Nombre del curso: Funciones de variable compleja.

Semestre: par.

Periodicidad: anual.

Créditos: 12.

Área: A.

Nivel: Intermedio.

Subárea: Cálculo diferencial e integral.

Duración: 15 semanas.

Carga horaria:

- Teórico: 3 horas por semana.
- Práctico: 1:30 horas por semana.
- Estudio sugerido: 5 horas por semana.

Previaturas reglamentarias: Cálculo II.

Conocimientos previos sugeridos: Topología del plano, continuidad y derivabilidad de funciones de varias variables reales, convergencia de sucesiones y series. Series de funciones y convergencia uniforme.

Objetivo del curso

Introducir al estudiante a la teoría básica de las funciones analíticas de una variable compleja. Esta teoría tiene como centro el Teorema de Cauchy, acerca de las integrales sobre curvas de dichas funciones. Uno de los objetivos es aprender las principales consecuencias de este teorema, que provocan una grán diferencia entre el comportamiento de las funciones derivables sobre los complejos y el de las ya conocidas funciones derivables sobre los reales. Aprender a calcular los elementos relevantes de las funciones analíticas: derivadas, integrales sobre curvas, ordenes de ceros y polos, residuos, series de Taylor y de Laurent. Estudiar la existencia de primitivas, y su relación con la topología del dominio. También se aprenderán las aplicaciones clásicas de la teoría, como el Teorema Fundamental del Algebra y el cálculo de integrales impropias por el método de los contornos. Estudiar las transformaciones conformes, con énfasis en el caso del disco, culminando en el Teorema de Riemann.

Temario sintético

1. [1 semana] Número complejo y funciones estándar.
2. [1 semana] Derivabilidad sobre los complejos.
3. [2 semanas] Integración a lo largo de curvas.
4. [1 semana] Aplicaciones de la Fórmula de Cauchy.
5. [1 semana] Propiedades locales de las funciones holomorfas.
6. [2 semanas] Singularidades aisladas.
7. [1 semana] Esfera de Riemann y funciones meromorfas.
8. [2 semanas] Cálculo de Residuos.
9. [3 semanas] Transformaciones conformes.

Nota: Una de las quince semanas de curso está prevista para la realización de evaluaciones y/o recuperación de clases perdidas.

Temario desarrollado

1. Número complejo y funciones estándar.
   (a) Breve introducción al programa del curso.
   (b) Algebra de los números complejos, potencias y raíces.
   (c) Funciones exponencial y logarítmica, funciones trigonométricas.
2. Derivabilidad sobre los complejos.
   (a) Continuidad y derivabilidad de funciones complejas de una variable compleja.
   (b) Ecuaciones de Cauchy–Riemann.
   (c) Derivada compleja y su relación con el diferencial.
3. Integración a lo largo de curvas.
   (a) Definición.
   (b) Teorema de Cauchy en un triángulo y en un disco.
   (c) Lema de Poincaré. (Existencia de primitivas en un convexo).
   (d) Representación integral de las funciones holomorfas. (Fórmulas de Cauchy).
4. Aplicaciones de la Fórmula de Cauchy.
   (a) Teorema de Morera.
   (b) Convergencia uniforme de funciones holomorfas. Series de potencias son holomorfas.
   (c) Desigualdades de Cauchy y Teorema de Liouville. Teorema fundamental del Algebra.

    (d) Principios del valor medio y del módulo máximo.
    (e) Reflexión de Schwarz.

5. Propiedades locales de las funciones holomorfas.
    (a) Series de Taylor. Funciones holomorfas son analíticas.
    (b) Continuación analítica.
    (c) Orden de un cero.
    (d) Forma local de las funciones holomorfas. Función abierta.
6. Singularidades aisladas.
    (a) Clasificación.
    (b) Orden y parte principal en un polo.
    (c) Teorema de Casorati–Weierstrass. (Comportamiento cerca de una singularidad esencial).
    (d) Series de Laurent.
7. Esfera de Riemann y funciones meromorfas.
    (a) Esfera de Riemann y proyección estereográfica.
    (b) Comportamiento de una función en el punto en el infinito.
    (c) Funciones racionales. Transformaciones de Moebius.
8. Cálculo de Residuos.
    (a) Definición y métodos de cálculo.
    (b) Indice de un punto respecto a una curva cerrada.
    (c) Teorema de Cauchy Global y Fórmula de los Residuos.
    (d) Invariancia por homotopías de la integral a lo largo de curvas de funciones holomorfas.
    (e) Integrales impropias por el método de los contornos.
    (f) Principio del argumento y Teorema de Rouché.
9. Transformaciones conformes.
    (a) Definición. Preservación de ángulos.
    (b) Lema de Schwarz. Automorfismos conformes del plano, del disco y del semiplano.
    (c) Regiones simplemente conexas: Lema de Poincaré. Logaritmos y raíces holomorfas.
    (d) Familias normales y Teorema de Montel.
    (e) Teorema de Riemann.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L., *Complex Analysis, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, McGraw-Hill, 3rd Edition, 1979.

[2] Conway, J., *Functions of one complex variable*, Springer, 2nd Edition, 1978.

[3] Neto, A. L. *Funçoes de uma variável complexa*, IMPA, 2a Ediçao, 2005.

[4] Nieto, J., *Funciones de variable compleja*, Monografía No. 8 de la OEA.

[5] Rudin, W., *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, 1988.

[6] Stein, E., *Complex Analysis*, Princeton Univ. Press, 2003.