Series de Eisentein

Gustavo Rama

Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, UdelaR

Resumen

1. Series de Eisentein
   - Series de Eisentein para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
   - Series de Eisenstein para $\Gamma(N)$, $k \geq 3$
   - Caracteres de Dirichlet
   - Series de Eisenstein para los subespacios, $k \geq 3$

Definición

Definimos la serie de Eisenstein de peso k para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

$$G_k(\tau) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{(c\tau + d)^k}, \quad k \geq 4$$

La suma es absolutamente convergente, converge uniformemente en compactos de $\mathbb{H}$, y

$$G_k \in \mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$$

La expansion de Fourier de G_k es:

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$$

con

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m>0}} m^{k-1}$$

Podemos reordenar la serie de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2}{}' \frac{1}{(c\tau+d)^k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ mcd(c,d)=n}} \frac{1}{(c\tau+d)^k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ mcd(c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau+d)^k} \\ &= \zeta(k) \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ mcd(c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau+d)^k} \end{aligned}$$

Definición

La serie de Eisentein normalizada de peso k es

$$E_k(\tau) = G_k(\tau)/(2\zeta(k))$$

Por lo visto antes

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ mcd(c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

Definición

Sea $P_+ = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$, la parte positiva del subgrupo parabolico de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Esto nos da una nueva descripción de E_k.

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in P_+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(\gamma, \tau)^{-k}$$

Podemos probar la invarianza de G_k de manera mas elegante,

$$(E_k[\gamma]_k(\tau)) = \frac{1}{2} j(\gamma, \tau)^{-k} \sum_{\gamma' \in P_+ \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j\left(\gamma', \gamma(\tau)\right)^{-k}$$

Definición

Dado $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ subgrupo de congruencia, el espacio de series de Eisenstein de peso k de Γ es:

$$\mathcal{E}_k(\Gamma) = \mathcal{M}_k(\Gamma)/\mathcal{S}_k(\Gamma)$$

Generalizamos la serie de Eisenstein para $\Gamma(N)$. Sean

- N entero positivo.
- $\overline{v} = \overline{(c_v, d_v)} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ vector de orden N, o sea $mcd(N, mcd(c_v, d_v)) = 1$.
- $\delta = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c_v & d_v \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$.
- $k \geq 3$ entero.
- $\epsilon_N = \begin{cases} 1/2 \text{ si } N \in \{1, 2\} \\ 1 \text{ si } N > 2 \end{cases}$

Definición

$$E_k^{\overline{v}}(\tau) = \epsilon_N \sum_{\substack{(c,d) \equiv v(N) \\ mcd(c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} = \epsilon_N \sum_{\gamma \in (P_+ \cap \Gamma(N)) \backslash \Gamma(N)\delta} j(\gamma, \tau)^{-k}$$

Proposición

Para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(Z)$,

$$\left(E_k^{\overline{v}}[\gamma]_k\right)(\tau) = E_k^{\overline{v\gamma}}(\tau)$$

Corolario

$$E_k^{\overline{v}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma(N))$$

Podemos simetrizar las series de Eisenstein para obtener formas modulares de cualquier subgrupo de congruencia Γ.

$$E_{k,\Gamma}^{\overline{v}} = \sum_{\gamma_j \in \Gamma(N)\backslash\Gamma} E_k^{\overline{v}}[\gamma_j]_k \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$$

Es facil de calcular el siguiente limite,

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} E_k^{\overline{v}}(\tau) = \begin{cases} (\pm 1)^k & \text{si } \overline{v} = \pm\overline{(0,1)}, \text{ salvo si } k \text{ impar y } N \in \{1,2\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo que $E_k^{\overline{v}}$ no se anula en ∞ si $\overline{v} = \pm\overline{(0,1)}$ y se anula en otro caso.
Si $\overline{v} = \overline{(c,d)} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ de orden N, entonces $E_k^{\overline{v}}$ no se anula en la cuspide $\Gamma(N)(-d/c)$ y se anula en las otras cuspides de $\Gamma(N)$.

Si k es par o $N > 2$, considero un conjunto de vectores $\{\overline{v}\} = \left\{\overline{(c,d)}\right\}$ tales que $-d/c$ representantes de las cuspides de $\Gamma(N)$.

Entonces $\left\{E^{\overline{v}}\right\}$ es un conjunto li, con $\varepsilon_\infty(\Gamma(N))$ elementos que es la dimension de $\mathcal{E}_k(\Gamma(N))$, y $\left\{E_k^{\overline{v}} + \mathcal{S}_k(\Gamma(N))\right\}$ es una base de $\mathcal{E}_k(\Gamma(N))$.

Definición

$$G_k^{\overline{v}}(\tau) = \sum_{(c,d)\equiv v\ (N)} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$$

Podemos escribir las series de Eisenstein normalizadas en funcion de las series de Eisentein y al reves:

$$G_k^{\overline{v}}(\tau) = \frac{1}{\epsilon_N} \sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \zeta_+^n(k) E_k^{n^{-1}\overline{v}}(\tau)$$

$$E_k^{\overline{v}}(\tau) = \epsilon_N \sum_{n\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \zeta_+^n(k,\mu) G_k^{n^{-1}\overline{v}}(\tau)$$

con

$$\zeta_+^n(k) = \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv n\ (N)}}^{\infty} \frac{1}{m^k},\ \zeta_+^n(k,\mu) = \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv n\ (N)}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^k},\ n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

La expansion de Fourier de $G_k^{\overline{v}}$ es:

$$G_k^{\overline{v}}(\tau) = \delta(\overline{c}_v)\zeta^{\overline{d}_v}(k) + \frac{C_k}{N^k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}^{\overline{v}}(n)q_N^n, \; q_N = e^{2\pi i\tau/N}$$

donde

$$\delta(\overline{c}_v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{c}_v = \overline{0} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \zeta^{\overline{d}_v}(k) = \sum_{d \equiv d_v \ (N)}{}' \frac{1}{d^k}$$

$$C_k = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \qquad \sigma_{k-1}^{\overline{v}}(n) = \sum_{\substack{m|n \\ n/m \equiv c_v \ (N)}} \operatorname{sgn}(m) m^{k-1} \mu_N^{d_v m}$$

$N \in \mathbb{Z}^+$, $G_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, $|G_N| = \varphi(N)$

Definición

Un caracter de Dirichlet modulo N es un

$$\chi : G_N \to \mathbb{C}^\times$$

homomorfismo de grupos multiplicativos.

El conjunto de caracteres de Dirichlet forma un grupo, al que denotamos

$$\hat{G}_N = Hom(G_N, \mathbb{C}^\times)$$

Se puede probar que G_N y $\hat{G}_N$ son isomorfos como grupos, aunque no canonicamente.
Tenemos las siguientes relaciones de ortogonalidad para G_N y $\hat{G}_N$:

$$\sum_{n \in G_N} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N) & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{si } \chi \neq 1 \end{cases} \quad \sum_{\chi \in \hat{G}_N} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Estamos interesados en los caracteres porque descomponen a $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ en una suma directa.

Definición

Dado un caracter χ modulo N, el subespacio propio asociado a χ de $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ es:

$$\mathcal{M}_k(N, \chi) = \{f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) : f[\gamma]_k = \chi(d_\gamma) f \ \forall \gamma \in \Gamma_0(N)\}$$

Se puede probar lo siguiente:

- $\mathcal{M}_k(N, 1) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$.
- $\mathcal{M}_k(N, \chi) = \{0\}$ salvo si $\chi(-1) = (-1)^k$.
- $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_\chi \mathcal{M}_k(N, \chi)$.

Dado $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ defino el operador diamante:

$$\langle d \rangle : \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$$

$$\langle d \rangle f = f[\alpha]_k$$

donde $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, $\delta \equiv d \ (N)$.

Defino tambien el siguiente operador:

$$\pi_\chi = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(d)^{-1} \langle d \rangle$$

Para probar la descomposicion hay que probar:

1. $\pi_\chi^2 = \pi_\chi$.
2. $\pi_\chi(\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \subset \mathcal{M}_k(N, \chi)$.
3. $\pi_\chi = 1$ en $\mathcal{M}_k(N, \chi)$.
4. $\sum_\chi \pi_\chi = 1$
5. $\pi_\chi \circ \pi_{\chi'} = 0$, si $\chi \neq \chi'$

Sabemos que

$$G_k^{\overline{v}}[\gamma]_k = G_k^{\overline{v\gamma}}$$

para todo $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Si $v \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$, $v = \overline{(0, d)}$ se cumple que:

$$\overline{(0, d)\gamma} = \overline{(0, dd\gamma)} \ \forall \gamma \in \Gamma_0(N)$$

Por lo que la siguiente suma esta en $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$,

$$\sum_{d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} G_k^{(0,d)}$$

Esta otra suma esta en $\mathcal{M}_k(N, \chi)$,

$$\sum_{d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(d)^{-1} G_k^{(0,d)}$$

Queremos hallar una base de $\mathcal{E}(N, \chi)$.

Definición

Dados u, v, $\psi \in \hat{G}_u$ y $\varphi \in \hat{G}_v$, tales que $(\psi\varphi)(-1) = (-1)^k$ definimos:

$$G_k^{\psi\varphi}(\tau) = \sum_{c=0}^{u-1}\sum_{d=0}^{v-1}\sum_{e=0}^{u-1} \psi(c)\varphi^{-1}(d) G_k^{\overline{(cv, d+ev)}}(\tau)$$

Es facil de ver que $G_k^{\psi\varphi} \in \mathcal{M}_k(uv, \psi\varphi)$

Teorema

Las series de Eisenstein $G_k^{\psi\varphi}$ toman la forma:

$$G_k^{\psi\varphi}(\tau) = \frac{C_k g(\varphi^{-1})}{v^k} E_k^{\psi\varphi}(\tau)$$

donde $E_k^{\psi\varphi}$ tiene expansion de Fourier:

$$E_k^{\psi\varphi}(\tau) = \delta(\psi)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{1-k}}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^{\psi\varphi}(n) q^n, \ q = e^{2\pi i \tau}$$

Donde $\delta(\psi) = 1$ si $\psi = 1$ y $\delta(\psi) = 0$ si no,

$$\sigma_{k-1}^{\psi\varphi}(n) = \sum_{\substack{m|n \\ m>0}} \psi(n/m)\varphi(m) m^{k-1}$$

Definición

Dados $N > 0$, $k \geq 3$ enteros.

$$A_{N,k} = \{(\psi, \varphi, t) : \psi,\ \varphi \text{ caracteres primitivos modulo } u,\ v, \\ \text{con } (\psi\varphi)(-1) = (-1)^k,\ tuv|N\}$$

Se puede probar que $|A_{N,k}| = \dim(\mathcal{E}_k(\Gamma_1(N)))$

Definición

Dada $(\psi, \varphi, t) \in A_{N,k}$ defino

$$E_k^{\psi,\varphi,t}(\tau) = E_k^{\psi,\varphi}(t\tau)$$

Teorema

Dado N entero positivo y $k \geq 3$. El conjunto

$$\left\{ E_k^{\psi,\varphi,t} : (\psi, \varphi, t) \in A_{N,k} \right\}$$

respresenta una base de $\mathcal{E}_k(\Gamma_1(N))$. Para cualquier caracter χ modulo N, el conjunto

$$\left\{ E_k^{\psi,\varphi,t} : (\psi, \varphi, t) \in A_{N,k}, \psi\varphi = \chi \right\}$$

representa una base para $\mathcal{E}_k(N, \chi)$.