

Cotas inferiores para el discriminante de un cuerpo de números cuando falla la Hipótesis de Riemann Generalizada

Eduardo Friedman

LATeN 7 de Octubre, 2021

A un cuerpo de números k , le asociamos ciertas invariantes:

Grado $n := [k : \mathbb{Q}]$, Signatura (r_1, r_2)

r_1 = número de incrustaciones de k en $\mathbb{R}$

r_2 = número de pares de incrustaciones conjugadas de k en $\mathbb{C}$

Representación geométrica $\tau : k \rightarrow \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{2r_2}$

Anillo de enteros algebraicos de k

$$\mathcal{O}_k = \{ \gamma \in k \mid f(\gamma) = 0 \text{ para algún } f \text{ mónico, } f \in \mathbb{Z}[X] \}$$

El reticulado $\tau(\mathcal{O}_k) \subset \mathbb{R}\tau(k) \subset \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{2r_2}$ de dimensión n .

Discriminante D_k . Tenemos que $\sqrt{|D_k|}$ es el

volumen en dimensión n del paralelepípedo fundamental de $\tau(\mathcal{O}_k)$.

Hay finitos k de grado n con $D_k = D$ ($\approx$ Hermite)

Función zeta de Dedekind de k , definida para $\operatorname{Re}(s) > 1$ como

$$\zeta_k(s) := \sum_{\text{ideales } \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_k} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \prod_{\text{primos } \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} \quad (N\mathfrak{a} := [\mathcal{O}_k : \mathfrak{a}])$$

Función zeta completada de k

$$\Lambda_k(s) := A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_k(s) \quad \left(A := \frac{\sqrt{|D_k|}}{2^{r_2} \pi^{n/2}}\right)$$

Λ_k tiene una continuación meromorfa a $\mathbb{C}$, $\Lambda_k(s) = \Lambda_k(1-s)$.

Kronecker (1882) conjeturó $|D_k| > 1$ si $k \neq \mathbb{Q}$.

Minkowski demostró $|D_k| > 1$ con yapa (bonus track) :

$$|D_k| > c_1^{r_1} c_2^{2r_2} \quad (c_1 = 7.389, \quad c_2 = 5.803, \quad n \gg 0)$$

Por lo tanto $|D_k| > 5.8^n$ for $n \gg 0$.

Rogers (1950), Mullholand (1960) $c_1 > 32.561$, $c_2 > 15.775$.

Por lo tanto $|D_k| > 15.775^n$ for $n \gg 0$.

Odlyzko (1975): Método Analítico

Serre (1975) simplificó lo de Odlyzko mediante la Fórmula Explícita

Para $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función par, normalizada mediante $F(0) = 1$, no muy salvaje, tenemos

$$\frac{\log |D_k|}{n} = \kappa - I_F + \frac{1}{n} \sum_{\rho} \Phi_F(\rho) + \frac{2}{n} \sum_{\mathfrak{p}, m} \log N\mathfrak{p} \frac{F(m \log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m/2}},$$

$$\kappa := C + \log(8\pi) + \frac{\pi r_1}{2n}, \quad (C = 0.577 \dots = \text{constante de Euler}),$$

$$I_F := \frac{4}{n} \int_0^\infty F(x) \cosh(x/2) dx + \int_0^\infty (1 - F(x)) k(x) dx,$$

$$k(x) := \frac{1}{2 \sinh(\frac{x}{2})} + \frac{r_1}{2n \cosh(\frac{x}{2})}, \quad |F(x)| = O(\exp(-(\frac{1}{2} + \varepsilon)|x|))$$

$$\Phi_F(s) := \int_{-\infty}^\infty \exp((s - \frac{1}{2})x) F(x) dx, \quad (-\varepsilon < \operatorname{Re}(s) < 1 + \varepsilon)$$

ρ recorre los ceros no triviales de la función zeta de Dedekind,

$\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos de $\mathcal{O}_k$, $N\mathfrak{p} := [\mathcal{O}_k : \mathfrak{p}]$,

$m = 1, 2, 3, \dots$

Para obtener una cota inferior de $\log |D_k|$, sea $\varphi_F(s) := \operatorname{Re}(\Phi(s))$,

$$\frac{\log |D_k|}{n} = \kappa - I_F + \frac{1}{n} \sum_{\rho} \varphi_F(\rho) + \frac{2}{n} \sum_{p,m} \log Np \frac{F(m \log Np)}{Np^{m/2}}.$$

$$I_F := \frac{4}{n} \int_0^\infty F(x) \cosh(x/2) dx + \int_0^\infty (1 - F(x)) k(x) dx,$$

Serre-Odlyzko-Poitou: ¡Nada de primos ni ceros!

$$F(0) = 1, \quad F(x) \geq 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_F(\rho) \geq 0 \quad \text{para todo cero } \rho,$$

F en algún espacio de funciones pares con valores reales.

HRG = Hipótesis de Riemann para k : $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ ($\gamma \in \mathbb{R}$),

da $\varphi_F(\rho) = \widehat{F}(\gamma)$, transformada de Fourier de F .

Con la HRG necesitamos $F(0) = 1$, $F \geq 0$ y $\widehat{F} \geq 0$, I_F pequeño.

Serre: $F(x) := \exp(-(\ell_n x)^2)$ (ℓ_n factor de escala).

Da

$$c_1 > 215, \quad c_2 > 44 \quad (n \gg 0).$$

Odlyzko encontró una F mucho mejor que da excelentes cotas inferiores para grados pequeños (suponiendo la HRG).

Ejemplo: $n = 8$, $r_1 = 6$, $r_2 = 1$.

Odlyzko (suponiendo la HRG): $|D_k|^{1/8} > 9.27$.

Mínimo real: $|D_k|^{1/8} = 9.47 \dots$ (Battistoni 2020)

Para la $F = F_{\text{Od}}$ de Odlyzko tenemos $\varphi_{F_{\text{Od}}}(s) = O(1/(\text{Im}(s)))^4$.

Sin la HRG: necesitamos $\varphi_F(s) \geq 0$ para $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ y $F \geq 0$.

φ_F es armónica, y $\varphi_F(s) = \varphi_F(1-s)$ (F es par).

Por lo que basta con $\varphi_F(1+it) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Sea $f(x) := \frac{F(x)}{\cosh(x/2)}$, útil ya que $\varphi_F(1+it) = \hat{f}(t)$

Minimizar I_F sujeto a

$$f(0) = 1, \quad f \geq 0, \quad \hat{f} \geq 0.$$

Da $c_1 > 60.8$, $c_2 > 22.28$ ($n \gg 0$).

Buen f (Poitou-Tartar) da incondicionalmente $|D_k|^{1/8} > 8.97$.

Odlyzko: ¿Servirá la Fórmula Explícita para mejorar la cota incondicional si suponemos que la HRG falla?

¿Se pueden aprovechar las fallas hipotéticas de la HRG?

Matías Atria en sus tesis de Magister (1996) y doctorado (2002) (no publicadas).

Método de Atria

Paso 0. Suponemos $|D_k|^{1/n} < \text{cota HRG} - \varepsilon$
(ejemplo: $|D_k|^{1/8} < 9.22$).

Paso 1. Reducción a ceros bajos.

Pongamos $F := 0.99F_{\text{Od}} + 0.01F_{\text{lento}}$

$$F_{\text{lento}}(x) = \frac{e^{-3|x|}}{\cosh(x/2)}. \quad \varphi_{F_{\text{lento}}}(s) \text{ decrece como } (\text{Im}(s))^{-2}.$$

Este F satisface $\varphi_F(s) > 0$ si $|\text{Im}(s)| \geq 3$ y $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$,
o si $\text{Re}(s) = 1/2$ o si s es real. Con todo, $\kappa - l_F > \log(9.22)$.

$\therefore$ HRG falla en $\rho \in R := \{s \mid 0 < \text{Im}(s) < 3, \frac{1}{2} < \text{Re}(s) < 1\}$.

Paso 2. Caza del cero.

Subdividimos $R = \bigcup_j R_j$ en muchas regiones pequeñas. Sea $s_j \in R_j$.

Para cada R_j aproximamos el problema a dimensión finita

Encuentre $F = F_j \in V$ que maximiza $\frac{4}{n} \varphi_F(s_j) - I_F$, $(\dim(V) \approx 60)$

sujeta a: $F(0) = 1$, $F(x) \geq 0$, $\varphi_F(1 + it) \geq 0$ ($x, t \in \mathbb{R}$),

usando programación lineal en V , discretizando las condiciones sobre x y t .

Teniendo ya F_j , calculamos $m_j := \min_{s \in R_j} \{\varphi_{F_j}(s)\}$, la contribución mínima de $\rho \in R_j$.

$$\therefore \frac{1}{n} \log |D_k| \geq \kappa + \min_j \{m_j - I_{F_j}\}.$$

Atria obtuvo nuevas cotas en casi todas las firmas en grados 9 y 10.

Una sorpresa: La peor posición para una falla de la HRG es un ρ donde el diablo perdió el poncho (por ejemplo, $\rho = 0.91 + 2.3i$).

Este cero de Atria, sólo le permitió demostrar t $|D_k|^{1/8} > 9.08$.

Primera respuesta a Odlyzko: La HRG parece ser necesaria, pero se pueden aprovechar algo sus fallas.

Inconvenientes: Atria supuso $\varphi_F \geq 0$ en toda la banda crítica.

Supuso también $F \geq 0$ en todo $\mathbb{R}$, no solamente en $\log(p^m)$.

Trabajo conjunto con Karim Belabas, Francisco Díaz y Díaz (U. Bordeaux) y Salvador Flores (U. Chile, CODELCO):

Metas: La pregunta de Odlyzko con menos hipótesis.

Extender y verificar el trabajo numérico de Atria.

Cambios principales:

Restricciones $F(m \log p) \geq 0$ for p prime, $m \in \mathbb{N}$, $p^m < 10^5$.
 $F(x) \geq 0$ for $x > \log(10^5)$.

Demostramos que se puede suponer que hay a lo más una falla de HRG en $\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1$, $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \text{TOP}$ con un buen valor de TOP.

Es decir, construimos F tal que $\varphi_F(s) \geq 0$ para todo s con $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$

tal que dos o más ceros en $\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1$, $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \text{TOP}$

dan cotas inferiores del discriminante que casi tan buenas como si valiera la HRG.

Sabiendo que hay solamente un cero, buscamos un F que aproveche esta única falla bajo TOP de la HRG,

sólo pedimos $\varphi_F(s) \geq 0$ si $|\operatorname{Im}(s)| \geq \text{TOP}$, $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$

Resulta no hacer casi ninguna diferencia.

¡Todavía nos sale el punto de Atria! ¡Siempre! [ver tabla 2 al final]

Atria tenía cotas en grados 9 y 10. Las corregimos ligeramente y las extendemos a grados algo más altos.

Para $n = 11$, obtenemos entre un 20% y 7% (según la signatura) de avance entre la cota anterior y la condicional. [ver tabla 1 al final]

Y grados altos? Por ejemplo $n = 1000$?

Aquí todo cambia. Probamos un modelo discreto con los ceros bajos posibles solamente sobre un conjunto discreto de puntos s_j , con multiplicidad c_j variable,

$$\frac{\log |D_k|}{n} \geq \kappa - I_F + \frac{4}{n} \sum_j c_j \varphi_F(s_j).$$

Tomamos como nuevas variables positivas, reales $y_j := c_j/n$.

Por muchas F 's que introduyéramos, la programación lineal siempre se las arreglaba para derrotarlas todas.

La respuesta a Odlyzko para grados altos parece ser que la HRG es indispensable.

Muchas gracias.

TABLE 1. Lower bounds for the root discriminant. .

n	r_1	B_{new}	B_{old}	$B_{\text{new}}^{\text{GRH}}$	$B_{\text{old}}^{\text{GRH}}$	Gain on difference (%)
9	1	6.624	6.576	6.710	6.703	35.82
9	3	7.622	7.558	7.755	7.749	32.487
9	5	8.812	8.733	9.021	9.016	27.43
9	7	10.235	10.140	10.556	10.553	22.836
9	9	11.938	11.823	12.423	12.418	19.166
10	0	6.635	6.600	6.737	6.730	25.547
10	2	7.542	7.495	7.692	7.685	23.857
10	4	8.608	8.550	8.829	8.824	20.788
10	6	9.861	9.793	10.188	10.182	17.215
10	8	11.336	11.258	11.811	11.805	14.104
10	10	13.068	12.985	13.750	13.744	10.849
11	1	7.482	7.448	7.644	7.637	20.987
11	3	8.449	8.406	8.679	8.673	18.695
11	5	9.573	9.521	9.899	9.893	15.95
11	7	10.874	10.819	11.337	11.330	11.879
11	9	12.387	12.327	13.029	13.023	9.345
11	11	14.146	14.083	15.025	15.021	7.167

TABLE 2. The approximate Atria point ρ_{Atria} in degrees 8 to 11
 ρ_{Atria} is where a violation of GRH reduces the lower bound for $|D_K|^{1/[K:\mathbb{Q}]}$ the most.

degree 8	$r_1 = 0$	$r_1 = 2$	$r_1 = 4$	$r_1 = 6$	$r_1 = 8$	
	$0.87 + 2.9i$	$0.88 + 2.6i$	$0.89 + 2.5i$	$0.91 + 2.3i$	$0.92 + 2.1i$	
degree 9	$r_1 = 1$	$r_1 = 3$	$r_1 = 5$	$r_1 = 7$	$r_1 = 9$	
	$0.91 + 2.5i$	$0.92 + 2.4i$	$0.93 + 2.2i$	$0.94 + 2.1i$	$0.95 + 2.0i$	
degree 10	$r_1 = 0$	$r_1 = 2$	$r_1 = 4$	$r_1 = 6$	$r_1 = 8$	$r_1 = 10$
	$0.94 + 2.4i$	$0.93 + 2.3i$	$0.93 + 2.2i$	$0.95 + 2.0i$	$0.96 + 1.9i$	$0.96 + 1.8i$
degree 11	$r_1 = 1$	$r_1 = 3$	$r_1 = 5$	$r_1 = 7$	$r_1 = 9$	$r_1 = 11$
	$0.95 + 2.2i$	$0.97 + 2.1i$	$0.97 + 2.0i$	$0.97 + 1.9i$	$0.98 + 1.8i$	$0.98 + 1.7i$