FUNCIONES L COMPLEJAS y P-ÁDICAS

I $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica

I,1 $E(\mathbb{Q})$ = grupo abeliano fini. Generado.

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \underbrace{\text{Torsión}}_{\text{gp. finito}}.$$

[r es muy misterioso !!!]

Def: $\boxed{\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})} = r$

Ex: $E : y^2 = x^3 - 7x - 6$.

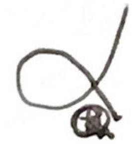
$\hookrightarrow E(\mathbb{Q}) = \{\infty, (-2,0), (-1,0), (3,0)\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

I,2 Descripción de $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$

Sea l primo $\Longrightarrow$ "$E \bmod l$" sobre $\mathbb{F}_l$ que no es necesariamente una C. E.

- **BUENA REDUCCIÓN** 

$$\boxed{a_\ell(E)} = \ell+1-\#E(\mathbb{F}_\ell)$$

- **REDUCCIÓN MULTIPLICATIVA** 

  - Split (las tangentes en Q están definidas sobre $\mathbb{F}_\ell$) $\boxed{a_\ell(E)} = 1$
  - No split (NO.) $\boxed{a_\ell(E)} = -1$

- **REDUCCIÓN ADITIVA** 

$$\boxed{a_\ell(E)} = 0.$$

Def:

$$\boxed{L(E,s)} = \prod_{\ell \text{ B.R}} \left(1 - a_\ell(E)\,\ell^{-s} + \ell^{1-2s}\right)^{-1} \times \prod_{\substack{\ell \text{ no} \\ \text{BR}}} \left(1 - a_\ell(E)\,\ell^{-s}\right)^{-1}$$

s "variable compleja"

Obs: Desigualdad de Hasse $\Rightarrow L(E,s)$ es holomorfa en $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 3/2$

[**Teo** (Wiles, Wiles-Taylor, ...) $L(E,s)$ es entera.] 1995 → ..

$$\boxed{\underline{\text{Conjetura BSD}}: \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) = \operatorname{ord}_{s=1} L(E,s)}$$

(Kolivagyn 1990, GZ 1986) BSD es verdad si $\operatorname{ord}_{s=1} L(E,s) \leq 1$.

II <u>BSD p-ádico</u>

p primo.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R} \arrow[r, hook, "2"] & \mathbb{C} \\
\mathbb{Q} \arrow[ur] \arrow[dr, hook] & & \\
& \mathbb{Q}_p & \\
& \cup & \\
& \mathbb{Z}_p &
\end{tikzcd}$$

BSD usando $L(E,s)$

BSD .... ?!!

BR: E tiene buena reducción en p

& $p \nmid a_p(E)$

RM: E tiene reducción multiplicativa en p.

Ej: $E: y^2 = x^3 - 7x - 6$

BR si $p = 7$

R.M.S. si $p = 5$

Notación: $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ se define:

BR: α raíz de $x^2 - a_p(E)x + p$ t.q.

$\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ $(\alpha \neq 1)$

MR: $\alpha = a_p(E) \in \{\pm 1\}$

Teo: $\exists$ función holomorfa $L_p(E,s)$, $s \in \mathbb{Z}_p$

t.q.

- $L_p(E,1) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{L(E,1)}{\Omega_E}$

Ω_E → periodo real de E

- $L_p(E,s)$ es la transformada de Mellin de cierta medida sobre $\mathbb{Z}_p^*$

<u>Obs</u>: E tiene R.M.S en $p \Rightarrow \alpha = 1$

$$\Rightarrow L_p(E,1) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \frac{L(E,1)}{\Omega_E} = 0$$

independiente del valor de $L(E,1)$
(CEROS EXCEPCIONALES!!!) !!!

Conjetura BSD (p) Si E

① <u>No R.M.S en p</u> $\Rightarrow$

$$\operatorname{ord}_{s=1} L_p(E,s) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})$$

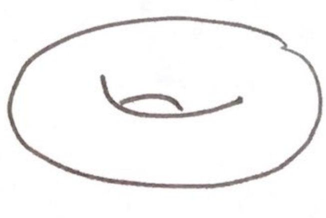
② <u>R.M.S en p</u>:

$$\operatorname{ord}_{s=1} L_p(E,s) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) + 1$$

(II,2) <u>Primera derivada</u>: Sea E con R.M.S. en p.

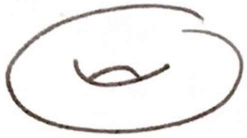
<u>S XIX</u> $\quad E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/_{\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z}} \overset{\exp}{\cong} \mathbb{C}^*/_{\langle q_\infty \rangle}$

donde $q_\infty = e^{2\pi i\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$



<u>Tate 1959:</u> $\exists\, q_p \in p\mathbb{Z}_p - \{0\}$ t.q

$$E(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p^{*}/\langle q_p \rangle \ , \quad \langle q_p \rangle = \{ q_p^{n} / n \in \mathbb{Z} \}$$



<u>Teo</u> (Greenberg-Stevens 1993) Si E tiene R.M.S en $p \Rightarrow$

$$\left.\frac{d L_p(E,s)}{dS}\right|_{s=1} = \underbrace{\left(\frac{\log_p(q_p)}{\mathrm{ord}_p(q_p)}\right)}_{\neq\, 0} \left(\frac{L(E,1)}{\Omega_E}\right)$$

(1996 Saint-Étienne)

<u>ojo</u> 1: si $\mathrm{ord}_{s=1} L(E,1) = 0 \Longrightarrow$ BSD(p) vale para E.

<u>ojo 2</u>: Herramienta crucial en la demo es el uso de familias p-ádicas de formas modulares. (Hida theory)

III Representaciones automorfas

III,1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Curvas elípticas} \\ \text{sobre } \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Representaciones automorfas asociadas} \\ \text{al grupo } GL_2/\mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rep. automorfas asociadas} \\ \text{a algún grupo reductivo} \\ G \text{ sobre } \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

$$G = GL_4/\mathbb{Q}\,,\ GSpin_n/\mathbb{Q}$$

$$Res_{K/\mathbb{Q}}\, GL_2/K \qquad K/\mathbb{Q}$$

8

$\underline{\mathbb{Q}}$: Existe teorías de funciones L complejas para varios grupos G. ($GL_n/\mathbb{Q}$)

<u>Problemas "interesantes"</u>: Sea π una rep. automorfa de $G(\mathbb{A})$ para algún grupo reductivo G sobre $\mathbb{Q}$: ($\mathbb{A} = \prod_{\ell}' \mathbb{Q}_\ell \times \mathbb{R}$)

1. Construir "la" función L p-ádica de π ($L_p(\pi, s)$)
2. Si π vive en una familia p-ádica $\Rightarrow L_p(\pi, s)$ vive en familia?!
3. Estudiar $L_p(\pi, s)$ (Con excepcionales!!)

III p2

Sea $n \geq 2$ y π una representación automorfa, cuspidal, regular y algebraica de $GL_{2n}(\mathbb{A})$ t.q.:

- π tiene peso cohomológico dominante $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$
- Esférica en p.
- Simpléctica (transfert de $GSpin_{2n+1}(\mathbb{A})$)

Teo (B-Dimitrov-Williams) Si π tiene "pendiente no crítica" $\Rightarrow$

① $\exists\ L_p(\pi, s)$, $s \in \mathbb{Z}_p$ función holomorfa interpolando los valores críticos:

$$\frac{L(\pi, j)}{\Omega_\pi} \qquad j \in \mathbb{Z},\ \lambda_n \geq j \geq \lambda_{n+1}$$

2. ~~[illegible]~~ π vive en una familia p-ádica de rep. aut. simplecticas de $GL_{2n}(\mathbb{A})$

3. $L_p(\pi, s)$ vive en familia igualmente.

Ingredientes de demo

1. Cohomología sobreconvergente Parabólica
[B - Williams]
(seguimos Urban, Hansen, Ash-Stevens)

2. Evaluación de la Cohomología de variedades aritméticas
(seguimos Grobner - Raghuram, Dimitrov - Januszewski - Raghuram,
B - W)

(3) Estudio local de variedades de Hecke (familias p-ádicas).

f peso 2, familia de Hida ~~$\{F_k\}_{k \in \mathbb{Z}_p}$~~

- $\{F_k\}_{k \in \mathbb{Z}_p}$ t.q.

  1) $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ F_k es una forma modular de peso k.

  2) $F_2 = f$

- $\exists$ $L_p(k,s)$ con $k,s \in \mathbb{Z}_p$

t.q. $\forall$ $k_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$s \longmapsto L_k(k_0, s)$$

es la función L p-ádica de F_k.