Formas modulares ortogonales

Gustavo Rama

IMERL, CMAT, UdelaR

4/6/2020
Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

Definición

Un espacio cuadrático sobre $\mathbb{Q}$ es un espacio vectorial de dimensión finita V junto a una función $\phi : V \to \mathbb{Q}$ que cumple

- $\phi(x\mathbf{v}) = x^2\phi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$ $x \in \mathbb{Q}$.
- $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \phi(\mathbf{v} + \mathbf{v}') - \phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{v}')$ es una forma bilineal simétrica.

Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base de V, entonces

$$\begin{aligned} q(x_1, \ldots, x_n) &= \phi\left(\sum_j x_j \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j \phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \end{aligned}$$

es una forma cuadrática sobre $\mathbb{Q}$. Diferentes bases dan lugar a formas cuadráticas equivalentes sobre $\mathbb{Q}$, además toda forma equivalente a f surge de esta manera.
El discriminante de V es

$$\operatorname{disc}(V) := \tfrac{1}{2}\det(\phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{i,j}).$$

Definición

Una autometría de un espacio cuadrático (V, ϕ) es un mapa lineal

$$\sigma : V \to V,$$

que preserva la estructura cuadrática de (V, ϕ), es decir

$$\phi(\sigma(\mathbf{v})) = \phi(\mathbf{v}),\ \mathbf{v} \in V.$$

Las autometrías de (V, ϕ) forman un grupo con la composición como producto. Este grupo es llamado el grupo ortogonal $\mathrm{O}(V)$. Se prueba que si $\sigma \in \mathrm{O}(V)$, $\det \sigma = \pm 1$. Si $\det \sigma = +1$, decimos que la autometría es propia. Las autometrías propias forman un subgrupo de $\mathrm{O}(V)$ y lo denotamos por $\mathrm{O}^+(V)$.

Un retículo Λ en el espacio cuadrático (V, ϕ) es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de dimensión máxima ($\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{\dim(V)}$). Decimos que es integral si $\phi(\Lambda) \subset \mathbb{Z}$.
Los retículos Λ y Γ son propiamente equivalentes, y lo denotamos como $\Lambda \sim \Gamma$, si

$$\sigma\Lambda = \Gamma, \text{ para algún } \sigma \in \mathrm{O}^+(V).$$

La clase de equivalencia propia de Λ la denotamos por $[\Lambda]$.
El género de Λ es

$$\mathrm{Gen}(\Lambda) := \{\Gamma \text{ retículo} : \Lambda_p \sim \Gamma_p \text{ para todo } p\}.$$

El conjunto de clases $\mathrm{Cl}(\Lambda)$ es el conjunto de clases de equivalencia en $\mathrm{Gen}(\Lambda)$, se prueba que $\# \mathrm{Cl}(\Lambda) < \infty$

Definición

Sean Λ y Γ dos $\mathbb{Z}$-retículos integrales en un espacio cuadrático (V, ϕ) definido positivo, un primo p y $k \geq 1$. Decimos que Λ y Γ son p^k-vecinos si $\Lambda_q = \Gamma_q$ para todo primo $q \neq p$ y

$$\Lambda/(\Lambda \cap \Gamma) \cong \Gamma/(\Lambda \cap \Gamma) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$$

Teorema

Existe una biyección entre el conjunto de soluciones proyectivas no singulares de

$$\phi(\mathbf{v}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \mathbf{v} \in \Lambda$$

y los retículos p-vecinos de Λ.

Cuando $p \nmid \operatorname{disc}(\Lambda)$ la cantidad de p^k-vecinos de Λ es

$$O(p^{k(\dim(V)-k-1)}).$$

Ejemplo

Sea el espacio cuadrático $V = \mathbb{Q}^3$, con

$$\phi = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - yz - xz,$$

y el retículo $\Lambda = \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{e}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{e}_3$, con discriminante 37.
Tenemos $\#\,\mathrm{Cl}(\Lambda) = 2$. La otra clase es representada por el 2-vecino de Λ dado por el vector $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ que cumple $\phi(\mathbf{v}) = 20 \equiv 0 \pmod{2}$.
El 2-vecino asociado a $\mathbf{v}$ lo podemos calcular como

$$\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\mathbf{v} + 2\mathbb{Z}\mathbf{e}_3.$$

La forma cuadrática en esa base es
$x^2 - xy + 5y^2 - 2xz + 19yz + 20z^2$.

En sage:

```
sage: Q = QuadraticForm(ZZ, 3, [1, 0, -1, 2, -1, 5])
sage: v = vector([0, 1, 2])
sage: Q.find_p_neighbor_from_vector(2, v)
Quadratic form in 3 variables over Integer Ring with
coefficients:
[ 5 19 -1 ]
[ * 20 -2 ]
[ * * 1 ]
```

La forma cuadrática esta en la misma clase que la anterior (haciendo un cambio de variables).

1. Espacios cuadráticos y p-vecinos
2. Formas modulares ortogonales
3. Formas modulares ortogonales con representación

El espacio de formas modulares ortogonales para Λ (con peso trivial) es

$$M(\mathrm{O}(\Lambda)) := \mathrm{Fun}(\mathrm{Cl}(\Lambda), \mathbb{Q}).$$

En la base de funciones características para $\mathrm{Cl}(\Lambda)$ tenemos que $M(\mathrm{O}(\Lambda)) \cong \mathbb{Q}^h$ con $h = \#\,\mathrm{Cl}(\Lambda)$.
Para $p \nmid \mathrm{disc}(\Lambda)$, definimos el operador de Hecke

$$\begin{aligned} T_{p,k} : M(\mathrm{O}(\Lambda)) &\to M(\mathrm{O}(\Lambda)) \\ f &\mapsto T_{p,k}(f) \\ &\qquad T_{p,k}(f)([\Lambda']) := \sum_{\Gamma'} f([\Gamma']), \end{aligned}$$

donde la suma es sobre todos los p^k-vecinos de Λ'.
Los operadores $T_{p,k}$ conmutan entre si y son autoadjuntos con respecto a cierto producto interno.
Denotamos a $S(\mathrm{O}(\Lambda))$ el complemento ortogonal de las funciones constantes, y lo llamamos espacio cuspidal.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{Q}^3$, $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - yz - xz$. En el género de $\Lambda = \mathbb{Z}^3$, de discriminante 37, hay solo otro retículo más, Γ. Calculamos $T_{p,1}$ para algunos primos:

$$T_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ T_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ T_{5,1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T_{7,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},\ T_{11,1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},\ T_{13,1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix},$$

$$T_{17,1} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}, \cdots$$

Ejemplo

Tiene vectores propios $f_1 = (1, 2)$ con valores propios

$$3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, \dots,$$

y $f_2 = (1, -1)$ con valores propios

$$0, 1, 0, -1, 3, -4, 6, \dots$$

El vector f_1 está asociado a una forma de Eisenstein de peso 2 y nivel 37. El vector f_2 está asociado a la forma modular `37.2.a.b`, que tiene signo $+$ en su ecuacion funcional.

Pero $\dim S_2(\Gamma_0(37)) = 2$.

Sea Λ un retículo en un espacio cuadrático quinario con discriminante p. Podemos definir el mapa

$$\Theta : M(\mathrm{O}(\Lambda)) \to S_{5/2}(4p)$$

como $\Theta(f) := \sum_{\Lambda' \in \mathrm{Cl}(\Lambda)} f(\Lambda')\Theta(\Lambda')$.
Por una conjetura de Ibukiyama y un resultado de Ladd, esperamos una correspondencia inyectiva de $S(\mathrm{O}(\Lambda))$ en $S_3(K(p))$.
Si $f \in S(\mathrm{O}(\Lambda))$ es función propia para los operadores de Hecke con $\Theta(f) \neq 0$, entonces el lift de Shimura de $\Theta(f)$ es una forma modular de peso 4 y nivel p tal que su lift de Gritsenko corresponde a f.
Hein, Ladd y Tornaría conjeturaron que si $\Theta(f) = 0$, entonces f corresponde a una forma paramodular que no es un lift de Gritsenko.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{Q}^5$, $\phi = x^2 + xy - xt + y^2 - yt + z^2 + 2w^2 - wt + 3t^2$ forma cuadrática de discriminante 61 y $\Lambda = \mathbb{Z}^5$. Este es el primer ejemplo de discriminante primo en O(5) para el cual el mapa Θ tiene núcleo no trivial. Tenemos

$$\#\,\mathrm{Cl}(\Lambda) = 8, \ \dim S_4^-(\Gamma_0(61)) = 6, \ \text{y} \ \dim(\ker(\Theta)) = 1.$$

Sea $f \in S(\mathrm{O}(\Lambda))$ tal que $\Theta(f) = 0$, que es función propia para los operadores de Hecke.

Algunos autovalores son, $T_{p,k}(f) = c_{p,k} f$

p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$
2	-7	5	3	11	-4	17	37	23	10
3	-3	7	-9	13	-3	19	-75	29	212

p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$
2	7	5	-9	11	36	17	176	23	76
3	-9	7	-42	13	-57	19	32	29	-66

Por las fórmulas de Ibukiyama de dimensión tenemos

$$\dim S_3(K(61)) = \dim S(\mathrm{O}(\Lambda)) = \dim S_4^-(61) + \dim \ker \Theta.$$

En este caso la correspondencia de $S(\mathrm{O}(\Lambda))$ en $S_3(K(61))$ es una biyección.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{Q}^5$ y

$$\phi = x^2 + xy + y^2 + z^2 + xt + zt + t^2 + tw + 34w^2,$$

forma cuadrática con discriminante 167. El género de $\Lambda = \mathbb{Z}^5$ tiene 19 clases por lo que la dimensión de $S(\mathrm{O}(\Lambda))$ es 18.
Pero $\dim S_3(K(167)) = 19$, por lo que la correspondencia de $S(\mathrm{O}(\Lambda))$ en $S_3(K(167))$ no es una biyección.

En ambos casos vemos que no obtenemos todo el espacio que queremos.

Dada $\rho : \mathrm{O}^+(V) \to \mathrm{GL}(W)$ una representación con W un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión finita.
Sean $\Lambda = \Lambda_1, \ldots, \Lambda_h$ representantes de $\mathrm{Cl}(\Lambda)$.
Para una representación ρ, definimos el espacio de formas modulares ortogonales para Λ de peso ρ como

$$M(\mathrm{O}(\Lambda), \rho) := \{f : \mathrm{Cl}(\Lambda) \to W : f([\Lambda_i]) \in W^{\mathrm{O}(\Lambda_i))}\} \cong \bigoplus_{i=1}^{h} W^{\mathrm{O}(\Lambda_i)}.$$

Dado $p \nmid \mathrm{disc}(\Lambda)$, para un p^k-vecino Γ de Λ, tenemos $\Gamma = \gamma\Lambda_j$ para un único j y $\gamma \in \mathrm{O}^+(V)$, único módulo $\mathrm{O}^+(\Lambda_j)$.
Definimos el operador de Hecke

$$T_{p,k} : M(\mathrm{O}(\Lambda), \rho) \to M(\mathrm{O}(\Lambda, \rho)$$
$$T_{p,k}(f)([\Lambda']) := \sum_{\Gamma'} \rho(\gamma')(f([\Gamma'])),$$

donde la suma es sobre todos los $\gamma\Lambda_j = \Gamma'$ que son p^k-vecinos de Λ'.

Dada $\sigma \in \mathrm{O}(V)$, se puede escribir como producto de simetrias

$$\sigma = \tau_{\mathbf{v}_1} \cdots \tau_{\mathbf{v}_s}.$$

La norma spin de σ se define como

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{O}(V) &\to \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2 \\ \sigma &\mapsto \theta(\sigma) = \phi(\mathbf{v}_1) \cdots \phi(\mathbf{v}_s), \end{aligned}$$

y es un homomorfismo de grupos.
Si $d \mid D$ definimos el caracter $\nu_d : \mathbb{Q}^\times_{>0}/(\mathbb{Q}^\times_{>0})^2 \to \{\pm 1\}$ definido en primos como

$$\nu_d(p) := \begin{cases} -1 & \text{si } p \mid d \\ 1 & \text{si } p \nmid d \end{cases},$$

y la representación de dimensión 1
$\rho_d : \mathrm{O}^+(V) \to \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}^\times \cong \mathrm{GL}(\mathbb{Q})$

$$\rho_d(\sigma) := \nu_d(\theta(\sigma)).$$

Volviendo al ejemplo ternario con discrminante 37, vemos que existe $\sigma \in \mathrm{O}^+(\Lambda_1)$ tal que $\theta(\sigma) = 37$, pero no hay autometrías para Λ_2 con norma spin 37.
Si consideramos la representación ρ_{37}, vemos que $S(\mathrm{O}(\Lambda), \rho_{37}) \simeq 0 + \mathbb{Q}$. Si tomamos $f \in S(\mathrm{O}(\Lambda), \rho_{37})$, $f \neq 0$, algunos de sus autovalores para los operadores de Hecke son:

$$T_{2,1}(f) = -2f,\ \ T_{3,1}(f) = -3f,\ \ T_{5,1}(f) = -2f,$$

$$T_{7,1}(f) = -f,\ \ T_{11,1}(f) = -5f,\ \ T_{13,1}(f) = -2f.$$

Estos autovalores coinciden con los coeficientes de Fourier de la forma modular `37.2.a.a` de peso 2 y nivel 37, que tiene signo $-$ en la ecuación funcional de su L-función asociada.
De esta manera obtenemos todo el espacio $S_2(\Gamma_0(37))$.

Ahora volvemos al ejemplo quinario de discriminante 167, en este caso, todas las clases, salvo una, tienen una autometría con norma spin 167. Por lo tanto $S(\mathrm{O}(\Lambda), \rho_{167}) \simeq \mathbb{Q}$.
Sea $f \in S(\mathrm{O}(\Lambda), \rho_{167})$, $f \neq 0$. Agunos autovalores son,
$T_{p,k}(f) = c_{p,k} f$,

p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$	p	$c_{p,1}$
2	-8	5	-4	11	-22	17	-47	23	41
3	-10	7	-14	13	-4	19	-12	29	50

p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$	p	$c_{p,2}$
2	10	5	-44	11	-67	17	260	23	-198
3	11	7	-9	13	-158	19	41	29	-187

Para p primo, sea Λ_p un retículo representante del único género de discriminante p.

Teorema

Para $p < 7000$ se cumple

$$\dim(S_3(K(p)) = \dim S(\mathrm{O}(\Lambda_p)) + \dim S(\mathrm{O}(\Lambda_p), \rho_p).$$

Conjetura

Para p primo,

$$S_3(K(p)) \simeq S(\mathrm{O}(\Lambda_p)) \oplus S(\mathrm{O}(\Lambda_p), \rho_p).$$

Además, $S(\mathrm{O}(\Lambda_p))$ corresponde a las formas de $S_3(K(p))$ con signo $+$ en la ecuación funcional de su L-función asociada, y $S(\mathrm{O}(\Lambda_p), \rho_p)$ corresponde a las formas de $S_3(K(p))$ con signo $-$ en la ecuación funcional de su L-función asociada.

¡Gracias!