
CAMINATAS DE ÁNGULOS RECTOS Y GRUPOS FUCHSIANOS

Monografía de Licenciatura

Ernesto García
Orientador: Pablo Lessa
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Julio 2019

*A mis viejos,
a Guz, a Sofi
y a los amigos y amigas
por el apoyo incondicional de siempre:
infinitas gracias.*

Resumen

En esta monografía estudiamos un conjunto a un parámetro de matrices de $PSL(2, \mathbb{R})$ cuya acción por transformaciones de Möbius corresponde a caminatas de ángulo recto en el plano hiperbólico. Fijado un punto base del plano hiperbólico y una dirección dada por un vector del tangente unitario, tenemos dos posibilidades de movimiento: avanzar en la dirección actual una cierta distancia o rotar noventa grados el vector tangente. Queremos determinar los puntos del plano hiperbólico accesibles por combinaciones sucesivas de estos movimientos.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Pablito por la paciencia y disposición y por la propuesta en sí, que resultó emocionante en todo momento.

También a Juan, a Matilde y al gordo por sus devoluciones, que mejoraron la redacción y la presentación de este trabajo.

A Sofi y a Santi por las tremendas imágenes.

Índice general

1. Preliminares de Geometría Hiperbólica	9
1.1. Automorfismos de \mathbb{H} y \mathbb{D}	11
1.2. Métrica hiperbólica en \mathbb{D} y \mathbb{H}	14
1.2.1. \mathbb{D}	15
1.2.2. \mathbb{H}	16
1.3. Geodésicas, distancia hiperbólica y cross-ratio.	17
1.4. Trigonometría hiperbólica.	19
1.5. Puntos fijos y clasificación de elementos en $SL(2, \mathbb{R})$	20
2. Preliminares de Grupos de Lie	25
2.1. $SL(2, \mathbb{R})$ como grupo de Lie matricial	25
2.2. $SL(2, \mathbb{R})$ como grupo de Lie	27
2.2.1. Subálgebras de dimensión 1 de \mathfrak{sl}_2	30
2.2.2. Subálgebras de dimensión 2 de \mathfrak{sl}_2	32
3. Preliminares de $PSL(2, \mathbb{R})$	35
3.1. Acción discontinua.	36
3.2. Acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en el tangente unitario.	38
4. El problema: Caminatas de ángulo recto en el plano hiperbólico.	41
5. Distancias de avance pequeñas	43
5.0.1. Propiedad de contracción de los conmutadores en $SL(2, \mathbb{R})$	43
5.1. Desigualdad de Jørgensen	44

6. Valores intermedios I.	47
6.1. Motivación:	47
6.2. El valor crítico r_∞	49
6.3. Si $A_r \cdot R$ rotación irracional...	49
7. Valores intermedios II: Embaldosados por polígonos de ángulos rectos.	51
7.1. $A_r \cdot R$ rotación primitiva.	51
7.1.1. Cálculo de los lados.	54
7.1.2. Los grupos G_{r_p} como caminatas de ángulos rectos.	56
7.2. $A_r \cdot R$ rotación no primitiva.	57
8. Distancias de avance grandes: de r_∞ en adelante.	61
8.1. Construcción de las regiones N,S,E,W	62
8.2. G_r es discreto para $r \geq r_\infty$	63
9. Apéndice	67
9.1. Dominios de Dirichlet	67

INTRODUCCIÓN

Podemos decir que esta es una monografía en geometría hiperbólica plana. El plano hiperbólico es el espacio de dimensión dos con curvatura gaussiana constante y negativa, en contrapunto con el plano euclídeo \mathbb{C} y la esfera unidad en \mathbb{R}^3 , que tienen curvatura constante cero y constante positiva respectivamente. Estos mundos son en efecto distintos, y el problema que estudiamos acá es un ejemplo de ello. A lo largo del trabajo pretendemos exponer hechos sobre el plano hiperbólico que fueron apareciendo aunque fuera lateralmente y que dejan en evidencia diferencias con el plano euclídeo. Es mi (no tan) humilde visión sobre lo que puede llegar a significar *hacer geometría*.

Trabajaremos en dos modelos clásicos para la geometría hiperbólica plana: el semiplano superior \mathbb{H} y el disco de Poincaré \mathbb{D} .

El problema a estudiar se puede plantear como sigue:

Supongamos que estamos sobre el punto i de \mathbb{H} mirando en la dirección del vector tangente i . Fijamos una distancia positiva r y se nos permite avanzar hacia adelante o hacia atrás una distancia r o rotar noventa grados nuestra visión. Si elegimos la primera opción damos un paso de largo r hacia adelante o hacia atrás pero manteniendo la vista fija. Con la segunda opción nos quedamos en el mismo lugar pero ahora mirando a lo que inicialmente era nuestra derecha o nuestra izquierda. Elegimos y realizamos sucesivamente alguna de las opciones por los siglos de los siglos.

¿A qué puntos y mirando en qué direcciones podríamos llegar eventualmente? ¿Que tan cerca puede volver a pasar nuestra caminata del punto del que partimos?, o mas aún ¿Podemos volver al punto inicial sin deshacer el camino andado hasta el momento?.

Si nuestro paseo fuera sobre el plano euclídeo la respuesta es intuitiva: Nos movemos por los vértices de una grilla cuadrada y por cada punto podemos mirar en cuatro direcciones. La respuesta es esencialmente la misma sin importar la distancia de avance que fijemos.

En el plano hiperbólico y en la esfera la respuesta a cada pregunta depende fuertemente de la distancia de avance.

Quizás una primera justificación de por qué esto es así la da el Teorema de Gauss-Bonnet, que dice que para cualquier triángulo del plano hiperbólico (resp. de la esfera), los ángulos interiores suman menos (resp. mas) que 180 grados, y la diferencia es igual al área que encierra. Como consecuencia, si pretendemos construir un polígono con ángulos y lados iguales, si existe, hay un único valor para la medida del lado. No es difícil de creer entonces que si los ángulos están dados, la respuesta dependa de la distancia de avance, al menos cuando aparecen polígonos regulares.

En la esfera solo hay finitas distancias de avance para las cuales los puntos accesibles son discretos y los grupos correspondientes aparecen como grupos de simetría de poliedros regulares.

Sin embargo en el plano hiperbólico las posibilidades son variadas.

En el Capítulo 1 estudiamos la relación entre las isometrías del plano hiperbólico y las matrices cuadradas de tamaño dos con coeficientes reales y determinante uno. Concretamente, tales matrices actúan por transformaciones de Möbius como isometrías para cierta métrica (la *métrica hiperbólica*). Como esta acción es buena, mirando la estructura (de grupo de Lie) del grupo de matrices podemos sacar conclusiones sobre su acción en \mathbb{H} . En esto consisten los Capítulos 2 y 3. En particular nos encontramos con una dicotomía para nuestro problema:

El conjunto de puntos a los que podemos acceder es discreto en \mathbb{H} o es denso. No hay término medio, no podemos acumular en algunas regiones y no en otras. Mas aún lo mismo pasa en el conjunto de direcciones a las que podemos mirar. Es decir que si logramos llegar a (casi) cualquier punto de \mathbb{H} , podremos hacerlo mirando a cualquier punto del horizonte, no solo en las cuatro direcciones que se nos permiten originalmente.

El contenido central de la monografía está en los Capítulos 5, 6, 7 y 8. Separamos en tres los casos a analizar según el valor de la distancia de avance: Valores pequeños, valores intermedios y valores grandes. Los valores pequeños y grandes los podemos tratar con toda generalidad. Entre los valores intermedios encontramos situaciones distintas, conviven casos correspondientes a grupos densos y a grupos discretos.

Probamos la siguiente clasificación:

Teorema. Existe números reales positivos ε y r_∞ y una sucesión creciente $S = \{r_n\}_{n \geq 5}$ con límite r_∞ y $r_5 > \varepsilon$ tal que:

- Para las distancias de avance $r \in (0, \varepsilon)$ el grupo correspondiente es denso.
- Los valores del intervalo $(0, r_\infty) \setminus S$ se corresponden con grupos densos.
- Para $r \in S \cup [r_\infty, +\infty)$ el grupo correspondiente es discreto. Además para cada $p \geq 5$ el término r_p de S corresponde a un embaldosado de \mathbb{H} por p -ágonos regulares.

Todo el trabajo se enmarca dentro de un problema mas general: *el problema de discreitud*, que pretende determinar, dadas dos matrices de $PSL(2, \mathbb{R})$, si el grupo que generan es discreto o no. El problema lo resuelven completamente Gilman y Maskit en [GM] y [G]. En dichos trabajos se mencionan también varios intentos previos que resultaron erróneos. Fijadas las dos matrices, Gilman y Maskit dan una serie de pasos que concluyen si el grupo generado es discreto o no. Sin embargo, este procedimiento no permite manejar los infinitos casos que nos interesan a la vez.

Preliminares de Geometría Hiperbólica

En este capítulo presentamos dos de los modelos clásicos para la geometría hiperbólica, el semiplano superior \mathbb{H} y el disco de Poincaré \mathbb{D} . Partimos de la compactificación por un punto del plano complejo: la esfera de Riemann que por $\hat{\mathbb{C}}$. La esfera de Riemann consiste en agregarle un punto que llamamos ∞ al plano complejo y definir la topología alrededor de ∞ como sigue:

Un subconjunto de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que contiene a ∞ es un abierto si su complemento es un compacto de \mathbb{C} .

Tenemos entonces la noción de que una sucesión converja a ∞ , esto es, que dado cualquier número positivo R , a partir de algún momento la sucesión quede contenida en el complemento de la bola de centro 0 y radio R .

Se puede entonces extender alguna de las operaciones usuales de \mathbb{C} a $\hat{\mathbb{C}}$ continuamente y se obtiene:

- $z + \infty = \infty + z = \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ para todo $z \neq 0$.
- $\frac{z}{\infty} = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\frac{z}{0} = \infty$ para todo $z \neq 0$.

No hay forma razonable de definir $\frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ ni $\frac{\infty}{\infty}$.

Si \mathbb{S} denota la esfera de radio uno en \mathbb{R}^3 , la proyección estereográfica es un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S} - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$. La estructura anterior en $\hat{\mathbb{C}}$ permite extender la proyección estereográfica a un homeomorfismo $\hat{\varphi} : \mathbb{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Por mas detalles recomendamos [SS].

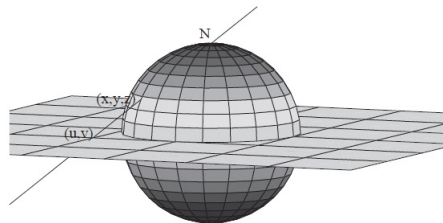


Figura 1.1: Proyección estereográfica.

Si consideramos espacios donde la función de curvatura es constante en todos los puntos, el Teorema de Gauss-Bonnet en su versión para triángulos distingue tres casos según el signo de la curvatura.

Teorema 1.1. *Teorema de Gauss-Bonnet para triángulos.*

Si T es un triángulo geodésico de ángulos α, β y γ , entonces:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = \int_T \kappa = \kappa \cdot \text{Área}(T),$$

siendo κ la curvatura.

El plano complejo es el espacio natural con curvatura cero. Gauss-Bonnet dice que en el plano los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico suman 180 grados. En la esfera de radio uno en \mathbb{R}^3 la curvatura es constante 1, y en este caso la suma de los ángulos de un triángulo siempre excede 180 grados. Los modelos que presentamos en este capítulo corresponden al caso de curvatura -1 , donde los ángulos de un triángulo suman menos que 180 grados.

La curvatura es una noción que viene dada con la *métrica* del espacio y se preserva por isometrías. Como la métrica del plano tiene curvatura cero, no podemos aspirar a tener un modelo de la geometría hiperbólica (i.e: de curvatura negativa) en \mathbb{C} sin alguna distorsión en las distancias. Se puede pensar esto como una analogía del hecho que no existe un planisferio de la Tierra que respete todas las distancias.

Sí podemos conseguir modelos en subconjuntos del plano respetando los ángulos. Eso quiere decir que si dos curvas se cortan en un punto con tangentes formando un cierto ángulo según la métrica usual, cuando se mida con la métrica hiperbólica el ángulo vale lo mismo. En otras palabras, la métrica hiperbólica será *conforme* a la euclídea (la usual). Sin embargo la longitud de cada curva será distinta medida con una métrica o con otra.

Una gran ventaja de trabajar en la esfera de Riemann es que conocemos sus mapas conformes: Las transformaciones de Möbius. En la primera sección caracterizamos las que preservan el semiplano superior y el disco, y en la siguiente encontraremos la métrica de curvatura constante -1 para la cual dichos mapas son isometrías.

Según el Teorema del mapa de Riemann ¹, hay un mapa conforme del disco a cualquier

¹Este resultado se puede encontrar en el Capítulo 8 de [SS] o en cualquier libro de análisis complejo.

abierto propio simplemente conexo del plano. Una ventaja de trabajar en \mathbb{H} o \mathbb{D} es que la acción de las Möbius en el borde es relativamente sencilla de visualizar. Habrá argumentos que dependen de esta acción en el borde.

1.1. Automorfismos de \mathbb{H} y \mathbb{D}

En esta sección obtenemos los mapas conformes que preservan el semiplano superior y el disco (respectivamente).

Definición 1.2. Para $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos, un **mapa conforme** es una biyección holomorfa $f: U \rightarrow V$. Si $U = V$, decimos que f es un **automorfismo de U** . Denotamos por $\text{Aut}(U)$, al conjunto de todos los automorfismos de U .

Los automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ son las transformaciones de Möbius (ver [SS]). Éstas se pueden codificar por una matriz compleja 2×2 invertible. Explícitamente, a una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $ad - bc \neq 0$ le corresponde la transformación $f_A: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que manda $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ y $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$.

Proposición 1.3. Si $f: U \rightarrow V$ es un mapa conforme, su inversa $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ también.

Demostración. Ver página 206 de [SS]. □

Para un abierto $U \subset \mathbb{C}$, $\text{Aut}(U)$ tiene estructura de grupo con la composición, la función identidad como neutro y la función inversa.

Definición 1.4.

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ es el semiplano superior.
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es el disco unitario.

Proposición 1.5. $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} : F(z) = \frac{z-i}{z+i}$ es un mapa conforme con inversa $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H} : G(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$

Demostración. Las dos funciones son holomorfas en sus dominios. Veamos que son inversas.

$$\text{Para } z \in \mathbb{D}, F \circ G(z) = \frac{i \cdot \frac{1+z}{1-z} - i}{i \cdot \frac{1+z}{1-z} + i} = \frac{z+1+z-1}{z+1+1-z} = \frac{2z}{2} = z$$

$$\text{Para } z \in \mathbb{H}, G \circ F(z) = i \cdot \frac{\frac{z-i}{z+i} + 1}{1 - \frac{z-i}{z+i}} = i \cdot \frac{(z-i+z+i)}{(z+i-z+i)} = \frac{2iz}{2i} = z$$

□

Enunciamos a continuación un lema clásico de Análisis Complejo que permite caracterizar los automorfismos del disco. Por ambos resultados referimos a [SS].

Lema 1.6. *Lema de Schwarz*

Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Entonces:

1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$
2. Si se da la igualdad anterior para algún $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$ entonces f es una rotación.

Teorema 1.7. *Automorfismos del disco*

1. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} : \alpha \in \mathbb{D}, e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1\}$
2. $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f(z) = \frac{az+b}{bz+a} : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$

Corolario 1.8. *Los únicos automorfismos del disco que fijan el 0 son las rotaciones.*

Demostración. Si $f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$ es tal que $f(0) = 0$, entonces $\alpha = 0$ y $f(z) = e^{i(\theta+\pi)} \cdot z$. □

En general denotamos por \mathcal{M}_α a $(z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z})$.

Corolario 1.9. *$\text{Aut}(\mathbb{D})$ actúa 1-transitivamente. Es decir, dados dos puntos del disco, hay un automorfismo que lleva uno en otro.*

Demostración. Dados α y $\beta \in \mathbb{D}$, $\mathcal{M}_\beta \circ \mathcal{M}_\alpha(\alpha) = \beta$ □

Conociendo el grupo $\text{Aut}(\mathbb{D})$, conjugando con la transformación $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, vista en la Prop 1.5, se obtienen los automorfismos de \mathbb{H} . Esta consideración establece un isomorfismo entre ambos grupos, pero no da toda la información si pretendemos fórmulas explícitas para los elementos de $\text{Aut}(\mathbb{H})$.

Definiciones 1.10.

- $GL_+(2, \mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$
- $SL(2, \mathbb{R}) := \{A \in GL_+(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$
- $PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm Id\}}$

Lema 1.11. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_+(2, \mathbb{R})$, entonces:

- $Re\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ac|z|^2 + bd + Re(z)(ad+bc)}{|cz+d|^2}$

$$\blacksquare \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Teorema 1.12. (Automorfismos de \mathbb{H})

Tenemos los siguientes isomorfismos de grupos:

1. $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) \cong \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$
2. $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \cong \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$

Demostración.

1. Consideremos

$$\Gamma : \operatorname{Aut}(\mathbb{D}) \rightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{H}) : \Gamma(\phi) = F^{-1} \circ \phi \circ F,$$

donde $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ asocia $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Es directo chequear que

$$\operatorname{Im}(\varphi(A))(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)(ad-bc)}{|cz+d|^2},$$

por lo tanto $\varphi(A)(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ y como $A^{-1} \in GL_+(2, \mathbb{R})$, se tiene que $\varphi(A)(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

Además, $\varphi(A)$ es restricción de un mapa conforme $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y concluimos $\varphi(A) \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.

Si $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ es tal que $\varphi^{-1}(f) \neq \emptyset$ entonces tiene un representante en $SL(2, \mathbb{R})$ (dividiendo cada entrada por la raíz del determinante). Por lo tanto podemos considerar $\varphi|_{SL(2, \mathbb{R})}$, y ambas funciones tienen el mismo recorrido. Tenemos entonces que

$$\varphi(SL(2, \mathbb{R})) \cong \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\operatorname{Ker}(\varphi) \cap SL(2, \mathbb{R})} = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm Id\}}.$$

Resta probar ahora la sobreyectividad de φ . Para eso necesitamos dos resultados adicionales, que probaremos en el lema que sigue. Por simplicidad, para $A \in SL(2, \mathbb{R})$, denotaremos por f_A a $\varphi(A)$.

Dada $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$, sea $\beta = f^{-1}(i)$. Por el primer punto del Lema 1.13, podemos considerar $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $f_A(i) = \beta$. Tenemos entonces que $f \circ f_A(i) = i$. Llamaremos h a $f \circ f_A \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$. Por lo tanto $F \circ h \circ F^{-1} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ y verifica $F \circ h \circ F^{-1}(0) = 0$; debe ser entonces una rotación en \mathbb{D} , que llamaremos R_θ . Por la segunda parte del Lema 1.13, obtenemos

$$F \circ h \circ F^{-1}(z) = R_\theta(z) = F \circ f_M \circ F^{-1}(z)$$

para algún $M \in SL(2, \mathbb{R})$. Deducimos entonces que $f = f_M \circ f_{A^{-1}} = f_{MA^{-1}}$ con $MA^{-1} \in SL(2, \mathbb{R})$, por lo tanto φ es sobreyectiva. □

Lema 1.13.

1. Dados z_1 y $z_2 \in \mathbb{H}$, $\exists A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $f_A(z_1) = z_2$
2. Una rotación alrededor de 0 en el disco es conjugada por F a un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$. Mas precisamente, si $R_{-2\theta} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una rotación de ángulo -2θ , entonces:

$$R_{-2\theta} \circ F(z) = F \circ f_{M_\theta}(z) \quad \forall z \in \mathbb{H}$$

donde

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

Demostración. Para el punto 1 basta probar que para todo $z \in \mathbb{H}$ existe una que lo manda a i . Primero consideramos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } b = -\frac{|z|}{\sqrt{\operatorname{Im}(z)}}$$

y obtenemos que $\operatorname{Im}(f_B(z)) = 1$. Considerando ahora

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } c = -\operatorname{Re}(f_B(z)),$$

concluimos que C, B y por lo tanto $C \cdot B$, viven en $SL(2, \mathbb{R})$. Además $\operatorname{Im}(f_{C \cdot B}(z)) = \operatorname{Im}(f_B(z)) = 1$ y $\operatorname{Re}(f_{C \cdot B}(z)) = 0$, de donde $f_C \circ f_B(z) = i$.

Para el punto 2, calculamos:

$$\begin{aligned} F \circ (f_{M_\theta}(z)) &= F \left(\frac{\cos(\theta)z - \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)z + \cos(\theta)} \right) = \frac{(\cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta))z - \operatorname{sen}(\theta) - i\cos(\theta)}{(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))z - \operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta)} = \\ &= \frac{e^{-i\theta}z - ie^{-i\theta}}{e^{i\theta}z + ie^{i\theta}} = e^{-2i\theta} \frac{z-i}{z+i} = R_{-2\theta} \circ F(z), \end{aligned}$$

como queríamos. □

1.2. Métrica hiperbólica en \mathbb{D} y \mathbb{H}

Una métrica (Riemanniana) en un espacio es una forma de medir vectores en el espacio tangente. Más precisamente, es dar una forma cuadrática no degenerada en cada plano tangente que varíe suavemente con los puntos. Las formas cuadráticas las podemos escribir el términos de la base canónica $\{dx^2, dy^2, dx dy\}$, donde para un punto z y un vector v del tangente:

- $dx^2(z)(v) = \operatorname{Re}(v)^2$
- $dy^2(z)(v) = \operatorname{Im}(v)^2$
- $dxdy(z)(v) = \operatorname{Re}(v) \cdot \operatorname{Im}(v)$

Para el plano complejo \mathbb{C} , el disco \mathbb{D} y el semiplano \mathbb{H} el plano tangente en cada punto es isomorfo a \mathbb{C} como espacio vectorial. Denotamos por $T_z\mathbb{H}$ al plano tangente a \mathbb{H} en z , y $T_z\mathbb{D}$, $T_z\mathbb{C}$ a los análogos en \mathbb{D} y \mathbb{C} .

La métrica usual en \mathbb{C} (la métrica euclídea), se escribe como $d|z|^2 = dx^2 + dy^2$. Para un punto z del plano y un vector v del tangente en z ,

$$d|z|^2(z)(v) = dx^2(z)(v) + dy^2(z)(v) = \operatorname{Re}(v)^2 + \operatorname{Im}(v)^2.$$

En general denotamos por $|v|^2$ a $d|z|^2(z)(v)$. Hallaremos una métrica para \mathbb{D} y una para \mathbb{H} , para las que en cada caso, los automorfismos que determinamos en el capítulo anterior sean isometrías. Más aún, la función $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, de la Prop. 1.5 será una isometría entre los dos espacios. Esto nos permite pasar de un modelo a otro, y todas las propiedades que se prueben en términos de la métrica para uno, valen también en el otro.

Definición 1.14. Una métrica dv^2 , definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, es **invariante** por $\operatorname{Aut}(U)$, si para todo $z \in U$, todo $v \in T_zU$ y toda $f \in \operatorname{Aut}(U)$ se cumple:

$$dv^2(z)(v) = dv^2(f(z))(f'(z) \cdot v).$$

1.2.1. \mathbb{D}

Supongamos $ds^2(z) = E^2(z)dx^2 + 2F(z)dxdy + G^2(z)dy^2$ una métrica invariante por $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

Proposición 1.15. Las métricas en \mathbb{D} invariantes por $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ verifican $F(z) = 0$, $E^2(z) = G^2(z) \forall z \in \mathbb{D}$

Demostración. Veamos que esto es cierto en $z_0 = 0$. Sea $R_\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto e^{i\theta} \cdot z$.

Su derivada es una rotación en \mathbb{C} :

$$R'_\theta(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : v \mapsto e^{i\theta} \cdot v.$$

Calculamos la métrica en 0 y $R_\theta(0)$:

- $ds^2(0)(1) = E^2(0) \cdot 1^2$
- $ds^2(0)(e^{i\theta} \cdot 1) = E^2(0)\cos(\theta)^2 + 2F(0)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + G^2(0)\operatorname{sen}(\theta)^2$

Derivando respecto a θ , obtenemos:

$$0 = -2E^2(0)\cos(\theta)\sen(\theta) + 2F(0)(\cos(\theta)^2 - \sen(\theta)^2) + 2G^2(0)\cos(\theta)\sen(\theta).$$

Evaluando en $\theta = \frac{\pi}{4}$, queda $E^2(0) = G^2(0)$ y en $\theta = 0$ queda $F(0) = 0$.

Dado $z \in \mathbb{D}$, sea $\mathcal{M}_z : \omega \mapsto \frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega}$. Tenemos que $\mathcal{M}_z(z) = 0$ y $\mathcal{M}'_z(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$. Por lo tanto

$$E^2(z)dx^2 + 2F(z)dxdy + G^2(z)dy^2 = \frac{E^2(0)}{(1-|z|^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

Para un vector de norma uno $\cos(\theta) + isen(\theta) \in \mathbb{C}$, queda:

$$\begin{aligned} E^2(z)\cos(\theta)^2 + 2F(z)\cos(\theta)\sen(\theta) + G^2(z)\sen(\theta)^2 = \\ \frac{E^2(0)}{(1-|z|^2)^2}(\cos(\theta)^2 + \sen(\theta)^2) = \frac{E^2(0)}{(1-|z|^2)^2}. \end{aligned}$$

Como el lado derecho no depende de θ , podemos derivar como antes, evaluar en 0 y $\frac{\pi}{4}$, y obtenemos que $\forall z$:

$$\begin{aligned} E^2(z) &= G^2(z) \text{ y} \\ F(z) &= 0. \end{aligned}$$

□

De la proposición anterior, tenemos la métrica definida a menos de elegir $E^2(0)$ y en cualquier caso tiene curvatura negativa. La elegiremos para que la curvatura quede igual a -1 en todos los puntos. No profundizaremos en estas cuestiones aquí, ver [H2].

Definición 1.16. Definimos la **métrica hiperbólica en \mathbb{D}** como la forma cuadrática

$$ds^2(z) = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-|z|^2)^2}.$$

1.2.2. \mathbb{H}

Teniendo la métrica definida en \mathbb{D} , y un mapa conforme $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, podemos definir una métrica en \mathbb{H} , de forma que el mapa sea una isometría. Tenemos:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \\ F'(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : v \mapsto \frac{2 \cdot i \cdot v}{(z+i)^2}. \end{aligned}$$

Para z en \mathbb{H} y v en el tangente en z a \mathbb{H} , queremos que se verifique

$$dv^2(z)(v) = ds^2(F(z))(F'(z) \cdot v).$$

Calculamos entonces:

$$\begin{aligned} dv^2(z)(v) &= \frac{4|F'(z) \cdot v|^2}{(1 - |F(z)|^2)^2} = \frac{16|v|^2}{(|z+i|^2 - |z-i|^2)^2} = \\ &= \frac{|v|^2}{(\operatorname{Im}(z))^2} = \frac{dx^2(z)(v) + dy^2(z)(v)}{\operatorname{Im}(z)^2}. \end{aligned}$$

Observación 1.17. Denotaremos por $T^1\mathbb{H}$ al tangente unitario. En el capítulo 3 estudiaremos la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $T^1\mathbb{H}$. Ahora observamos simplemente que el punto-vector $(i, i) \in T^1\mathbb{H}$ se corresponde por F con el punto-vector $(0, \frac{1}{2}) \in T^1\mathbb{D}$.

1.3. Geodésicas, distancia hiperbólica y cross-ratio.

Determinaremos ahora las geodésicas en \mathbb{H} para la métrica obtenida en la sección anterior.

Análogo a la definición en la geometría euclídea, para una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, suave a trozos, definimos la **longitud de γ** como la integral de la norma (hiperbólica) de la velocidad:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{dv^2(\gamma(t))(\gamma'(t))} dt.$$

Observar que la longitud de una curva no depende del sentido en que se recorre.

Dados dos puntos del semiplano, la **distancia hiperbólica** entre ellos la definimos como el ínfimo entre las longitudes de los caminos que unen los dos puntos. Denotamos por $\rho(z, w)$ a la distancia entre z y w .

Lema 1.18. *La curva $\alpha: t \mapsto e^t i$ está parametrizada por longitud de arco, i.e. tiene velocidad de módulo uno en todos los puntos medida con la métrica hiperbólica. Además es la curva de menor longitud entre dos puntos $e^a i$ y $e^b i$ donde $a < b$ y vale $\rho(e^a i, e^b i) = l(\alpha) = b - a$.*

Demostración. Calculando directamente: $\alpha'(t) = e^t i = \alpha(t)$. Por lo tanto, $dv^2(\alpha(t))(\alpha'(t)) = \frac{e^{2t}}{e^{2t}} = 1$ para todo t . Se deduce que $l(\alpha) = b - a$

Supongamos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva (suave a trozos) de $e^a i$ a $e^b i$. Escribimos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y calculamos:

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{dv^2(\gamma(t))(\gamma'(t))} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(\gamma'(t))^2 + \operatorname{Im}(\gamma'(t))^2}{\operatorname{Im}(\gamma(t))^2}} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(t)^2}} dt \geq \int_a^b \sqrt{\frac{y'(t)^2}{y(t)^2}} dt = \end{aligned}$$

$$\log(y(b)/y(a)) = b - a = l(\alpha).$$

Observar que la igualdad se da si y solo si $x'(t) = 0$ para todo t . La única curva simple (es decir, sin autointersecciones), que verifica eso es α . Deducimos que el eje imaginario minimiza la distancia entre sus puntos y por lo tanto es una geodésica.

□

Corolario 1.19.

- Las geodésicas para la métrica hiperbólica en \mathbb{H} son las rectas verticales (de parte real constante) y los semicírculos euclídeos perpendiculares al eje real.
- Para cualquier par de puntos existe una única geodésica que los une.

Demostración. Dados dos puntos cualesquiera de \mathbb{H} , hay una única recta vertical, si los puntos tienen parte real igual, o un único semicírculo euclídeo perpendicular al eje real si no, que los contiene. En cualquier caso, existe un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ que lo lleva al eje imaginario. Las isometrías llevan geodésicas en geodésicas. Los dos items se deducen de la demostración anterior.

□

Con las mismas consideraciones podemos probar también el siguiente corolario:

Corolario 1.20.

- $\rho(z, w)$ es la longitud del segmento geodésico que los une.
- $\rho(z, w) = \rho(z, \eta) + \rho(\eta, w)$ si y solo si η pertenece al segmento de geodésica entre z y w .
- ρ es una distancia.

Veremos ahora una forma de calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos cualesquiera de la esfera de Riemann.

Definición 1.21. El **cross-ratio** de z_1, z_2, z_3 y z_4 puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ se define por:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3) \cdot (z_4 - z_1)}$$

La utilidad del cross-ratio queda en evidencia en las siguientes proposiciones:

Proposición 1.22. El cross-ratio es invariante por la acción de las transformaciones de Möbius.

Demostración. La prueba es un cálculo directo. Para simplificar la cuenta, observar que para z y w , puntos distintos en $\hat{\mathbb{C}}$, y a, b, c y d , números reales tales que $ad - bc \neq 0$ se tiene:

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{(ad-bc) \cdot (z-w)}{(cz+d) \cdot (cw+d)}.$$

Susituyendo como corresponde se concluye la proposición. □

Proposición 1.23. Para z y w puntos de \mathbb{H} distintos, consideremos \hat{z} y \hat{w} , los puntos del borde $\mathbb{R} \cup \infty$ de la geodésica que los contiene, de manera que z queda entre \hat{z} y w . Entonces:

$$\rho(z, w) = \log(w, \hat{z}, z, \hat{w})$$

Demostración. Para z, w, \hat{z} y \hat{w} como en el enunciado, consideramos el elemento T de $PSL(2, \mathbb{R})$ que verifica $T(\hat{z}) = 0$, $T(z) = i$ y $T(\hat{w}) = \infty$. Queda entonces $T(w) = \lambda i$ para algún $\lambda > 1$. Con la aritmética de $\hat{\mathbb{C}}$, vemos que $(w, \hat{z}, z, \hat{w}) = (\lambda i, 0, i, \infty) = \lambda$. Del Lema 1.18, sabemos que $\rho(z, w) = \log(\lambda)$. □

Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ es una matriz de $SL(2, \mathbb{R})$, con consideraciones como las de la demostración anterior se puede probar la siguiente fórmula:

$$\cosh^{-1} \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} \right) = \rho(A \cdot i, i).$$

En la sección siguiente discutimos la función \cosh^{-1} .

1.4. Trigonometría hiperbólica.

En esta sección enunciamos reglas (casi todas) análogas a las de la geometría euclídea que relacionan la longitud de los lados de un triángulo con los ángulos interiores. Se definen las funciones:

- $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ el *coseno hiperbólico* de t , y
- $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ el *seno hiperbólico* de t .

Discutimos brevemente las inversas de estas funciones:

Supongamos que queremos resolver $x = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Multiplicando por e^t , obtenemos:

$$t = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

Como $(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$, vemos que $\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Definimos entonces:

$$\cosh^{-1}(x) := \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

y las soluciones a la ecuación anterior son:

$$t = \pm \cosh^{-1}(x).$$

Una discusión análoga vale para $\sinh(x)$ y definimos:

$$\sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Proposición 1.24. *Supongamos T un triángulo en \mathbb{H} de lados a, b y c con ángulos opuestos respectivos α, β y γ . Entonces se verifican:*

1. *Primera ley del coseno:*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \cdot \sinh(c) \cdot \cos(\alpha).$$

2. *Ley del seno:*

$$\frac{\sinh(a)}{\sen(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sen(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sen(\gamma)}.$$

3. *Segunda ley del coseno:*

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sen(\alpha) \cdot \sen(\beta) \cdot \cosh(c).$$

Con la primera ley del coseno y la ley del seno, como con sus análogas en la geometría euclídea, un triángulo queda determinado dados dos lados y un ángulo o dos ángulos y un lado. Sin embargo la geometría euclídea no tiene una regla análoga a la segunda ley del coseno. Así, un triángulo hiperbólico queda determinado dados sus tres ángulos internos.

En particular al aplicarle una homotecia a un triángulo, los ángulos no se preservan. Las homotecias no son mapas conformes para la métrica hiperbólica.

Probando ciertas identidades directas sobre las funciones \cosh y \sinh y haciendo uso de las reglas trigonométricas de la geometría euclídea (con las sustituciones en las distancias que correspondan), se puede probar la primera ley del coseno en primer lugar y con eso las dos leyes restantes. Este procedimiento está detallado en [A].

Por una aproximación intrínseca (sin apelar a la geometría euclídea) ver [T].

1.5. Puntos fijos y clasificación de elementos en $SL(2, \mathbb{R})$.

Lema 1.25. *La acción elemento no trivial de $SL(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fija dos puntos en el borde $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o un único punto en $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Planteamos, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $ad - bc = 1$:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z.$$

Esta ecuación se convierte en $cz^2 + (d - a)z - b = 0$, de donde:

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2 + 2cb}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Por lo tanto:

1. Si $(a + d)^2 > 4$ la ecuación anterior tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $(a + d)^2 = 4$ la ecuación anterior tiene una única solución real.
3. Si $(a + d)^2 < 4$ la ecuación anterior tiene dos soluciones complejas distintas y conjugadas. De éstas, solo una puede pertenecer al semiplano superior.

□

Definición 1.26. Sea $A \in SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{Id\}$. A partir de la demostración anterior definimos:

- A es **hiperbólica** si $tr^2(A) > 4$,
- A es **parabólica** si $tr^2(A) = 4$ y
- A es **elíptica** si $tr^2(A) < 4$.

Pretendemos refinar un poco esta clasificación viendo que tr^2 parametriza las clases de conjugación en $SL(2, \mathbb{R})$. Para lo que sigue nos basamos en [B].

Consideremos las transformaciones:

$$m_1 : z \mapsto z + 1$$

y para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$m_k : z \mapsto kz.$$

Observar que para todo k , $tr^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2$.

Sea $A \in SL(2, \mathbb{R})$ y f_A la transformación de Möbius asociada. Supongamos primero que es hiperbólica con fijos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tomamos h de forma que $h(\alpha) = \infty$ y $h(\beta) = 0$.

Obtenemos que ∞ y 0 son fijos por $h \cdot f_A \cdot h^{-1}$ y por lo tanto $h \cdot f_A \cdot h^{-1} = m_k$ para algún $k \neq 1$.

Si A es parabólica con único punto fijo $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tomamos cualquier β en el borde distinto de α y h de forma que $h \cdot f_A(\beta) = 1$ y $h(\beta) = 0$. Tenemos entonces que solo ∞ es fijo por $h \cdot f_A \cdot h^{-1}$ y $h \cdot f_A \cdot h^{-1}(0) = 1$, de donde $h \cdot f_A \cdot h^{-1} = m_1$.

Para analizar el caso elíptico pasaremos por el modelo del disco vía el mapa F de la proposición 1.5. Supongamos entonces $z_0 \in \mathbb{H}$ el único punto fijo de f_A , y h un automorfismo del disco que lleva $F(z_0)$ en 0.

Entonces,

$$h \cdot F \cdot f_A \cdot F^{-1} \cdot h^{-1}(0) = 0,$$

y por el corolario 1.8 debe ser una rotación en \mathbb{D} , que denotamos por $R_{-2\theta}$. Con el lema 1.13, obtenemos que:

$$f_A = F^{-1} \cdot h^{-1} \cdot F \cdot f_\theta \cdot F^{-1} \cdot h \cdot F,$$

donde f_θ es la transformación asociada a la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Observar que $F^{-1} \cdot h \cdot F$ es un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$ por ser un automorfismo del disco conjugado por F .

Ahora podemos probar el siguiente resultado. Por simplicidad escribiremos $f \sim g$ si son conjugados en $SL(2, \mathbb{R})$.

Proposición 1.27. *Dos elementos A, B de $SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{Id\}$ están en la misma clase de conjugación en $SL(2, \mathbb{R})$ si y solo si $\operatorname{tr}^2(A) = \operatorname{tr}^2(B)$.*

Demostración. Como la traza es invariante por conjugación, el directo es directo. En particular nos dice que un elemento de tipo hiperbólico, parabólico o elíptico no puede ser conjugado a un elemento de otro tipo.

Veamos el recíproco:

Suponemos $\operatorname{tr}^2(A) = \operatorname{tr}^2(B)$. Como \sim es una relación de equivalencia, el caso A, B parabólicos es inmediato. El caso elíptico también, ya que por lo visto antes, ambas matrices son conjugadas a la misma transformación f_θ .

Consideramos ahora el caso en que A, B son hiperbólicos. Por la discusión anterior tenemos que para algunos $k_1, k_2 \neq 1$, $A \sim m_{k_1}$ y $B \sim m_{k_2}$. Como $\operatorname{tr}^2(A) = \operatorname{tr}^2(B)$, debe ser:

$$k_1 + \frac{1}{k_1} = k_2 + \frac{1}{k_2},$$

de donde $k_2 = k_1^{\pm 1}$.

Sea $h : z \mapsto \frac{-1}{z}$. Se cumple:

$$h \cdot m_{k_1} \cdot h^{-1} = h \cdot m_{k_1} \cdot h = m_{\frac{1}{k_1}}.$$

Por lo tanto $m_{k_1} \sim m_{\frac{1}{k_1}}$ y podemos concluir que $A \sim B$.

□

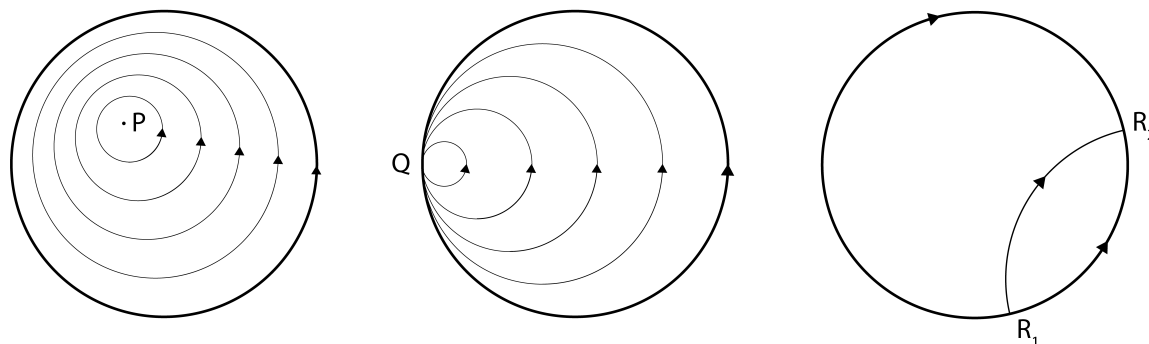


Figura 1.2: De izquierda a derecha, un elemento elíptico, un parabólico y un hiperbólico el modelo del disco.

Analizando las transformaciones m_k y f_θ , podemos sacar también algunas conclusiones sobre la dinámica de la acción de los elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{H} según su tipo:

- Un elemento elíptico es una rotación (para la métrica hiperbólica) alrededor de algún punto del plano hiperbólico. Figura 1.2 a la izquierda.
- Un elemento parabólico fija un único punto del borde y traslada sobre los llamados horociclos con ese punto del borde. Figura 1.2 al centro.
- Un elemento hiperbólico deja invariante una única geodésica y fija sus dos puntos al infinito. Uno de estos puntos es un repulsor y el otro un atractor. Figura 1.2 a la derecha.

NOTA:

Los **horociclos** en el modelo del disco son círculos euclídeos tangentes al borde. Si $t \mapsto z(t)$ parametriza una geodésica, el horociclo correspondiente es el límite del círculo de centro $z(t)$ y radio $\rho(z(0), z(t))$. Esto marca otra diferencia con la geometría euclídea, donde el límite de círculos de radio divergente es una recta.

Lema 1.28. *Dos elementos no triviales de $SL(2, \mathbb{R})$ que conmutan tienen el mismo conjunto de puntos fijos.*

Demostración. Supongamos $A, B \in SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{Id\}$. Si $A \cdot z = z$ entonces $A \cdot B \cdot z = B \cdot A \cdot z = B \cdot z$ y $B \cdot z$ es fijo por A . Por lo tanto el conjunto de puntos fijos de A es invariante por cualquier elemento B que conmute con A . Se concluye directamente que si A es elíptico o parabólico, B debe ser del mismo tipo y debe fijar el mismo punto que A .

Si A es hiperbólico, B no puede ser de otro tipo y fija los mismos dos puntos que A o los permuta. De cualquier manera la geodésica entre ellos queda invariante por la acción de B . Dicha geodésica con sus puntos del borde determina un segmento de recta o un arco de círculo en $\hat{\mathbb{C}}$ cerrado en cualquier caso. Cualquier función continua que lo deje invariante

debe tener al menos un punto fijo ahí. Si los bordes no son fijos, el punto fijo pertenecería a \mathbb{H} y B sería elíptico. Por lo tanto B fija los mismos dos puntos que A .

□

Preliminares de Grupos de Lie

2.1. $SL(2, \mathbb{R})$ como grupo de Lie matricial

El **grupo lineal general** real (complejo) es el conjunto de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con entradas reales (resp. complejas). Denotamos por $GL(n, \mathbb{R})$ al grupo lineal general real y por $GL(n, \mathbb{C})$ al grupo lineal general complejo.

Denotamos al conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas reales por $M_n(\mathbb{R})$ y por $M_n(\mathbb{C})$ al análogo con entradas complejas.

Definición 2.1. Sea A_m una sucesión de matrices de $GL(n, \mathbb{C})$. Decimos que A_m **converge** a una matriz A si cada entrada converge (como números complejos) a la correspondiente entrada de A .

Definición 2.2. Un **grupo de Lie matricial** es cualquier subgrupo G de $GL(n, \mathbb{C})$ con la siguiente propiedad: Si A_m es una sucesión de matrices en G que converge a cierta matriz A , entonces o bien A es un elemento de G , o bien A no es invertible.

La condición sobre G se reduce a ser un subconjunto cerrado de $GL(n, \mathbb{C})$. Esto no necesariamente quiere decir que G es cerrado en $M_n(\mathbb{C})$. Por ejemplo, $GL(2, \mathbb{R})$ es cerrado en $GL(2, \mathbb{R})$, pero no es cerrado en $M_n(\mathbb{C})$ porque hay sucesiones en $GL(2, \mathbb{R})$ que convergen a matrices no invertibles. Los grupos de Lie matriciales corresponden entonces a los **subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{C})$** .

Definición 2.3. El **grupo lineal especial** (sobre \mathbb{R} o \mathbb{C}) es el grupo de matrices $n \times n$ invertibles (con entradas sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} resp.) con determinante 1. Ambos son subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$. Como el determinante es un polinomio en las entradas de las matrices, por continuidad pasa al límite. Por lo tanto el límite de una sucesión convergente de matrices de determinante uno tiene determinante uno, concluyendo así que ambos conjuntos son subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{C})$ e incluso de $M_n(\mathbb{R})$.

Denotaremos por $SL(n, \mathbb{R})$ al grupo lineal especial real, y por $SL(n, \mathbb{C})$ al complejo.

Definición 2.4. Un grupo de Lie matricial G se dice **conexo** si para cualquier par de elementos A y B de G , existe un camino continuo $M(t)$, con $a \leq t \leq b$, contenido en G y tal que $M(a) = A$ y $M(b) = B$

En topología general, la definición de ser conexo es (estrictamente) mas débil que la definición anterior, que corresponde a ser **conexo por caminos**. Aunque no es obvio, un grupo de Lie matricial es conexo (con la definición topológica usual) si y solo si es conexo por caminos. Referimos a la página 22 de [H1] por mas detalles.

Proposición 2.5. *La componente conexa de la identidad en un grupo de Lie matricial G es un subgrupo normal de G .*

Demostración. Sea C la componente conexa de G que contiene a la identidad. Dadas dos matrices A y B de C , existen curvas continuas $A(t)$ y $B(t)$, tales que $A(0) = B(0) = Id$, $A(1) = A$ y $B(1) = B$. Por la continuidad del producto y las inversas, $t \mapsto A(t) \cdot B(t)$ y $t \mapsto A(t)^{-1}$ son curvas continuas de Id a $A \cdot B$ y A^{-1} respectivamente. Por lo tanto C es cerrada por productos e inversos.

Para ver que C es normal en G , sea M una matriz de G . Conjugar por M , es una función continua $G \rightarrow G$ por lo que lleva componentes conexas en componentes conexas. Como preserva la identidad debe ser $MCM^{-1} = C$.

□

Definición 2.6. Un subgrupo E de un grupo de Lie matricial G , se dice **discreto** si para todo elemento A de E , existe un entorno U de A en G donde E no tiene elementos distintos de A .

Lo que sigue también vale para cualquier grupo de Lie matricial pero nos enfocaremos en el grupo que nos interesa para esta monografía:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

Con la noción de convergencia que dimos, el producto de matrices en $SL(2, \mathbb{R})$, también es una función continua $*$: $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$. Esto es directo teniendo en cuenta que cada entrada del producto es un polinomio en las entradas de las dos matrices que estamos multiplicando.

Algo similar pasa al invertir las matrices : inv : $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Estas dos propiedades hacen de $SL(2, \mathbb{R})$ lo que se llama un **grupo topológico**. Los grupos topológicos son conjuntos con una topología y una estructura de grupo compatibles, esto significa que el producto y el inverso son funciones continuas. Sin haberlo hecho explícito, identificamos $M_2(\mathbb{R})$ con \mathbb{R}^4 , y le dimos a $SL(2, \mathbb{R})$ la topología heredada de la norma usual en \mathbb{R}^4 .

Proposición 2.7. Para H un subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. H no tiene puntos de acumulación en H .
2. H no tiene puntos de acumulación en $SL(2, \mathbb{R})$.
3. Id es un punto aislado de H .

Demostración. Nos basamos en la continuidad del producto de matrices en $SL(2, \mathbb{R})$.

- 1 implica 2: Supongamos que existen $h \in SL(2, \mathbb{R})$ y $\{h_k\}$ una sucesión contenida en H que converge a h . La sucesión $h_k \cdot h_{k+1}^{-1} \rightarrow Id$ por lo que H tendría un punto de acumulación sobre sí mismo, contradiciendo 1.
- Como H es un subconjunto de $SL(2, \mathbb{R})$, 2 implica 1 trivialmente.
- Como Id es un elemento de H , también es trivial que 1 implica 3.
- Por último veremos que 3 implica 1. Si h_k es una sucesión en H que converge a algún elemento h de H , la sucesión $h_k \cdot h^{-1}$ converge a Id , por 3 entonces, debe haber algún natural k_0 , para el cual $h_k \cdot h^{-1} = Id$ para cualquier $k > k_0$. Por lo tanto la sucesión debe ser eventualmente igual a h . Como cualquier sucesión convergente a h verifica esto y $h \in H$ es cualquiera, H solo puede tener puntos aislados.

□

2.2. $SL(2, \mathbb{R})$ como grupo de Lie

En la sección anterior hicimos referencia a los grupos topológicos, en donde interactúa estructura de grupo del conjunto con su topología. Pidiéndole más estructura al conjunto, hablamos de grupos de Lie:

Definición 2.8. Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable real o compleja, que tiene una estructura de grupo de forma tal que el producto y los inversos son funciones suaves.

Observar que efectivamente los grupos de Lie son grupos topológicos. Si bien no es obvio en general, es cierto que todo grupo de Lie matricial es un grupo de Lie. No es inmediato probar que todo grupo de Lie matricial tiene estructura de variedad diferenciable, aunque en el caso que nos interesa sí es sencillo. Por una prueba en el caso general, ver el Teorema 1.19 de [H1].

Proposición 2.9. $SL(2, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión tres encajada en $M_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Por definición, $SL(2, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, siendo \det la función que a cada matriz le asocia su determinante. Como ya mencionamos antes, \det es un polinomio en las entradas de la matriz, por lo que es una función suave. Es directo chequear que el único punto crítico es la matriz nula, que tiene determinante 0, por lo que 1 es un valor regular y $\det^{-1}(\{1\})$ es un variedad de dimensión tres encajada en $M_2(\mathbb{R})$.

□

Siendo variedades diferenciables, los grupos de Lie tienen sus espacios tangentes. El tangente a un grupo de Lie en el neutro (para nosotros el elemento Id) es el **álgebra de Lie** del grupo. Muchas cosas de un grupo de Lie se pueden estudiar a través de su álgebra de Lie, ya que en un entorno de la Id , el grupo y su álgebra de Lie son difeomorfos, con la ventaja de que el álgebra es un espacio vectorial.

Se puede ver que el álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial G consiste en las matrices X tales que e^{tX} pertenece a G para todo t real, donde e^M denota la exponencial de la matriz M . Enunciaremos a continuación algunas propiedades que usaremos. Si bien valen en dimensión finita en general, por simplicidad nos restringimos a $M_2(\mathbb{R})$ que es el caso que nos interesa.

Proposición 2.10. *Sea M una matriz de $M_2(\mathbb{R})$ y e^M su exponencial.*

1. Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, entonces $e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$
2. Si $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, entonces $e^M = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$
3. Si $M = P \cdot X \cdot P^{-1}$, entonces $e^M = P \cdot e^X \cdot P^{-1}$.
4. $\det(e^M) = e^{\text{tr}(M)}$, siendo $\text{tr}(M)$ la traza de M .

Del ítem 4, concluimos que el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ es el subespacio de las matrices de traza cero, que denotamos por \mathfrak{sl}_2 . Es un subespacio vectorial de dimensión tres en \mathbb{R}^4 y una posible base es la que forman los elementos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ahora en más será la única base de \mathfrak{sl}_2 a considerar. En el álgebra de Lie \mathfrak{sl}_2 , tenemos definido el **corchete de Lie**:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2 \quad \text{donde } [A, B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

Observar que $[A, B] = 0$ si y solo si A y B conmutan. Se puede chequear las siguientes propiedades del corchete:

- $[\ , \]$ es lineal en las dos variables.
- $[A, B] = -[B, A]$
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$. Esta se conoce como la identidad de Jacobi.

Una **subálgebra de Lie** de \mathfrak{sl}_2 es un subespacio vectorial invariante por el corchete de Lie.

Es directo chequear que $[X, Y] = 2Y$, $[X, Z] = -2Z$ y $[Y, Z] = X$.

Enunciamos ahora un resultado importante para los grupos de Lie matriciales y de particular interés para los que estudiaremos en esta monografía. Corresponde al Teorema 3.15 de [H1].

Teorema 2.11. *Sea G un grupo de Lie matricial y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Sea \mathfrak{h} una subálgebra de \mathfrak{g} . Entonces existe un único subgrupo de Lie cerrado y conexo H de G tal que \mathfrak{h} es su álgebra de Lie. H consiste exactamente en los elementos de la forma*

$$e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_m}$$

donde X_1, \dots, X_m pertenecen a \mathfrak{h} .

De aquí sacamos dos conclusiones inmediatas:

Corolario 2.12. *Sea G un subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Entonces:*

- Si $\dim \mathfrak{g} = 0$ entonces la componente conexa de G que tiene a la identidad es $\{Id\}$ y (por la Proposición 2.7) G es discreto.
- Si $\dim \mathfrak{g} = 3$ entonces $G = SL(2, \mathbb{R})$.

Para cada $r > 0$, estudiaremos el grupo $G_r = \overline{\langle A_r, R \rangle}$, la clausura en $SL(2, \mathbb{R})$ del grupo generado por

$$A_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

NOTA: Por simplicidad llamamos ahora G_r a $\overline{\langle A_r, R \rangle}$. A partir del capítulo 4, G_r pasará a ser $G_r = \langle A_r, R \rangle$. Esto no debería suponer ninguna confusión, ya que la clausura del grupo no tendrá importancia fuera de este capítulo.

El resultado principal de la sección es el siguiente:

Teorema 2.13. *Para cada r , G_r es discreto en $SL(2, \mathbb{R})$ o es todo $SL(2, \mathbb{R})$.*

La demostración se basa en el Lema 2.14 que enunciamos a continuación. Demostraremos ahora el Teorema asumiéndolo y el resto de la sección estará dedicada a probar el Lema.

Lema 2.14. *Para un subgrupo de Lie cerrado y conexo de $SL(2, \mathbb{R})$ de dimensión uno o dos, ocurre exactamente una de las siguientes:*

- *Hay exactamente un punto en $\overline{\mathbb{H}}$ que es fijo por todo el grupo.*
- *Hay dos puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fijos por todo el grupo.*

Ahora la prueba del Teorema 2.13:

Demostración. Denotamos por C a la componente conexa de G_r que contiene a la Id y \mathfrak{g} la subálgebra de Lie de \mathfrak{sl}_2 que le corresponde. Teniendo en cuenta el Corolario 2.12, basta probar que la dimensión de \mathfrak{g} no es uno ni dos.

Si \mathfrak{g} tiene dimensión uno o dos, el Lema 2.14 nos dice que C fija solo un punto en la clausura de \mathbb{H} o dos puntos en el borde.

Recordar del Lema 2.5 que C es normal en G_r . Por lo tanto, cualesquiera sean $g \in G_r$ y $h \in C$, $g^{-1} \cdot h \cdot g$ fija los mismos puntos que h .

Si C fija un único punto z_0 , ya sea en el interior de \mathbb{H} o en el borde, debe ser $h \cdot g(z_0) = g \cdot h(z_0) = g(z_0)$ y por lo tanto $g(z_0) = z_0$. En este caso, z_0 es fijo por todo el grupo G_r .

Si C fija dos puntos en el borde, razonando de la misma manera, un elemento g de G_r o bien fija ambos puntos o bien los permuta.

Ninguna de las dos puede pasar:

La rotación R ni permuta dos elementos del borde ni tiene puntos fijos en el borde y A_r no tiene puntos fijos en el interior. Absurdo.

□

Nos proponemos en lo que sigue probar el Lema 2.14. Este resultado es general de $SL(2, \mathbb{R})$, no depende de los grupos G_r que estudiamos en esta monografía. Discutiremos según si la dimensión de la subálgebra de Lie es de dimensión uno o de dimensión dos. Para dimensión uno veremos que cualquiera de las opciones puede pasar, es decir, el grupo puede fijar un punto en el interior, un punto en el borde o dos puntos en el borde (Lema 2.15). En dimensión dos el grupo fija exactamente un punto en el borde (Lema 2.21).

2.2.1. Subálgebras de dimensión 1 de \mathfrak{sl}_2

Una subálgebra de dimensión 1 es un subespacio generado por alguna matriz M de \mathfrak{sl}_2 . En ese caso el subgrupo correspondiente es $\{e^{tM}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Lema 2.15. *Si $\dim \mathfrak{g} = 1$ y $G = \{e^{tM}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Entonces:*

1. *Si $\det M \leq 0$ los elementos de G tienen uno o dos puntos fijos en común en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*
2. *Si $\det M > 0$, G fija exactamente un punto en el interior de \mathbb{H} .*

Demostración. El polinomio característico de M queda $p_M(t) = t^2 + \det M$. Si $\det M < 0$, entonces M tiene dos valores propios reales diferentes $\pm\lambda$ y es diagonalizable. Tenemos entonces que:

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} P^{-1},$$

para alguna matriz real invertible P . La acción de las matrices reales invertibles preserva el borde $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Concluimos para este caso que los elementos de G son de la forma

$$P \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-t\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}$$

y fijan los puntos $P(0)$ y $P(\infty)$.

Si M , que suponemos no nula, tiene determinante cero (y traza nula), su único valor propio es cero y es conjugada a Y también por una matriz real invertible. Es decir:

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En este caso los elementos de G son de la forma:

$$e^{tM} = P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

y todos fijan $P(\infty)$.

Supongamos ahora que $\det M > 0$. Como la subálgebra generada por M contiene a todos sus múltiplos escalares podemos suponer que $\det M = 1$. Por lo tanto M pertenece a la intersección $SL(2, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sl}_2$. Tenemos entonces que M es un elemento elíptico y por lo tanto conjugada en $SL(2, \mathbb{R})$ a una matriz de rotación. Como además M tiene traza cero el coseno del ángulo de rotación debe ser cero. M es entonces conjugada a

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o a su inversa por un elemento Q de $SL(2, \mathbb{R})$. Supongamos que es a R^2 . Tenemos entonces:

$$tM = Q \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

y su exponencial es:

$$e^{tM} = Q \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

En este caso G es el grupo de matrices que fijan $Q(i)$ en \mathbb{H} .

□

2.2.2. Subálgebras de dimensión 2 de \mathfrak{sl}_2

Denotaremos por $\langle A, B \rangle$ a la subálgebra generada por $\{A, B\}$.

Lema 2.16. *Las únicas subálgebras de \mathfrak{sl}_2 de dimensión 2 que contienen a X son las generadas por $\{X, Y\}$ y $\{X, Z\}$. Además éstas dos subálgebras son conjugadas por un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$.*

Demostración. Para la base $\{X, Y, Z\}$ de \mathfrak{sl}_2 el corchete verifica $[X, Y] = 2Y$, $[X, Z] = -2Z$ y $[Y, Z] = X$. Supongamos entonces un vector $v = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$. Si la subálgebra contiene a X y a v , debe contener también a los elementos $[X, v]$ y $[X, [X, v]]$.

Calculamos:

$$[X, v] = 2\beta Y - 2\gamma Z$$

y

$$[X, [X, v]] = 4\beta Y + 4\gamma Z.$$

Los tres vectores $X, [X, v], [X, [X, v]]$ son linealmente dependientes si y solo si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & -2\gamma \\ 0 & 4\beta & 4\gamma \end{pmatrix} = 0,$$

es decir si y solo si $\beta\gamma = 0$.

Para ver que $\langle X, Y \rangle$ y $\langle X, Z \rangle$ son conjugadas, consideramos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculamos para una matriz de $\langle X, Y \rangle$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Como cualquier elemento de $\langle X, Z \rangle$ lo podemos obtener de esta manera, concluimos entonces que

$$B\langle X, Y \rangle B^{-1} = \langle X, Z \rangle.$$

□

Proposición 2.17. *La clase de conjugación de X por elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ son exactamente las matrices de traza cero y determinante -1 .*

Demostración. El determinante y la traza se preservan por conjugación. Para ver que cualquier matriz de determinante -1 y traza cero es conjugada a X , haremos un razonamiento directo.

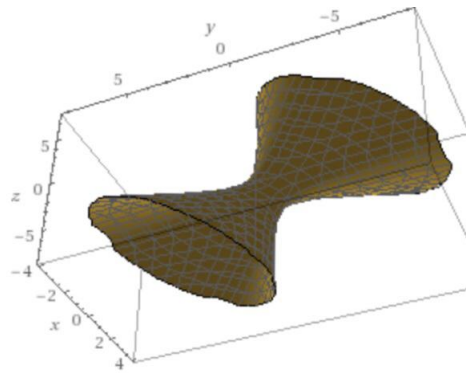


Figura 2.1: La clase de conjugación de X en los ejes X, Y y Z .

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de $SL(2, \mathbb{R})$, calculamos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}.$$

Sean r, p y q números reales de manera que $\begin{pmatrix} r & p \\ q & -r \end{pmatrix}$ tiene determinante -1 , es decir $-r^2 - pq = -1$. Buscamos entonces a, b, c y d de forma tal que $ad - bc = 1$, o equivalentemente $ad + bc = 1 + 2bc$, y:

$$\begin{pmatrix} 1+2bc & -2ab \\ 2cd & -1-2bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & p \\ q & -r \end{pmatrix}.$$

Obtenemos las relaciones $c = \frac{r-1}{2b}$, $a = \frac{-p}{2b}$ y $d = \frac{q}{2c} = \frac{bq}{r-1}$. Fijando cualquier $b \neq 0$ y usando que $r^2 + pq = 1$, es directo chequear que $ad - bc = 1$ concluyendo la demostración. \square

Corolario 2.18. *Cualquier subálgebra de dimensión dos de \mathfrak{sl}_2 contiene un elemento conjugado a X .*

Demostración. Una subálgebra de dimensión dos es un plano por el origen que además es invariante por el corchete. En la Figura 2.1 es claro que la clase de conjugación de X corta cualquier plano por el origen y por lo tanto cualquier subálgebra de dimensión 2. Damos otro argumento a continuación.

A menos de multiplicar por un escalar es suficiente encontrar, para cualquier subálgebra de dimensión dos, un elemento con determinante negativo. Observar que para el elemento $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$, el determinante queda $-\alpha^2 - \beta\gamma$. Por ejemplo, si la subálgebra es el plano $\langle Y, Z \rangle$, el elemento $Y + Z$ tiene determinante -1 .

Supongamos entonces que el plano está generado por dos vectores $v_1 = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$ y $v_2 = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z$. Si alguno de los dos tiene coordenada según Z igual a cero y según X no nula, su determinante es $-\alpha_i^2$ y obtenemos lo que queríamos. Si no, consideramos $v_1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} v_2$ y este vector tiene coordenada según Z nula. Si su primer coordenada es no nula ganamos. De lo contrario, el plano tiene al elemento Y . En ese caso consideramos también el vector $v_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} v_2$, que tiene coordenada según Y nula. De nuevo, si la coordenada según X es no nula tenemos el resultado, y si es cero entonces conseguimos Z y la subálgebra es $\langle Y, Z \rangle$, para la cual ya vimos que vale el resultado. \square

Corolario 2.19. *Cualquier subálgebra de \mathfrak{sl}_2 de dimensión 2 es conjugada a $\langle X, Y \rangle$.*

Demostración. Sea \mathfrak{g} una subálgebra de dimensión dos. Por el corolario anterior existe $M \in \mathfrak{g}$ tal que $M = Q \cdot X \cdot Q^{-1}$ para algún $Q \in SL(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto, $Q^{-1} \mathfrak{g} Q$ es una subálgebra de dimensión 2 de \mathfrak{sl}_2 que tiene a X . Por el Lema 2.16 debe ser entonces $\langle X, Y \rangle$ o $\langle X, Z \rangle$, que también son conjugadas entre ellas. \square

Lema 2.20. *Supongamos M una matriz de \mathfrak{sl}_2 que pertenece al plano $\langle X, Y \rangle$. Entonces e^M fija ∞ y posiblemente otro punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Supongamos $M = \alpha X + \beta Y$. El determinante queda $-\alpha^2 \leq 0$ y vale la demostración del primer ítem del Lema 2.15. \square

Lema 2.21. *El subgrupo asociado a una subálgebra \mathfrak{g} de dimensión dos de \mathfrak{sl}_2 según la correspondencia del Teorema 2.11 fija exactamente un punto en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{g} = Q \langle X, Y \rangle Q^{-1}$ para alguna matriz $Q \in SL(2, \mathbb{R})$. Sea G el subgrupo asociado a \mathfrak{g} . Según el Teorema 2.11 y aplicando la propiedad de la exponencial de una matriz para la conjugación, los elementos de G son de la forma $g = Q e^{M_1} e^{M_2} \dots e^{M_k} Q^{-1}$ para ciertas matrices $M_1, \dots, M_k \in \langle X, Y \rangle$ (y misma Q). Por el Lema 2.20 los elementos e^{M_i} fijan ∞ . Por lo tanto $Q(\infty)$ es fijo por g .

Para ver que no puede haber otro punto fijo común a todo el grupo, basta considerar la matriz

$$e^{t(X+Y)} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier t no nulo, la matriz anterior tiene como único punto fijo a ∞ , y sus elementos correspondientes $Q e^{t(X+Y)} Q^{-1}$ de G tienen como único punto fijo a $Q(\infty)$. \square

Observación 2.22. Si bien para nuestro análisis el Lema anterior ya es suficiente, notamos lo siguiente:

Cualquier matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ que fija ∞ es triangular superior, es decir, de la forma e^M para alguna matriz $M \in \langle X, Y \rangle$. Como la acción de $SL(2, \mathbb{R})$ en el borde es transitiva concluimos una especie de recíproco del Lema anterior:

Dado un punto del borde, el conjunto de matrices de $SL(2, \mathbb{R})$ que fijan dicho punto es un subgrupo de dimensión 2.

Preliminares de $PSL(2, \mathbb{R})$

Cualquier matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ actúa en \mathbb{H} por la misma transformación de Möbius que su opuesta. Por lo tanto ambas se identifican con la misma isometría del plano hiperbólico. El cociente que resulta de identificar cada matriz con su opuesta se denomina

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm Id\}.$$

Este espacio hereda la estructura de grupo de $SL(2, \mathbb{R})$, la topología cociente y queda definida también su acción en \mathbb{H} por transformaciones de Möbius.

La *norma de Frobenius* en $SL(2, \mathbb{R})$, es la que hereda como subconjunto de \mathbb{R}^4 , y será la única norma en $SL(2, \mathbb{R})$ a considerar en esta monografía. Una matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene norma de Frobenius:

$$\|M\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Observar que M y $-M$ tienen igual norma, por lo que queda definida para una matriz de $PSL(2, \mathbb{R})$. Sin embargo la distancia $\|A - B\|$ sí depende de los representantes. Para obtener una distancia podemos tomar para $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$:

$$\|A - B\| = \min\{\|X - Y\| : X = \pm A, Y = \pm B \in SL(2, \mathbb{R})\}.$$

Definición 3.1. Un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ se dice **Fuchsiano** si es discreto en la topología de $PSL(2, \mathbb{R})$. Es decir que su preimagen por la proyección cociente es un conjunto discreto en $SL(2, \mathbb{R})$.

Observar que vale el resultado 2.7 para subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y nos permite probar:

Proposición 3.2. Sea H es un subgrupo de índice finito en G . Si H es un grupo Fuchsiano, G también.

Demostración. Supongamos G un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ y $H \leq G$ de forma que $G = H \cup g_1 \cdot H \cup \dots \cup g_n \cdot H$. Como hay finitas coclases, para ver que G es discreto, basta ver que elementos de una coclase no acumulan. Entonces una sucesión de la forma

$$\{g_i \cdot h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset g_i \cdot H$$

acumula si y solo si

$$\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H$$

acumula en $SL(2, \mathbb{R})$. Concluimos por la proposición 2.7. \square

En el Teorema 1.12, vimos que $PSL(2, \mathbb{R})$ es isomorfo (como grupo) a los automorfismos de \mathbb{H} . Después definimos la métrica hiperbólica de manera que fuera invariante por la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en el tangente. Podríamos haber empezado al revés, definiendo la métrica hiperbólica y estudiar qué transformaciones la preservan. Se puede ver que el grupo de isometrías de \mathbb{H} con la métrica hiperbólica está generado por $PSL(2, \mathbb{R})$ y la transformación $z \mapsto -\bar{z}$. $PSL(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo de índice 2 en el grupo de isometrías. El punto es que esa función es un mapa anti-conforme de \mathbb{H} : preserva el valor absoluto de los ángulos pero cambia el signo. Decimos entonces que $PSL(2, \mathbb{R})$ se identifica con las **isometrías de \mathbb{H} que preservan orientación**. Una posible referencia para más detalles es [K]

Observamos que como $tr(A) = -tr(-A)$ y $\det(A) = \det(-A)$, las funciones $|tr(A)|$, $tr(A)^2$ y $\det(A)$ quedan definidas para su clase de equivalencia en $PSL(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto la clasificación de la sección 1.5 vale en $PSL(2, \mathbb{R})$: Un elemento tiene el mismo tipo (hiperbólico, elíptico o parabólico) que sus dos representantes en $SL(2, \mathbb{R})$.

3.1. Acción discontinua.

En esta sección veremos cómo la topología de $PSL(2, \mathbb{R})$ y en particular de los grupos fuchsianos pasa a las órbitas.

Definición 3.3. Sea M un espacio topológico y G un grupo actuando en M . Para $x \in M$ la G -órbita de x es $\{g \cdot x : g \in G\}$.

Definición 3.4. Un grupo G actúa discontinuamente en M si cualquier compacto K de M contiene a lo sumo finitos elementos de cualquier G -órbita.

Lema 3.5. Si K es un compacto de \mathbb{H} , $z_0 \in \mathbb{H}$ y Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, el conjunto $K_\Gamma = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot z_0 \in K\}$ es compacto en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración. La topología en $PSL(2, \mathbb{R})$ es la topología cociente dada por la proyección

$$\psi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T, \text{ donde } T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Basta ver que $\psi^{-1}(K_\Gamma)$ es cerrado y acotado en \mathbb{R}^4 .

Consideremos el mapa continuo

$$\beta : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}.$$

Entonces $\psi^{-1}(K_\Gamma) = \beta^{-1}(K)$ y es cerrado. Para ver que es acotado, supongamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \psi^{-1}(K_\Gamma).$$

Como K es compacto en \mathbb{H} existen constantes M_1 y M_2 positivas que no dependen de a, b, c y d , tales que $\frac{|az_0 + b|}{|cz_0 + d|} \leq M_1$ y $Im\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) = \frac{Im(z_0)}{|cz_0 + d|^2} \geq M_2$. De la segunda desigualdad concluimos que c y d están acotados. Entonces

$$|az_0 + b| \leq M_1 \cdot \sqrt{\frac{Im(z_0)}{M_2}}$$

y por lo tanto a y b también están acotados. □

Proposición 3.6. *Supongamos que un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa discontinuamente en \mathbb{H} . Entonces todo punto $z_0 \in \mathbb{H}$ tiene un entorno en el que todo punto distinto de z_0 tiene estabilizador trivial.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{H}$ de elementos distintos y $\{\gamma_n\}_{n \geq 1} \subset \Gamma$, tales que $\gamma_n \cdot z_n = z_0$. Para n suficientemente grande $\rho(z_n, z_0) < \varepsilon$. Con la desigualdad triangular y la invarianza de la métrica obtenemos:

$$\rho(\gamma_n \cdot z_0, z_0) \leq \rho(\gamma_n \cdot z_0, \gamma_n \cdot z_n) + \rho(\gamma_n \cdot z_n, z_0) = 2\rho(z_0, z_n) < 2\varepsilon.$$

Por otro lado, como la acción de Γ es discontinua y $\overline{B_{3\varepsilon}(z_0)}$ es un compacto, para n suficientemente grande $\rho(\gamma_n \cdot z_0, z_0) > 3\varepsilon$. Absurdo. □

Corolario 3.7. *Si Γ actúa discontinuamente en \mathbb{H} , los puntos fijos de elementos de Γ son aislados.*

Teorema 3.8. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. Γ es un grupo Fuchsiano si y solo si su acción en \mathbb{H} es discontinua.*

Demostración. Supongamos Γ Fuchsiano, $z_0 \in \mathbb{H}$ y K un compacto de \mathbb{H} . El conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot z_0 \in K\} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ es finito por ser intersección de un compacto con un conjunto discreto. Por lo tanto la acción de Γ en \mathbb{H} es discontinua.

Para probar la otra dirección, supongamos que Γ no es discreto pero actúa discontinuamente en \mathbb{H} . Sea $z_0 \in \mathbb{H}$ con estabilizador trivial (3.6). Si $\gamma_k \in \Gamma$ es tal que $\gamma_k \rightarrow Id$ con k , entonces $\gamma_k \cdot z_0 \rightarrow z_0$ y son todos puntos distintos. Entonces la acción no es discontinua. Absurdo. □

3.2. Acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en el tangente unitario.

Si M representa el semiplano superior o el disco de Poincaré, el tangente unitario respectivo es

$$T^1M = \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \in T_pM \text{ de norma hiperbólica } 1\}.$$

En cualquiera de los dos casos T^1M es homeomorfo a $M \times \mathbb{S}^1$ (un toro sólido!). Con la métrica hiperbólica en \mathbb{H} , queda:

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C} : |v| = \text{Im}(z)\}.$$

Si A es un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$ su acción en el tangente unitario es

$$A \cdot (p, v) = (f_A(p), f'_A(p) \cdot v),$$

donde f_A representa la transformación de Möbius asociada.

Esta acción pasa al cociente $PSL(2, \mathbb{R})$. Supongamos un elemento $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot (z, v) = (z, v)$. Por fijar $z \in \mathbb{H}$, A es una rotación alrededor de z , y como fija v el ángulo de rotación es cero. Concluimos que los estabilizadores de esta acción son todos triviales: decimos que esta acción es *libre*.

En 1.13 probamos que la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{H} es transitiva. Supongamos (z, v) un punto-vector de $T^1\mathbb{H}$ y consideremos una matriz cuya acción manda $(z, v) \mapsto (i, w)$. Si componemos ahora con una rotación con centro en i el punto base queda fijo y w rota. Tomamos una rotación que mande w en i . Por lo tanto podemos llevar cualquier punto-vector (z, v) en (i, i) y la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $T^1\mathbb{H}$ es transitiva.

Como $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa libre y transitivamente probamos lo siguiente:

Proposición 3.9. $PSL(2, \mathbb{R})$ es homeomorfo a $T^1\mathbb{H}$ con la identificación:

$$A \in PSL(2, \mathbb{R}) \mapsto f_A \cdot (i, i).$$

Fijado un punto-vector (z, v) del tangente unitario, nos interesan (a menos de inversos) dos movimientos: Mover z una cierta distancia r por la geodésica de dirección v (que llamamos *el transporte paralelo de (z, v) de paso r*) y rotar v noventa grados en sentido horario fijando z . Si $(z, v) = (i, i)$ estos movimientos están dados respectivamente por la acción de las matrices:

$$A_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A un (z, v) arbitrario lo escribimos como $M \cdot (i, i)$ para alguna matriz M de $PSL(2, \mathbb{R})$. Realizar algún movimiento sobre (z, v) corresponde a realizarlo sobre (i, i) y aplicarle M a lo que resulta. Esto se corresponde con la multiplicación a derecha de las matrices.

A modo de ejemplo, supongamos que queremos transportar paralelamente (z, v) y luego rotar el vector tangente. Si denotamos por (z_1, v_1) al punto-vector resultante, entonces:

$$(z_1, v_1) = M \cdot A_r \cdot R \cdot (i, i).$$

La acción de $A_r \cdot R$ será de particular interés para nosotros.

El problema: Caminatas de ángulo recto en el plano hiperbólico.

Estamos ahora en condiciones de enunciar precisamente el problema a estudiar en esta monografía:

Para cada distancia de avance $r > 0$, consideramos las matrices

$$A_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nos proponemos determinar para qué valores el grupo generado por ambas

$$G_r = \langle A_r, R \rangle$$

es discreto en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Algunas consideraciones generales:

- En 2.13 concluimos que la clausura de G_r en $SL(2, \mathbb{R})$ no puede tener dimensión uno ni dos. Si la clausura tiene dimensión cero, G_r es discreto y si tiene dimensión tres G_r es denso en $SL(2, \mathbb{R})$. Por lo tanto lo mismo vale en el cociente $PSL(2, \mathbb{R})$.
- Si la órbita por G_r de algún punto acumula en \mathbb{H} , la acción no es discontinua, G_r no es discreto y por lo tanto es denso. En particular no podemos acumular en \mathbb{H} sin acumular en todo el tangente unitario.

Distancias de avance pequeñas

Probamos en este capítulo que si la distancia de avance es cercana a cero, entonces el grupo G_r correspondiente no es un grupo Fuchsiano y por lo tanto es denso en $PSL(2, \mathbb{R})$.

5.0.1. Propiedad de contracción de los conmutadores en $SL(2, \mathbb{R})$

En un grupo G , se define el *conmutador* de dos elementos g_1 y g_2 de G como

$$[g_1, g_2] = g_1 \cdot g_2 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2^{-1}.$$

NOTA: Usamos el mismo símbolo para el conmutador en $SL(2, \mathbb{R})$ que para el corchete de Lie en \mathfrak{sl}_2 , pero este último ya no aparecerá en lo que resta de esta monografía.

Lema 5.1. *Existe un entorno U de la identidad en $SL(2, \mathbb{R})$, tal que dados dos elementos $A, B \in U$, $\|[A, B] - Id\| \leq \frac{1}{2} \min\{\|A - Id\|, \|B - Id\|\}$.*

Demostración. Para cualquier par de matrices A, B de $SL(2, \mathbb{R})$, se tiene:

$$[A, B] - Id = ABA^{-1}B^{-1} - Id = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - Id)(B - Id) - (B - Id)(A - Id))A^{-1}B^{-1}.$$

Sean $\alpha = \|A - Id\|$ y $\beta = \|B - Id\|$ y supongamos que son menores o iguales a uno.

De lo anterior, conseguimos la desigualdad,

$$\|[A, B] - Id\| \leq 2\alpha\beta \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\|.$$

Observando que $\|A^{-1}\| = \frac{1}{|\det A|} \cdot \|A\| = \|A\| \leq \|A - Id\| + \|Id\| = \alpha + \sqrt{2}$, y análogamente con B , obtenemos:

$$\|[A, B] - Id\| \leq 2\alpha\beta \cdot (\alpha + \sqrt{2})(\beta + \sqrt{2}) \leq \alpha\beta \cdot 2(1 + \sqrt{2})^2.$$

Por lo tanto, si A y B pertenecen al entorno $U = \{X \in SL(2, \mathbb{R}) : \|X - Id\| < (2(1 + \sqrt{2}))^{-2} \approx 0,2071\}$ verifican lo que afirmábamos.

□

Probamos ahora el resultado principal del capítulo:

Lema 5.2. *Si la distancia de avance es pequeña, G_r es denso en $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Demostración. Por definición, un grupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ es la imagen de un grupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})$ por la proyección al cociente $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$. Veremos que los representantes de G_r en $SL(2, \mathbb{R})$, para r pequeño deben acumular en la identidad y concluiremos por 2.7.

Usamos la misma notación para los elementos y subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$ que para sus representantes en $SL(2, \mathbb{R})$.

Consideramos entonces r suficientemente cerca de 0 para que los elementos A_r y $R \cdot A_r \cdot R^{-1}$ pertenezcan al entorno de Id en $SL(2, \mathbb{R})$ donde el conmutador contrae (Lema 5.1), y el subgrupo H de G_r que generan estos dos elementos.

Supongamos que G_r es discreto. Entonces H también lo es y podemos considerar un elemento M de H que minimice la distancia a Id , con respecto al resto de los elementos (no triviales) de H . Afirmamos que un tal elemento debe pertenecer al centro de H .

Como los generadores de H pertenecen al entorno contractivo, debe ser $[A_r, M] = [R \cdot A_r \cdot R^{-1}, M] = Id$ y por lo tanto M conmuta con todos los elementos de H . El Lema 1.28 nos dice que solo la identidad puede conmutar con A_r y $R \cdot A_r \cdot R^{-1}$. \square

Conocemos otras formas de probar el Lema 5.2. En la sección siguiente damos otra alternativa y en el Apéndice 1 una tercera.

5.1. Desigualdad de Jørgensen

El resultado de esta sección muestra que dos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ que generan un grupo Fuchsiano no elemental no pueden estar muy cerca de la identidad.

Definición 5.3. Un Grupo Fuchsiano G se dice **elemental** si existe una G -órbita finita en $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Observación 5.4. Los grupos G_r que nos interesan no son elementales: Para cualquier punto z de $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0, \infty\}$, el conjunto $\{A_r^n \cdot z\}_n$ es infinito. Por lo tanto $\{A_r^n \cdot R \cdot 0\}_n$ y $\{A_r^n \cdot R \cdot \infty\}$ también.

Proposición 5.5. (*Desigualdad de Jørgensen*) Sean $A, B \in PSL(2, \mathbb{R})$, tales que el grupo generado por ellos $G = \langle A, B \rangle$ es un grupo Fuchsiano no elemental. Entonces

$$|tr(A)^2 - 4| + |tr(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

Además la cota es óptima.

Demostración. La prueba de la proposición así enunciada se puede encontrar en [K]. El resultado original aparece en el artículo de Jørgensen [J]. \square

En las referencias mencionadas se dan ejemplos donde se verifica la igualdad. A continuación obtenemos un ejemplo en el contexto de esta monografía que también la verifica.

Corolario 5.6. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $r < \varepsilon$ el grupo G_r es denso en $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Demostración. Basta determinar para cuáles valores de r se verifica

$$|tr(A_r)^2 - 4| + |tr(A_r R A_r^{-1} R^{-1}) - 2| < 1$$

siendo $A_r = \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Es directo chequear que la traza del conmutador $[A_r, R] = A_r R A_r^{-1} R^{-1}$ es $\frac{tr(A_r)^2}{2}$. Observando que la función $e^r + e^{-r} > 2 \forall r > 0$ obtenemos:

$$|tr(A_r)^2 - 4| + |tr(A_r R A_r^{-1} R^{-1}) - 2| = e^r + e^{-r} + 2 - 4 + \left| \frac{e^r + e^{-r} + 2}{2} - 2 \right|.$$

De la expresión anterior se obtiene que

$$|tr(A_r)^2 - 4| + |tr(A_r R A_r^{-1} R^{-1}) - 2| < 1$$

para todo $r < \cosh^{-1}(4/3) \approx 0,79536$ y en el caso $r = \cosh^{-1}(4/3)$ se verifica la igualdad. □

Valores intermedios I.

6.1. Motivación:

Cualquier isometría de $PSL(2, \mathbb{R})$ se puede escribir como una composición de dos simetrías axiales. Además hay cierta libertad para elegir los ejes de tales simetrías. En el Capítulo 7 de [B] se puede encontrar la construcción general, según si la matriz es elíptica, parabólica o hiperbólica. El resultado es el siguiente:

Una isometría de $PSL(2, \mathbb{R})$ se escribe como una composición de dos simetrías axiales s_1 y s_2 que tiene por ejes respectivos a las geodésicas r_1 y r_2 , según el tipo de la matriz.

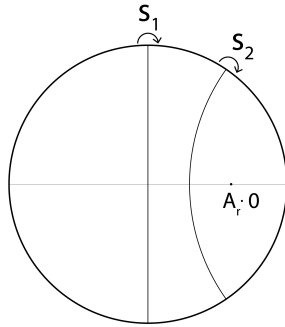
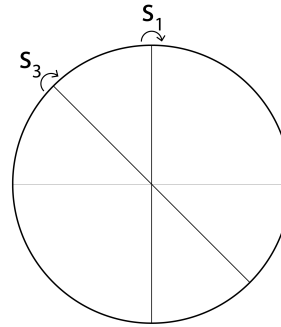
- *Si la matriz es elíptica sabemos que es una rotación alrededor de un punto fijo. En ese caso r_1 y r_2 se cortan en el punto fijo con un ángulo igual a la mitad del ángulo de rotación.*
- *Si la matriz es parabólica es una traslación por los horociclos de cierto punto del borde fijo. En este caso r_1 y r_2 comparten un punto en el borde y este es el punto fijo de la matriz. Además r_1 y r_2 cortan a 90 grados los horociclos.*
- *Si la matriz es hiperbólica es una traslación por alguna geodésica. Para este caso r_1 y r_2 son perpendiculares al eje de traslación y lo cortan a una distancia igual a la mitad de la distancia de traslación.*

Observar que en cualquier caso, dada la matriz, tenemos infinitas opciones para elegir la geodésica r_1 , pero una vez elegida, si queremos escribir la transformación como $s_2 \cdot s_1$, la segunda queda determinada.

Nos concentraremos ahora en las matrices que generan los grupos que estudiamos aquí:

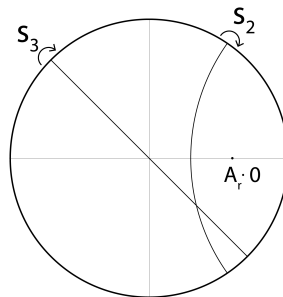
$$A_r = \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A_r es un elemento hiperbólico de $PSL(2, \mathbb{R})$ y como tal, lo podemos escribir como producto de dos simetrías axiales $s_2 \cdot s_1$ con ejes disjuntos. Fijado $r > 0$, s_1 será la simetría que tiene por eje a la geodésica $[-1, 1] \subset \mathbb{H}$. En el modelo del disco de Poincaré, esta geodésica corresponde al diámetro $[i, -i]$. La simetría s_2 la elegimos de manera que tenga por eje a la geodésica perpendicular a $[0, \infty]$ por el punto $e^{\frac{r}{2}} \cdot i$ (el punto medio del segmento $[i, e^r \cdot i]$).

(a) $A_r = s_2 \cdot s_1$.(b) $R = s_1 \cdot s_3$.

Para la matriz de rotación R , las simetrías a elegir serán s_1 como antes y s_3 la que tiene por eje a la geodésica que corta $[0, \infty]$ a -45 grados en el punto i . De esta manera queda $R = s_1 \cdot s_3$. En el modelo del disco, esta geodésica es el diámetro $\{(x, y) \in \mathbb{D} : y = -x\}$.

Como $s_1^2 = Id$, obtenemos que $A_r \cdot R = s_2 \cdot s_3$.

Figura 6.2: $A_r \cdot R = s_2 \cdot s_3$.

De las geodésicas que elegimos, la que varía según el valor de r es el eje de s_2 . Para $r \approx 0$, los ejes de s_2 y s_3 se cortan cerca del punto $i \in \mathbb{H}$. A medida que r aumenta, el punto de intersección se aleja hacia el borde hasta que las dos geodésicas dejan de cortarse en el interior de \mathbb{H} . En términos de la matriz $A_r \cdot R$ nos dice que para valores pequeños de r , $A_r \cdot R$ es elíptica, que hay un valor crítico que llamaremos r_∞ en que las geodésicas 'se cortan' en un punto del borde y $A_{r_\infty} \cdot R$ es parabólica. Para valores mayores $A_r \cdot R$ es hiperbólica.

6.2. El valor crítico r_∞ .

Teniendo en cuenta la discusión anterior sobre $A_r \cdot R$ obtenemos el valor crítico como sigue:

Dado $r > 0$,

$$A_r \cdot R = \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} & -e^{\frac{r}{2}} \\ e^{-\frac{r}{2}} & e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix},$$

y su traza es

$$\text{tr}(A_r \cdot R) = \frac{e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{2}} \in (\sqrt{2}, +\infty).$$

El mínimo $\text{tr}(A_r \cdot R) = \sqrt{2}$ se alcanza solo en $r = 0$.

Tenemos que $A_r \cdot R$ es elíptico si y solo si $\text{tr}(A_r \cdot R) < 2$.

Si denotamos por λ a $e^{\frac{r}{2}}$, $A_r \cdot R$ es elíptico si y solo si:

$$\lambda + \lambda^{-1} < 2\sqrt{2}.$$

Debe ser entonces $\sqrt{2} - 1 < \lambda < \sqrt{2} + 1$ de donde:

$$\log(\sqrt{2} - 1) < 0 < \frac{r}{2} < \log(\sqrt{2} + 1).$$

Solo nos interesan valores positivos para r . Definimos entonces:

$$\mathbf{r}_\infty = 2 \cdot \log(\sqrt{2} + 1)$$

El panorama es entonces:

- $A_r \cdot R$ es elíptico sii $r \in (0, r_\infty)$
- $A_r \cdot R$ es parabólico sii $r = r_\infty$
- $A_r \cdot R$ es hiperbólico sii $r \in (r_\infty, +\infty)$.

Tanto este capítulo como el siguiente están dedicados a analizar el primer caso.

6.3. Si $A_r \cdot R$ rotación irracional...

Consideraremos ahora muchos de los valores $r < r_\infty$ para lo cuales veremos que el grupo G_r es denso. Siendo $A_r \cdot R$ elíptico, es una rotación alrededor de algún punto ω

de \mathbb{H} . Si no tiene orden finito, la órbita de cualquier punto $z_0 \neq \omega$ es densa en el círculo $\{z : \rho(z, \omega) = \rho(z_0, \omega)\}$.

Por lo tanto para estos valores de r el grupo G_r es denso en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Estos valores para r son un conjunto denso en el intervalo $(0, r_\infty)$: Escribimos:

$$A_r \cdot R = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot P,$$

donde $P \cdot i$ es el punto fijo de $A_r \cdot R$ y θ el ángulo de rotación.

$A_r \cdot R$ tiene orden infinito si y solo si θ es un múltiplo irracional de 2π . En términos de r tenemos:

$$2 \cdot \cos(\theta) = \operatorname{tr}(A_r \cdot R) = \frac{e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Dividiendo por $\sqrt{2}$, queda:

$$\sqrt{2} \cdot \cos(\theta) = \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{2}\right),$$

de donde:

$$r = 2 \cdot \operatorname{cosh}^{-1}\left(\sqrt{2} \cdot \cos(\theta)\right).$$

Los valores de r obtenidos pertenecen al intervalo $(0, 2 \cdot \operatorname{cosh}^{-1}(\sqrt{2}))$. Como vimos en la sección 1.4, $2 \cdot \operatorname{cosh}^{-1}(\sqrt{2}) = 2 \cdot \log(1 + \sqrt{2}) = r_\infty$. Por ser imágenes por una función continua de un conjunto denso en el dominio, los valores de r para los cuales $A_r \cdot R$ es una rotación irracional son un conjunto denso en $(0, r_\infty)$.

Valores intermedios II: Embaldosados por polígonos de ángulos rectos.

En este capítulo, los casos restantes para $r \in (0, r_\infty)$. Para algunos, el grupo $G_r = \langle A_r, R \rangle$ es discreto y otros que son densos. Los discretos preservan embaldosados del plano hiperbólico por polígonos regulares con ángulos interiores de 90 grados. Estos serán los tratados en las primeras secciones. Observar que en el plano euclídeo, la única posibilidad es embaldosarlo por cuadrados, no importa cuál sea la distancia de avance. Veremos que en \mathbb{H} para cada $p \geq 5$, hay una única distancia de avance r_p tal que la órbita del punto i por el grupo G_{r_p} es el conjunto de vértices de un embaldosado por p -ángulos regulares de 90 grados.

Por lo visto en el capítulo anterior, para los valores $0 < r < r_\infty$, $A_r \cdot R$ es una rotación en \mathbb{H} . Queda por analizar el caso en que sea una rotación de orden finito. Como antes, denotamos por θ al ángulo de rotación de $A_r \cdot R$. Los grupos que preservan los embaldosados corresponden a las rotaciones **primitivas**: Cuando $\theta = \frac{2\pi}{p}$, con $p \in \mathbb{Z}$.

7.1. $A_r \cdot R$ rotación primitiva.

La herramienta principal es un resultado clásico de grupos Fuchsianos debido a Poincaré. En este capítulo enunciamos una versión (Teorema 7.5) que bastará en nuestro contexto.

Antes, hacemos mas precisos algunos términos.

Definición 7.1. Un subconjunto cerrado y convexo P de \mathbb{H} es un **polígono** si su frontera en \mathbb{H} es una unión localmente finita de segmentos geodésicos. Los segmentos geodésicos son los **lados** del polígono P . A los puntos de intersección de dos o más lados de un polígono les llamamos **vértices**.

Para nosotros solo serán de interés los polígonos compactos.

Observación 7.2.

- Es directo de la definición que la imagen de un polígono por una isometría de \mathbb{H} es un polígono.
- Un polígono compacto tiene finitos lados.

Definición 7.3. Un subconjunto $D \subset \mathbb{H}$ es un **dominio fundamental** para un grupo Fuchsiano Γ si:

- D es abierto y conexo
- para cualquier $z \in \mathbb{H}$, $\overline{D} \cap (\Gamma \cdot z) \neq \emptyset$ y
- $D \cap \gamma(D) = \emptyset \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$.

Un dominio fundamental genera un **embaldosado** de \mathbb{H} , es decir una colección de subconjuntos cuya unión es todo \mathbb{H} y la intersección de cualesquiera dos, si no es vacía está contenida en su frontera. Si D es un dominio fundamental para Γ , la órbita de \overline{D} por Γ es un embaldosado de \mathbb{H} .

Referimos ahora al Apéndice 2, donde probamos que un grupo Fuchsiano siempre tiene un dominio fundamental que es el interior de un polígono. Asumiendo ese hecho, definimos, para P un polígono fundamental de un grupo Fuchsiano Γ :

Definición 7.4. Un **ciclo elíptico** es una clase de equivalencia de vértices de P para la relación $v_1 \sim v_2$ si ambos están en la misma Γ - órbita.

Denotaremos por θ_v al ángulo del polígono P en el vértice v y si $\varepsilon = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un ciclo elíptico en P , definimos:

$$\theta_\varepsilon = \theta_{v_1} + \dots + \theta_{v_n}.$$

Enunciamos ahora el Teorema de Poincaré en una versión que se puede encontrar en [dR]. Remarcamos que este resultado tiene versiones mas generales, por ejemplo admitiendo que el polígono en cuestión tenga infinitos lados y vértices en el borde. En [M] se prueba una versión (que pretende ser) elemental en términos de superficies hiperbólicas y una generalización a dimensión tres.

Teorema 7.5. . *Sea P un polígono compacto de \mathbb{H} con una colección de isometrías asociada que aparean los lados de P de manera que ningún lado se aparee con sí mismo y tal que el interior de P es disjunto de sus imágenes. Supongamos que para todo ciclo elíptico ε se tiene que θ_ε es de la forma $\frac{2\pi}{k}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (dependiente de ε). Entonces el grupo generado por las transformaciones de P es un grupo Fuchsiano y el interior de P es un dominio fundamental para el grupo.*

Con esta versión del Teorema de Poincaré, generaremos los embaledados por polígonos regulares. Fijamos $p \in \mathbb{N}$. Consideremos el triángulo en \mathbb{H} , de ángulos $\alpha = \frac{2\pi}{p}$ y $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. Denotamos por a, b y c a los lados opuestos respectivos. Por Gauss-Bonnet sabemos que podemos construir el triángulo anterior solo si p es mayor o igual que 5. Además es único a menos de isometrías, por lo que la longitud de cada lado ya está determinada. Mas adelante calcularemos cuánto debe ser cada una.

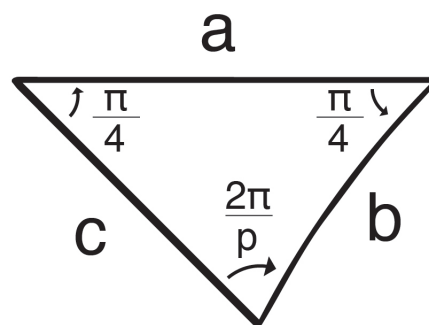


Figura 7.1: Etiquetado de los lados del polígono P .

En el triángulo anterior consideraremos el punto medio del lado a como un vértice adicional y dividiremos a en los dos segmentos que determina. Esto es necesario porque una de las transformaciones que consideraremos permutará estos dos segmentos, y Poincaré nos pide que ningún lado se asocie con sí mismo.

Por lo tanto, consideraremos a P como un cuadrilátero de vértices $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ con ángulos interiores $\frac{2\pi}{p}, \frac{\pi}{4}, \pi$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente.

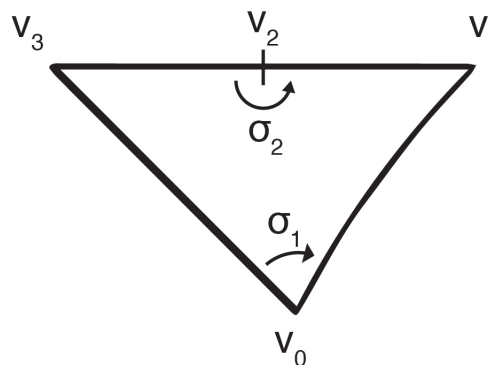


Figura 7.2: Las transformaciones σ_1 y σ_2

Las transformaciones asociadas serán σ_1 la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{p}$ alrededor de v_0 y σ_2

la rotación de ángulo π alrededor de v_2 . Orientando los lados positivamente (en sentido antihorario), observamos:

$$\begin{aligned}\sigma_1([v_3, v_0]) &= [v_0, v_1]^{-1} \text{ y} \\ \sigma_2([v_2, v_3]) &= [v_1, v_2]^{-1},\end{aligned}$$

donde s^{-1} representa el lado s con la orientación opuesta.

Hay tres ciclos elípticos para P con estas identificaciones: $\{v_0\}$, $\{v_2\}$ y $\{v_1, v_3\}$ con ángulos respectivos $\frac{2\pi}{p}$, π y $\frac{\pi}{2}$. Por el Teorema de Poincaré el grupo de isometrías generado por σ_1 y σ_2 es un grupo Fuchsiano y el cuadrilátero construido es un dominio fundamental para el grupo.

Los puntos $\{v_3, \sigma_1 \cdot v_3 = v_2, \sigma_1^2 \cdot v_3, \dots, \sigma_1^{p-1} \cdot v_3\}$ son los vértices de un p -ágono regular. La figura 7.3 muestra la construcción de un pentágono regular en el disco hiperbólico.

El embaledado de \mathbb{H} por p -ágonos regulares aparece como la órbita del vértice v_3 por todo el grupo $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$.

7.1.1. Cálculo de los lados.

Nos proponemos dar ahora el cálculo explícito de las distancias correspondientes. Ya observamos antes, que fijado p , las dimensiones del dominio P construido quedan determinadas.

Según la segunda ley del coseno (Ver la sección 1.4), tenemos:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cosh(a)$$

de donde:

$$\mathbf{a} = \cosh^{-1}\left(1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right).$$

A partir de ahora, para cada p denotaremos por \mathbf{r}_p al valor de a obtenido en la fórmula anterior. Una vez mas podemos mostrar que no hay un embaledado por cuadrados (cuadriláteros de ángulos rectos) del plano hiperbólico:

Si tomamos $p = 4$ el lado correspondiente debe medir $r_4 = 0$.

Con la misma regla obtenemos la medida de los lados b y c :

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} = \cosh^{-1}\left(\frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right)}\right).$$

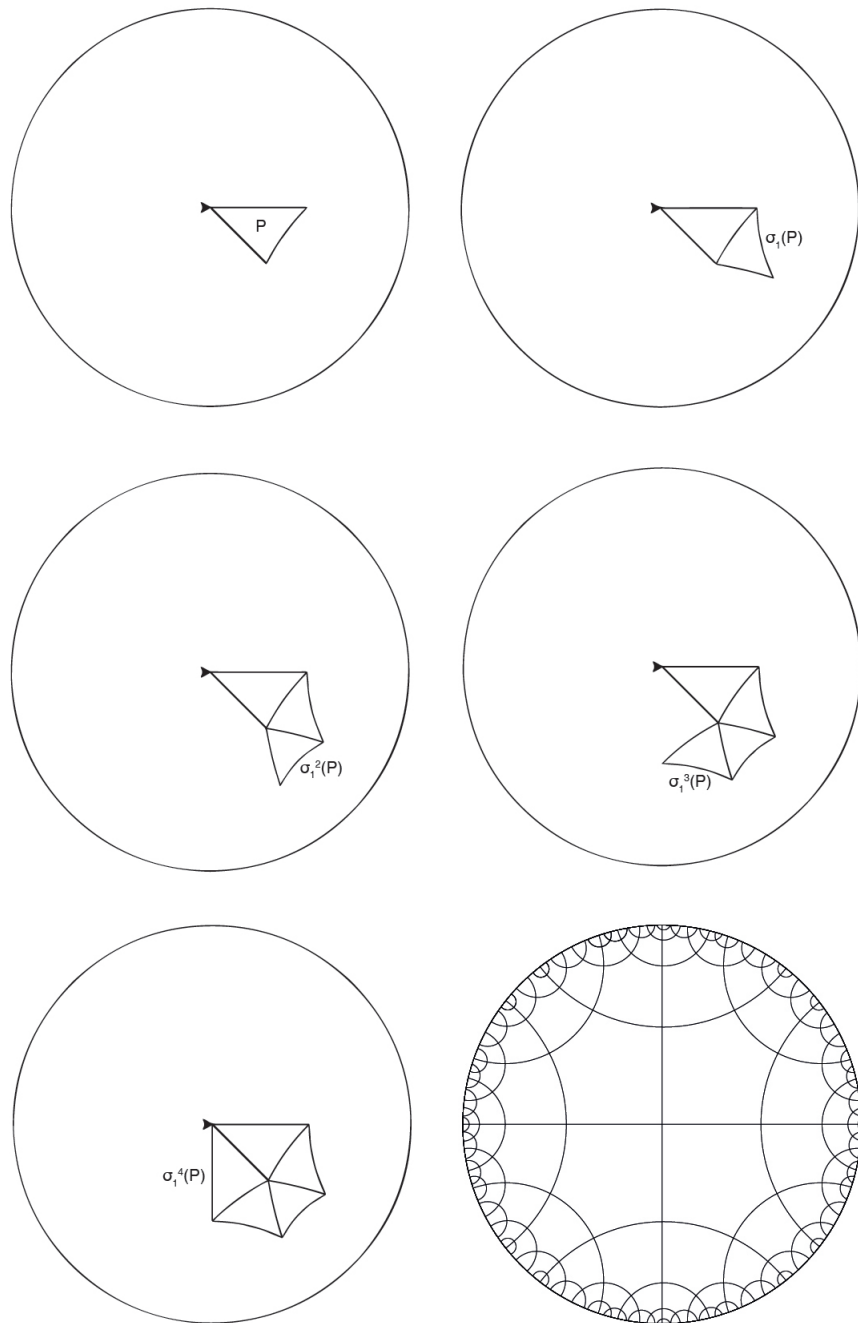


Figura 7.3: Ejemplo: Embaldosado por pentágonos del disco.

7.1.2. Los grupos G_{r_p} como caminatas de ángulos rectos.

En esta sección enmarcaremos la construcción anterior al contexto en el que estamos trabajando. Mas específicamente, para cada p veremos que el grupo generado por σ_1 y σ_2 corresponde al grupo $G_{r_p} = \langle A_{r_p}, R \rangle$.

Con la notación de las secciones anteriores, tomamos el vértice v_3 como el punto $i \in \mathbb{H}$ y el lado a como un segmento de la geodésica por i con dirección i (la geodésica $[0, \infty]$). En el modelo del disco de Poincaré, el punto-vector correspondiente es $(0, \frac{1}{2})$ (ver Obs 1.17).

En la sección anterior calculamos el valor de r_p , que corresponde a la distancia entre v_3 y v_1 . Recordamos que σ_1 es la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{p}$ alrededor del vértice v_0 , y σ_2 la rotación de ángulo π alrededor de v_2 . Observamos que $\sigma_1 \cdot i = \sigma_2 \cdot i = A_{r_p} \cdot i = e^{r_p} \cdot i$. Ambas transformaciones difieren en rotaciones en el tangente (recordar que en el tangente actuamos multiplicando por la derivada en el punto):

- $\sigma_1 \cdot (i, i) = (e^{r_p} \cdot i, 1)$
- $\sigma_2 \cdot (i, i) = (e^{r_p} \cdot i, -i)$.

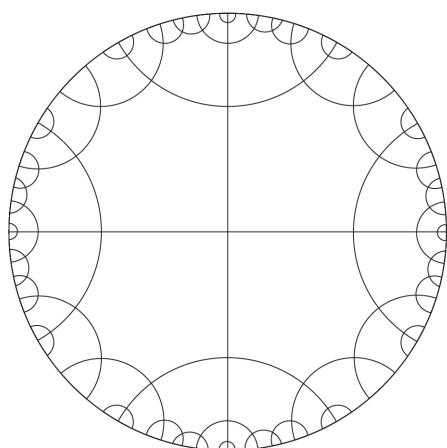
Concluimos entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= A_{r_p} \cdot R, \\ \sigma_2 &= A_{r_p} \cdot R^2. \end{aligned}$$

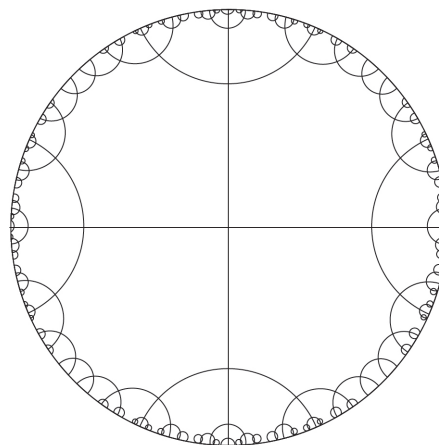
Obtenemos que $R = \sigma_1^{-1} \cdot \sigma_2$ y $A_{r_p} = \sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1$, por lo tanto

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \langle A_{r_p}, R \rangle = G_{r_p}$$

y es un grupo discreto para todo $p \geq 5$.



(a) Embaldosado por hexágonos del disco.



(b) Embaldosado por 9-ángulos del disco.

Observación 7.6. De la fórmula para r_p vemos que la sucesión indexada en p es estrictamente creciente y tiene límite en \mathbb{R} :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_p = \cosh^{-1}(3) = \log((1 + \sqrt{2})^2) = r_\infty \approx \mathbf{1,76274717403},$$

donde la segunda igualdad se deduce de lo discutido en 1.4.

La observación anterior muestra que el valor crítico r_∞ es acumulado tanto por valores correspondientes a grupos discretos como por valores correspondientes a los grupos densos analizados en el capítulo anterior.

7.2. $A_r \cdot R$ rotación no primitiva.

En esta sección discutiremos los casos en que $A_r \cdot R$ es una rotación de orden finito pero no primitiva. Esto corresponde a los casos en que $A_r \cdot R$ es conjugado a una rotación de ángulo $\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot q}{p}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ y $q > 1$. Veremos en esta sección que todos estos casos corresponden a grupos densos.

La órbita de i por $A_r \cdot R$ es como en los ejemplos de la figura 7.5.

Para estos valores de r , $A_r \cdot R$ genera p -ángonos con ángulos de 90 grados que se cierran luego de dar q vueltas alrededor del punto fijo.

Hay ciertas restricciones sobre los posibles valores de p y q :

Si pretendemos construir un polígono P como en la sección 7.1, pero con ángulos

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot q}{p}, \pi, \frac{\pi}{4} \text{ y } \frac{\pi}{4}.$$

Por Gauss-Bonnet debe ser $4 \cdot q < p$.

También podemos considerar las rotaciones σ_1 y σ_2 como antes. Sin embargo, si $q > 1$, no podemos aplicar el Teorema de Poincaré porque la condición sobre los ángulos no se verifica. Entonces, para p, q con $4 \cdot q < p$, podemos construir el polígono P y aplicándole σ_1 obtenemos algo como en la figura 7.5, pero no podemos afirmar que el grupo que generan las dos transformaciones sea discreto.

También manera análoga a lo hecho en la sección 7.1.1, podemos calcular el valor de r que le corresponde a cada par p, q y que denotaremos por $r_{p/q}$:

$$r_{p/q} = \cosh^{-1} \left(1 + 2 \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot q}{p} \right) \right).$$

Como $r_{p/q}$ depende del valor del cociente $\frac{q}{p}$, solo son de interés los casos en que p y q son primos entre sí. En particular, si q es múltiplo de p caemos en el caso de un embañosado de la sección anterior.

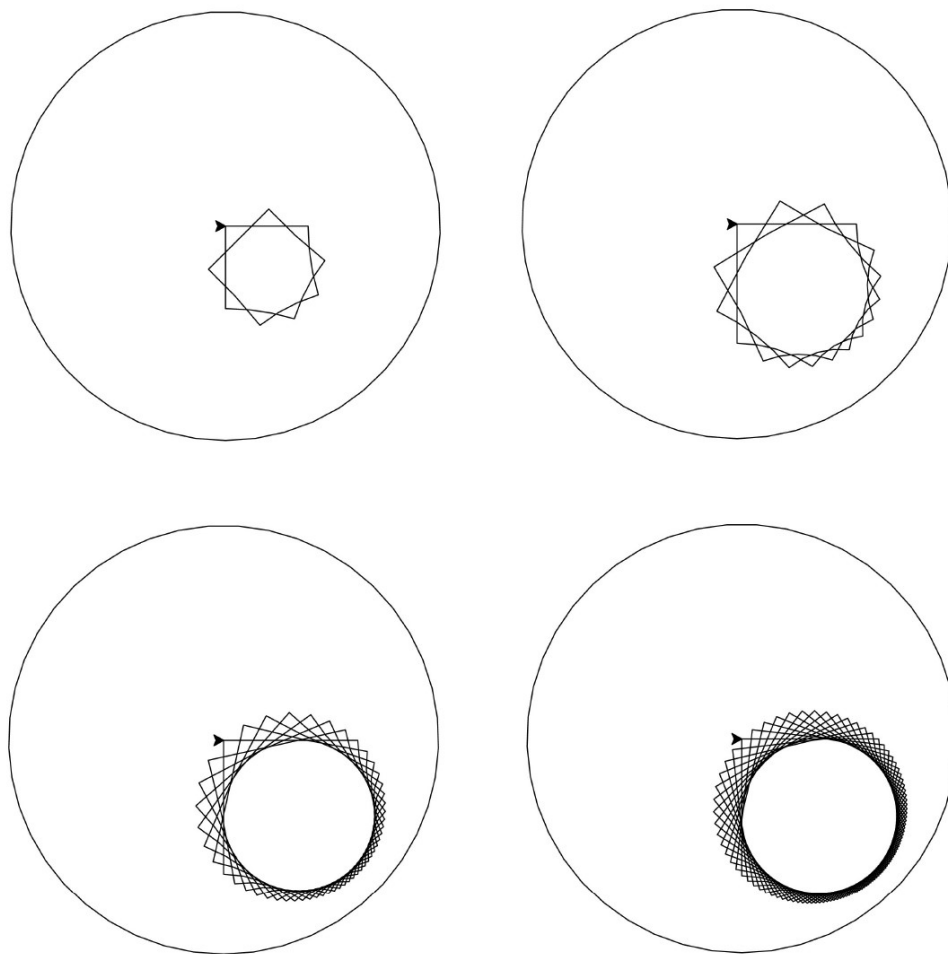


Figura 7.5: Ejemplos de $A_r \cdot R$ rotación no primitiva. Las imágenes corresponden a los casos $(p, q) = (9, 2)$; $(p, q) = (17, 3)$; $(p, q) = (50, 7)$ y $(p, q) = (100, 13)$.

Observamos también que fijado q (la cantidad de 'vueltas' del polígono), el valor $r_{p/q}$ tiende a r_∞ .

Para ver que estos grupos no pueden ser discretos usaremos nuevamente la desigualdad de Jørgensen de la Proposición 5.5.

Proposición 7.7. *Sea $r > 0$ tal que $A_r \cdot R$ es una rotación de ángulo $\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot q}{p}$ para algunos p, q con $4 \cdot q < p$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Sea α tal que $q \cdot \alpha = 1 \pmod{p}$. Entonces si $q > 1$*

$$|\text{tr}^2((A_r \cdot R)^\alpha) - 4| + |\text{tr}([(A_r \cdot R)^\alpha, R^2]) - 2| < 1.$$

Por lo tanto todos los valores $r_{p/q}$ con $q > 1$ corresponden a grupos densos.

Demostración. Tomamos

$$r = r_{p/q} = \cosh^{-1} \left(1 + 2 \cdot \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot q}{p} \right) \right).$$

El iterado α de la matriz $A_r \cdot R$ es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{p}$. Con esto y un poco de trigonometría, son cálculos directos ver que:

$$|\text{tr}^2((A_r \cdot R)^\alpha) - 4| + |\text{tr}([(A_r \cdot R)^\alpha, R^2]) - 2| = 4 \cdot \text{sen}^2 \left(\frac{\pi}{p} \right) \cdot \left(\frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi q}{p} \right)}{\text{sen} \left(\frac{2\pi q}{p} \right)} \right)^2.$$

La función anterior es decreciente con q y vale menos que 1 en $q = 2$.

□

Con esto concluyen los casos con $A_r \cdot R$ elíptico.

Distancias de avance grandes: de r_∞ en adelante.

Estudiamos ahora el grupo G_r para las distancias de avance a partir del valor crítico r_∞ . Como vimos antes, estos valores se caracterizan por el hecho de que el elemento $A_r \cdot R$ no es elíptico.

Probaremos el siguiente Teorema:

Teorema 8.1. *Para todo $r \geq r_\infty$, el grupo G_r es discreto.*

Probaremos primero que un cierto subgrupo H de G_r es libre y discreto. Para ver que es libre probaremos que en H no hay palabras reducidas no triviales que se correspondan con la identidad. Observar que el grupo G_r no es libre, porque por ejemplo $R^4 = Id$ en $PSL(2, \mathbb{R})$. Para ver que es discreto, veremos que la órbita de i no tiene puntos de acumulación. El argumento central que usaremos para probar estas dos afirmaciones se conoce como el argumento del Ping-Pong.

El subgrupo H a considerar será el generado por $\{A_r, R \cdot A_r \cdot R^{-1}\}$, la matriz de avance A_r y la matriz de avance por la geodésica perpendicular,

$$R \cdot A_r \cdot R^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}} & e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \\ e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} & e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}} \end{pmatrix}.$$

Por simplicidad **denotaremos por B_r a $R \cdot A_r \cdot R^{-1}$** . Esta matriz fija los puntos del eje real ± 1 , y traslada los puntos de la geodésica que los une una distancia hiperbólica r en la dirección de 1.

El esquema de la demostración del Teorema 8.1 es el siguiente:

- Veremos que si $r \geq r_\infty$ podemos aplicar el Ping-Pong en H .
- Probaremos que H es libre y discreto para $r \geq r_\infty$.

- Veremos que H es discreto si y solo si G_r es discreto.

Consideraremos cuatro regiones del disco hiperbólico que llamaremos Norte (**N**), Sur (**S**), Este (**E**) y Oeste (**W**). Por simplicidad definiremos las regiones en el modelo del semiplano pero las imágenes son mas ilustrativas en el disco.

8.1. Construcción de las regiones **N,S,E,W**.

La acción de A_r nos permitirá conseguir **E** y **W**. De forma análoga con B_r , se consiguen **N** y **S**.

A_r fija los puntos 0 y ∞ , y a los puntos de la geodésica que los une los traslada una distancia hiperbólica r en la dirección de ∞ . La mediatriz del segmento $[i, A_r \cdot i]$ es la geodésica perpendicular al eje imaginario cuyos puntos del borde son $\pm e^{r/2}$. Esta geodésica separa \mathbb{H} en dos regiones. Definimos **E** como la que contiene a ∞ .

Consideramos ahora la mediatriz al segmento $[A_r^{-1} \cdot i, i]$. Esta mediatriz es la geodésica que corta el eje real en los puntos $\pm e^{-r/2}$, y llamaremos **W** a la región determinada que contiene a 0 .

Como A_r manda:

$$-e^{-r/2} \mapsto -e^{r/2},$$

$$e^{-r/2} \cdot i \mapsto e^{r/2} \cdot i,$$

$$i \mapsto e^r \cdot i \text{ y}$$

$$e^{-r/2} \mapsto e^{r/2},$$

por continuidad concluimos:

$$A_r(\mathbb{H} \setminus \mathbf{W}) \subset \mathbf{E},$$

$$A_r^{-1}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{E}) \subset \mathbf{W}.$$

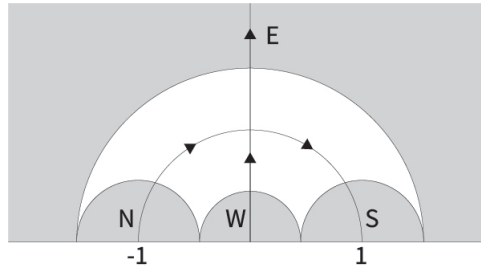
La situación con B_r es análoga. Como dijimos, su acción en el semiplano fija los puntos ± 1 y traslada los puntos de la geodésica que los une una distancia r en la dirección de 1 .

Considerando la mediatriz del segmento geodésico $[i, B_r \cdot i]$ (resp. $[B_r^{-1} \cdot i, i]$), definimos **S** (resp. **N**) como la región determinada que contiene a 1 (resp. -1) y de forma análoga obtenemos:

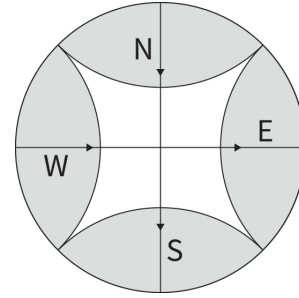
$$B_r(\mathbb{H} \setminus \mathbf{N}) \subset \mathbf{S},$$

$$B_r^{-1}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{S}) \subset \mathbf{N}.$$

Lema 8.2. Si $r \geq r_\infty$ las regiones **N,S,E,W** son dos a dos disjuntas.



(a) N,S,E y W en el modelo del semiplano.



(b) N,S,E y W en el modelo del disco.

Figura 8.1

Demostración. La matriz $B_{r/2} = R \cdot A_{r/2} \cdot R^{-1}$ lleva el eje imaginario en la mediatriz del segmento $[i, B_r \cdot i]$, por lo que ésta corta el eje real en los puntos

$$B_{r/2} \cdot 0 \text{ y } B_{r/2} \cdot \infty.$$

Observar que por la simetría respecto del eje imaginario en la figura 8.1a, basta probar que E y S son disjuntas.

Denotemos por λ a $e^{\frac{r}{4}}$.

Las regiones S y E son disjuntas si y solo si

$$B_{r/2} \cdot \infty \leq e^{\frac{r}{2}} = \lambda^2.$$

En estos casos los ejes de las simetrías de la figura 6.2 no se cortan en el plano hiperbólico.

Hay que resolver entonces:

$$B_{r/2} \cdot \infty = \frac{(\lambda + \lambda^{-1}) \cdot \infty + \lambda - \lambda^{-1}}{(\lambda - \lambda^{-1}) \cdot \infty + \lambda + \lambda^{-1}} = \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{\lambda - \lambda^{-1}} \leq \lambda^2.$$

Si nos restringimos a valores positivos, la desigualdad anterior la satisfacen exactamente los valores $\lambda \in [\sqrt{1 + \sqrt{2}}, +\infty)$.

Siendo $r = 4 \cdot \log(\lambda)$ obtenemos que E y S son disjuntos para $r \in [r_\infty, +\infty)$.

□

8.2. G_r es discreto para $r \geq r_\infty$.

Nos proponemos ahora probar el Teorema 8.1.

Si $r \geq r_\infty$ podemos conseguir las regiones disjuntas N, S, E y W como en la figura 8.1a de manera tal que:

- $A_r(\mathbb{H} \setminus W) \subset E$,

- $A_r^{-1}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{E}) \subset \mathbf{W}$,
- $B_r(\mathbb{H} \setminus \mathbf{N}) \subset \mathbf{S}$,
- $B_r^{-1}(\mathbb{H} \setminus \mathbf{S}) \subset \mathbf{N}$.

Un elemento cualquiera w de H es una palabra en los dos generadores de H (y sus inversos) que suponemos reducida, es decir que no hay elementos inversos consecutivos. Para ver que $w \neq Id$, basta ver que $w \cdot i \neq i$.

Por construcción i no pertenece a ninguna de las cuatro regiones, por lo que la primera letra de w , que puede ser A_r, A_r^{-1}, B_r o B_r^{-1} , lo manda a $\mathbf{E}, \mathbf{W}, \mathbf{S}$ o \mathbf{N} respectivamente.

Veamos que $w \cdot i$ pertenece a alguna de las regiones:

Supondremos que la primera letra de w es A_r y por lo tanto $A_r \cdot i$ pertenece a \mathbf{E} . Como la palabra es reducida, la siguiente letra no puede ser A_r^{-1} . Puede ser A_r y cae nuevamente en \mathbf{E} , puede ser B_r y caer en \mathbf{S} o puede ser B_r^{-1} e ir a \mathbf{N} .

Con otra elección para la primera letra vale un razonamiento análogo. Lo importante es que una vez que un elemento entra a alguna de las cuatro regiones, realiza algún itinerario entre ellas pero nunca sale de la unión de las cuatro. Queda como ejercicio para el lector convencerse de que el argumento falla si las regiones no son disjuntas.

Probamos entonces:

1. Ninguna palabra reducida en $A_r, B_r, A_r^{-1}, B_r^{-1}$ no trivial es la identidad. En particular H es un grupo libre en dos generadores.
2. Toda palabra reducida no trivial en $A_r, B_r, A_r^{-1}, B_r^{-1}$ envía U a un conjunto disjunto, donde $U = H \setminus (N \cup S \cup E \cup W)$. En particular H es discreto

El siguiente Lema muestra que lo anterior basta para que G_r sea discreto.

Lema 8.3. *H es un subgrupo normal de índice cuatro en G_r y por lo tanto G_r es discreto si y solo si H lo es.*

Demostración. En vista de la proposición 3.2, basta probar que H tiene índice finito en G_r .

Veremos que $G_r = H \cup H \cdot R \cup H \cdot R^2 \cup H \cdot R^3$. Geométricamente esto es intuitivo, esencialmente H difiere de G_r en que no tiene rotaciones en el tangente, pero los puntos de \mathbb{H} accesibles son los mismos. Formalizaremos esto continuación:

En G_r tenemos la relación $A_r^n \cdot R^2 \cdot A_r^n = R^2$, porque al avanzar n pasos, rotar 180 grados y avanzar nuevamente n pasos se vuelve al punto de partida mirando en la dirección opuesta. Escribimos esto de forma mas conveniente como:

$$A_r^n \cdot R^2 = R^2 \cdot A_r^{-n}.$$

Dados entonces $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \{0, 1, 2, 3\}$, consideramos $R^m \cdot A_r^n$ y obtenemos que:

- si $m = 0$, $R^m \cdot A_r^n = A_r^n$,
- si $m=1$, $R^m \cdot A_r^n = R \cdot A_r^n \cdot R^{-1} \cdot R$,
- si $m=2$, $R^m \cdot A_r^n = A_r^{-n} \cdot R^2$ y
- si $m=3$, $R^m \cdot A_r^n = R \cdot A_r^{-n} \cdot R^2 = R \cdot A_r^{-n} \cdot R^{-1} \cdot R^{-1}$.

De cualquier manera, podemos escribir $R^m \cdot A_r^n$ como un producto de un elemento de H por una potencia de R .

Como cualquier elemento de G_r lo podemos escribir como un producto

$$R^{m_1} \cdot A_r^{n_1} \cdot R^{m_2} \cdot A_r^{n_2} \cdot \dots \cdot R^{m_k} \cdot A_r^{n_k},$$

con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, concluimos que $G_r = H \cup H \cdot R \cup H \cdot R^2 \cup H \cdot R^3$. Es trivial chequear que son subconjuntos disjuntos.

□

Apéndice

9.1. Dominios de Dirichlet

En esta sección veremos una forma posible de construir un dominio fundamental para un grupo Fuchsiano. En toda la sección Γ denotará un grupo Fuchsiano cualquiera.

Para $z_0 \in \mathbb{H}$ definimos:

$$P_{z_0} = \{z \in \mathbb{H} : \forall \gamma \in \Gamma, \rho(z, z_0) \leq \rho(z, \gamma \cdot z_0)\}.$$

y el **dominio de Dirichlet de z_0** como el interior de P_{z_0} :

$$D_{z_0} = \overset{\circ}{P}_{z_0}.$$

Lema 9.1. Si $Stab(z) = \{Id\}$ y escribimos $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots\}$, entonces:

$$\rho(z, \gamma_n \cdot z) \rightarrow +\infty, \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Por ser un conjunto discreto, en cualquier bola cerrada solo puede haber finitos puntos de la órbita de z distintos. Si el enunciado no fuera cierto, algún punto es imagen de z por infinitos elementos de Γ y esto contradice que el estabilizador sea trivial. \square

Definición 9.2. Un dominio fundamental D se dice **localmente finito** si todo compacto de \mathbb{H} corta a lo sumo finitos de los $\{\gamma(\overline{D})\}_{\gamma \in \Gamma}$.

Teorema 9.3. Si $Stab(z_0) = \{Id\}$, P_{z_0} es un polígono de \mathbb{H} y su interior es un dominio fundamental localmente finito para Γ .

Demostración. Denotamos por D_γ al subconjunto de \mathbb{H} :

$$\{z \in \mathbb{H} : \rho(z, z_0) \leq \rho(z, \gamma \cdot z_0)\}.$$

Por simplicidad tomamos $D_{Id} = \mathbb{H}$. Se tiene entonces que:

$$P_{z_0} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma.$$

Cada D_γ no trivial, es un semiplano con borde la mediatriz del segmento $[z_0, \gamma \cdot z_0]$, en particular son todos cerrados y convexos por lo tanto P_{z_0} también.

Por el Lema anterior, para cualquier $R > 0$ hay solo finitos $\gamma \in \Gamma$ tales que $\gamma \cdot z_0 \in \overline{B(z_0, 2R)}$. Como $\rho(z_0, \partial D_\gamma) = \frac{\rho(z_0, \gamma \cdot z_0)}{2}$, solo puede haber finitos de los $\{\partial D_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ que corten $\overline{B(z_0, R)}$.

Con las consideraciones anteriores podemos concluir, primero que el interior de P_{z_0} es no vacío (contiene a z_0 y algún entorno abierto alrededor) y conexo. Segundo, es directo ver que $\partial P_{z_0} \subset P_{z_0} \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \partial D_\gamma)$ y por lo tanto es una unión localmente finita de segmentos geodésicos.

Hemos probado hasta ahora que P_{z_0} es un polígono. Veamos ahora que su interior es un dominio fundamental para Γ .

Dado $z \in \mathbb{H}$, existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\rho(z, \gamma \cdot z_0) \leq \rho(z, \eta \cdot z_0) \text{ para cualquier } \eta \in \Gamma.$$

Por la invarianza de la métrica $\rho(\gamma^{-1} \cdot z, z_0) \leq \rho(\gamma^{-1} \cdot z, \eta \cdot z) \quad \forall \eta \in \Gamma$ y por lo tanto $\gamma^{-1} \cdot z$ pertenece a P_{z_0} .

Supongamos $z \in P_{z_0} \cap \gamma(P_{z_0})$. Veamos que z es un punto de la frontera de P_{z_0} .

Por definición, $\forall \eta \in \Gamma \setminus \{Id\}$:

- $\rho(z, z_0) \leq \rho(z, \eta \cdot z_0)$ y
- $\rho(\gamma^{-1} \cdot z, z_0) \leq \rho(\gamma^{-1} \cdot z, \eta \cdot z_0)$.

Con esto y la invarianza de la métrica nuevamente, obtenemos:

$$\rho(z, z_0) \leq \rho(z, \gamma \cdot z_0) = \rho(\gamma^{-1} \cdot z, z_0) \leq \rho(\gamma^{-1} \cdot z, \gamma^{-1} \cdot z_0) = \rho(z, z_0).$$

Por lo tanto $\rho(z, z_0) = \rho(z, \gamma \cdot z_0)$ y z pertenece a la frontera de P_{z_0} .

Por último probaremos que D_{z_0} es localmente finito. Sea K compacto de \mathbb{H} . Consideremos $R > 0$ de manera que K quede contenido en el disco de centro z_0 y radio R . Si $\gamma(P_{z_0}) \cap K \neq \emptyset$, existe $z_\gamma \in P_{z_0}$ tal que $\rho(z_0, \gamma \cdot z_\gamma) \leq R$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \rho(z_0, \gamma \cdot z_0) &\leq \rho(z_0, \gamma \cdot z_\gamma) + \rho(\gamma \cdot z_\gamma, \gamma \cdot z_0) \\ &= \rho(z_0, \gamma \cdot z_\gamma) + \rho(z_\gamma, z_0) \\ &\leq \rho(z_0, \gamma \cdot z_\gamma) + \rho(\gamma \cdot z_\gamma, z_0) \leq 2R, \end{aligned}$$

y por el Lema 9.1 esto puede pasar solo para finitos $\gamma \in \Gamma$.

□

La construcción del lema anterior se basa en considerar un punto con estabilizador trivial. Estos puntos existen por 3.6. Un argumento de cardinalidad también muestra que los puntos con estabilizador trivial forman un conjunto denso:

Los grupos Fuchsianos son conjuntos discretos en \mathbb{R}^4 (que es un espacio de Lindelof) y por lo tanto numerables. Como cualquier elemento de $PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{Id\}$ fija a lo sumo un punto en el interior de \mathbb{H} , los puntos de \mathbb{H} con estabilizador no trivial son a lo sumo numerables.

Hemos probado entonces que cualquier grupo Fuchsiano tiene al menos un dominio fundamental localmente finito cuya clausura es un polígono de \mathbb{H} .

Una forma de ver el Teorema de Poincaré es que un grupo Fuchsiano queda determinado por su comportamiento alrededor de un polígono fundamental. En cierta manera, si las imágenes más cercanas del polígono se "pegan bien", no aparecerán problemas al extender el embañosado a todo el plano hiperbólico. Es en esta línea es que enunciamos los siguientes dos resultados. Por otro lado el Teorema también proporciona un método de construir grupos Fuchsianos.

Lema 9.4. *Para z_0 y P_{z_0} como antes, se tiene que si $z \in \mathbb{H}$ pertenece a ∂P_{z_0} , existe algún elemento $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ tal que $\gamma \cdot z$ también pertenece a ∂P_{z_0} . Además el elemento γ es único para z salvo que éste sea un vértice de P_{z_0} .*

Lema 9.5. *Si D es un dominio fundamental localmente finito para Γ , entonces el conjunto*

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(\bar{D}) \cap \bar{D} \neq \emptyset\}$$

genera todo Γ .

El conjunto Γ_0 del lema anterior son las transformaciones asociadas al dominio fundamental que aparecen en el Teorema de Poincaré (7.5). La demostración de la Proposición 9.4 nos da las transformaciones asociadas si el dominio fundamental a considerar es el dominio de Dirichlet de algún punto.

Bibliografía

- [A] James W. Anderson, *Hyperbolic geometry*, Second, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005. MR2161463
- [B] Alan F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original. MR1393195
- [dR] G. de Rham, *Sur les polygones générateurs de groupes fuchsians*, Enseignement Math. **17** (1971), 49–61. MR0335792
- [G] Jane Gilman, *Two-generator discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$* , Mem. Amer. Math. Soc. **117** (1995), no. 561, x+204. MR1290281
- [GM] J. Gilman and B. Maskit, *An algorithm for 2-generator Fuchsian groups*, Michigan Math. J. **38** (1991), no. 1, 13–32. MR1091506
- [H1] Brian Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations*, Second, Graduate Texts in Mathematics, vol. 222, Springer, Cham, 2015. An elementary introduction. MR3331229
- [H2] John Hamal Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*, Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle. MR2245223
- [J] Troels Jørgensen, *On discrete groups of mobius transformations*, American Journal of Mathematics **98** (1976), no. 3, 739–749.
- [K] Svetlana Katok, *Fuchsian groups*, Chicago : University of Chicago Press, 1992 (English).
- [M] Bernard Maskit, *On Poincaré’s theorem for fundamental polygons*, Advances in Math. **7** (1971), 219–230. MR0297997
- [SS] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, vol. 2, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. MR1976398
- [T] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology, volume 1 (princeton mathematical series book 35)*, Princeton University Press, 2014.