# PUNTOS DE HEEGNER EN CURVAS DE CARTAN NON-SPLIT

NICOLÁS SIROLLI (UBA/CONICET)

TRABAJO CON DANIEL KOHEN

LATEN, 30/4/20

# 1 INTRODUCCIÓN

SEA $E/\mathbb{Q}$ UNA CURVA ELÍPTICA CON

$$L(E,1)=0, \quad L'(E,1)\neq 0.$$

B-SD / KOLYVAGIN: $\dim_{\mathbb{Q}}(E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}) = 1$

- ¿CÓMO OBTENER PUNTOS EN $E(\mathbb{Q})$?
- ¿CÓMO VIENEN DADAS SUS POSICIONES EN ESTA RECTA?

## 2 PUNTOS DE HEEGNER

CURVA MODULAR

SEA $N = \text{cond}(E)$.

SEA $\Gamma_0^*(N) = \langle \Gamma_0(N), W_N \rangle$, SEA $X_0^*(N) = \underbrace{\Gamma_0^*(N) \backslash \mathcal{H}}$

Y SEA $J_0^* = J_0^*(N)$ SU JACOBIANA.

E MODULAR $\rightsquigarrow$ TENEMOS UN MORFISMO $\mathbb{Q}$-RACIONAL NO NULO

$$\Phi : X_0^*(N) \to E.$$

IDEA: CONSTRUIR PUNTOS EN $E(\mathbb{Q})$

A PARTIR DE PUNTOS (DE HEEGNER) EN $J_0^*(\mathbb{Q})$.

SEA $D<0$, $D\equiv 1\ (4)$, LIBRE DE $\square$. $\rightsquigarrow$ $D=\mathrm{disc}(K)$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$

SUPONGAMOS $D\equiv\square\ (N)$. (COND. DE HEEGNER $\Rightarrow$ $\mathrm{sgn}\ L(E/K,s)=-1$)

FIJAMOS $r \pmod{2N}$ CON $D\equiv r^2\ (4N)$.

SEA $\tau\in\mathcal{H}$ RAÍZ DE UN POLINOMIO $Ax^2+Bx+C$ CON

- $A\equiv 0\ (N)$
- $B\equiv r\ (2N)$
- $B^2-4AC=D$

NOT: $h=[H:K]$

PROP: $\tau\in X_0(N)(H)$, $H=$ CUERPO DE CLASES DE HILBERT DE $K$.

## 3 EL TEO. DE GROSS-KOHNEN-ZAGIER

TOMAMOS $P_{D,r} = \sum_{\sigma \in Gal(H/K)} \sigma \cdot \tau \in Div(X_0(N))(K)$, (TRAZA)

Y DENOTAMOS $y_{D,r}^{*} = \pi(P_{D,r} - h \cdot (\infty)) \in J_0^{*}(\mathbb{Q})$. (GRACIAS A $W_N$)

SEA $f \in S_2^{New}(N)$, $f \longleftrightarrow E$. SEA $(y_{D,r}^{*})_f \in J_0^{*}(\mathbb{Q})$. → comp. f-ISOT.

PROP: SEA $Q_{D,r}^{*} = \Phi((y_{D,r}^{*})_f) \in E(\mathbb{Q})$. ENTONCES

$$\hat{h}(Q_{D,r}^{*}) = \alpha \langle (y_{D,r}^{*})_f, (y_{D,r}^{*})_f \rangle .$$

(NÉRON-TATE) (ALTURA CANÓNICA)

→ QUEREMOS QUE SEAN NO NULOS

TEO (G-K-Z): EXISTE $y_f^*$ CON

$$\langle y_f^*, y_f^* \rangle = \alpha \cdot L'(E,1) \neq 0$$

TAL QUE $\left(y_{D,r}^*\right)_f = c\left(\frac{r^2-D}{4N}, r\right) \cdot y_f^*$, → PARA $(D,N)=1$

SIENDO $c(m,r)$ LOS COEF. DE FOURIER DE LA FORMA DE JACOBI $\phi_f \in J_{2,N}$ QUE CORRESPONDE A $f$.

IDEALMENTE: $\displaystyle\sum_{m,r\in\mathbb{Z}} \left(y_{D,r}^*\right)_f q^m \zeta^r \in J_0^*(\mathbb{Q}) \otimes J_{2,N}$.

$D = r^2 - 4Nm < 0$ → AÚN SI $(D,N) \neq 1$

"F.J. A VALORES EN $J_0^*(\mathbb{Q})$"

# 4 FORMAS DE JACOBI

SEA $(L,\beta)$ UN RETÍCULO PAR, DEF + (ÍNDICE). EL GRUPO DE HEISENBERG DE L ES $H(L) = \{(x,y,e(\beta(x,y)/2)) : x,y\in L\}$, CON $\cdot = \ldots$

SEA $k\in\mathbb{Z}$ (PESO).

- $H(L)$ ACTÚA EN $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times L\otimes\mathbb{C})$ VÍA

$$(\phi|_k \underline{X})(\tau,z) = \zeta\, e\left(\tau\beta(x)+\beta(x,z)+\frac{\beta(x,y)}{2}\right)\phi(\tau, z+\tau x+y), \quad \underline{X}=(x,y,\zeta)\in H(L).$$

- $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ ACTÚA EN $\mathrm{Hol}(\mathbb{H}\times L\otimes\mathbb{C})$ VÍA

$$(\phi|_k \gamma)(\tau,z) = j(\gamma,\tau)^{-k}\, e\left(\frac{-c\beta(z)}{j(\gamma,\tau)}\right)\phi(\gamma\tau, z/j(\gamma,\tau)), \quad \gamma\in\Gamma.$$

DEF: $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H} \times L \otimes \mathbb{C})$ ES UNA FORMA DE JACOBI DE PESO $k$ E ÍNDICE $L$ $(\phi \in J_{k,L})$ SI

- $\phi|_k \mathbb{X} = \phi \quad \forall \mathbb{X} \in H(L)$.
- $\phi|_k \gamma = \phi \quad \forall \gamma \in \Gamma$
- ES HOLOMORFA EN LAS CÚSPIDES

$c(m,s) \neq 0 \Rightarrow m \geq \beta(s)$

$$\rightsquigarrow \phi(\tau, z) = \sum_{r \in L^\vee} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m,r)\, q^m e(\beta(r,z)).$$

EJEMPLO: $N \geq 1$. $L = \mathbb{Z}$, $\beta(x) = Nx^2$. ENTONCES $c(m,r)$ DEPENDE SÓLO DE $r \pmod{2N}$ Y DE

$$D = r^2 - 4Nm < 0 \ ; \quad D \equiv \square\,(4N)$$

(COND. DE HEEGNER)

(F.J. CLÁSICAS, ÍNDICE N)

# 5 EL CASO NON-SPLIT

SIGUE VALIENDO: $\operatorname{sgn} L(E/K,s) = -1$

TOMEMOS $N=p^2$, $p$ PRIMO IMPAR.

¿QUÉ HAY PARA LOS $K$ (CUAD, IMAG) EN LOS QUE $p$ ES INERTE?

NOT: FIJAMOS $\varepsilon \equiv \cancel{\square}(p)$, $\varepsilon \equiv 1 (4)$.

- $\Gamma_{ns} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d,\ b \equiv \varepsilon c \mod p \right\}$
- $X_{ns}^+ = \Gamma_{ns}^+ \backslash \mathcal{H}$ → CURVA DE CARTAN NON-SPLIT

DEPENDE DE $p$, $\varepsilon$

TEO (CHEN/EDIXHOVEN): $\exists\ \Phi_{ns} : X_{ns}^+ \to E$ $\mathbb{Q}$-RACIONAL, NO NULO, HECKE-EQUIVARIANTE.

Sea $D<0$ con $D \equiv 1\,(4)$, $D \equiv \cancel{\square}\ (p)$, $\dashrightarrow$ Así si $p \mid D$ $p$ es inerte en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

y sea $s \ (\mathrm{mod}\ 2p^2)$ tal que $\varepsilon D \equiv s^2\ (4p^2)$.

Sea $\tau \in \mathcal{H}$ raíz de $Ax^2+Bx+C \in \mathcal{Q}_{ms,D,s}$ con

- $B \equiv A + \varepsilon C \equiv 0\ (p)$, $B^2-4AC = D$.
- $A - \varepsilon C \equiv s\,(p^2)$, $B \equiv s\,(2)$.

$\}$ Así $\varepsilon D \equiv s^2\,(4p^2)$.

**Prop:** $$\mathcal{Q}_{ms,D,s}/\Gamma_{ms} \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathcal{Q}_D/SL_2(\mathbb{Z})$$

$\rightsquigarrow$ $\tau$ induce $Q^+_{D,s} \in J^+_{ms}(\mathbb{Q})$.

TEO (ZHANG): $\langle \varphi^+_{D,s}, \varphi^+_{D,s} \rangle = \alpha\, L'(E/K, 1).$

TEO (KOHEN, S.): ESCRIBAMOS $E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} = \langle \varphi \rangle$.

$\exists\, \mathcal{L}_{ms}$ RETÍCULO DE RANGO 9 DEF +

Y $\phi_E \in J_{6, \mathcal{L}_{ms}}$ TALES QUE

$$\varphi^+_{D,s} = c\left(\beta(s) - \tfrac{D}{4p^2}, s\right) \varphi$$

$\forall\, D < 0$ CON $\varepsilon D \equiv s^2 \ (4p^2)$, $(D, p) = 1.$

# SOBRE LA DEMOSTRACIÓN

- PUNTOS DE HEEGNER $\longleftrightarrow$ $[A,B,C] \in \mathcal{Q}_{ms,D,s}$

$\longleftrightarrow$ PUNTOS $\begin{pmatrix} B & 2C \\ -2A & -B \end{pmatrix}$ DE UN RETÍCULO $L_{ms}$.

sign $(2,1)$

- BORCHERDS: $L_{ms} \rightsquigarrow$ FORMA MODULAR,

A VALORES EN $J^{+}_{ms}(\mathbb{Q}) \otimes \underbrace{\mathbb{C}[L^{\vee}_{ms}/L_{ms}]}_{\text{VECTORIALES}}$, PESO $3/2$.

- $L_{ms}$ NO ES ESTABLEMENTE ISO A UN RETÍCULO DEF + DE RANGO 1; SÍ A $\mathcal{L}_{ms}$ DEF +, DE RANGO 9.

- FORMA MODULAR $\underbrace{}_{\text{PESO } 3/2}$ A VALORES EN $J^+_{ms}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{L}^\vee_{ms}/\mathcal{L}_{ms}]$

  $\rightsquigarrow$ F.J. PARA $\mathcal{L}_{ms}$, PESO 6, A VALORES EN $J^+_{ms}(\mathbb{Q})$.

  (EL ENUNCIADO IDEAL DE G-K-Z)

- USAMOS $\Phi_{ms} : J^+_{ms}(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q})$

  PARA OBTENER $\phi_E \in J_{6,\mathcal{L}_{ms}}$ (AUTOFUNCIÓN!).

## 6 EJEMPLO

$$\mathcal{L}_{mS} = \begin{pmatrix} 34 & -136 & -80 & 16 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -136 & 578 & 323 & -68 & 17 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ -80 & 323 & 190 & -40 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -68 & -40 & 12 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 17 & 10 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 17 & 10 & -3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

RETÍCULO CORRESPONDIENTE A $p = 17$, $\varepsilon = 5$.

$\rightsquigarrow$ CALCULAMOS $\phi_E$ PARA $E = 289 \cdot a4$.

Fim