Cálculo de dimensión de $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ y $\mathcal{S}_k(\Gamma)$

Soledad Villar

Objetivo

Sea $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ subgrupo de congruencia

Calcular la dimensión de los espacios vectoriales $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ y $\mathcal{S}_k(\Gamma)$

Idea

Teorema (Riemann-Roch)

Sea X es una superficie de Riemann compacta de género g. Si $\operatorname{div}(\lambda)$ es un divisor canónico en X. Entonces para todo divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ se cumple que:

$$\ell(D) = \deg(D) - g + 1 + \ell(\operatorname{div}(\lambda) - D)$$

Además, si $\deg(D) > 2g - 2$ entonces $\ell(D) = \deg(D) - g + 1$

Idea

Identificar $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ con $\mathcal{L}(D)$ para algún D en una superficie de Riemann compacta: $X(\Gamma)$.

Cálculo del género de $X(\Gamma)$

Teorema (Riemann-Hurwitz)

Sean X e Y superficies de Riemann compactas, y $f : X \to Y$ un cubrimiento ramificado de grado d. Entonces:

$$2g_X - 2 = d(2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} (e_x - 1)$$

Consideramos $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ subgrupos de congruencia de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} f : X(\Gamma_1) &\to X(\Gamma_2) \\ \Gamma_1\tau &\mapsto \Gamma_2\tau \end{aligned}$$

$$\deg(f) = [\{\pm I\}\Gamma_2 : \{\pm I\}\Gamma_1]$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[d] & U \arrow[d] \arrow[dr, "\delta"] & \\
\delta(U) \arrow[dr, "\rho_1"'] & \pi_1(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \pi_2(U) \arrow[d] & \delta(U) \arrow[dl, "\rho_2"] \\
 & V_1 \arrow[r, "f_{local}"'] & V_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\rho_1(z) = z^{h_1}$$
$$\rho_2(z) = z^{h_2}$$
$$f_{local}(q) = q^{h_2/h_1}$$

$$e_{\pi_1(\tau)} = h_2/h_1 \begin{cases} h_2 & \text{si } \tau \text{ es punto elíptico para } \Gamma_2 \text{ pero no para } \Gamma_1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En las cúspides:

$$e_{\pi_1(s)} = h_1/h_2$$

Para calcular el género consideramos $f : X(\Gamma) \to X(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$.
Definimos:

$$y_2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})i, \;\; y_3 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\mu_3, \;\; y_\infty = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\infty$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \text{cantidad de puntos elípticos en } f^{-1}(y_2) \\ \varepsilon_3 &= \text{cantidad de puntos elípticos en } f^{-1}(y_3) \\ \varepsilon_\infty &= \text{cantidad de cúspides en } X(\Gamma) \end{aligned}$$

$$d = \sum_{x \in f^{-1}(y_h)} e_x = h(|f^{-1}(y_h)| - \varepsilon_h) + \varepsilon_h$$

$$\sum_{x \in f^{-1}(y_h)} (e_x - 1) = (h-1)(|f^{-1}(y_h)| - \varepsilon_h) = \frac{h-1}{h}(d - \varepsilon_h)$$

En las cúspides $\displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(y_\infty)} (e_x - 1) = d - \varepsilon_\infty$

Entonces $\boxed{g = 1 + \frac{d}{12} - \frac{\varepsilon_2}{4} - \frac{\varepsilon_3}{3} - \frac{\varepsilon_\infty}{2}}$

Relación entre $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ y divisores

Sea $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$ ($f \neq 0$).

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_k(\Gamma) &= C(X(\Gamma))f \\
&= \{f_0 f \in \mathcal{A}_k(\Gamma) \ : f_0 \in C(X(\Gamma))\} \\
\mathcal{M}_k(\Gamma) &= \{f_0 f \in \mathcal{A}_k(\Gamma) \ : f_0 f = 0 \text{ ó } \operatorname{div}(f_0 f) \geq 0\} \\
&\cong \{f_0 \in C(X(\Gamma)) \ : f_0 = 0 \text{ ó } \operatorname{div}(f_0) + \operatorname{div}(f) \geq 0\}
\end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$ *¿qué significa* $\mathrm{div}(f)$*?*

Si $\pi(\tau) \in X(\Gamma)$ (no cúspide). Como $j(\gamma, \tau) \neq 0, \infty$ en $\mathcal{H} \Rightarrow$ el orden de anulación de f es el mismo en toda la órbita.
En coordenadas locales $q = (t-\tau)^h$

$$f(t) = a_m(t-\tau)^m + \dots$$
$$f(q) = a_m q^{m/h} + \dots$$

$$\boxed{\nu_{\pi(\tau)}(f) := \frac{\nu_\tau(f)}{h}}$$

En las cúspides

$$\boxed{\nu_{\pi(s)}(f) := \begin{cases} \nu_s(f)/2 & \text{si } (\alpha^{-1}\Gamma\alpha)_\infty = \left\langle -\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } k \text{ es impar} \\ \nu_s(f) & \text{si no} \end{cases}}$$

Entonces

$$\mathcal{M}_k(\Gamma) \cong \{f_0 \in C(X(\Gamma)) \ : f_0 = 0 \text{ ó } \operatorname{div}(f_0) + \operatorname{div}(f) \geq 0\}$$
$$= \text{“}\mathcal{L}(\operatorname{div}(f))\text{”} \text{ Con } \operatorname{div}(f) \in \operatorname{Div}_{\mathbb{Q}}(X(\Gamma)).$$

Idea: Definimos $\left\lfloor \sum n_x x \right\rfloor := \sum \lfloor n_x \rfloor x$. Como $f_0 \in C(X(\Gamma))$ entonces

$$\operatorname{div}(f_0) + \operatorname{div}(f) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(f_0) + \lfloor \operatorname{div}(f) \rfloor \geq 0$$

Entonces: $\mathcal{M}_k(\Gamma) \cong \mathcal{L}(\lfloor \operatorname{div}(f) \rfloor)$.

Formas diferenciales en $X(\Gamma)$

Sea V abierto de $\mathbb{C}$, se define:

$$\Omega^{\otimes n}(V) = \{f(q)(dq)^n : \ f \text{ es meromorfa en } V\}$$

Teorema

Si k es par, entonces

$$\omega : \mathcal{A}_k(\Gamma) \to \Omega^{\otimes k/2}(X(\Gamma))$$
$$f \mapsto (\omega_j)_{j\in J} \text{ tal que } \pi^*(w_j) = f(\tau)(d\tau)^{k/2}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) En un entorno V_j se construye la forma diferencial $\omega_j = \frac{g_j(q)}{(hq)^{k/2}}(dq)^{k/2}$ donde $z^{k/2}(f[\alpha]_k)(z)$ es de forma $g_j(z^h)$.
En las cúspides $\omega_j = \frac{g_j(q)}{(2\pi iq/h)^{k/2}}(dq)^{k/2}$

($\Leftarrow$) invarianza bajo Γ de peso k. □

Entonces

$$\boxed{\nu_0(\omega_j) = \nu_0\left(\frac{g_j(q)}{(hq)^{k/2}}\right) = \nu_{\pi(\tau_j)}(f) - \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)}$$

y en las cúspides

$$\boxed{\nu_0(\omega_j) = \nu_0\left(\frac{g_j(q)}{(2\pi i q/h)^{k/2}}\right) = \nu_{\pi(s_j)}(f) - \frac{k}{2}}$$

Cálculo de $\ell(\lfloor \mathrm{div}(f) \rfloor)$

Conocemos $\mathrm{div}(\omega)$ y $\mathrm{div}(f)$.
Definimos $\mathrm{div}(d\tau)$ tal que $\mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f) + \frac{k}{2}\mathrm{div}(d\tau)$.

$$\mathrm{div}(d\tau) := -\sum_i \frac{1}{2} x_{2,i} - \sum_i \frac{2}{3} x_{3,i} - \sum_i x_i$$

Entonces

$$\lfloor \mathrm{div}(f) \rfloor = \mathrm{div}(\omega) + \sum_i \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor x_{2,i} + \sum_i \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor x_{3,i} + \sum_i \frac{k}{2} x_i$$

Si $\omega \in \Omega^{\otimes k/2}$ entonces $\deg(\operatorname{div}(\omega)) = k(g-1)$

Entonces si $k \geq 2$
$\deg(\lfloor \operatorname{div}(f) \rfloor) = k(g-1) + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor \varepsilon_2 + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor \varepsilon_3 + \frac{k}{2}\varepsilon_\infty > 2g-2$

Entonces por Riemann-Roch $\ell(D) = \deg(D) - g + 1$

$$\dim \mathcal{M}_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1) + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor \varepsilon_2 + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor \varepsilon_3 + \frac{k}{2}\varepsilon_\infty & k \geq 2 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_k(\Gamma) = \mathcal{L}\Big(\lfloor \mathrm{div}(f) \rfloor - \sum_i x_i\Big)$$

$$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1) + \lfloor \frac{k}{4} \rfloor \varepsilon_2 + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor \varepsilon_3 + (\frac{k}{2} - 1)\varepsilon_\infty & k \geq 4 \\ g & k = 2 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

k impar

- Si k impar y $-I \in \Gamma$, entonces $\mathcal{A}_k(\Gamma) = \{0\}$.
- Si $-I \notin \Gamma$, entonces $X(\Gamma)$ no tiene puntos elípticos de período 2.
- Si $f \in \mathcal{A}_k(\Gamma)$, $f \neq 0$, ocurre igual que en caso par que $\mathcal{A}_k(\Gamma) \cong C(X(\Gamma))f$.
- Consideramos $\omega(f^2) \in \Omega^k(\Gamma)$
- Diferenciar entre cúspides regulares e irregulares.

Si $\{x_i\}$ son las cúspides regulares, y $\{x_i'\}$ las cúspides irregulares. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(d\tau) &= -\sum_i \frac{2}{3} x_{3,i} - \sum_i x_i - \sum_i x_i' \\
\operatorname{div}(\omega) &= 2\operatorname{div}(f) + k\operatorname{div}(d\tau) \\
\operatorname{div}(f) &= \frac{1}{2}\operatorname{div}(\omega) + \sum_i \frac{k}{3} x_{3,i} + \sum_i \frac{k}{2} x_i + \sum_i \frac{k}{2} x_i' \\
\lfloor \operatorname{div}(f) \rfloor &= \frac{1}{2}\operatorname{div}(\omega) + \sum_i \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor x_{3,i} + \sum_i \frac{k}{2} x_i + \sum_i \frac{k-1}{2} x_i'
\end{aligned}$$

$$\dim \mathcal{M}_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1) + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \varepsilon_3 + \frac{k}{2}\varepsilon_\infty^{reg} + \frac{k-1}{2}\varepsilon_\infty^{irreg} & k \geq 3 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma) = \begin{cases} (k-1)(g-1) + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \varepsilon_3 + \frac{k-2}{2}\varepsilon_\infty^{reg} + \frac{k-1}{2}\varepsilon_\infty^{irreg} & k \geq 3 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$