Representaciones de Galois automorfas con imagen grande

Adrián Zenteno

Instituto de Matemáticas, PUCV

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

25 de junio de 2020

Curvas elípticas

- Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica.
- Considerando (para cada primo ℓ) el subgrupo $E[\ell] \subset E(\overline{\mathbb{Q}})$ de puntos de ℓ-torsión, podemos asociar a E una familia $\{\overline{\rho}_{E,\ell}\}_\ell$ de representaciones de Galois

$$\overline{\rho}_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Aut(E[\ell]) \cong GL_2(\mathbb{F}_\ell).$$

- **PREGUNTA: ¿Cómo es la imagen de cada una de las representaciones en dicha familia?**

Teorema (Serre 1972)

Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica sin multiplicación compleja (i.e. tal que $End(E) = \mathbb{Z}$). Entonces $\overline{\rho}_{E,\ell}$ es sobreyectiva para casi todo primo ℓ.

Formas modulares

Sean

- $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \in S_k(N, \epsilon)$ una eigenforma de Hecke normalizada (con $k \geq 2$ y $q = e^{2\pi i z}$).
- $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\{a_n(f) : mcd(n, N) = 1\})$ el cuerpo se coeficientes de f (que es un cuerpo de números).
- $\mathcal{O}_f$ el anillo de enteros de $\mathbb{Q}_f$.

Teorema (Deligne 1972)

Existe una familia $\{\rho_{f,\lambda}\}_\lambda$ (indexada por todos los ideales maximales λ de $\mathcal{O}_f$) de representaciones de Galois

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda})$$

tales que para cada $p \nmid N\ell$ (ℓ abajo de λ), $\rho_{f,\lambda}$ es no ramificada y

$$tr(\rho_{f,\lambda}(Frob_p)) = a_p(f), \quad det(\rho_{f,\lambda}(Frob_p)) = \epsilon(p)p^{k-1}.$$

- Sea $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$ el anillo de valuación de $\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}$.
- Reduciendo módulo el ideal maximal de $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$, obtenemos una familia $\{\overline{\rho}_{f,\lambda}\}_\lambda$ de representaciones (residuales) de Galois

$$\overline{\rho}_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

- **PREGUNTA: ¿Existe un resultado análogo al teorema de Serre para representaciones de Galois asociadas a formas modulares?**

- **PREGUNTA: ¿Qué significa tener multiplicación compleja en el contexto de formas modulares?**
- Diremos que f tiene **multiplicación compleja**, si existe un carácter de Dirichlet ϕ tal que

$$a_p(f \otimes \phi) = a_p(f)\phi(p) = a_p(f)$$

para casi todo primo p.

Teorema (Ribet 1984)

Si f no tiene multiplicación compleja,

$$SL_2(\mathbb{F}_\ell) \subseteq im(\overline{\rho}_{f,\lambda})$$

para casi todo λ.

De manera muy general tenemos la siguiente conjetura:

Conjetura (Langlands, Buzzard-Gee 2011)

- *Sea G un grupo reductivo sobre un cuerpo de números K y ${}^LG$ su L-grupo.*
- *Sea π una representación automorfa cuspidal L-algebraica de $G(\mathbb{A}_K)$ no ramificada fuera de un conjunto finito de primos S.*
- *Entonces existe un un cuerpo de números E_π y una familia $\{\rho_{\pi,\lambda}\}_\lambda$ (indexada por los ideales maximales de $\mathcal{O}_{E_\pi}$) de representaciones de Galois*

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_K \longrightarrow {}^LG(\overline{E}_{\pi,\lambda})$$

las cuales son no ramificadas fuera del conjunto $S \cup \{\ell\}$.
- *Dicha asociación satisface ciertas relaciones de compatibilidad entre parámetros de Satake y valores propios de elementos de Frobenius.*

La conjetura anterior es teorema cuando:

- K es totalmente real o CM, $G = GL_n$, ${}^LG = GL_n$ y π es regular en los π_∞. (Scholze 2015, Harris-Lan-Taylor-Thorne 2016)
- K es totalmente real, $G = GSp_{2n}$, ${}^LG = GSpin_{2n+1}$ y π es cohomológica y Steinberg en algún lugar finito. (Kret-Shin 2016)
- K es totalmente real, $G = GSp_4$, ${}^LG = GSpin_5 = GSp_4$ y los π_∞ pertenecen a las series discretas de $GSp_4(\mathbb{R})$. (Weissauer 2005, Mok 2014, Gee-Taïbi 2019)
- **PREGUNTA: ¿Existen resultados similares al teorema de Serre o al teorema de Ribet, para familias de representaciones de Galois (residuales) asociadas a representaciones automorfas cuspidales vía los casos conocidos de la conjetura de (Langlands) Buzzard-Gee?**
- **PREGUNTA: ¿Cuál seria la condición análoga a tener multiplicación compleja en el mundo automorfo?**

Construcción de de formas modulares con multiplicación compleja (Hecke)

- Sean K un cuerpo cuadrático imaginario, $k > 1$ un entero y $\mathfrak{m}$ un ideal entero de K.
- Recordemos que un **caracter de Hecke** ψ de K módulo $\mathfrak{m}$ y tipo infinito $k-1$, es un homomorfismo

$$\psi : I_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

  del grupo $I_{\mathfrak{m}}$ de ideales fraccionarios de K primos relativos a $\mathfrak{m}$, tal que

$$\psi(\alpha\mathcal{O}_K) = \alpha^{k-1}$$

  $\forall\alpha \in K^*$ tal que $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$.
- Diremos que $\mathfrak{m}$ es el **conductor** de ψ, si $\mathfrak{m}$ es minimal en el sentido de que si ψ esta definido modulo $\mathfrak{m}'$, entonces $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}'$.

- Podemos extender trivialmente ψ a todos los ideales fraccionarios de K que no son primos relativos a $\mathfrak{m}$.
- Sea $-\Delta_K$ el discriminante de K y ϕ_K el caracter de Dirichlet asociado a K (que es cuadrático de conductor Δ_K).
- Dado ψ de conductor $\mathfrak{m}$, podemos definir una forma modular cuspidal $f_\psi \in S_k(\Delta_K \mathcal{N}(\mathfrak{m}), \phi_K \eta)$, con multiplicación compleja por ϕ_K, como:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n := \sum_{\mathfrak{a} \text{ entero}} \psi(\mathfrak{a}) q^{\mathcal{N}(\mathfrak{a})}.$$

- (Ribet 1977) Una forma modular f tiene multiplicación compleja si y solo si f puede construirse a partir de un caracter de Hecke.

En lenguaje automorfo

- Podemos asociar a f una representación automorfa cuspidal π_f de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.
- Podemos asociar a ψ una representación automorfa π_ψ de $GL_1(\mathbb{A}_K)$.
- (Ribet 1984) Si π_f no proviene de una representación automorfa de $GL_1(\mathbb{A}_K)$, entonces $\overline{\rho}_{\pi_f,\lambda} := \overline{\rho}_{f,\lambda}$ tiene "imagen grande" (i.e., $SL_2(\mathbb{F}_\ell) \subset im(\overline{\rho}_{\pi_f,\lambda})$) para casi todo λ.
- ¡Ribet excluye las representaciones automorfas infiltradas!

  Representaciones de GL_1 disfrazadas de representaciones de GL_2.

Conjetura

Si π, como en la conjetura de Buzzard-Gee, no es una representación infiltrada (i.e., no proviene de un grupo reductivo mas pequeño que G). Entonces $\overline{\rho}_{\pi_f,\lambda}$ tiene imagen "grande" para casi todo λ.

Funtorialidad de Langlands

Sean G y G' grupos reductivos sobre un cuerpo de números K. Conjeturalmente, cada L-homomorfismo

$$\phi : {}^L G \longrightarrow {}^L G',$$

permite transferir representaciones automorfas de G a representaciones automorfas de G'.

Ejemplo (n-potencias simétricas)

Sea $G = GL_2$ and $G' = GL_{n+1}$. El L-homomorfismo

$$Sym^n : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{n+1}(\mathbb{C}),$$

permite transferir representaciones automorfas de $GL_2(\mathbb{A}_K)$ a representaciones automorfas de $GL_{n+1}(\mathbb{A}_K)$.

Se conoce cuando $K = \mathbb{Q}$ y π proviene de una forma modular [Newton-Thorne 2019].

Ejemplo (Inducción automorfa)

Sea K'/K una extension de cuerpos de números de grado d y $\rho : G_{K'} \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ una representación de Galois, la inducción

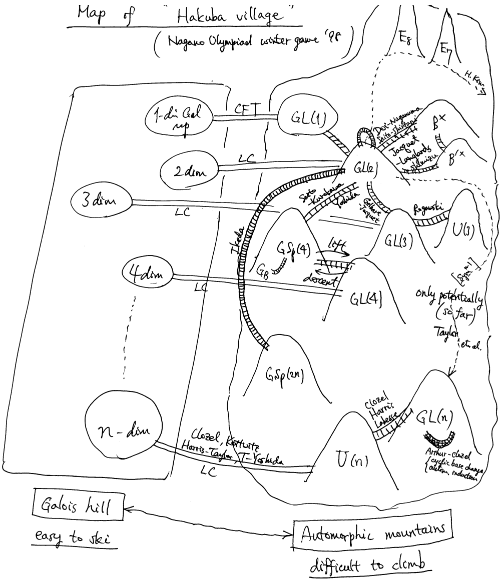
$$\rho \longmapsto Ind_{G_{K'}}^{G_K}\rho,$$

nos provee un L-homomorfismo

$$\phi : GL_m \longrightarrow GL_{dm},$$

que permite transferir representaciones automorfas de $GL_2(\mathbb{A}_{K'})$ a representaciones automorfas de $GL_{dm}(\mathbb{A}_K)$.

Se conoce cuando L/K es cíclica [Arthur-Clozel 1989, Henniart 2012].



Tetsushi Ito *"On motives and ℓ-adic Galois representations associated to automorphic representations of GSp(4)"*

Representaciones automorfas de $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$

Sea π una representación automorfa cuspidal de $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, tal que π_∞ pertenece a las series discretas de $GSp_4(\mathbb{R})$. Como en el caso de formas modulares, π tiene:

- peso (m_1, m_2), $m_1 \geq m_2 \geq 0$, el peso cohomológico de π;
- nivel S, conjunto de primos en los que π ramifica;
- caracter ϵ_π, el caracter central de π.

Teorema (Weissauer 2005 Gee-Taïbi 2019)

Existe un cuerpo de números E_π y una familia $\{\rho_{\pi,\lambda}\}_\lambda$ (indexada por todos los ideales maximales λ de $\mathcal{O}_\pi$) de representaciones de Galois

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GSp_4(\overline{E}_{\pi,\lambda})$$

no ramificadas fuera de $S \cup \ell$ y compatibles con la correspondencia local de Langlands.

Clasificación de Arthur de representaciones automorfas de GSp_4 (en el espectro discreto)

Sea ϵ un caracter de $GL_1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Un **parámetro de Arthur** ψ de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ con caracter central ϵ, es una expresión formal (no ordenada):

$$\psi = (\pi_1 \boxtimes \nu(n_1)) \boxplus \cdots \boxplus (\pi_r \boxtimes \nu(n_r))$$

donde:

- π_i es una representación automorfa (unitaria) cuspidal de $GL_{m_i}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ para algún $m_i \leq 4$ y $\mu_i \cong \mu_i^\vee \otimes \epsilon$;
- $\nu(n_i)$ es una representación irreducible de $SL_2(\mathbb{C})$ de dimensión n_i;
- $\sum_{i=1}^r m_i n_i = 4$; y
- $(\pi_i \boxtimes \nu(n_i)) \neq (\pi_j \boxtimes \nu(n_j))$ siempre que $i \neq j$.

Las representaciones automorfas de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ en el espectro discreto de $L^2(GSp_4(\mathbb{Q}) \setminus GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$, fueron clasificadas por Arthur 2004 (Gee-Taibi 2019) en A-paquetes $A(\psi)$ (conjuntos de representaciones de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$), donde cada paquete es parametrizado por un parámetros de Arthur ψ.

Sea π una representación automorfa de $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ con caracter central ϵ. Entonces π pertenece a un A-paquete $A(\psi)$, donde ψ es uno de los siguientes parámetros de Arthur (Cuando es posible asociar representaciones de Galois $\rho_{\pi,\lambda}$ a π, el parámetro ψ determina la descomposición de estas en subrepresentaciones irreducibles):

1. **Tipo general:** $\psi = \pi_1 \boxtimes \nu(1)$, con π_1 una representación automorfa cuspidal de GL_4 de tipo simpléctico, ($\rho_{\pi,\lambda}$ es irreducible);
2. **Tipo Yoshida:** $\psi = (\pi_1 \boxtimes \nu(1)) \boxplus (\pi_2 \boxtimes \nu(1))$, con π_1 y π_2 representaciones automorfas cuspidales de GL_2 con caracter central ϵ, ($\rho_{\pi,\lambda} = \rho_{\pi_1,\lambda} \oplus \rho_{\pi_2,\lambda}$);
3. **Tipo Soudry:** $\psi = (\pi_1 \boxtimes \nu(2))$, con π una representación automorfa cuspidal de GL_2 con caracter central ϵ, ($\rho_{\pi,\lambda} = \rho_{\pi_1,\lambda} \oplus \rho_{\pi_1,\lambda}(1)$);
4. **Tipo Saito-Kurokawa:** $\psi = (\chi_1 \boxtimes \nu(2)) \boxplus (\pi_2 \boxtimes \nu(1))$, con χ_1 una representación automorfa de GL_1 y π_2 una representación automorfa cuspidal de GL_2 con caracter central ϵ, ($\rho_{\pi,\lambda} = \rho_{\pi_1,\lambda} \oplus \chi \oplus \chi(1)$);
5. **Tipo Howe-Piatetski-Shapiro:** $\psi = (\chi_1 \boxtimes \nu(2)) \boxplus (\chi_2 \boxtimes \nu(2))$, con χ_1 y χ_2 representaciones automorfas de GL_1 tales que $\chi_1^2 = \chi_2^2 = \epsilon$, ($\rho_{\pi,\lambda} = \varphi_1 \oplus \varphi_1(1) \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_2(1)$);
6. **Tipo unidimensional:** $\psi = (\chi_1 \boxtimes \nu(4))$, con χ_1 una representación automorfa de GL_1 tal que $\chi_1^4 = \epsilon$, ($\rho_{\pi,\lambda} = \varphi_1 \oplus \varphi_1(1) \oplus \varphi_1(2) \oplus \varphi_1(3)$);

Representaciones genuinas (no infiltradas) de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$

Sea π una representación automorfa cuspidal de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ con π_∞ en las series discretas de $GSp_4(\mathbb{R})$

- con peso cohomológico (m_1, m_2), $m_1 \geq m_2 \geq 0$;
- no ramificada fuera de S; y
- caracter central ϵ_π.

Definición

Diremos que π es **genuina** si es de tipo general y no puede ser construida como:

- la 3-potencia simétrica de una representación automorfa de $GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$; o
- la inducción automorfa de una representación automorfa de $GL_2(\mathbb{A}_K)$, con K un cuerpo cuadrático.

Teorema (Versión débil, Dieulefait-Z 2018)

Si π es una representación genuina de $GSp_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, se tiene que

$$Sp_4(\mathbb{F}_\ell) \subseteq im(\overline{\rho}_{\pi,\lambda}),$$

para $\ell \in \mathcal{L}$, un conjunto de primos de densidad 1.

Idea de la demostración:
Irreducibilidad:

- Como π es de tipo general, las representaciones de Galois en la familia (sistema compatible) $\{\rho_{\pi,\lambda}\}_\lambda$ son irreducibles.
- Por un resultado de Calegari-Gee 2013 (que depende de Barnet-Lamb-Gee-Geraghty-Taylor 2014), sobre irreducibilidad de sistemas compatibles, se tiene que $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ es irreducible para cada $\lambda|\ell$ y $\ell \in \mathcal{L}$, un conjunto de primos de densidad 1.

Posibles imágenes:

- Si $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ es irreducible, por la clasificación de subgrupos maximales de $GSp_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ (Mitchell 1914), la imagen de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$:
  - es el estabilizador de una cubica torcida;
  - contiene un subgrupo reducible de indice 2;
  - es un grupo acotado; o
  - contiene a $Sp_4(\mathbb{F}_\ell)$.
- Cuando $\ell - 1 > m_1 + m_2 + 3$ y $\ell \notin S$, $\rho_{\pi,\lambda}$ es cristalina con pesos de Hodge-Tate:

$$\{0, m_2 + 1, m_1 + 2, m_1 + m_2 + 3\}.$$

- Por Fontaine-Laffaille 1982 (Urban 2001) es posible describir explicitamente $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}|_{I_\ell}$ en términos de los pesos de Hodge-Tate y caracteres fundamentales de nivel 1 y 2.

Por ejemplo:

$$\overline{\rho}_{\pi,\lambda}|_{I_\ell} \simeq \begin{pmatrix} \chi^{m_1+m_2+3} & * & * & * \\ 0 & \chi^{m_1+2} & * & * \\ 0 & 0 & \chi^{m_2+1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o

$$\overline{\rho}_{\pi,\lambda}|_{I_\ell} \simeq \begin{pmatrix} \chi^{m_1+2} & * & * & * \\ 0 & \chi^{m_2+1} & * & * \\ 0 & 0 & \psi^{(m_1+m_2+3)\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi^{m_1+m_2+3} \end{pmatrix}$$

donde χ (resp. ψ) es un caracter fundamental de nivel 1 (resp. 2).

- **Estabilizador de una cubica torcida:** En este caso

$$\overline{\rho}_{\pi,\lambda} = \begin{pmatrix} a^3 & * & * & * \\ * & a^2b & * & * \\ * & * & ab^2 & * \\ * & * & * & b^3 \end{pmatrix} = Sym^3\begin{pmatrix} a & * \\ * & b \end{pmatrix} \simeq Sym^3(\overline{\sigma}_\lambda)$$

con $\overline{\sigma}_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.
Comparando con la descripción de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}|_{I_\ell}$ tenemos que

$$\overline{\sigma}_\lambda|_{I_\ell} \simeq \begin{pmatrix} \chi^{m_2+1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \overline{\sigma}_\lambda|_{I_\ell} \simeq \begin{pmatrix} \psi^{(m_2+1)\ell} & 0 \\ 0 & \psi^{m_2+1} \end{pmatrix}$$

Por la conjetura de Serre, para cada λ tal que la imagen de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ es una cubica torcida, existe una forma modular cuspidal f_λ de peso $m_2 + 2$, nivel N (que divide el conductor de la familia (sistema compatible) $\{\rho_{\pi,\lambda}\}_\lambda$) y un caracter ϵ que depende ϵ_π tal que

$$\rho_{\pi,\lambda} \equiv Sym^3(\sigma_{f_\lambda,\lambda}) \mod \lambda,$$

Como solo hay un numero finito de tales formas modulares f_λ, si la imagen de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ es el estabilizador de una cubica torcida para infinitos λ podemos suponer que $f_\lambda = f$ para infinitos λ. Entonces

$$\rho_{\pi,\lambda} \equiv Sym^3(\sigma_{f,\lambda}) \pmod{\lambda},$$

para infinitos λ. Por lo tanto

$$\{\rho_{\pi,\lambda}\}_\lambda \cong \{Sym^3(\sigma_{f,\lambda})\}_\lambda$$

para una familia (sistema compatible) de representaciones de Galois $\{\sigma_{f,\lambda}\}_\lambda$.
Luego, es posible concluir que π es la 3-potencia simétrica de una forma modular π_f. Lo cual contradice el hecho de ser genuina.

Casos restantes:

- Si la imagen de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ contiene un subgrupo reducible de indice 2 para infinitos λ, se tienen las congruencias

$$\rho_{\pi,\lambda} \equiv Ind_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}}(\sigma_{\tau,\lambda}) \mod \lambda,$$

  para infinitos λ. Luego, por argumentos similares al caso anterior se puede mostrar que en este caso π tendría que ser la inducción automorfa de una representación τ de $GL_2(\mathbb{A}_K)$. Obteniendo una contradicción.
- Finalmente, por la descripción de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}|_{I_\ell}$ si la imagen de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ es un grupo acotado este no puede ocurrir a partir de algún ℓ suficientemente grande.

$\square$

Recientemente, usando la conjetura de Serre:

Teorema (Weiss 2019)

Si π es una representación genuina de $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, se tiene que

$$Sp_4(\mathbb{F}_\ell) \subseteq im(\overline{\rho}_{\pi,\lambda}),$$

para casi todo ℓ.

Otros resultados similares:

- (Dimitrov 2004) Formas modulares de Hilbert,
- (Dieulefait-Vila 2004) representaciones automorfas de $GL_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,
- (Dieulefait-Vila 2004) representaciones automorfas de $GL_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

Aplicación al problema inverso de Galois

Problema (Inverso de Galois)

Dado un grupo finito G. ¿Existe $K/\mathbb{Q}$ finita y de Galois tal que $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong G$?

Estrategia:

- Consideremos $\overline{\rho}_\ell : G_\mathbb{Q} \to GL_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.
- Por un lado, la imagen de $\overline{\rho}_\ell$ es un subgrupo finito de $GL_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.
- Por otro lado, $ker(\overline{\rho}_\ell) \lhd G_\mathbb{Q}$ abierto. Luego

$$ker(\overline{\rho}_\ell) \cong Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K)$$

  para $K/\mathbb{Q}$ finita de Galois.
- Por lo tanto

$$im(\overline{\rho}_\ell) \cong G_\mathbb{Q}/ker(\overline{\rho}_\ell) \cong G_\mathbb{Q}/Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K) \cong Gal(K/\mathbb{Q})$$

- (Serre 1972) Como $\overline{\rho}_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F}_\ell)$ es suprayectiva para casi todo ℓ. De hecho, buscando en (LMFDB) la curva 115.a1 ($E : y^2 + y = x^3 + 7x - 11$) es tal que $\overline{\rho}_{E,\ell}$ es suprayectiva para todo ℓ. Luego, $GL_2(\mathbb{F}_\ell)$ es de Galois para todo ℓ.
- (Ribet 1984) Sea $\overline{\rho}_{f,\lambda}^{proj} : G_{\mathbb{Q}} \to PGL_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ la composición de $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ con la proyección $GL_2(\mathbb{F}_{\ell^s}) \to PGL_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$. Del resultado de Ribet se sigue que

$$PSL_2(\mathbb{F}_{\ell^r}) \subseteq im(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{proj}) \subseteq PGL_2(\mathbb{F}_{\ell^r})$$

para casi todo ℓ, con $\mathbb{F}_{\ell^r}$ subcuerpo de $\mathbb{F}_\lambda$.
- (Dieulefait-Wiese 2011) Existen infinitas formas modulares $\{f_n\}_n$ tales que la imagen de $\overline{\rho}_{f_n,\lambda}$ es grande para todo ℓ y de hecho fijando ℓ y variando n la imagen de $\overline{\rho}_{f_n,\lambda}$ es no acotada. En consecuencia para cada primo ℓ, al menos uno de los siguientes grupos

$$\{PSL_2(\mathbb{F}_{\ell^r}), PGL_2(\mathbb{F}_{\ell^r})\}$$

es de Galois para infinitos r.

- (Dieulefait-Z 2018) Existen infinitas representaciones automorfas $\{\pi_n\}_n$ de $GSp_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, tales que la imagen $\overline{\rho}_{\pi_n,\lambda}$ es grande para todo ℓ y de hecho, fijando ℓ y variando n la imagen de $\overline{\rho}_{\pi_n,\lambda}$ es no acotada. En consecuencia para cada primo ℓ, al menos uno de los siguientes grupos

$$\{PSp_4(\mathbb{F}_{\ell^r}), PGSp_4(\mathbb{F}_{\ell^r})\}$$

  es de Galois para infinitos r.
- Ejemplos en dimensiones altas para un ℓ fijo:
  - (Khare-Larsen-Savin 2010) tipo B_n,
  - (Khare-Larsen-Savin 2008, (Arias de Reyna)-Dieulefait-Shin-Weise 2013) tipo C_n,
  - (Z. 2019) tipo D_n.

¡Gracias por su atención!