Primer Encuentro Regional de Teoría de Números. Formas Modulares y Formas automorfas.

Claudio Qureshi

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

Operadores de Hecke - Dos enfoques diferentes.

Universidad de Buenos Aires, 4 y 5 de Noviembre de 2011

Curvas Modulares y Espacios de Moduli.

Puntos Modulares para $\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$

1. Punto modular para $\Gamma_0(N)$: (E, C) con $C < E, C \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
2. Punto modular para $\Gamma_1(N)$: (E, Q) con $Q \in E, o(Q) = N$.
3. Punto modular para $\Gamma(N)$: $(E, (P, Q))$ con $e_N(P, Q) = 1$.

Curvas modulares y Espacios de moduli para Γ

1. Curva modular para Γ: $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}$.
2. Espacio de moduli para Γ: $S(\Gamma) = \{$Ptos. mod. para $\Gamma\}/\sim$.
3. Nomenclatura para los casos $\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$:
   1. Curvas modulares correspondientes:$Y_0(N), Y_1(N), Y(N)$.
   2. Espacios de moduli correspondientes:$S_0(N), S_1(N), S(N)$.

Curvas Modulares y Espacios de Moduli.

Correspondencia entre los espacios de moduli y las curvas modulares:

1. Caso $\Gamma_0(N)$:
   $S_0(N) \xrightarrow{\simeq} Y_0(N)\ , [E_\tau, \langle \frac{1}{N} + \Lambda_\tau \rangle] \mapsto \Gamma_0(N)\tau.$
2. Caso $\Gamma_1(N)$:
   $S_1(N) \xrightarrow{\simeq} Y_1(N)\ , [E_\tau, \frac{1}{N} + \Lambda_\tau] \mapsto \Gamma_1(N)\tau.$
3. Caso $\Gamma(N)$:
   $S(N) \xrightarrow{\simeq} Y(N)\ , [E_\tau, (\frac{\tau}{N} + \Lambda_\tau, \frac{1}{N} + \Lambda_\tau)] \mapsto \Gamma(N)\tau.$

Curvas Modulares y Espacios de Moduli.

Consideremos dos espacios de funciones:

1. $\mathcal{F}_k(\Gamma) = \{F : \{\text{ptos. mod. para } \Gamma\} \to \mathbb{C} : F \text{ tiene peso } k\}$
2. $\mathcal{M}_k(\Gamma)_d = \{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} : \ f \text{ es deb. mod. para } \Gamma \text{ de peso } k\}$

Correspondencia entre ambos espacios: Caso $\Gamma = \Gamma_1(N)$

1. $F \in \mathcal{F}_k(\Gamma) \rightsquigarrow f(\tau) = F(E_\tau, \frac{1}{N} + \Lambda_\tau)$
2. $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)_d \rightsquigarrow F(\mathbb{C}/\Lambda, z + \Lambda) = \omega_2^{-k} f(\frac{\omega_1}{\omega_2})$
   donde $\omega_2 = zN, \Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0.$

Operadores de Hecke: Existe una familia de operadores que juega un papel importante en la teoría de formas modulares que se denotan por T_n y $\langle n \rangle$.

- Son operadores conmutativos en $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ con subespacio invariante $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$.
- Puede definirse un producto interno en $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ (Pettersson) de forma que $\langle n \rangle$ y T_n resultan operadores normales para $(n, N) = 1$.
- $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ posee un subespacio $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{new}$ invariante por lo operadores de Hecke que posee una base de autoformas para todos los operadores anteriores. Toda autoforma normalizada para los operadores de Hecke corresponden a Series de Dirichlet que poseen un producto de Euler y satisface cierta ecuación funcional.

Operadores de doble coclase

- Doble coclase: $\Gamma_1 \alpha \Gamma_2$ con $\Gamma_1, \Gamma_2 < Sl_2(\mathbb{Z})$ y $\alpha \in Gl_2^+(\mathbb{Q})$.
  - Propiedad: $\Gamma_1 \backslash \Gamma_1 \alpha \Gamma_2 = \{\Gamma_1 \beta_1, \Gamma_1 \beta_2, \ldots, \Gamma_1 \beta_t\}$ (finito)
  - Observación: Si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1)$ y $\Gamma_1 \beta = \Gamma_1 \beta' \Rightarrow f[\beta]_k = f[\beta']_k$
- Definimos el operador de doble coclase (asociado a $\Gamma_1 \alpha \Gamma_2$) de peso k en $\mathcal{M}_k$ como:

$$f[\Gamma_1 \alpha \Gamma_2]_k = f[\beta_1]_k + f[\beta_2]_k + \ldots + f[\beta_t]_k \quad \forall f \in \mathcal{M}_k$$

  - Lleva $\mathcal{M}_k(\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{M}_k(\Gamma_2)$
  - Lleva $S_k(\Gamma_1) \longrightarrow S_k(\Gamma_2)$

Los operadores diamante $\langle d\rangle$ y los operadores de Hecke T_p

Consideramos $\Gamma_0(N) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ dado por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto d$ epimorfismo de kernel $\Gamma_1(N)$.
Luego $\Gamma_1(N) \lhd \Gamma_0(N)$ y $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.
Consideremos $[\Gamma_1\alpha\Gamma_1]$ con $\alpha \in \Gamma_0(N)$, $f[\Gamma_1\alpha\Gamma_1]_k = f[\alpha]_k$ $\forall f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$.
$\Gamma_0(N) \times \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ acción por translación que baja a una acción en el cociente:

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \times \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) : \langle d\rangle f = f[\gamma_0]_k$$

para algún $\gamma_0 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ con $t \equiv d \pmod{N}$ (Operador diamante $\langle d\rangle$).

Los operadores diamante $\langle d \rangle$ y los operadores de Hecke T_p

Descomposición de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ en espacios asociados a caracteres.

Reinterpretando resultados:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\chi} \mathcal{M}_k(N, \chi)$$

$$\mathcal{M}_k(N, \chi) = \{f \in \mathcal{M} : \langle d \rangle f = \chi(d) f\}$$

$\rightarrow$ Descomposición del espacio $\mathcal{M}$ en subespacios propios.

Los operadores diamante $\langle d \rangle$ y los operadores de Hecke T_p

Para p primo se define $T_p = [\Gamma_1(N)\alpha_p\Gamma_1(N)]$ con $\alpha_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$

Observaciones:

- $\Gamma_1(N)\alpha_p\Gamma_1(N) = \{\gamma \in M_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & p \end{pmatrix} \pmod{N}, \det(\gamma) = p\}$
- Si $\gamma \in \Gamma_1(N)\alpha_p\Gamma_1(N) \Rightarrow \Gamma_1(N)\gamma\Gamma_1(N) = \Gamma_1(N)\alpha_p\Gamma_1(N)$

Conmutatividad con los operadores diamantes.

Prop. $\langle d\rangle T_p = T_p\langle d\rangle$.

Corolario: Los subespacios $\mathcal{M}_k(N,\chi)$ son invariantes para los operadores de Hecke T_n.

Fórmulas explícitas para los operadores de Hecke T_n

Fórmulas explícitas

- $$T_p f = \begin{cases} \sum_{j=0}^{p-1} f[\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}]_k & p \mid N \\ \sum_{j=0}^{p-1} f[\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}]_k + f[M \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]_k & p \nmid N \end{cases}$$

  donde $M = \begin{pmatrix} m & n \\ N & p \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z})$.

Fórmulas explícitas para los operadores de Hecke T_n

Fórmulas mas explícitas

- $T_p f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{np}(f) + 1_N(p) p^{k-1} a_{\frac{n}{p}}(\langle p \rangle f) \right) q^n$

Operadores inducidos por transformaciones lineales en V.

- Consideremos $V = \bigoplus \mathbb{Q}(\mathbb{C}/\Lambda, \tau + \Lambda)$.
  - $\rightarrow$ $Gl(V) \times \mathcal{F}_k(\Gamma_1(N)) \to \mathcal{F}_k(\Gamma_1(N))$

$$T(\mathbb{C}/\Lambda, \tau + \Lambda) = \sum_i \alpha_i (\mathbb{C}/\Lambda_i, \tau_i + \Lambda_i) \Rightarrow$$

$$TF(\mathbb{C}/\Lambda, \tau + \Lambda) = \sum_i \alpha_i F(\mathbb{C}/\Lambda_i, \tau_i + \Lambda_i)$$

Definición de los operadores de Hecke como operadores en $\mathbb{F}_k(\Gamma_1(N))$

Segunda definición de los operadores diamantes $\langle d\rangle$ y de Hecke T_n:

- Para $(d,N)=1$: $\langle d\rangle(\mathbb{C}/\Lambda,\tau+\Lambda)=(\mathbb{C}/\Lambda,d\tau+\Lambda)$.
- Para $N\in\mathbb{Z}^+$: $T_n(\mathbb{C}/\Lambda,\tau+\Lambda)=\frac{1}{n}\sum(\mathbb{C}/\Lambda',\tau+\Lambda')$
  Λ' superláttices de Λ de índice n tal que $o_{\mathbb{C}/\Lambda'}(\tau)=N$.

Propiedades multiplicativas de los operadores de Hecke.

1. $\langle d_1\rangle\langle d_2\rangle = \langle d_1 d_2\rangle$.
2. - Si $(m,n)=1$ entonces $T_m T_n = T_{mn}$.
   - $T_{p^\ell} = T_p^\ell$ si $p|N$.
   - $T_{p^\ell} = T_{p^{\ell-1}}T_p - pT_{p^{\ell-2}}T_{p,p}$ (donde $T_{n,n}(\mathbb{C}/\Lambda, \tau+\Lambda) = \frac{1}{n^2}(\mathbb{C}/\frac{1}{n}\Lambda, \tau+\frac{1}{n}\Lambda)$ para $(n,N)=1$)

Resumiendo información.

En el anillo de series de potencias formales $\mathcal{H}[[x]]$ se cumple:

- $\sum_{t=0}^{\infty} T_{p^t} X^t = \frac{1}{1-T_p X}$ si $p|N$.
- $\sum_{t=0}^{\infty} T_{p^t} X^t = \frac{1}{1-T_p X + pT_{p,p} X^2}$ si $p \nmid N$.

Si $f \in \mathcal{M}_k(N, \chi)$ se cumple que $T_{n,n}(f) = n^{k-2}\chi(n) f$
y por lo tanto en $\mathcal{M}_k(N, \chi)$ se satisface:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s} = \Pi_p \left(\frac{1}{1 - T_p p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s}} \right)$$

Recordando ambas definiciones.

Operadores de Hecke - versión doble coclase:

$$T_p = [\Gamma_1 \alpha_p \Gamma_1], \alpha_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Operadores de Hecke - versión modular:

$$T_p(\mathbb{C}/\Lambda, \tau + \Lambda) = \frac{1}{p} \sum (\mathbb{C}/\Lambda', \tau + \Lambda')$$

Correspondencia de ambas definiciones

Idea de la correspondencia:

1.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \arrow[r, "T_p^{(1)}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N)) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{F}_k(\Gamma_1(N)) \arrow[r, "T_p^{(2)}"] & \mathcal{F}_k(\Gamma_1(N)) \end{tikzcd}$$

2. Analizar superlátices de Γ_z son $\Gamma' = \langle \Gamma_z, \frac{a_1 z + a_2}{p} \rangle$, hay $p+1$ posibilidades. obtener fórmula para $T_p^{(2)}$. Comparar con la fórmula para $T_p^{(1)}$.

Gracias.