Teoría de Iwasawa para GL(2)xGL(2) y ciclos diagonales

(trabajo conjunto con R. Alonso y F. Castellà)

Óscar Rivero Salgado

University of Warwick

14/10/2021

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

Motivación

- K cuerpo de números, $\varrho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ representación de Galois geométrica.
- $L(\varrho^*(1), s)$ función L correspondiente.

Motivación

- K cuerpo de números, $\varrho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ representación de Galois geométrica.
- $L(\varrho^*(1), s)$ función L correspondiente.
- Conjetura de Bloch–Kato:

$$\mathrm{ord}_{s=0} L(\varrho^*(1), s) = \dim H^1_f(K, \varrho) - \dim H^0(K, \varrho).$$

(relación con otros problemas en teoría de números como la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer).

Motivación

- K cuerpo de números, $\varrho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ representación de Galois geométrica.
- $L(\varrho^*(1), s)$ función L correspondiente.
- Conjetura de Bloch–Kato:

$$\mathrm{ord}_{s=0} L(\varrho^*(1), s) = \dim H^1_f(K, \varrho) - \dim H^0(K, \varrho).$$

  (relación con otros problemas en teoría de números como la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer).
- Conjetura principal de Iwasawa: relación entre la función L p-ádica y un grupo de Selmer ("igualdad entre una función L p-ádica algebraica y una analítica").

La conjetura de Bloch–Kato: ejemplos

- $V = \mathbb{Q}_p(1)$. Consideremos los diferentes términos:
  - $\mathrm{ord}_{s=0} L(V^*(1), s) = \mathrm{ord}_{s=0} \zeta_K(s) = r_1 + r_2 - 1$.
  - $\dim H^1_f(K, V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_K^\times \otimes \mathbb{Q}_p) = r_1 + r_2 - 1$ [teorema de las unidades de Dirichlet].
  - $\dim H^0(K, V) = 0$.

La conjetura de Bloch–Kato: ejemplos

- $V = \mathbb{Q}_p(1)$. Consideremos los diferentes términos:
  - $\mathrm{ord}_{s=0} L(V^*(1), s) = \mathrm{ord}_{s=0} \zeta_K(s) = r_1 + r_2 - 1$.
  - $\dim H^1_f(K, V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{O}_K^\times \otimes \mathbb{Q}_p) = r_1 + r_2 - 1$ [teorema de las unidades de Dirichlet].
  - $\dim H^0(K, V) = 0$.
- $V = V_p(E)$.
  - $\mathrm{ord}_{s=0} L(\varrho^*(1), s) = \mathrm{ord}_{s=1} L(E/K, s)$.
  - La imagen de la aplicación de Kummer está en el grupo de Selmer de Bloch–Kato
    $$E(K) \otimes \mathbb{Q}_p \hookrightarrow H^1_f(K, V),$$
    y se tiene una igualdad si y solo si la p-parte de Sha es finita.
  - $\dim H^0(K, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$.
    Se recupera la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

Sistemas de Euler

- V representación de $G_{\mathbb{Q}}$.
- $T \subset V$ retículo estable por la acción de Galois.
- Σ conjunto finito de primos que contiene al primo p y a los primos en los que V ramifica.

Sistemas de Euler

- V representación de $G_{\mathbb{Q}}$.
- $T \subset V$ retículo estable por la acción de Galois.
- Σ conjunto finito de primos que contiene al primo p y a los primos en los que V ramifica.

Definición

Un sistema de Euler para (T, Σ) es una colección $c = (c_m)_{m \geq 1}$, con $c_m \in H^1(\mathbb{Q}(\mu_m), T)$, tal que para $m \geq 1$ y ℓ primo

$$N_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(c_{m\ell}) = \begin{cases} c_m & \text{si } \ell \in \Sigma \text{ or } \ell \mid m \\ P_\ell(V^*(1), \sigma_\ell^{-1}) \cdot c_m & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con σ_ℓ la imagen de $Frob_\ell$ en $Gal(\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q})$.

Sistemas de Euler

- V representación de $G_{\mathbb{Q}}$.
- $T \subset V$ retículo estable por la acción de Galois.
- Σ conjunto finito de primos que contiene al primo p y a los primos en los que V ramifica.

Definición

Un sistema de Euler para (T, Σ) es una colección $c = (c_m)_{m \geq 1}$, con $c_m \in H^1(\mathbb{Q}(\mu_m), T)$, tal que para $m \geq 1$ y ℓ primo

$$N_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(c_{m\ell}) = \begin{cases} c_m & \text{si } \ell \in \Sigma \text{ or } \ell \mid m \\ P_\ell(V^*(1), \sigma_\ell^{-1}) \cdot c_m & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con σ_ℓ la imagen de $Frob_\ell$ en $Gal(\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q})$.

Principal aplicación: acotar grupos de Selmer.

El caso más sencillo: unidades ciclotómicas

- $V = \mathbb{Q}_p(1)$.
- Aplicación de Kummer

$$\kappa_p : K^\times \longrightarrow H^1(K, \mathbb{Z}_p(1)).$$

- Para L/K finita, la aplicación de correstricción corresponde a la norma.

El caso más sencillo: unidades ciclotómicas

- $V = \mathbb{Q}_p(1)$.
- Aplicación de Kummer

$$\kappa_p : K^\times \longrightarrow H^1(K, \mathbb{Z}_p(1)).$$

- Para L/K finita, la aplicación de correstricción corresponde a la norma.
- Fijemos un embedding $\iota : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Set $\zeta_m = \iota^{-1}(e^{2\pi i/m})$.
- Let $u_m = 1 - \zeta_m$. Define

$$v_m = \begin{cases} u_m & \text{si } p \mid m \\ N_{\mathbb{Q}(\mu_{mp})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(u_{pm}) & \text{si } p \nmid m. \end{cases}$$

- Las clases $\kappa_p(v_m)$ son un sistema de Euler para $(\mathbb{Z}_p(1), \{p\})$.

¿Qué sistemas de Euler se conocen?

Algunos ejemplos (esta lista no es exhaustiva).

1. **Unidades circulares.** $V = \mathbb{Z}_p(\chi)(1)$, donde χ es un carácter de Dirichlet par.

¿Qué sistemas de Euler se conocen?

Algunos ejemplos (esta lista no es exhaustiva).

1. **Unidades circulares.** $V = \mathbb{Z}_p(\chi)(1)$, donde χ es un carácter de Dirichlet par.
2. **Sistema de Kato.** $V = V_p(f)$, donde $V_p(f)$ representación de Galois asociada a una forma modular.
3. **Sistema de Beilinson–Flach.** $V = V_p(f) \otimes V_p(g)$, convolución de dos formas modulares.

¿Qué sistemas de Euler se conocen?

Algunos ejemplos (esta lista no es exhaustiva).

1. **Unidades circulares.** $V = \mathbb{Z}_p(\chi)(1)$, donde χ es un carácter de Dirichlet par.
2. **Sistema de Kato.** $V = V_p(f)$, donde $V_p(f)$ representación de Galois asociada a una forma modular.
3. **Sistema de Beilinson–Flach.** $V = V_p(f) \otimes V_p(g)$, convolución de dos formas modulares.
4. Están apareciendo nuevos casos en la literatura: trabajos recientes para grupos simplécticos y unitarios (Loeffler–Skinner–Zerbes entre otros).

En la mayoría de casos, las herramientas usadas para construirlos son similares y se basan en la manipulación de unidades modulares en curvas modulares.

La conjetura de Bloch–Kato: contexto anticiclotómico

Teoría general de sistemas de Euler anticiclotómicos desarrollada por Jetchev–Nekovar–Skinner. Asumamos las siguientes condiciones:

- K cuerpo cuadrático imaginario;
- $\varrho^c \simeq \varrho^*(1)$ (conjugada autodual);
- $s = 0$ valor crítico con $H^0(K, \varrho) = 0$.

Aquí, cero es el centro de la ecuación funcional y $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, 0) = \pm 1$.

La conjetura de Bloch–Kato: contexto anticiclotómico

Teoría general de sistemas de Euler anticiclotómicos desarrollada por Jetchev–Nekovar–Skinner. Asumamos las siguientes condiciones:

- K cuerpo cuadrático imaginario;
- $\varrho^c \simeq \varrho^*(1)$ (conjugada autodual);
- $s = 0$ valor crítico con $H^0(K, \varrho) = 0$.

Aquí, cero es el centro de la ecuación funcional y $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, 0) = \pm 1$.

Conjetura

- *Si* $\varepsilon = +1$ *y* $L(\varrho, 0) \neq 0$, *entonces* $H^1_f(K, \rho)$ *es finito.*
- *Si* $\varepsilon = -1$ *y* $L'(\varrho, 0) \neq 0$, *entonces* $H^1_f(K, \rho)$ *tiene rango uno.*

La conjetura de Bloch–Kato: contexto anticiclotómico

Teoría general de sistemas de Euler anticiclotómicos desarrollada por Jetchev–Nekovar–Skinner. Asumamos las siguientes condiciones:

- K cuerpo cuadrático imaginario;
- $\varrho^c \simeq \varrho^*(1)$ (conjugada autodual);
- $s = 0$ valor crítico con $H^0(K, \varrho) = 0$.

Aquí, cero es el centro de la ecuación funcional y $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, 0) = \pm 1$.

Conjetura

- *Si* $\varepsilon = +1$ *y* $L(\varrho, 0) \neq 0$, *entonces* $H^1_f(K, \rho)$ *es finito.*
- *Si* $\varepsilon = -1$ *y* $L'(\varrho, 0) \neq 0$, *entonces* $H^1_f(K, \rho)$ *tiene rango uno.*

Sistemas de Euler. Caso de los puntos de Heegner. Nuevos escenarios, como Graham–Shah (grupos unitarios).

Análogos ciclotómicos: elementos de Beilinson–Flach

Analogías con el caso ciclotómico.

- Los elementos de Beilinson–Flach extienden la construcción de Kato para una forma modular.
- Dos formas modulares f y g.

Análogos ciclotómicos: elementos de Beilinson–Flach

Analogías con el caso ciclotómico.

- Los elementos de Beilinson–Flach extienden la construcción de Kato para una forma modular.
- Dos formas modulares f y g.
- Condiciones de *imagen grande*. En particular, $\chi_f \chi_g \neq 1$.

Análogos ciclotómicos: elementos de Beilinson–Flach

Analogías con el caso ciclotómico.

- Los elementos de Beilinson–Flach extienden la construcción de Kato para una forma modular.
- Dos formas modulares f y g.
- Condiciones de *imagen grande*. En particular, $\chi_f \chi_g \neq 1$.
- Kings–Loeffler–Zerbes: Bloch–Kato, una divisibilidad en la IMC, cotas para el tamaño de grupos de Selmer.
  - Construcción de un sistema de Euler para $V_f \otimes V_g$ (se puede hacer en 3 variables).
  - Función L p-ádica de 3 variables $L_p(\underline{f}, \underline{g}, s)$.
  - Demostración de una ley de reciprocidad explícita.
  - Resultados de Mazur–Rubin.

Ciclos diagonales y productos triples

- Beilinson–Kato: 1 forma cuspidal y 2 series de Eisenstein;
  Beilinson–Flach: 2 formas cuspidales y 1 serie de Eisenstein.

Ciclos diagonales y productos triples

- Beilinson–Kato: 1 forma cuspidal y 2 series de Eisenstein; Beilinson–Flach: 2 formas cuspidales y 1 serie de Eisenstein.
- Ciclos diagonales: 3 formas cuspidales. Ausencia de la variable ciclotómica.
  - Pesos (k, ℓ, m): $L(\underline{f}_k \otimes \underline{g}_\ell \otimes \underline{h}_m, s)$. Ecuación funcional relacionando s y $k + \ell + m - 2 - s$. Valor crítico central $s = \frac{k+\ell+m}{2} - 1$.
  - *Eslogan:* cuando f es una serie de Eisenstein la variable k se comporta como una variable ciclotómica y se recupera el escenario de BF.
  - Familias de clases indexadas por tres variables correspondientes a los pesos.

Ciclos diagonales y productos triples

- Beilinson–Kato: 1 forma cuspidal y 2 series de Eisenstein; Beilinson–Flach: 2 formas cuspidales y 1 serie de Eisenstein.
- Ciclos diagonales: 3 formas cuspidales. Ausencia de la variable ciclotómica.
  - Pesos (k, ℓ, m): $L(\underline{f}_k \otimes \underline{g}_\ell \otimes \underline{h}_m, s)$. Ecuación funcional relacionando s y $k + \ell + m - 2 - s$. Valor crítico central $s = \frac{k+\ell+m}{2} - 1$.
  - *Eslogan:* cuando f es una serie de Eisenstein la variable k se comporta como una variable ciclotómica y se recupera el escenario de BF.
  - Familias de clases indexadas por tres variables correspondientes a los pesos.
- Se puede formular una IMC (funciones L y grupos de Selmer), pero no hay herramientas para obtener ninguna divisibilidad. No podemos aplicar Mazur–Rubin.

Un sistema de Euler anticiclotómico

- Caso en el que $\underline{f}$ es una familia de series theta con CM. Fijamos las otras dos formas modulares (g, h).

Un sistema de Euler anticiclotómico

- Caso en el que $\underline{f}$ es una familia de series theta con CM. Fijamos las otras dos formas modulares (g, h).
- Podemos obtener una colección de clases sobre la torre anticiclotómica.

Un sistema de Euler anticiclotómico

- Caso en el que $\underline{f}$ es una familia de series theta con CM. Fijamos las otras dos formas modulares (g, h).
- Podemos obtener una colección de clases sobre la torre anticiclotómica.
- Diferencias con el tratamiento de Lei–Loeffler–Zerbes y Büyükboduk–Lei: no tenemos clases sobre $\mathbb{Z}_p^2$-extensión de K ni una función L p-ádica como en su caso.
- ¿Variable ciclotómica?

Un sistema de Euler anticiclotómico

- Caso en el que $\underline{f}$ es una familia de series theta con CM. Fijamos las otras dos formas modulares (g, h).
- Podemos obtener una colección de clases sobre la torre anticiclotómica.
- Diferencias con el tratamiento de Lei–Loeffler–Zerbes y Büyükboduk–Lei: no tenemos clases sobre $\mathbb{Z}_p^2$-extensión de K ni una función L p-ádica como en su caso.
- ¿Variable ciclotómica?

Pregunta

1. *¿Forman estas clases un sistema de Euler?*
2. *¿Podemos considerar tanto la variación moderada como la salvaje?*

Contexto

- $g \in S_\ell(N_g, \chi_g)$, $h \in S_m(N_h, \chi_h)$, $\ell \geq m$.
- $K/\mathbb{Q}$ cuadrático imaginario, ψ carácter de Hecke con tipo en el infinito $(1-k, 0)$ y carácter central $\varepsilon_\psi = \varepsilon_K \bar{\chi}_g \bar{\chi}_h$.

Contexto

- $g \in S_\ell(N_g, \chi_g)$, $h \in S_m(N_h, \chi_h)$, $\ell \geq m$.
- $K/\mathbb{Q}$ cuadrático imaginario, ψ carácter de Hecke con tipo en el infinito $(1-k, 0)$ y carácter central $\varepsilon_\psi = \varepsilon_K \bar{\chi}_g \bar{\chi}_h$.
- Representación $V_{g,h}^{\psi} := V_g \otimes V_h(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})(1-c)$, donde $c = (k+\ell+m-2)/2$.

Contexto

- $g \in S_\ell(N_g, \chi_g)$, $h \in S_m(N_h, \chi_h)$, $\ell \geq m$.
- $K/\mathbb{Q}$ cuadrático imaginario, ψ carácter de Hecke con tipo en el infinito $(1-k, 0)$ y carácter central $\varepsilon_\psi = \varepsilon_K \bar{\chi}_g \bar{\chi}_h$.
- Representación $V_{g,h}^{\psi} := V_g \otimes V_h(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})(1-c)$, donde $c = (k+\ell+m-2)/2$.
- Resultado principal: construcción de un sistema de Euler anticiclotómico

$$\kappa_{g,h}^{\psi} := \left\{ \kappa_{g,h,n}^{\psi} \in H^1(K[n], T_{g,h}^{\psi}) \text{ con } (n, \mathcal{N}) = 1 \right\},$$

donde $\mathcal{N} = D_K N_\psi N_g N_h$ and $K[n]$ es la p-extensión maximal en el ring class field de conductor n.

Contexto

- $g \in S_\ell(N_g, \chi_g)$, $h \in S_m(N_h, \chi_h)$, $\ell \geq m$.
- $K/\mathbb{Q}$ cuadrático imaginario, ψ carácter de Hecke con tipo en el infinito $(1-k, 0)$ y carácter central $\varepsilon_\psi = \varepsilon_K \bar{\chi}_g \bar{\chi}_h$.
- Representación $V_{g,h}^\psi := V_g \otimes V_h(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})(1-c)$, donde $c = (k+\ell+m-2)/2$.
- Resultado principal: construcción de un sistema de Euler anticiclotómico

$$\kappa_{g,h}^\psi := \left\{ \kappa_{g,h,n}^\psi \in H^1(K[n], T_{g,h}^\psi) \text{ con } (n, \mathcal{N}) = 1 \right\},$$

  donde $\mathcal{N} = D_K N_\psi N_g N_h$ and $K[n]$ es la p-extensión maximal en el ring class field de conductor n.
- **Observación:** el signo de la función L p-ádica depende del valor de k (comportamiento diferente cuando $\ell - m < k < \ell + m$ o cuando no).

Teorema A

Teorema

Supongamos que:

- *g y h son ordinarias en p, no Eisenstein y p-distinguidas,*
- *p se divide en K y p no divide al número de clase de K,*
- *$V_g \otimes V_h$ tiene imagen grande (en particular $\chi_g \chi_h \neq 1$).*

Teorema A

Teorema

Supongamos que:

- *g y h son ordinarias en p, no Eisenstein y p-distinguidas,*
- *p se divide en K y p no divide al número de clase de K,*
- *$V_g \otimes V_h$ tiene imagen grande (en particular $\chi_g \chi_h \neq 1$).*

Sea

$$\kappa^{\psi}_{g,h} := \mathrm{cor}_{K[1]/K}(\kappa^{\psi}_{g,h,1}).$$

Teorema A

Teorema

Supongamos que:

- *g y h son ordinarias en p, no Eisenstein y p-distinguidas,*
- *p se divide en K y p no divide al número de clase de K,*
- *$V_g \otimes V_h$ tiene imagen grande (en particular $\chi_g\chi_h \neq 1$).*

Sea

$$\kappa^{\psi}_{g,h} := \mathrm{cor}_{K[1]/K}(\kappa^{\psi}_{g,h,1}).$$

Si $\ell - m < k < \ell + m$, entonces la siguiente implicación se cumple:

$$\kappa^{\psi}_{g,h} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \dim_L H^1_f(K, V^{\psi}_{g,h}) = 1,$$

donde $H^1_f(K, V^{\psi}_{g,h}) \subset H^1(G_K, V^{\psi}_{g,h})$ es el grupo de Selmer de Bloch–Kato.

Teorema B

Teorema

Supongamos que:

- *se cumplen las hipótesis del Teorema A,*
- *los signos locales en los primos que dividen a N son siempre $+1$,*
- *$mcd(N_\psi, N_g, N_h)$ libre de cuadrados.*

Teorema B

Teorema

Supongamos que:

- *se cumplen las hipótesis del Teorema A,*
- *los signos locales en los primos que dividen a N son siempre $+1$,*
- *$mcd(N_\psi, N_g, N_h)$ libre de cuadrados.*

Si $k \geq \ell + m$, entonces se tiene la siguiente implicación:

$$L(\pi_K \otimes \pi'_K \otimes \psi, 1/2) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad H^1_f(K, V^{\psi}_{g,h}) = 0,$$

donde π_K (resp. π'_K) es el cambio de base a K de la representación automorfa cuspidal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ tal que $L(\pi, s - 1/2) = L(g, s)$ (resp. $L(\pi', s - 1/2) = L(h, s)$).

Teorema C

Teorema

Supongamos que

- *se cumplen las hipótesis del Teorema A,*
- *los signos locales en los primos que dividen a N son siempre $+1$,*
- *$mcd(N_\psi, N_g, N_h)$ libre de cuadrados.*

Teorema C

Teorema

Supongamos que

- *se cumplen las hipótesis del Teorema A,*
- *los signos locales en los primos que dividen a N son siempre $+1$,*
- *$mcd(N_\psi, N_g, N_h)$ libre de cuadrados.*

Supongamos también que $\underline{f}$ tiene CM por K y que la familia de clases $\kappa(\underline{f}, g, h)$ no es de torsión. Entonces $X_{\mathcal{F}}(\mathbb{A}^{\dagger}_{\underline{f}gh})$ es un módulo de $\Lambda_{\underline{f}}$-torsión, y

$$\mathrm{Char}_{\Lambda_{\underline{f}}}(X_{\mathcal{F}}(\mathbb{A}^{\dagger}_{\underline{f}gh})) \supset (L_p^f(\underline{f}, g, h)^2)$$

in $\Lambda_{\underline{f}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Construcción del sistema de Euler I

- Trabajos de Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
- Caso de coeficientes triviales (peso dos):
  - Clase *trivial* en $H^0_{\text{et}}(Y_1(N), \mathbb{Z}_p)$.
  - Pushforward $Y_1(N) \longrightarrow Y_1(N)^3$ da clase en $H^4_{\text{et}}(Y_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2))$.
  - Descomposición de HS: $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2)))$.
  - Proyección a $H^1(\mathbb{Q}, V_f \otimes V_g \otimes V_h(-1))$.

Construcción del sistema de Euler I

- Trabajos de Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
- Caso de coeficientes triviales (peso dos):
  - Clase *trivial* en $H^0_{\text{et}}(Y_1(N), \mathbb{Z}_p)$.
  - Pushforward $Y_1(N) \longrightarrow Y_1(N)^3$ da clase en $H^4_{\text{et}}(Y_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2))$.
  - Descomposición de HS: $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2)))$.
  - Proyección a $H^1(\mathbb{Q}, V_f \otimes V_g \otimes V_h(-1))$.
- Caso de pesos arbitrarios: clases en $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(Y(m)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{I}_{\text{r}}(r))$, donde $\mathcal{I}_{\text{r}}(r)$ es un haz apropiado (aquí $r = c - 2$).

Construcción del sistema de Euler I

- Trabajos de Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
- Caso de coeficientes triviales (peso dos):
  - Clase *trivial* en $H^0_{\text{et}}(Y_1(N), \mathbb{Z}_p)$.
  - Pushforward $Y_1(N) \longrightarrow Y_1(N)^3$ da clase en $H^4_{\text{et}}(Y_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2))$.
  - Descomposición de HS: $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2)))$.
  - Proyección a $H^1(\mathbb{Q}, V_f \otimes V_g \otimes V_h(-1))$.
- Caso de pesos arbitrarios: clases en $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(Y(m)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{I}_{\text{r}}(r))$, donde $\mathcal{I}_{\text{r}}(r)$ es un haz apropiado (aquí $r = c - 2$).
- Aplicar la descomposición de Künneth y proyectar a V_g y V_h (en solo dos de los componentes).

Construcción del sistema de Euler I

- Trabajos de Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
- Caso de coeficientes triviales (peso dos):
  - Clase *trivial* en $H^0_{\text{et}}(Y_1(N), \mathbb{Z}_p)$.
  - Pushforward $Y_1(N) \longrightarrow Y_1(N)^3$ da clase en $H^4_{\text{et}}(Y_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2))$.
  - Descomposición de HS: $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N)^3, \mathbb{Z}_p(2)))$.
  - Proyección a $H^1(\mathbb{Q}, V_f \otimes V_g \otimes V_h(-1))$.
- Caso de pesos arbitrarios: clases en $H^1(\mathbb{Q}, H^3_{\text{et}}(Y(m)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{I}_{\text{r}}(r))$, donde $\mathcal{I}_{\text{r}}(r)$ es un haz apropiado (aquí $r = c - 2$).
- Aplicar la descomposición de Künneth y proyectar a V_g y V_h (en solo dos de los componentes).
- Estudiar el caso específico de una forma CM θ_ψ, ψ de tipo en el infinito $(-1, 0)$.

Construcción del sistema de Euler II

- $\psi_{\mathfrak{P}}$ carácter continuo de $K^\times \backslash \mathbb{A}_{K,f}^\times$

$$\psi_{\mathfrak{P}}(x) = x_{\mathfrak{p}}^{-1}\psi(x).$$

Construcción del sistema de Euler II

- $\psi_{\mathfrak{P}}$ carácter continuo de $K^\times \backslash \mathbb{A}_{K,f}^\times$

$$\psi_{\mathfrak{P}}(x) = x_{\mathfrak{p}}^{-1}\psi(x).$$

- E cuerpo de coeficientes p-ádico para ψ, $\mathcal{O}$ anillo de enteros. $H_{\mathfrak{n}}$ p-cociente maximal del ray class field.

Construcción del sistema de Euler II

- $\psi_{\mathfrak{P}}$ carácter continuo de $K^\times \backslash \mathbb{A}_{K,f}^\times$

$$\psi_{\mathfrak{P}}(x) = x_{\mathfrak{p}}^{-1}\psi(x).$$

- E cuerpo de coeficientes p-ádico para ψ, $\mathcal{O}$ anillo de enteros. $H_{\mathfrak{n}}$ p-cociente maximal del ray class field.
- $\mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}} E(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})$ representación p-ádica de θ_ψ.

Construcción del sistema de Euler II

- $\psi_{\mathfrak{P}}$ carácter continuo de $K^\times \backslash \mathbb{A}_{K,f}^\times$

$$\psi_{\mathfrak{P}}(x) = x_{\mathfrak{p}}^{-1}\psi(x).$$

- E cuerpo de coeficientes p-ádico para ψ, $\mathcal{O}$ anillo de enteros. $H_{\mathfrak{n}}$ p-cociente maximal del ray class field.
- $\mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}} E(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})$ representación p-ádica de θ_ψ.
- Lei–Loeffler–Zerbes: familia de isomorfismos $G_{\mathbb{Q}}$-equivariantes de $\mathcal{O}[H_{\mathfrak{n}}]$-módulos (aquí $N = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})D_K$):

$$\mathcal{O}[H_{\mathfrak{n}}] \otimes H^1_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N), \mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{K(\mathfrak{n})}^{\mathbb{Q}} \mathcal{O}(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1}).$$

Construcción del sistema de Euler II

- $\psi_{\mathfrak{P}}$ carácter continuo de $K^\times \backslash \mathbb{A}_{K,f}^\times$

$$\psi_{\mathfrak{P}}(x) = x_{\mathfrak{p}}^{-1}\psi(x).$$

- E cuerpo de coeficientes p-ádico para ψ, $\mathcal{O}$ anillo de enteros. $H_{\mathfrak{n}}$ p-cociente maximal del ray class field.
- $\mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}} E(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})$ representación p-ádica de θ_ψ.
- Lei–Loeffler–Zerbes: familia de isomorfismos $G_{\mathbb{Q}}$-equivariantes de $\mathcal{O}[H_{\mathfrak{n}}]$-módulos (aquí $N = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})D_K$):

$$\mathcal{O}[H_{\mathfrak{n}}] \otimes H^1_{\mathrm{et}}(\bar{Y}_1(N), \mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{K(\mathfrak{n})}^{\mathbb{Q}} \mathcal{O}(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1}).$$

- Shapiro + correstricción permiten obtener clases en

$$\kappa_{g,h,n}^{\psi} \in H^1(K[n], V_{g,h}^{\psi}),$$

donde $V_{g,h}^{\psi} = V_g \otimes V_h(\psi_{\mathfrak{P}}^{-1})(1-c)$.

Relaciones de norma moderadas

(1) If q splits in K as $(q) = \mathfrak{q}\overline{\mathfrak{q}}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}_{K[nq]/K[n]}\,\kappa^{\psi}_{g,h,nq} = q^{\ell+m-4}\Bigg\{&\chi_g(q)\chi_h(q)q\left(\frac{\psi(\mathfrak{q})}{q}\mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}\right)^2 - \frac{a_q(g)a_q(h)}{q^{(\ell+m-4)/2}}\left(\frac{\psi(\mathfrak{q})}{q}\mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}\right)\\ &+\frac{\chi_g(q)^{-1}a_q(g)^2}{q^{\ell-1}} + \frac{\chi_h(q)^{-1}a_q(h)^2}{q^{m-2}} - \frac{q^2+1}{q}\\ &-\frac{a_q(g)a_q(h)}{q^{(\ell+m-4)/2}}\left(\frac{\psi(\overline{\mathfrak{q}})}{q}\mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{q}}}^{-1}\right) + \chi_g(q)\chi_h(q)q\left(\frac{\psi(\overline{\mathfrak{q}})}{q}\mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{q}}}^{-1}\right)^2\Bigg\}\kappa^{\psi}_{g,h,n}.\end{aligned}$$

(2) If q is inert in K,

$$\mathrm{cor}_{K[nq]/K[n]}\,\kappa^{\psi}_{g,h,nq} = q^{\ell+m-4}\left\{\frac{\chi_g(q)^{-1}a_q(g)^2}{q^{\ell-1}} + \frac{\chi_h(q)^{-1}a_q(h)^2}{q^{m-2}} - \frac{(q+1)^2}{q}\right\}\kappa^{\psi}_{g,h,n}.$$

Relaciones de norma

- Relaciones de norma:
  - Caso dividido: "los factores de Euler coinciden módulo $q-1$ con los que predice la teoría de sistemas de Euler" ($P_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})P_{\bar{\mathfrak{q}}}(\mathrm{Fr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{-1})$ es el cuadrado de ese factor de Euler, también módulo $q-1$).
  - En el caso inerte, $P_q(\mathrm{Fr}_q^{-1})$ es el cuadrado del factor de Euler, ahora módulo q^2-1.

Relaciones de norma

- Relaciones de norma:
  - Caso dividido: "los factores de Euler coinciden módulo $q-1$ con los que predice la teoría de sistemas de Euler" ($P_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})P_{\bar{\mathfrak{q}}}(\mathrm{Fr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{-1})$ es el cuadrado de ese factor de Euler, también módulo $q-1$).
  - En el caso inerte, $P_q(\mathrm{Fr}_q^{-1})$ es el cuadrado del factor de Euler, ahora módulo q^2-1.
- Demostración de las relaciones de norma: métodos geométricos (à la Lei–Loeffler–Zerbes, vía las relaciones de Bertolini–Seveso–Venerucci).
- Relaciones entre las aplicaciones de degeneración entre curvas modulares.

Relaciones de norma

- Relaciones de norma:
  - Caso dividido: "los factores de Euler coinciden módulo $q-1$ con los que predice la teoría de sistemas de Euler" ($P_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1})P_{\bar{\mathfrak{q}}}(\mathrm{Fr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{-1})$ es el cuadrado de ese factor de Euler, también módulo $q-1$).
  - En el caso inerte, $P_q(\mathrm{Fr}_q^{-1})$ es el cuadrado del factor de Euler, ahora módulo q^2-1.
- Demostración de las relaciones de norma: métodos geométricos (à la Lei–Loeffler–Zerbes, vía las relaciones de Bertolini–Seveso–Venerucci).
- Relaciones entre las aplicaciones de degeneración entre curvas modulares.
- Otros acercamientos a las relaciones de norma? ¿Métodos como en Loeffler–Skinner–Zerbes, Grossi, o Graham–Shah?

Relaciones de norma salvajes I

- **Idea** (grosso modo): usar la variación de $\underline{f}$ en familias de Hida para obtener clases sobre la torre anticiclotómica.

$$\Theta = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f}\mathfrak{p})=1} [\mathfrak{a}] q^{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \in \mathcal{O}[[H_{\mathfrak{f}}]] \otimes \mathcal{O}[[\Gamma_{\mathfrak{p}}]][[q]].$$

Relaciones de norma salvajes I

- **Idea** (grosso modo): usar la variación de $\underline{f}$ en familias de Hida para obtener clases sobre la torre anticiclotómica.

$$\Theta = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f}\mathfrak{p})=1} [\mathfrak{a}] q^{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \in \mathcal{O}[[H_{\mathfrak{f}}]] \otimes \mathcal{O}[[\Gamma_{\mathfrak{p}}]][[q]].$$

- α "parte finita". Especializar para tener una familia

$$\underline{f} = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f}\mathfrak{p})=1} \alpha([\mathfrak{a}])[\mathfrak{a}] q^{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \in \Lambda_{\underline{f}}[[q]].$$

Relaciones de norma salvajes I

- **Idea** (grosso modo): usar la variación de $\underline{f}$ en familias de Hida para obtener clases sobre la torre anticiclotómica.

$$\Theta = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f}\mathfrak{p})=1} [\mathfrak{a}] q^{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \in \mathcal{O}[[H_{\mathfrak{f}}]] \otimes \mathcal{O}[[\Gamma_{\mathfrak{p}}]][[q]].$$

- α "parte finita". Especializar para tener una familia

$$\underline{f} = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{f}\mathfrak{p})=1} \alpha([\mathfrak{a}])[\mathfrak{a}] q^{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})} \in \Lambda_{\underline{f}}[[q]].$$

- A partir de aquí se obtienen clases

$$\kappa_{n,\underline{f}gh} \in H^1(\mathbb{Q}, H^1(\psi, n) \otimes V_g \otimes V_h(\text{twist})),$$

donde $H^1(\psi, n)$ es una modificación apropiada de $H^1_{\text{et}}(\bar{Y}_1(N))$.

Relaciones de norma salvajes II

- $H^1(\psi, n)$ es isomorfo a la inducción del "carácter anticiclotómico universal".

Relaciones de norma salvajes II

- $H^1(\psi, n)$ es isomorfo a la inducción del "carácter anticiclotómico universal".
- Lema de Shapiro + correstricción:

$$\kappa^{\psi}_{g,h,n,\infty} \in H^1(K[n], V^{\psi}_{g,h} \otimes \Lambda(\kappa_{\mathrm{ac}}^{-1})).$$

- Observación: esto es esencialmente $H^1_{\mathrm{Iw}}(K[np^{\infty}], V^{\psi}_{g,h})$.

Relaciones de norma salvajes II

- $H^1(\psi, n)$ es isomorfo a la inducción del "carácter anticiclotómico universal".
- Lema de Shapiro + correstricción:

$$\kappa^{\psi}_{g,h,n,\infty} \in H^1(K[n], V^{\psi}_{g,h} \otimes \Lambda(\kappa_{\mathrm{ac}}^{-1})).$$

- Observación: esto es esencialmente $H^1_{\mathrm{Iw}}(K[np^{\infty}], V^{\psi}_{g,h})$.
- Mismas relaciones de norma (tanto en el caso dividido como en el inerte).

Relaciones de norma salvajes II

- $H^1(\psi, n)$ es isomorfo a la inducción del "carácter anticiclotómico universal".
- Lema de Shapiro + correstricción:

$$\kappa^{\psi}_{g,h,n,\infty} \in H^1(K[n], V^{\psi}_{g,h} \otimes \Lambda(\kappa_{\mathrm{ac}}^{-1})).$$

- Observación: esto es esencialmente $H^1_{\mathrm{Iw}}(K[np^{\infty}], V^{\psi}_{g,h})$.
- Mismas relaciones de norma (tanto en el caso dividido como en el inerte).
- Resultado final:

$$\kappa^{\psi}_{g,h,\infty} := \left\{ \kappa^{\psi}_{g,h,n,\infty} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K[\mathfrak{n}p^{\infty}], V^{\psi}_{g,h} \text{ for } (n, \mathcal{N}) = 1 \right\}$$

constituye un sistema de Euler anticiclotómico.

Teoremas A y B

- El grupo de Selmer de Bloch–Kato de $V_{g,h}^{\psi}$ viene dado por:
  - la condición *balanceada* cuando $\ell - m < k < \ell + m$;
  - la condición $\mathcal{F}$ cuando $k \geq \ell + m$.

Teoremas A y B

- El grupo de Selmer de Bloch–Kato de $V_{g,h}^{\psi}$ viene dado por:
  - la condición *balanceada* cuando $\ell - m < k < \ell + m$;
  - la condición $\mathcal{F}$ cuando $k \geq \ell + m$.
- La aplicación a BK en rango uno se sigue del hecho que $\kappa_{g,h}^{\psi}$ cumple la condición balanceada (condición geométrica).

Teoremas A y B

- El grupo de Selmer de Bloch–Kato de $V_{g,h}^{\psi}$ viene dado por:
  - la condición *balanceada* cuando $\ell - m < k < \ell + m$;
  - la condición $\mathcal{F}$ cuando $k \geq \ell + m$.
- La aplicación a BK en rango uno se sigue del hecho que $\kappa_{g,h}^{\psi}$ cumple la condición balanceada (condición geométrica).
- La aplicación a BK en rango cero requiere el uso de la dualidad de Poitou–Tate.
- Podemos dar una cota para la longitud del correspondiente grupo de Selmer (con condición Bloch–Kato).

Teorema C

- Ley de reciprocidad.
  - Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
  - La imagen del sistema de ciclos diagonales por una aplicación de Perrin-Riou recupera la función L p-ádica asociada al producto triple.
  - Interpolación de las clases a lo largo de la región balanceada (ternas (k, ℓ, m) balanceadas), función L p-ádica a lo largo de la región $\mathcal{F}$ no balanceada ($k \geq \ell + m$).

Teorema C

- Ley de reciprocidad.
  - Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
  - La imagen del sistema de ciclos diagonales por una aplicación de Perrin-Riou recupera la función L p-ádica asociada al producto triple.
  - Interpolación de las clases a lo largo de la región balanceada (ternas (k, ℓ, m) balanceadas), función L p-ádica a lo largo de la región $\mathcal{F}$ no balanceada ($k \geq \ell + m$).
- Dualidad de Poitou–Tate: relación entre ambas condiciones. Ambos subespacios son de dimensión 4, mientras que la intersección es de dimensión 3.
- Observación: en el caso de BF, el subespacio dado por la condición $\mathcal{F}$ es de dimensión 2, y está dentro del subespacio balanceado que es 3-dimensional.

Teorema C

- Ley de reciprocidad.
  - Bertolini–Seveso–Venerucci, Darmon–Rotger.
  - La imagen del sistema de ciclos diagonales por una aplicación de Perrin-Riou recupera la función L p-ádica asociada al producto triple.
  - Interpolación de las clases a lo largo de la región balanceada (ternas (k, ℓ, m) balanceadas), función L p-ádica a lo largo de la región $\mathcal{F}$ no balanceada ($k \geq \ell + m$).
- Dualidad de Poitou–Tate: relación entre ambas condiciones. Ambos subespacios son de dimensión 4, mientras que la intersección es de dimensión 3.
- Observación: en el caso de BF, el subespacio dado por la condición $\mathcal{F}$ es de dimensión 2, y está dentro del subespacio balanceado que es 3-dimensional.
- Métodos de Jetchev, Nekovar y Skinner dan una divisibilidad en la IMC con la formulación de Perrin-Riou.

Generalizaciones de este trabajo

- *Condiciones de imagen grande.* Podemos considerar ejemplos bastante generales.
  - Elemento σ con $T/(\sigma - 1)T$ de rango 1.
  - g y h no de tipo CM.
  - $\chi_g \chi_h \neq 1$.

Generalizaciones de este trabajo

- *Condiciones de imagen grande.* Podemos considerar ejemplos bastante generales.
  - Elemento σ con $T/(\sigma - 1)T$ de rango 1.
  - g y h no de tipo CM.
  - $\chi_g \chi_h \neq 1$.
- Caso autodual excluido. ¿Podemos considerar el caso del cuadrado simétrico, como Loeffler–Zerbes en el contexto de BF?

Generalizaciones de este trabajo

- *Condiciones de imagen grande.* Podemos considerar ejemplos bastante generales.
  - Elemento σ con $T/(\sigma - 1)T$ de rango 1.
  - g y h no de tipo CM.
  - $\chi_g \chi_h \neq 1$.
- Caso autodual excluido. ¿Podemos considerar el caso del cuadrado simétrico, como Loeffler–Zerbes en el contexto de BF?
- Nuestro método se basa en Jetchev–Nekovar–Skinner, usando primos divididos. ¿Es posible usar primos inertes, como en el trabajo de Howard?

Generalizaciones de este trabajo

- *Condiciones de imagen grande.* Podemos considerar ejemplos bastante generales.
  - Elemento σ con $T/(\sigma - 1)T$ de rango 1.
  - g y h no de tipo CM.
  - $\chi_g \chi_h \neq 1$.
- Caso autodual excluido. ¿Podemos considerar el caso del cuadrado simétrico, como Loeffler–Zerbes en el contexto de BF?
- Nuestro método se basa en Jetchev–Nekovar–Skinner, usando primos divididos. ¿Es posible usar primos inertes, como en el trabajo de Howard?
- ¿Contextos no ordinarios? ¿Cuerpos totalmente reales (con clases sobre extensiones CM)?

Generalizaciones de este trabajo

- *Condiciones de imagen grande.* Podemos considerar ejemplos bastante generales.
  - Elemento σ con $T/(\sigma - 1)T$ de rango 1.
  - g y h no de tipo CM.
  - $\chi_g \chi_h \neq 1$.
- Caso autodual excluido. ¿Podemos considerar el caso del cuadrado simétrico, como Loeffler–Zerbes en el contexto de BF?
- Nuestro método se basa en Jetchev–Nekovar–Skinner, usando primos divididos. ¿Es posible usar primos inertes, como en el trabajo de Howard?
- ¿Contextos no ordinarios? ¿Cuerpos totalmente reales (con clases sobre extensiones CM)?
- ¿Podemos ir más allá y obtener clases sobre $\mathbb{Z}_p^2$-extensiones?

Teoría de Iwasawa para GL(2)xGL(2) y ciclos diagonales

(trabajo conjunto con R. Alonso y F. Castellà)

Óscar Rivero Salgado

University of Warwick

14/10/2021