Síntesis de la trayectoria científica de Mario Wschebor¹

Intentamos en este breve documento realizar una descripción cronológica de las contribuciones matemáticas más relevantes de Mario Wschebor a lo largo de su carrera, considerando cuatro temas de interés. Antes de esto, vale la pena destacar la pasión de Wschebor por la investigación matemática, la profundidad de su pensamiento, su capacidad admirable de cálculo, basada en una tenacidad y una capacidad de trabajo sorprendente. El motor de la investigación, enseñaba Mario Wschebor, es la intuición, y la creencia en la veracidad de un resultado. Con estos insumos y un gran coraje, emprendió caminos matemáticos y científicos, muchas veces inexplorados.

El documento también contiene dos apéndices sobre la influencia de Mario Wschebor en Venezuela y en Francia.

Tema 1: Analisis de Fourier y cubrimiento del círculo.

Entre sus primeras contribuciones, Wschebor resolvió el problema del recubrimiento del círculo por medio de intervalos aleatorios durante su tesis doctoral, trabajando bajo la supervisión de Jean Pierre Kahane en París, publicando los artículos [3] y [4] reseñados en la lista de sus publicaciones. Anteriormente había realizado una estancia de un año en Hungría, donde obtuvo su primer resultado, publicado en conjunto con Pál Révész [1].

Tema 2: Distribución del máximo de un proceso aleatorio.

Un tema que apasionó a Mario Wschebor es el de la distribución del máximo de un proceso aleatorio. Convencido de la relevancia del tema, y de la dificultad de obtención de fórmulas cerradas, a lo largo de su carrera obtuvo aproximaciones y desarrolló métodos novedosos para el estudio de propiedades asintóticas y de regularidad de la distribución y la densidad del máximo de un procesos estocástico.

Conjuntamente con Enrique Cabaña comienzan a considerar el problema de la distribución del máximo de un proceso gaussiano en el año 1969 con el trabajo “On the Barrier Problem for Stationary Gaussian Processes” [2]. La colaboración continuó en 1981 con el artículo “An estimate for the tails of the distribution of the supremum for a class of stationary Gaussian processes” [11]. Especial mención merece el trabajo publicado conjuntamente con Enrique Cabaña en *Annals of Probability* “The Two-parameter Brownian Bridge: Kolmogorov inequalities and upper and lower bounds for the distribution of the maximum” [13]. En este trabajo los autores consideran el problema de cuantificar la distribución del máximo de la Hoja Browniana. La distribución exacta de este máximo es un problema abierto de una formidable dificultad. En el trabajo que citamos los autores desarrollan métodos ad hoc muy originales y de una dificultad técnica proverbial, logrando construir una tabla de la aproximación de la distribución del funcional, útil para realizar pruebas de hipótesis de tipo Kolmogorov-Smirnov para la distribución uniforme bidimensional. Por el conjunto de estos trabajos Wschebor recibe en conjunto con Enrique Cabaña el premio CONICYT de Venezuela en 1981 [12]. En otra dirección de trabajo Mario Wschebor se interesa en la fórmula de Rice para procesos y campos Gaussianos, que permiten calcular los momentos de números de cruces, aplicándose al problema de la cola de la ley del máximo de procesos regulares. Esta

1 Documento preparado por Jean-Marc Azaïs, Enrique Cabaña, Felipe Cucker, Didier Dacunha-Castelle, José Rafael León, Roberto Markarian, Ernesto Mordecki y Gonzalo Perera como fundamento de la presentación del Pedeciba y la Universidad de la República de Mario Wschebor al “Premio México de Ciencia y Tecnología”.

dirección comenzó con la nota conjunta con Jean-Marc Azaïs “Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique” de 1997 [34]. El manejo de esta técnica le permite, también conjuntamente con Jean-Marc Azaïs, poner a punto ciertas herramientas que les conducen a estudiar la regularidad de la distribución del máximo de procesos regulares. Así, ambos autores publican en 2001 el trabajo “On the regularity of the distribution of the maximum of one-parameter Gaussian processes” [41]. El trabajo demuestra que si las trayectorias de un proceso Gaussiano poseen un cierto número de derivadas entonces el máximo del proceso tiene una distribución derivable tantas veces como la mitad de las derivadas que poseen las trayectorias. Para finalizar se puede señalar el trabajo del año 2005 en *Annals of Applied Probability*, también producto de la colaboración con Azaïs, “On the distribution of the maximum of a Gaussian field with d parameters” [50], en el cual se estudia la distribución del máximo de procesos Gaussianos a d parámetros. En este trabajo el método de la aplicación de la fórmula de Rice a la distribución del máximo es generalizado a campos Gaussianos. Esta obra exhibe no sólo una gran calidad sino que abre un camino promisorio para atacar problemas de naturaleza similar cuya solución ha escapado a las técnicas tradicionales.

La aplicación de la fórmula de Rice al estudio de la distribución del máximo de un proceso o un campo aleatorio (devenido en el “método de Rice” de Azaïs y Wschebor) constituye una parte muy importante del libro: Azaïs, J-M. and Wschebor, M. *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. Wiley, (2009).

Tema 3: La geometría y la regularización de las trayectorias de los procesos estocásticos.

La naturaleza geométrica (en un sentido amplio) de las trayectorias de un proceso estocástico, tanto en el caso univariado como multivariado, tanto en el caso de trayectorias regulares como irregulares (incluyendo el movimiento browniano) es otro de los temas en los que Wschebor volcó su entusiasmo y su vigor investigativo.

Una de las ideas originales que introdujo en este campo es la relacionada con el problema de la observación física de una trayectoria irregular. El aparato de medida u observación regulariza la trayectoria, y el problema es recuperar la información original del proceso a partir de esa observación ruidosa o defectuosa. En particular en su trabajo se utilizan las nociones de suavización de trayectorias y de medida de conjuntos de nivel de dichos procesos. Las aplicaciones constituyen parte de su preocupación e incluyen aplicaciones a otro tema de probabilidad: el estudio de sistemas de ecuaciones aleatorias y a la estadística. Sigue una lista de los principales artículos en esta dirección.

El trabajo sobre la suavización de procesos irregulares se inició con la nota al *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Francia* en 1984, “Régularisation des trajectoires et approximation du temps local” [22], seguido por el capítulo 4 del libro de 1985 “*Surfaces aléatoires. Mesure géométrique des ensembles de niveau*”, *Lecture Notes in Math.*, 1147, Springer-Verlag. Este trabajo se hizo durante un año sabático (en 1983) que efectuó Mario Wschebor en la Facultad Ciencias de la Universidad de Orsay de Francia. Este tema constituyó parte de las tesis de Corinne Berzin y de la de Jean-Marc Azaïs. En este mismo tema, el de la geometría de las trayectorias de los procesos estocásticos, otra dirección del trabajo de Mario Wschebor ha sido el estudio de los incrementos de procesos irregulares en un sentido débil.

El problema se plantea como el del estudio de funcionales de procesos irregulares: martingalas continuas, semimartingalas, procesos Gaussianos con trayectorias

Hölderianas, procesos de incrementos independientes y de Lévy; por medio de la observación de una trayectoria “suavizada” o “regularizada” del proceso, a través de un filtro que hace que las trayectorias posean cierto grado de diferenciabilidad. El método permite hacer inferencia estadística observando tal trayectoria suavizada cuando el parámetro de regularización tiende a cero. Esta idea original de Mario Wschebor puede encontrarse por primera vez en 1984 en la publicación [22]. Para explicar el procedimiento utilizado hay que decir que él se enmarca en lo que se ha dado en llamar “infill statistics” o estadística de dominio fijo. Esto es, el conjunto donde se observa el proceso permanece fijo, lo que aumenta es la resolución del aparato de observación, en el caso de las investigaciones de Mario Wschebor y sus colaboradores el parámetro de regularización tiende a cero. Muestra importante de este tipo de resultados son los trabajos: “Intégration par parties dans l’espace de Wiener et approximation du temps local” [27], escrito en colaboración con David Nualart, “Approximation du temps local des surfaces gaussiennes” [30], trabajo conjunto con Corinne Berzin, y una verdadera joya de aplicación al movimiento Browniano: la nota al Comptes Rendus “Sur les accroissements du Processus de Wiener” de 1992 [29]. En este trabajo se muestra la convergencia casi segura en ley de los incrementos del movimiento Browniano. Las ideas que se desprenden de este profundo resultado fueron las bases para una serie de artículos muy interesantes. Nos conformaremos con citar tres: “Oscillation presque sûre de martingales continues” Lecture Notes In Mathematics, v.: 1655 [33], “Crossings and occupation measures for a class of semimartingales” en el Annals of Probability [37], y “Smoothing of paths and weak approximation of the occupation measure of Lévy processes” en las Publicaciones Matemáticas Del Uruguay [55], escritos con Jean-Marc Azaïs, Gonzalo Perera y Ernesto Mordecki respectivamente.

Tema 4: Las probabilidades aplicadas al análisis numérico.

Entre los temas que han despertado el interés de Mario Wschebor, el más reciente es, posiblemente, el estudio de los fundamentos teóricos del análisis numérico y, para ser más precisos, el análisis probabilista de números de condición. Este análisis tiene sus raíces en un artículo publicado por John von Neumann y Herman Goldstine en 1951 y ha sido fuertemente promovido por Steve Smale. Mario Wschebor descubre el tema a raíz del interés de Felipe Cucker en el análisis probabilista del número de condición GCC (a partir de Goffin, Cheung y Cucker) para sistemas de desigualdades lineales.

Una de las ideas directrices a lo largo de la carrera de Mario Wschebor es la de la aplicación de las fórmulas de Rice a nuevos problemas de la matemática, encontrando en este contexto del análisis numérico una nueva aplicación, resultando en un enfoque totalmente nuevo del problema del número de condición de un problema numérico.

Muchas horas más tarde de los primeros contactos con Cucker sobre el tema, en 2003, publican conjuntamente un artículo en Numerische Mathematik con cotas para la esperanza y la distribución del GCC [46], que resulta seminal en el tema. Varios artículos sobre análisis probabilista de números de condición suceden a este primero, muchos de ellos introduciendo en esta temática a coautores como Jean-Marc Azaïs o Juan Antonio Cuesta, otros escritos en solitario. Entre todos ellos, vale la pena mencionar el artículo "Smoothed Analysis of $K(A)$ " publicado en 2004, en el Journal of Complexity [49]. En el Congreso Internacional de Matemáticos 2002, en China, Daniel Spielman y Shang-Hua Teng conjeturan ciertas cotas para el análisis liso del número de condición de una matriz cuadrada con respecto a una cierta norma en el espacio de matrices. Mario Wschebor demuestra en [49] que la conjetura es falsa tal y como se ha enunciado, pero que las cotas

son correctas cuando el número de condición se define con respecto a la norma espectral. Otra contribución en esta dirección es el artículo de Azaïs y Wschebor “Upper and lower bounds for the tails of the distribution of the condition number of a Gaussian matrix,” de 2005 [51].

La técnica para atacar estos problemas consiste en una nueva aplicación de la fórmula de Rice. Se trata del estudio de matrices aleatorias utilizando técnicas de procesos estocásticos, asociando a cada matriz un proceso estocástico indizado sobre la esfera. Una prueba de la fórmula de Rice para campos aleatorios se encuentra en el trabajo conjunto con Jean-Marc Azaïs “On the Distribution of the Maximum of a Gaussian Field with d Parameters” en *Annals of Applied Probab.* [50].

Continuando en esta dirección, la aplicación de la fórmula de Rice encuentra lugar en el estudio del conjunto de soluciones de un sistema polinomial de ecuaciones en varias variables, con coeficientes aleatorios. Wschebor obtiene una nueva demostración del Teorema de Shub y Smale junto con otras generalizaciones en [52], proponiendo una metodología que permite la consideración de problemas más generales. En particular, en conjunto con Diego Armentano, obtienen el valor esperado del número de soluciones de un sistema polinomial no centrado [67]. Los últimos resultados en esta dirección se encuentran en una serie de trabajos en conjunto con Felipe Cucker, Teresa Krick y Gregorio Malajovich [65], [66] y [72].

La aplicación de la fórmula de Rice al estudio de la complejidad de diversos problemas de análisis numérico, conocida como el “método de Rice” de Azaïs y Wschebor, aparece también en el libro “*Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*” de Jean-Marc Azaïs y Mario Wschebor, editado por Wiley en 2009. Dicho libro resume una parte muy significativa del trabajo científico de Mario Wschebor. La obra comienza con resultados clásicos y centrales de la teoría de los procesos gaussianos, tanto en lo referente a regularidad de trayectorias como a desigualdades para la distribución del máximo. Expone luego en su forma más acabada conocida diversas versiones de la fórmula de Rice. Dicha fórmula permite calcular los momentos del número de cruces (o de los conjuntos de nivel en el caso de campos aleatorios) en función de una integral en la que típicamente aparece una esperanza condicional y una densidad. Contiene luego aplicaciones de las fórmulas a problemas centrales de probabilidad: la regularidad de la distribución del máximo de un proceso y el comportamiento dicho máximo en distintos esquemas asintóticos. Incluye aplicaciones estadísticas en genética y en modelación de las olas del mar. Culmina con aplicaciones de la fórmula de Rice en problemas de complejidad en análisis numérico. Sin duda, en su corto tiempo de vida, este libro se ha convertido en una referencia central en el tema de los procesos estocásticos, y en particular de los procesos gaussianos. Las diversas reseñas aparecidas en la literatura especializada así lo afirman, y de los numerosos elogios que recibió este libro al salir a luz, destacamos el párrafo “A very original book, distinguished by its topic and its ability to make use of intuitive basic techniques...it is one of the most important books in probability theory published in the last twenty years”, de la reseña del libro aparecido en “*Foundations of Computational Mathematics*” en Abril de 2010.

Apéndice I: Breve recuento de la actividad en Venezuela de Mario Wschebor.

Por José Rafael León

En primer lugar señalaremos su labor de formación y de organización de la investigación en Probabilidad y Estadística Matemática llevada a cabo en Venezuela.

Mario llegó a Caracas en 1976 y fue seguido por su compatriota Enrique Cabaña el año siguiente. Desde su arribo establecieron contactos con la entonces joven generación de matemáticos venezolanos, que comenzaban a interesarse por ambas disciplinas. En 1977 decidieron comenzar un seminario semanal conjunto IVIC-UCV-USB². Esta actividad se mantuvo por más de 20 años, diez años más que el que los mencionados investigadores pasaron en Venezuela. El seminario constituyó el lugar de encuentro y el inicio de la carrera de muchos investigadores venezolanos. Los temas tratados eran novedad para una Venezuela cuya primera Facultad de Ciencias tenía apenas 18 años de fundada. Se estudiaban, entre otros temas, la estadística no paramétrica en particular los temas desarrollados por Le Cam y Hájek: alternativas de contigüidad, convergencia de los estadísticos de rango al puente Browniano o a integrales estocásticas, también se exponían los desarrollos del momento de la teoría de los procesos Gaussianos: continuidad, acotación, predicción y en particular el estudio de la distribución del supremo de estos procesos. El estudio de temas de vuelo teórico se balanceaba con los de estadística clásica por ejemplo: refinamientos de los modelos de regresión y lineales. Es importante mencionar que esta última característica constituía una filosofía del seminario. No se establecía diferencia entre las dos disciplinas, una era complemento de la otra y su desarrollo no podía hacerse sino de manera conjunta. Esta filosofía siempre ha sido la manera como Mario Wschebor entiende el desarrollo científico. Sus estudiantes y aquellos que han recibido su influencia, como los asiduos de este seminario caraqueño, guardaron para sí esta visión en el desarrollo de sus carreras. Podemos mencionar algunos de los investigadores profesionales que iniciaron sus carreras en el marco de ese seminario: Alejandra Cabaña, Glaysar Castro, Ileana Iribarren, José R. León, Carenne Ludeña, Isabel Llatas, Joaquín Ortega, Luis Raúl Pericchi, Adolfo Quiroz, Wilfredo Urbina, además de un gran etcétera. En el marco de esta reunión semanal, seminario itinerante, se empezó a cuajar la idea de la necesidad de un congreso latinoamericano de probabilidad y estadística matemática. Mario Wschebor, con su experiencia internacional y su deseo de ver desarrolladas las disciplinas en el ámbito de Latinoamérica, fue uno de sus más activos promotores y organizadores. Fue así como en 1980 tuvo lugar el I CLAPEM en Caracas. El congreso tuvo como subproducto la creación de la filial para la región de la Sociedad Bernoulli hoy consolidada como la SLAPEM. Luego en 1985, otra vez en Caracas, se realizó el II CLAPEM, de nuevo vimos a Mario involucrado en las arduas tareas de organización y de edición de las actas. Desde esa época los CLAPEM no han dejado de realizarse, tienen lugar cada dos o tres años, dos de ellos en Montevideo donde de nuevo la energía y vocación de Mario fueron muy importantes. La Probabilidad y la Estadística Matemática tienen ahora su lugar en América Latina y de ello no ha sido ajena la actividad desplegada por Mario.

2 IVIC: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, UCV: Universidad Central de Venezuela, USB: Universidad Simón Bolívar.

Apéndice II: Breve informe sobre la influencia de Wschebor sobre la escuela de probabilidad francesa.

Por Didier Dacunha-Castelle

Mario Wschebor hizo varias estancias en Francia durante el periodo de su exilio en Venezuela. Es imposible medir esta influencia solamente a través sus artículos bien conocidos. Por esta razón quisiera insistir sobre cosas menos conocidas.

Invitado la primera vez en Orsay por Jean Pierre Kahane y el equipo de análisis armónico, Wschebor resolvió el problema del recubrimiento del círculo por medio de intervalos aleatorios. Se vinculó naturalmente con el equipo de probabilidad y estadística que le invitó como profesor. En este marco, Wschebor dio varios cursos de Máster y de post graduación sobre el tema de campos aleatorios y fórmulas de Rice. Muchos investigadores hoy conocidos o famosos han seguido esos cursos. También dio un curso para los ingenieros de IFREMER (French Research Institute for Exploration of the Sea) con gran éxito e importantes consecuencias en el área relacionada con la seguridad de obras y las plataformas en el mar.

La teoría de Wschebor sobre regularización de trayectorias, medidas de ocupación y cruces fue desarrollada por sus estudiantes y mas tarde colaboradores como Jean-Marc Azaïs y Corinne Berzin. Su influencia fue grande en las tesis de Jean Marc Bardet sobre dimensiones y autosimilaridad y la de P. Brugière sobre problemas de ocupación por difusiones en dimensiones mayor que tres.

Un punto interesante es la lenta penetración de fórmulas de Rice en la mecánica estadística en Orsay. Por ejemplo G. Benarous utilizó hace poco esta técnica en problemas de vidrios de spin. También estas técnicas fueron utilizadas en Orsay para resolver problemas de estimación por difusiones. Es el caso si la observación se hace solamente cuando el proceso este muy cerca de un nivel dado, como en el trabajo de Dacunha-Castelle y Florens-Zmirou, "Estimation of the coefficient of a diffusion from discrete observations", *Stochastics* 19, 1986, 263–284.