{2} V_{xx}\left(S_t,\, M_t\right)\left(dS_t\right)^2 - \left(r+\delta\right) V\left(S_t,\, M_t\right) dt\right] \\ &= e^{-(r+\delta)\;t} V_x\left(S_t,\, M_t\right)\, \sigma\, S_t dW_t \end{aligned} \tag{89}$$

donde hemos usado la relación (83) y la definición de S_t, (77). Por lo tanto, Y_t es una martingala local positiva y por ende una súper martingala.

Entonces, para todo tiempo de parada τ, por (84) se puede expresar

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\;\tau} M_\tau \leq \mathbf{E}\, e^{-(r+\delta)\;\tau} V\left(S_\tau,\, M_\tau\right) &= \mathbf{E}\, Y_\tau \\ \leq \mathbf{E}\, Y_0 = V\left(S_0,\, M_0\right) &= V\left(x,\, s\right) \end{aligned} \tag{90}$$

para lo cual hemos usado, en la segunda desigualdad, que Y_t es súper martingala. Tomando supremo sobre todos los tiempos de parada obtenemos para $0 < x \leq s$

$$V^*(x,\, s) \le V(x,\, s) \tag{91}$$

Sólo resta probar la desigualdad contraria.
Sea τ el primer tiempo $t \ge 0$ tal que

$$S_t = \frac{M_t}{\alpha} \tag{92}$$

comenzando desde $S_0 = x$, $M_0 = s$, $x > \frac{s}{\alpha}$. Se ve que $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$, puesto que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tau > T) \\
&= \mathbf{P}\left(\text{para } \ 0 \le u \le t \le T: \ \sigma(W_t - W_u) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) \ge \log\frac{1}{\alpha}\right) \\
&\le \mathbf{P}\left(\text{para } 0 \le t \le T: \ \sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t \ge \log\frac{1}{\alpha}\right) \\
&\le \Phi\left(\frac{-\log\frac{1}{\alpha} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{T}}\right) + e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\log\frac{1}{\alpha}}\Phi\left(\frac{-\log\frac{1}{\alpha} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{T}}\right) \underset{T\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned} \tag{93}$$

Para τ como en (92) la primer desigualdad en (90) es en realidad una igualdad. Para probar que la segunda también es una igualdad, es suficiente probar que Y_t es martingala. De (88) y (89) sabemos que Y_t es una martingala local positiva y en consecuencia es suficiente probar que

$$\mathbf{E} \sup_{0 \le t < \infty} Y_t \ < \ \infty \tag{94}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
Y_t &= e^{-(r+\delta)\,t} V(S_t,\, M_t) \\
&\le e^{-(r+\delta)\,t} V(M_t,\, M_t) = K e^{-(r+\delta)\,t} M_t
\end{aligned} \tag{95}$$

siendo

$$K = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left(\gamma_2 \alpha^{\gamma_1} - \gamma_1 \alpha^{\gamma_2}\right) \tag{96}$$

Por lo tanto, es suficiente probar que $\sup\limits_{0 \leq t < \infty} e^{-(r+\delta)t} M_t$ es integrable, es decir, que

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y\right) dy < \infty \tag{97}$$

Naturalmente, el problema está cuando $y \longrightarrow \infty$, ya que el integrando está acotado superiormente por uno. Sabemos que para todos $\alpha > 0,\ \beta > 0$ se tiene

$$\mathbf{P}\left(W_t \leq \alpha t + \beta,\ 0 \leq t < \infty\right) = 1 - e^{-2\alpha\beta} \tag{98}$$

Eligiendo

$$\alpha = \frac{\left(\delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x} \tag{99}$$

tenemos, para $y > s, \quad y > x$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_t \left\{\sup_{0 \leq u < t}\left[\sigma W_u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right] - \left[\log\left(\frac{y}{x}\right) + (r+\delta)\,u\right]\right\} > 0\right) \end{aligned} \tag{100}$$

Ahora si $W_t \leq \alpha t + \beta$, para todo t, de (99)

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq u < t}\left(\sigma W_u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right) &\leq \sup_{0 \leq u < t}\left(\sigma\left(\alpha u + \beta\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u\right) \\ &= \sup_{0 \leq u < t}\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + u\,(r+\delta)\right) \\ &= \log\left(\frac{y}{x}\right) + t\,(r+\delta) \end{aligned} \tag{101}$$

Luego

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y,\ W_t \leq \alpha t + \beta\right) \\ &+ \mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y,\ W_t > \alpha t + \beta\right) \\ &= 0 + \mathbf{P}\left(\sup_t e^{-(r+\delta)t} M_t > y \mid\ W_t > \alpha t + \beta\right)\mathbf{P}\left(\ W_t > \alpha t + \beta\right) \\ &\leq e^{-2\alpha\beta} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\left(1 + \frac{2\delta}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \tag{102}$$

Luego, para $\delta > 0$, la integral en (97) es convergente, con lo que hemos probado que Y_t es una martingala. Por lo tanto, para τ definido en (92) tenemos que

$$\mathbf{E}\,Y_\tau = \mathbf{E}\,Y_0 \tag{103}$$

En definitiva, la segunda desigualdad en (90) es en realidad una igualdad. Como τ está contenido en el conjunto sobre el cual tomamos supremo, $\mathcal{M}$, obtenemos

$$V^*\,(x,\,s) \geq V\,(x,\,s)$$

concluyendo con esto la demostración. ■

5.2 Segunda prueba

1 Posteriormente, Shepp y Shiryaev dieron una nueva prueba de su resultado sobre las opciones rusas. Basados en el Teorema de Girsanov, introdujeron un cambio de medida que les permitió reducir el problema al caso unidimensional. Ver [**5**] y [**7**].

Recordemos que el precio de los bonos $\{B_t\}$ está dado por

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 > 0 \tag{104}$$

El precio de las acciones $\{S_t\}$ está dado por

$$dS_t = \mu\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t, \quad S_0 = 1 \tag{105}$$

con $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener estándar.

Observación 13 *Anteriormente hemos supuesto $B_0 = 1$ por comodidad. Además hemos supuesto que $\mu = r$, veremos en lo que sigue que en realidad esta última suposición no constituye ninguna restricción.*

Llamamos M_t al máximo alcanzado por el proceso hasta el instante t comenzando en $s = x\psi_0$, es decir:

$$M_t = \max \left\{ \max_{0 \le u \le t} S_u,\ x\psi_0 \right\} \tag{106}$$

con $\psi_0 \ge 1$, $x = S_0 > 0$, $s = x\psi_0$.

El premio de la opción rusa es, para cada $t \ge 0$

$$f_t = e^{-\delta t} M_t \tag{107a}$$

siendo $\delta > 0$.

De la teoría de las opciones sabemos que el costo de la opción rusa perpetua es

$$C^* (\mu,\ f) = B_0 \sup_{0 \le \tau < \infty} \mathbf{E}^{\mu - r} \frac{f_\tau}{B_\tau} \tag{108}$$

donde $\mathbf{E}^{\mu - r}$ es la esperanza respecto de la medida de probabilidad $\mathbf{P}^{\mu - r}$ definida más adelante. Así que el problema se reduce a un problema de parada óptima, esto es, a hallar

$$\sup_{\tau < \infty} \mathbf{E}^{\mu - r} e^{-r\tau} f_\tau$$

2 En esta sección introducimos la medida dual de martingala que nos permite dar una nueva representación de $C^* (\mu,\ f)$ y probar que esta cantidad **no** depende del valor de μ.

Para ello, a partir del proceso de Wiener $\{W_t\}_{t \ge 0}$, introducimos, para $\mu \in \mathbb{R}$ y $t \ge 0$, los procesos

$$W_t^{\mu - r} (\omega) = W_t (\omega) + \frac{\mu - r}{\sigma} t \tag{109}$$

$$Z_t^{\mu - r} (\omega) = \exp \left(- \frac{\mu - r}{\sigma} W_t (\omega) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 t \right) \tag{110}$$

Sea $\mathbf{P}_t = \mathbf{P} \mid_{\mathcal{F}_t}$ la restricción de la medida $\mathbf{P}$ a la σ - álgebra $\mathcal{F}_t$. Para $t \ge 0$, definimos las medidas $\mathbf{P}_t^{\mu - r}$ mediante:

$$d\mathbf{P}_t^{\mu - r} = Z_t^{\mu - r} d\mathbf{P}_t \tag{111}$$

Como $\mathbf{E}\, Z_t^{\mu - r} = 1$, las medidas $\mathbf{P}_t^{\mu - r}$ son de probabilidad y como esta familia $\left\{\mathbf{P}_t^{\mu - r} : t \geq 0\right\}$ es consistente, por el Teorema de extensión de premedidas de Carathèodory, se puede establecer la existencia de una medida de pro- babilidad $\mathbf{P}^{\mu - r}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ cuya restricción a $\mathcal{F}_t$ coincide con $\mathbf{P}_t^{\mu - r}$.

Del Teorema de Girsanov sabemos que el proceso $W^{\mu - r} = \left\{W_t^{\mu - r}\right\}$ es un $\mathbf{P}^{\mu - r}-$ proceso de Wiener. Esto implica

$$\text{distribución } \left(W^{\mu - r} \mid \mathbf{P}^{\mu - r}\right) = \text{distribución } (W \mid \mathbf{P}) \tag{112}$$

Con el interés de subrayar la dependencia en μ del proceso S_t definido en (105) escribimos $S_t(\mu)$. Notemos que la solución de (105) es

$$S_t(\mu) = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t} \tag{113}$$

Aplicando la Fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} d\left(\frac{S_t(\mu)}{B_t}\right) &= -\frac{S_t(\mu)}{B_t^2} dB_t + \frac{1}{B_t} dS_t(\mu) + \frac{1}{2}\frac{2S_t(\mu)}{B_t^3}(dB_t)^2 + \frac{1}{2} 0\,(dS_t(\mu))^2 \\ &= -\frac{S_t(\mu)}{B_t^2} r B_t dB_t + \frac{S_t(\mu)}{B_t}(\mu dt + \sigma dW_t) \\ &= \frac{S_t(\mu)}{B_t}(-r dt + \mu dt + \sigma dW_t) \\ &= \sigma\left(\frac{S_t(\mu)}{B_t}\right)\left(\frac{-r + \mu}{\sigma} dt + dW_t\right) \\ &= \sigma\left(\frac{S_t(\mu)}{B_t}\right) dW_t^{\mu - r} \end{aligned} \tag{114}$$

que en forma integral se escribe

$$\frac{S_t(\mu)}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} + \int_0^t \sigma \frac{S_u(\mu)}{B_u} dW_u^{\mu - r} \tag{115}$$

Luego, el proceso

$$\frac{S(\mu)}{B} = \left\{\frac{S_t(\mu)}{B_t}\right\}_{t \geq 0} \tag{116}$$

es una martingala (local) respecto de la medida $\mathbf{P}^{\mu - r}$ y por tanto llamamos a $\mathbf{P}^{\mu - r}$ la *medida de martingala*.

Por (114) es fácil ver que ($\mathbf{P}^{\mu-r}$—c.s.)

$$\frac{S_t(\mu)}{B_t} = \frac{S_0}{B_0}\exp\left(\sigma W_t^{\mu-r} - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \tag{117}$$

o sea

$$S_t(\mu) = S_0\exp\left(\sigma W_t^{\mu-r} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \tag{118}$$

que remarcamos, no depende de μ. Esto justifica que anteriormente hayamos tomado $\mu = r$ en la definición de S_t.

De (115) y (117) se desprende que

$$\mathbf{E}^{\mu-r}\left(\frac{S_t(\mu)}{B_t}\frac{B_0}{S_0}\right) = 1 \tag{119}$$

lo que permite definir una nueva familia de medidas de probabilidad, $\left\{\widetilde{\mathbf{P}}_t^{\mu-r}\right\}_{t\geq 0}$, mediante

$$\widetilde{\mathbf{P}}_t^{\mu-r}(A) = \mathbf{E}^{\mu-r}\left(\frac{S_t(\mu)}{B_t}\frac{B_0}{S_0}\mathbb{I}_A\right),\quad A\in\mathcal{F}_t \tag{120}$$

Al igual que con $\left\{\mathbf{P}_t^{\mu-r}\right\}$, podemos establecer la existencia de una medida de probabilidad $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$ en $(\Omega,\,\mathcal{F})$ tal que su restricción a $\mathcal{F}_t$ coincide con $\widetilde{\mathbf{P}}_t^{\mu-r}$.

Introduzcamos el proceso $\widetilde{W}^{\mu-r} = \left\{\widetilde{W}_t^{\mu-r}\right\}_{t\,\geq\,0}$ por

$$\widetilde{W}_t^{\mu-r} = W_t^{\mu-r} - \sigma t \qquad \left(= W_t + \left(\frac{\mu-r}{\sigma} - \sigma\right)t\right) \tag{121}$$

Nuevamente por el Teorema de Girsanov, vemos que $\widetilde{W}^{\mu-r}$ es un proceso de Wiener respecto de $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$. La igualdad (118) nos da

$$S_t(\mu) = S_0\exp\left(\sigma\widetilde{W}_t^{\mu-r} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \tag{122}$$

y por la fórmula de Itô

$$dS_t(\mu) = S_t(\mu)\left[\left(r+\sigma^2\right)dt + \sigma d\widetilde{W}_t^{\mu-r}\right] \tag{123}$$

$$d\left(\frac{1}{S_t(\mu)}\right) = -\frac{1}{S_t(\mu)}\left(rdt + \sigma d\widetilde{W}_t^{\mu-r}\right) \tag{124}$$

$$d\left(\frac{B_t}{S_t(\mu)}\right) = -\sigma\left(\frac{B_t}{S_t(\mu)}\right)d\widetilde{W}_t^{\mu-r} \tag{125}$$

La última ecuación implica que el proceso $\left\{\frac{B_t}{S_t(\mu)}\right\}$ es una martingala (local) respecto de la medida $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$, por esto llamamos a $\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}$ la *medida dual* (respecto de $\mathbf{P}^{\mu-r}$) *de martingala* . Por (123) podemos escribir

$$\frac{B_t}{S_t(\mu)} = \frac{B_0}{S_0}\exp\left(-\sigma\widetilde{W}_t^{\mu-r} - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \tag{126}$$

3 Nueva representación de $C^*(\mu, f)$.
Ya que para $A \in \mathcal{F}_\tau$ es

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}(A) = \mathbf{E}^{\mu-r}\left(\frac{S_\tau(\mu)}{S_0}\frac{B_0}{B_\tau}\mathbb{I}_A\right) \tag{127}$$

tenemos

$$B_0\mathbf{E}^{\mu-r}\frac{f_\tau}{B_\tau} = S_0\mathbf{E}^{\mu-r}\left(\frac{B_0}{B_\tau}\frac{S_\tau(\mu)}{S_0}\frac{f_\tau}{S_\tau(\mu)}\right) = S_0\widetilde{\mathbf{E}}^{\mu-r}\frac{f_\tau}{S_\tau(\mu)} \tag{128}$$

A partir de esta ecuación y de la definición de $C^*(\mu, f)$, ecuación (108), podemos dar una nueva expresión para $C^*(\mu, f)$

$$C^*(\mu, f) = S_0 \sup_{0\leq\tau<\infty}\widetilde{\mathbf{E}}^{\mu-r}\frac{f_\tau}{S_\tau(\mu)} \tag{129}$$

y si observamos que por (122) es:

$$\text{distribución}\left(S(\mu)\mid\widetilde{\mathbf{P}}^{\mu-r}\right) = \text{distribución}\left(S(r)\mid\widetilde{\mathbf{P}}\right) \tag{130}$$

con $\widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{\mathbf{P}}^0$, vemos que el valor de $C^*(\mu, f)$ no depende de μ.

Luego, escribimos C^* para el valor común (respecto de μ) de $C^*(\mu, f)$

$$C^{*}=S_{0}\sup_{0\leq\,\tau<\infty}\widetilde{\mathbf{E}}\;\frac{f_{\tau}\left(S_{\tau}\left(r\right)\right)}{S_{\tau}\left(r\right)} \tag{131}$$

Si ponemos

$$\psi_{t}=\frac{M_{t}}{S_{t}} \tag{132}$$

reescribimos C^{*} mediante

$$C^{*}=S_{0}\sup_{0\leq\,\tau<\infty}\widetilde{\mathbf{E}}\;e^{-\,\delta\,\tau}\psi_{\tau} \tag{133}$$

4 El proceso $M=\{M_t\}$ definido en (74) es no decreciente y por lo tanto de variación acotada en cada intervalo acotado. Aplicando la Fórmula de Itô a $g\left(x,\,y\right)=xy$ y teniendo en cuenta (124), con $r=\mu$ y $\widetilde{W}_t=\widetilde{W}_t^0$, se tiene

$$\begin{aligned} d\psi_{t} &= d\left(\frac{M_{t}}{S_{t}}\right)=dg\left(M_{t},\,S_{t}\right) \qquad (134)\\ &= M_{t}d\left(\frac{1}{S_{t}}\right)+\frac{1}{S_{t}}dM_{t}+0\left(d\left(\frac{1}{S_{t}}\right)\right)^{2}+0\left(dM_{t}\right)^{2}+dM_{t}d\left(\frac{1}{S_{t}}\right)\\ &= M_{t}d\left(\frac{1}{S_{t}}\right)+\frac{1}{S_{t}}dM_{t} \end{aligned}$$

Como $dM_{t}d\left(\frac{1}{S_t}\right)=0$, (134) se reduce a

$$d\psi_{t}=-\psi_{t}\left[rdt+\sigma d\widetilde{W}_{t}\right]+\frac{dM_{t}}{S_{t}} \tag{135}$$

o en forma integral

$$\psi_{t}=\psi_{0}-r\int_{0}^{t}\psi_{u}du-\sigma\int_{0}^{t}\psi_{u}d\widetilde{W}_{u}+\int_{0}^{t}\frac{dM_{u}}{S_{u}} \tag{136}$$

Si aplicamos nuevamente la fórmula de Itô, esta vez al proceso g(ψ_t) siendo $g=g\left(\psi\right)$ una función de clase C^2, con $\psi\geq1$, tenemos

$$\begin{aligned} dg\left(\psi_t\right) &= g'\left(\psi_t\right) d\psi_t + \frac{1}{2} g''\left(\psi_t\right)\left(d\psi_t\right)^2 \\ &= g'\left(\psi_t\right) d\psi_t + \frac{1}{2} g''\left(\psi_t\right) \sigma^2 \psi_t^2 dt \end{aligned} \tag{137}$$

o sea

$$\begin{aligned} g\left(\psi_t\right) = g\left(\psi_t\right) + \int_0^t Lg\left(\psi_u\right) du - \sigma \int_0^t g'\left(\psi_u\right) \psi_u d\widetilde{W}_u \\ + \int_0^t g'\left(\psi_u\right) \frac{dM_u}{S_u} \mathbb{I}_{\{\psi_u = 1\}} \end{aligned} \tag{138}$$

donde se sustituyó $d\psi_t$ por su expresión (135) y se introdujo la indicatriz del conjunto $\{(\omega, u) : \psi_u(\omega) = 1\}$ puesto que si $\psi_u(\omega) > 1$ se tiene que $S_u(\omega) < M_u(\omega)$ y luego $M(\omega)$ es constante en un entorno de u, por lo tanto $dM_u(\omega) = 0$.

El operador diferencial L está dado por

$$L = -r\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\sigma^2}{2} \psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \tag{139}$$

Probemos que para todo $t \geq 0$ se tiene $\left(\widetilde{\mathbf{P}} - \text{c.s.}\right)$

$$\int_0^t \mathbb{I}_{\{\psi_u = 1\}} du = 0 \tag{140}$$

Para ello pongamos $\Lambda(dt) = dt$ para la medida de Lebesgue, luego, por el Teorema de Fubini

$$\widetilde{\mathbf{E}} \int_0^\infty \mathbb{I}_{\{\psi_t(\omega) = 1\}} dt = \int_0^\infty \widetilde{\mathbf{E}} \mathbb{I}_{\{\psi_t(\omega) = 1\}} dt = \int_0^\infty \widetilde{\mathbf{P}}_{\psi_t} \left(\frac{M_t}{S_t} = 1\right) dt \tag{141}$$

Por las propiedades del proceso de Wiener se ve que la distribución $\widetilde{\mathbf{P}}_{\psi_t}$ es absolutamente continua respecto de $\Lambda(dt)$, luego, la última integral vale cero.

Llamamos

$$\varphi_t = \int_0^t \mathbb{I}_{\{\psi_u = 1\}} d\frac{M_u}{S_u} \tag{142}$$

Se ve claramente que el proceso $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ crece únicamente cuando el proceso $\{\psi_t\}$ alcanza la frontera $\{1\}$. El proceso $\{\psi_t\}$ es una difusión con reflexión instantánea en el punto $\{1\}$ en el espacio de estados $E = [1, \infty)$ (Ver capítulo 3 de [**12**].) . El operador infinitesimal del proceso sobre las funciones $g \in C^2$ coincide con el operador dado en la ecuación (139) con la condición

$$g'(1+) = 0 \tag{143}$$

en el punto $\{1\}$, siendo $g'(1+) = \lim\limits_{\psi \searrow 1} g'(\psi)$.

5 Tomando en cuenta las ecuaciones (135) y (142) observamos que el proceso $\{\psi_t\}$ satisface la ecuación diferencial

$$d\psi_t = -\psi_t \left[r dt + \sigma d\widetilde{W}_t \right] + d\varphi_t \tag{144}$$

con la condición inicial ψ_0.

Como

$$\int_\Omega g(\psi_t)\, d\mathbf{P} = \int_\mathbb{R} g(x)\, d\widetilde{\mathbf{P}}_{\psi_t}(x) \tag{145}$$

para toda $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ borel - $\mathcal{F}$ - medible, poniendo

$$\widetilde{V}(\psi) = \sup_\tau \widetilde{\mathbf{E}}\, e^{-\delta\tau} \psi_\tau \tag{146}$$

donde el supremo está tomado sobre todos los tiempos de parada finitos en casi todo punto respecto de $\widetilde{\mathbf{P}}$ (como de costumbre asumimos $e^{-\delta\tau(\omega)}\psi_{\tau(\omega)} = 0$ en el conjunto $\{\omega : \tau\{\omega\} = \infty\}$), observamos que

$$C^* = S_0 \widetilde{V}(\psi_0) \tag{147}$$

siendo C^* como en (131) y ψ_0 la constante definida por la función de pago $f = \{f_t\}$.

Por los resultados en el Teorema (12) se debería tener que el tiempo óptimo fuera de la forma

$$\overline{\tau} = \inf\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \overline{\psi}\right\} \tag{148}$$

siendo $\overline{\psi}$ alguna constante. Es decir, que $\overline{\tau}$ es el primer tiempo de arribo a la región de "detención de las observaciones", $\mathbf{D} = \left\{ t : \psi_t \geq \overline{\psi} \right\}$. En contraste, llamamos a $\mathbf{C} = \left\{ t : \psi_t < \overline{\psi} \right\}$ la "región de continuación de las observaciones".

Si asumimos de antemano que $\overline{V}$ es suficientemente regular, de acuerdo a la teoría de la parada óptima, $e^{-\delta t}\overline{V}(\psi_t)$ debe ser una martingala en la región de continuación, para lo que alcanza probar que su operador infinitesimal se anula en esta región. Además $\overline{V}(\psi)$ debe satisfacer la condición de borde (143). Por lo tanto, estamos buscando una solución al siguiente problema:

$$LV(\psi) = \delta V(\psi), \; 1 < \psi < \overline{\psi} \tag{149}$$

$$V'(\psi+) = 1 \tag{150}$$

Busquemos soluciones de (149) de la forma $V(\psi) = \psi^x$. Sustituyendo $V(\psi) = \psi^x$ en las ecuaciones anteriores, obtenemos para x la ecuación cuadrática

$$x^2 - \left(1 + \frac{2r}{\sigma^2}\right)x - \frac{2\delta}{\sigma^2} = 0 \tag{151}$$

Resolviendo, tenemos

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\delta}{\sigma^2}} \tag{152}$$

y

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\delta}{\sigma^2}} \tag{153}$$

Se ve claramente que $\gamma_1 = 1 - x_2$ y $\gamma_2 = 1 - x_1$ con γ_1, γ_2 definidas en (80). En particular, $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$.

Luego, en la región $1 < \psi < \overline{\psi}$ (donde (149) está definida) la solución $V(\psi)$ tiene la forma

$$V(\psi) = C_1\psi^{x_1} + C_2\psi^{x_2} \tag{154}$$

donde C_1 y C_2 son algunas constantes.

Ahora si asumimos que la región de continuación es de la forma $\mathbf{C} = \left\{ t \geq 0 : \psi_t \geq \overline{\psi} \right\}$ donde $\overline{\psi}$ es alguna constante, debemos imponer ciertas condiciones para poder determinar las constantes C_1, C_2 y $\overline{\psi}$.

La primer condición es que en la frontera, $\overline{\psi}$, las ganancias por detener las observaciones deben ser las mismas que si se deja correr un poco más el proceso, es decir

$$V\left(\overline{\psi}\right) = \overline{\psi} \tag{155}$$

o sea

$$C_1 \overline{\psi}^{x_1} + C_2 \overline{\psi}^{x_2} = \overline{\psi} \tag{156}$$

La segunda condición es que haya un “pegado suave” (smooth fit) (ver capítulo 3 de [**12**].) entre las dos ramas de V en la frontera, $\overline{\psi}$, esto es

$$V'\left(\overline{\psi}-\right) = 1 \tag{157}$$

o sea

$$x_1 C_1 \overline{\psi}^{x_1-1} + x_2 C_2 \overline{\psi}^{x_2-1} = 1 \tag{158}$$

La última condición es la condición (150) que ahora resulta

$$C_1 = -\frac{x_2}{x_1} C_2 \tag{159}$$

Restando la ecuación (158) a (156) se tiene:

$$C_1 \overline{\psi}^{x_1}\left(x_1 - 1\right) + C_2 \overline{\psi}^{x_2}\left(x_2 - 1\right) = 0 \tag{160}$$

Sustituyendo en ésta la ecuación (159) obtenemos:

$$\overline{\psi} = \left(\frac{x_2}{x_1}\frac{x_1 - 1}{x_2 - 1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \tag{161}$$

Se observa que $\overline{\psi} = \alpha$, con α^{-1} como en (81). Despejando de (159) y (160) obtenemos los valores

$$C_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 - x_1}\frac{1}{\overline{\psi}^{x_1-1}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1}\frac{1}{\overline{\psi}^{x_2-1}} \tag{162}$$

Por lo tanto, la función $V(\psi)$, solución de (149), está dada por

$$V(\psi)=\begin{cases} \frac{\overline{\psi}}{x_2-x_1}\left[(x_2-1)\left(\frac{\psi}{\overline{\psi}}\right)^{x_1}+(1-x_1)\left(\frac{\psi}{\overline{\psi}}\right)^{x_2}\right] & ,\ 1\leq\ \psi\ \leq\psi \\ \psi & ,\ \psi\geq\overline{\psi}\end{cases} \tag{163}$$

donde $\overline{\psi}$, x_1, x_2 están dadas por (152), (153) y (161) respectivamente.

Se ve claramente que V definida en (163) coincide con V definida en (79).

6 En este nuevo marco probaremos nuevamente el teorema (12).
Podemos enunciar este teorema en la siguiente forma:

Teorema 14 *La solución al problema de parada óptima*

$$\sup_{\tau\in\mathcal{M}}\mathbf{E}\,e^{-(r+\delta)\,\tau}M_\tau$$

está definida por

$$V(\psi)=\begin{cases} \frac{\overline{\psi}}{x_2-x_1}\left[(x_2-1)\left(\frac{\psi}{\overline{\psi}}\right)^{x_1}+(1-x_1)\left(\frac{\psi}{\overline{\psi}}\right)^{x_2}\right] & ,\ 1\leq\ \psi\ \leq\psi \\ \psi & ,\ \psi\geq\overline{\psi}\end{cases}$$

siendo

$$x_1=1+\frac{2r}{\sigma^2}-\sqrt{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\delta}{\sigma^2}}$$

$$x_2=1+\frac{2r}{\sigma^2}+\sqrt{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)^2+\frac{2\delta}{\sigma^2}}$$

$$\overline{\psi}=\left(\frac{x_2}{x_1}\frac{x_1-1}{x_2-1}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}}$$

El tiempo de parada óptimo es

$$\overline{\tau}=\inf\left\{t\geq 0:\psi_t\geq\overline{\psi}\right\}$$

con

$$\psi_t=\frac{M_t}{S_t}\ ,\ t\geq 0.$$

Demostración. (Ver [**5**].) Al mirar las ecuaciones (79), (147) y (163) se ve claramente que el enunciado del teorema es

$$\widetilde{V}\left(\psi\right) = V\left(\psi\right) \tag{164}$$

Para demostrar (164), probaremos las condiciones

(A) para todo tiempo de parada τ $(\widetilde{\mathbf{P}}$ - c.s.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}\, e^{-\,\delta\, t}\psi_t \leq V\left(\psi\right),\, \psi \geq 1$$

y

(B) el tiempo de parada $\overline{\tau} = \inf\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \overline{\psi}\right\}$ es $(\widetilde{\mathbf{P}}$ - c.s.) finito y

$$\widetilde{\mathbf{E}}\, e^{-\,\delta\, \overline{t}}\psi_{\overline{t}} = V\left(\psi\right),\, \psi \geq 1$$

que implican el enunciado.

Comencemos por establecer **(A)**, podemos aplicar la fórmula de Itô a $g\left(t, V\left(\psi_t\right)\right)$ siendo $g\left(t,x\right) = e^{-\,\delta\, t}x$, luego, para todo tiempo de parada finito τ se tiene

$$\begin{aligned} e^{-\,\delta\,\tau}V\left(\psi_t\right) &= V\left(\psi_0\right) + \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\,\delta\, u}V\left(\psi_u\right)\right] du \\ &+ \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\,\delta\, u}V\left(\psi_u\right)\right] d\psi_u + \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e^{-\,\delta\, u}V\left(\psi_u\right)\right] \left(d\psi_u\right)^2 \end{aligned} \tag{165}$$

es decir

$$\begin{aligned} e^{-\,\delta\,\tau}V\left(\psi_t\right) &= V\left(\psi_0\right) + \int_0^\tau e^{-\,\delta\, u}\left[\left(LV\right)\left(\psi_u\right) - \delta V\left(\psi_u\right)\right] du \\ &- \int_0^\tau e^{-\,\delta\, u}\sigma\psi_u V'\left(\psi_u\right) d\widetilde{W}_u + \int_0^\tau e^{-\,\delta\, u}V'\left(\psi_u\right) d\varphi_u \end{aligned} \tag{166}$$

Observamos que por definición de V, tenemos que $\left(LV\right)\left(\psi\right) - \delta V\left(\psi\right) \leq 0$ para todo $\psi \geq 1$. Además la última integral se anula puesto que φ_u crece únicamente cuando $\psi_u = 1$ y en este punto $V' = 0$. Luego tenemos que el proceso

$$I_t = -\int_0^t e^{-\,\delta\, u}\sigma\psi_u V'\left(\psi_u\right) d\widetilde{W}_u \tag{167a}$$

es una martingala local (por ser una integral respecto de un proceso de Wiener) y está uniformemente acotada por debajo

$$I_t \geq e^{-\,\delta\, t} V\left(\psi_t\right) - V\left(\psi_0\right) \geq -V\left(\psi_0\right)$$

entonces $\{I_t\}_{t\geq 0}$ es una súper martingala y:

$$\widetilde{\mathbf{E}}\, I_\tau \leq \widetilde{\mathbf{E}}\, I_0 \tag{168}$$

por el Teorema del muestreo opcional de Doob, ver Teorema (**6**). Por lo tanto, tomando esperanzas, $\widetilde{\mathbf{E}}$, en ambos lados de (166) tenemos que:

$$\widetilde{\mathbf{E}}\, e^{-\delta\,\tau} V\left(\psi_\tau\right) \leq \psi$$

para todo $\psi \geq 1$ y para todo tiempo de parada finito ($\widetilde{\mathbf{P}}$ - c.s.) τ. Con esto y teniendo en cuenta que $\psi \leq V(\psi)$, se tiene **(A)**.

Debemos probar ahora la condición **(B)**. Para esto, observemos que de la ecuación (166) se deduce que:

$$e^{-\delta\,(t\wedge\overline{\tau})} V\left(\psi_{t\wedge\overline{\tau}}\right) = V\left(\psi_0\right) + \int_0^{t\wedge\overline{\tau}} e^{-\,\delta\, u}\left[(LV)\left(\psi_u\right) - \delta\, V\left(\psi_u\right)\right] du + I_{t\wedge\overline{\tau}} \tag{169}$$

Ahora, si $\psi_0 \geq \overline{\psi}$, se tiene $\overline{\tau} = 0$ y la propiedad **(B)** se cumple trivialmente. Así que supongamos $\psi_0 < \overline{\psi}$, entonces $(LV)\left(\psi_u\right) - \delta\, V\left(\psi_u\right) = 0$ para $u \leq t \wedge \overline{\tau}\,(\omega)$, $\omega \in \Omega$, y luego:

$$V\left(\overline{\psi}\right) - V\left(\psi_0\right) \geq e^{-\delta\,(t\wedge\overline{\tau})} V\left(\psi_{t\wedge\overline{\tau}}\right) - V\left(\psi_0\right) = I_{t\wedge\overline{\tau}} \geq -\, V\left(\psi_0\right) \tag{170}$$

En definitiva tenemos que el proceso $\{I_{t\wedge\overline{\tau}}\}_{t\geq 0}$ es una martingala local, uniformemente acotada por encima y por debajo, luego una martingala.

Observar que $\widetilde{\mathbf{P}}\left(V\left(\psi_{\overline{\tau}}\right) = \overline{\psi}\right) = 1$. Entonces, una vez probado que $\widetilde{\mathbf{P}}\left(\overline{\tau} < \infty\right) = 1$, tendremos, por el Teorema del Muestreo Opcional, que $\widetilde{\mathbf{E}}\, I_\tau = \widetilde{\mathbf{E}}\, I_0 = 0$ y por tanto, (169) implicará que $\widetilde{\mathbf{E}}\, e^{-\,\delta\,\overline{\tau}} V\left(\psi_{\overline{\tau}}\right) = V(\psi)$.

En conclusión, sólo queda probar que $\widetilde{\mathbf{P}}\ \left(\overline{\tau} < \infty\right) = 1$. Recordemos que $\overline{\tau} = \inf\limits_{\tau\in\mathcal{M}} \left\{t \geq 0 : \psi_t \geq \overline{\psi}\right\}$ para cada $\overline{\psi} \geq 1$.

Observemos que para un entero $T \geq 1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{P}}\left(\max_{0\leq t\leq T} \psi_t \geq \overline{\psi}\right) &\geq \widetilde{\mathbf{P}}\left(\max_{0\leq u\leq t\leq T} \frac{S_u}{St} \geq \overline{\psi}\right) \\ &= \widetilde{\mathbf{P}}\left(\max_{0\leq u\leq t\leq T} e^{\sigma\left(\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(u-t)} \geq \overline{\psi}\right) \\ \geq \widetilde{\mathbf{P}}\left(e^{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)} \max\left[e^{\sigma\left(\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0\right)},\, e^{\sigma\left(\widetilde{W}_2 - \widetilde{W}_1\right)},\, \cdots,\, e^{\sigma\left(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{T-1}\right)}\right]\right. &\left. \geq \overline{\psi}\right) \\ = \widetilde{\mathbf{P}}\left(\max\left[\widetilde{W}_1 - \widetilde{W}_0, \widetilde{W}_2 - \widetilde{W}_1,\, \cdots,\, \widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{T-1}\right]\right. &\left. \geq K\right) \end{aligned} \tag{171}$$

siendo $K = \frac{\log \overline{\psi} - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}$. Es clarísimo, por las propiedades del proceso de Wiener, que para cualquier número real K la probabilidad en la última línea de la ecuación (171) tiende a 1 cuando $T \to \infty$, así el proceso ψ_t alcanza cualquier nivel con probabilidad uno, en particular el nivel $\overline{\psi}$. Esto prueba que ($\widetilde{\mathbf{P}}$ - c.s., $\psi \geq 1$) el tiempo de parada $\overline{\tau}$ es finito y por lo tanto el teorema. $\blacksquare$

Referencias

[1] - C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell J. Economics and management science, 4, 1973.

[2] - E. Dynkin, *The optimum choice of the instant for stopping a Markov process*, Soviet math, Dokl., 4, 1963.

[3] - E. Mordecki, *Elementary proofs on optimal stopping*, Prepublicaciones de la Universidad de la República, 2000.

[4] - L.A Shepp and A.N. Shiryaev, *The russian option "reduced regret"*, Ann. Appl. Probab.,1993.

[5] - L.A Shepp and A.N. Shiryaev, *A new look at the pricing of Russian option, Theory Probab. Appl. 39, 1994.*

[6] - A.N. Shiryaev, Yu M. Kabanov and D.O. Kramkov, *Toward the theory of pricing of options of both Europeans and Americans types II continuos time, Theory Probab. Appl. 39, 1994.*

[7] - E. Mordecki and D.O. Kramkov, *Integral options, Theory Probab. Appl. 39, 1994.*

[8] - V. Petrov y E. Mordecki, *Teoría de probabilidades*, Editorial URSS, Moscú, 2001.

[9] - A.N. Shiryaev, *Optimal stopping rules*, Springer - Verlag, Berlín - New York, 1978.

[10] - R.Sh. Liptser and A.N. Shiryaev, *Statistic of random processes*, Springer - Verlag, Berlín - Heidelberg, 1977.

[11] - G. Peskir, *Principles of optimal stopping and free - boundary problems*, Uniersity of Aarhus, 2001.

[12] - B. Oksendal, *Stochastic differential equations* 2^{nd} Edition, Springer - Verlag.

[13] - P. Protter, *Stochastic integration and differential equations* 2^{nd} Edition, Springer - Verlag, Berlín - Heidelberg, 2004.