Algebra I
Segundo semestre 2002
Práctico 5

1. Sea \( \mathbb{Z} \left( \sqrt{-5} \right) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\} \). Probar que \( R \) es un subanillo de \( \mathbb{C} \) y que su cuerpo de fracciones es \( \mathbb{Q} \left( \sqrt{-5} \right) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}\} \).

2. Sean \( D_1 \) y \( D_2 \) dominios de integridad, \( F_1, F_2 \) sus respectivos cuerpos de fracciones y \( \phi : D_1 \rightarrow D_2 \) un isomorfismo de anillos. Probar que \( \phi \) se extiende a un isomorfismo entre \( F_1 \) y \( F_2 \).

3. Sean \( R \) un anillo commutativo con unidad y \( S \) un submonoido de \( (R, \cdot, 1) \). En \( R \times S \) se define la relación: \( (a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \) si y sólo si existe \( s \in S \) tal que \( s(s_2a_1 - s_1a_2) = 0 \).
   a. Probar que \( \sim \) es una relación de equivalencia en \( R \times S \). Sea \( R_S \) el cociente \( (R \times S)/\sim \). Se indica con \( a/s \) la clase de equivalencia de \( (a, s) \in R \times S \). Probar que \( R_S \) es un anillo con la suma y el producto definidos mediante:
      \[
      \frac{a_1 + a_2}{s_1} = \frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2}, \quad \frac{a_1a_2}{s_1} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2}.
      \]
      El anillo \( R_S \) se llama localización de \( R \) en \( S \).
   b. Sea \( \lambda_S : R \rightarrow R_S \) dado por \( \lambda_S(a) = \frac{a}{1} \). Probar que \( \lambda_S \) es un homomorfismo de anillos y que \( \lambda_S(s) \) es invertible para todo \( s \in S \).
   c. Probar que \( R_S = 0 \) si y sólo si \( 0 \in S \). En ese caso se dice que \( S \) es un ciointungo multiplicativo
   d. Sean \( R' \) un anillo commutativo y \( \eta : R \rightarrow R' \) un homomorfismo de anillos tal que \( \eta(s) \) es invertible para todo \( s \in S \). Probar que existe un único homomorfismo de anillos \( \bar{\eta} : R_S \rightarrow R' \) tal que el diagrama
      \[
      \begin{array}{ccc}
      R & \xrightarrow{\lambda_S} & R_S \\
      \downarrow{\eta} & & \downarrow{\bar{\eta}} \\
      R' & \xrightarrow{\bar{\eta}} & R_S \\
      \end{array}
      \]
      conmuta.
   e. Sean \( R = \mathbb{Z}_6 \) y \( S = \{[1], [2], [4]\} \subset \mathbb{Z}_6 \). Probar que \( R_S \) es isomorfo a \( \mathbb{Z}_3 \).

4. a. Sea \( A \) un anillo commutativo con unidad, y \( f \in A \) un elemento no nulo, qu no es divisor de cero. Probar que entonces \( S = \{f^n \mid n \geq 0\} \) es un conjunto multiplicative. Notaremos \( A_f \) el localizado de \( A \) por \( S \).
   b. ¿Cómo se traduce en este caso la propiedad universal del ejercicio 3?

5. a. Sea \( A \) un anillo con unidad. Un ideal \( \mathcal{P} \) de \( A \) se dice primo si toda vez que \( a, b \in A \) son tales que \( ab \in \mathcal{P} \), entonces o \( a \) o \( b \) pertenecen a \( \mathcal{P} \) (dicho de otro modo: si \( a, b \notin \mathcal{P} \), entonces \( ab \notin \mathcal{P} \) ). Probar que si \( \mathcal{P} \neq A \), entonces \( A \setminus \mathcal{P} \) es un conjunto multiplicative de \( A \). Notaremos por \( A_\mathcal{P} \) dicho localizado.
   b. Probar que todo ideal maximal es primo.
c. optativo Probar que si $\mathcal{P} \subset A$ es primo, entonces $A_{\mathcal{P}}$ es un anillo local, es decir contiene un único ideal maximal. **SUGERENCIA:** Probar que un anillo es local si y sólo si el conjunto de todos los elementos no invertibles es un ideal.

**Nota:** La resolución del problema 1 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 19 de noviembre.