Puntos Elípticos y Cúspides

Eduardo Senturión - IMERL (FIng) - UdelaR

Viernes 4 de Noviembre de 2011

definiciones

$\Gamma \leq SL_2(\mathbb{Z})$ subgrupo de congruencia, denotaremos por

$$\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$$

Definición

$z \in \mathcal{H}$ se dice elíptico sii $(\pm I)\Gamma_z/(\pm I)$ es no trivial.

definiciones

$\Gamma \leq SL_2(\mathbb{Z})$ subgrupo de congruencia, denotaremos por

$$\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$$

Definición

$z \in \mathcal{H}$ se dice elíptico sii $(\pm I)\Gamma_z/(\pm I)$ es no trivial.

$\pi : \mathcal{H} \to Y(1)$, $\pi(z)$ elíptico si y solo si z elíptico.
$ord(z) = |(\pm I)\Gamma_z/(\pm I)|$

Lemas

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1, |\mathcal{R}e(z)| \leq 1\}$$

Lemas

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1, |\mathcal{R}e(z)| \leq 1\}$$

Lema

$\pi : \mathcal{H} \to Y(1)$ *es sobreyectiva.*

Lemas

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1, |\mathcal{R}e(z)| \leq 1\}$$

Lema

$\pi : \mathcal{H} \to Y(1)$ es sobreyectiva.

Lema

$z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ distintos, $\gamma z_1 = z_2$, $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ entonces vale una de las siguientes:

1. $\mathcal{R}e(z_1) = -\mathcal{R}e(z_2) = \pm\frac{1}{2}$, $\Im z_1 = \Im z_2$, *o sea* $z_1 - z_2 = \pm 1$.
2. $|z_1| = |z_2| = 1$ *y* $z_1 z_2 = -1$.

Ptos Elip $SL_2(\mathbb{Z})$

Proposición

$\mathcal{D}$ *es dominio fundamental para* $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ptos Elip $SL_2(\mathbb{Z})$

Proposición

$\mathcal{D}$ es dominio fundamental para $SL_2(\mathbb{Z})$.

Proposición

Ptos Elip $SL_2(\mathbb{Z})$

1. *Puntos Elípticos*
   1. *orden 2, $SL_2(\mathbb{Z})i$.*
   2. *orden 3, $SL_2(\mathbb{Z})\mu_3$.*
2. *Grupos de Isotropía*
   1. *$SL_2(\mathbb{Z})_i =< S >$.*
   2. *$SL_2(\mathbb{Z})_{\mu_3} =< ST >$.*

Ptos Elip $\Gamma_0(N)$

$$\Gamma_0^{\pm}(N) = \{\gamma \in GL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Se puede ver que $\Gamma_0(N)$ es normal en $\Gamma_0^{\pm}(N)$.

Ptos Elip $\Gamma_0(N)$

$$\Gamma_0^{\pm}(N) = \{\gamma \in GL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Se puede ver que $\Gamma_0(N)$ es normal en $\Gamma_0^{\pm}(N)$.
Clases de conj extendidas

$$\{\alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0^{\pm}(N)\}$$

Ptos Elip $\Gamma_0(N)$

$$\Gamma_0^{\pm}(N) = \{\gamma \in GL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Se puede ver que $\Gamma_0(N)$ es normal en $\Gamma_0^{\pm}(N)$.
Clases de conj extendidas

$$\{\alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0^{\pm}(N)\}$$

Son la unión de $\{\alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0(N)\}$ y $\{\alpha\gamma^{-1}\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0(N)\}$.

Ptos Elip $\Gamma_0(N)$

$$\Gamma_0^{\pm}(N) = \{\gamma \in GL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N}\}$$

Se puede ver que $\Gamma_0(N)$ es normal en $\Gamma_0^{\pm}(N)$.
Clases de conj extendidas

$$\{\alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0^{\pm}(N)\}$$

Son la unión de $\{\alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0(N)\}$ y $\{\alpha\gamma^{-1}\alpha^{-1} : \alpha \in \Gamma_0(N)\}$.

$$A = \mathbb{Z}[\mu_3]$$

Clases ext de conj $\iff$ J ideal de A, $A/J \sim \mathbb{Z}/N \ldots$

Contando Ptos Elip

Proposición

z es pto elip de orden 2
$\iff \Gamma_z = \langle \gamma_z \rangle$ con $ord(\gamma_z) = 4$
$\iff J$ ideales $\mathbb{Z}[i]/J \sim \mathbb{Z}/N$
z es pto elip de orden 3
$\iff \Gamma_z = \langle \gamma_z \rangle$ con $ord(\gamma_z) = 6$
$\iff J$ ideales $\mathbb{Z}[\mu_3]/J \sim \mathbb{Z}/N$

Proposición

$$\epsilon_2(N) = \begin{cases} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right. & si\ 4\ \not| N \\ 0 & si\ 4|N \end{cases}$$

$$\epsilon_3(N) = \begin{cases} \prod_{p|N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right. & si\ 9\ \not| N \\ 0 & si\ 9|N \end{cases}$$

Lemas

Lema

$s = \frac{a}{c}$ y $s' = \frac{a'}{c'}$ irreducibles, $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

$$\gamma s = s' \iff \gamma \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}$$

Lemas

Lema

$s = \frac{a}{c}$ y $s' = \frac{a'}{c'}$ irreducibles, $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

$$\gamma s = s' \iff \gamma \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}$$

Lema

$\gamma \in \Gamma(N)$

$$\gamma \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \pmod{N}$$

Proposición

1. $$\Gamma(N)s' = \Gamma(N)s \iff \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \pmod{N}$$

2. $$\Gamma_1(N)s' = \Gamma_1(N)s \iff \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a + jc \\ c \end{pmatrix} \pmod{N}$$

   para algún j.

3. $$\Gamma_0(N)s' = \Gamma_0(N)s \iff \begin{pmatrix} ya' \\ c' \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a + jc \\ yc \end{pmatrix} \pmod{N}$$

Lema

a, c y $\bar{a}, \bar{c} \in \mathbb{Z}/N$, son equivalentes

1. *Existan $a', c' \in \mathbb{Z}$, $(a', c') = 1$ y $\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \pmod{N}$.*
2. *$\gcd(a, c, N) = 1$.*
3. *$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{c} \end{pmatrix}$ orden N en $\mathbb{Z}/N$.*

Lema

a, c y $\bar{a}, \bar{c} \in \mathbb{Z}/N$, son equivalentes

1. *Existan $a', c' \in \mathbb{Z}$, $(a', c') = 1$ y $\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \pmod{N}$.*
2. $\gcd(a, c, N) = 1$.
3. $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{c} \end{pmatrix}$ *orden N en $\mathbb{Z}/N$.*

$$\#\left\{\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{c} \end{pmatrix}\right\} = \sum_{d|N} \frac{N}{d}\varphi(d)\varphi(\frac{N}{d})$$

Contando Cúspides

Proposición

$$\epsilon_\infty(\Gamma(N)) = \begin{cases} \frac{1}{2}N^2 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & si\ N > 2 \\ 3 & si\ N = 2 \end{cases}$$

Proposición

$$\epsilon_\infty(\Gamma_1(N)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{d|N}\varphi(d)\varphi(\frac{N}{d}) & si\ N = 3, N > 4 \\ 3 & si\ N = 4 \\ 2 & si\ N = 2 \end{cases}$$

Proposición

$$\epsilon_\infty(\Gamma_1(N)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{d|N}\varphi(d)\varphi(\frac{N}{d}) & si\ N = 3, N > 4 \\ 3 & si\ N = 4 \\ 2 & si\ N = 2 \end{cases}$$

Proposición

$$\epsilon_\infty(\Gamma_0(N)) = \sum_{d|N}\varphi\left(\gcd(d, \frac{N}{d})\right)$$

G R A C I A S.