Hacia la conjetura motívica de Nagao y sus conexiones con las conjeturas de Tate

Victoria Cantoral Farfán

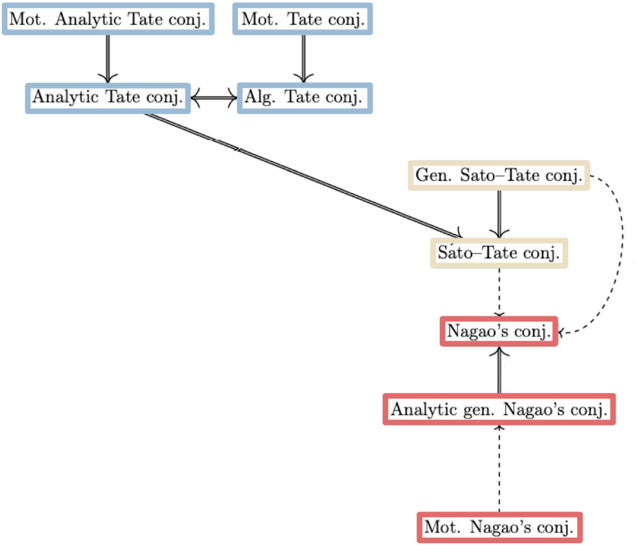
Trabajo en collaboración con Seoyoung Kim

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

30 de Septiembre, 2021

LATeN
Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

Introducción



Motivos

- k – un campo de $car(k) = 0$;
- Mot_k – la categoría Tannakiana, semi-simple, graduada y polarizable de motivos puros en el sentido de Y. André;
- $M = (X, p, n) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ – un motivo puro donde
  - X – es una variedad proyectiva y lisa definida sobre k,
  - p – es una correspondencia algebraica de $X \times X$, que es un elemento idempotente,
  - n – un entero llamado el *twist de Tate*.

Motivos

- $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
- $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$;
- ℓ un número primo.

Motivos

- $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
- $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$;
- ℓ un número primo.

$$\mathrm{HS}_{\mathbb{Q}} \xleftarrow{\quad r_\sigma \quad} \mathrm{Mot}_k \xrightarrow{\quad r_\ell \quad} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Gamma_k)$$

Motivos

- $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
- $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$;
- ℓ un número primo.

$$\mathrm{HS}_{\mathbb{Q}} \xleftarrow{\quad r_\sigma \quad} \mathrm{Mot}_k \xrightarrow{\quad r_\ell \quad} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Gamma_k)$$

Cat. de structuras de Hodge	Cat. de Motivos en el sentido de Y. André	Cat. de repre- sentaciones continuas de Γ_k

Motivos

- $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
- $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$;
- ℓ un número primo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HS}_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "u_\sigma"'] & \mathrm{Mot}_k \arrow[l, "r_\sigma"'] \arrow[r, "r_\ell"] & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Gamma_k) \arrow[d, "u_\ell"] \\
\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell}
\end{tikzcd}$$

Motivos

- $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
- $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$;
- ℓ un número primo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HS}_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "u_\sigma"'] & \mathrm{Mot}_k \arrow[l, "r_\sigma"'] \arrow[r, "r_\ell"] \arrow[dl, "\omega"] & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Gamma_k) \arrow[d, "u_\ell"] \\
\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell}
\end{tikzcd}$$

Grupos Tannakianos

Definición

$\mathcal{G}_k := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ - grupo de Galois motívico,
$G_{\ell,k} := \mathrm{Aut}^{\otimes}(u_{\ell|im(r_\ell)})$ - grupo de monodromía ℓ-ádico,
$G_\sigma := \mathrm{Aut}^{\otimes}(u_\sigma)$ - grupo de Mumford–Tate.

Definición

Para cada motivo $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ definimos:
$\mathcal{G}_k(M) := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{|<M>})$,
$G_{\ell,k}(M) := \mathrm{Aut}^{\otimes}(u_{\ell|<r_\ell(M)>})$,
$G_\sigma(M) := \mathrm{Aut}^{\otimes}(u_{\sigma|<r_\sigma(M)>})$.

Nota

$$G_{\ell,k}(M) = \overline{im(\Gamma_k \to \mathrm{GL}(r_\ell(M)))}^{\mathrm{Zar}}.$$

Funciones L motívicas

- k – un campo de números;
- $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, el subgrupo de inertia $I_\mathfrak{p}$ y de descomposición $D_\mathfrak{p}$ de Γ_k;
- $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ – el elemento de Frobenius.

Definición

Definimos, para cada entero j, el factor de Euler de M en $\mathfrak{p}$ de la siguiente forma

$$L_{\mathfrak{p},j}(s,M) := det(1 - q_\mathfrak{p}^{-s}\,\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \mid (\wedge^j r_\ell(M))^{I_\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C})^{-1},$$

donde $q_\mathfrak{p}$ es la norma de $\mathfrak{p}$.

Funciones L motívicas

Cabe señalar que cuando M tiene buena reducción en $\mathfrak{p}$

- se sabe que $L_{\mathfrak{p},j}(s, M)$ no depende de la elección de $D_{\mathfrak{p}}$,
- se conjetura que $L_{\mathfrak{p},j}(s, M)$ no depende de la elección del encaje $\iota : \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{C}$ ni del número primo ℓ.

Definición

Función L ordinaria de M

$$L_j(s, M) := \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p},j}(s, M).$$

Conjetura algebraica de Tate para variedades abelianas

- k – un campo de números;
- A – una variedad abeliana definida sobre k de dimensión g;
- ℓ – un número primo.

Conjetura algebraica de Tate '63

Cada **clase de Tate** es una combinación $\mathbb{Q}_\ell$-lineal de clases algebraicas.

Conjetura algebraica de Tate para variedades abelianas

- $T_\ell(A)$ – el módulo de Tate ℓ-ádico,
- $\rho_\ell : \Gamma_k \to \mathrm{Aut}(T_\ell(A)) \simeq \mathsf{GL}_{2g}(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathsf{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_\ell)$

Definición

El grupo de monodromía ℓ-ádico es un grupo algebraico sobre $\mathbb{Q}_\ell$ definido por $\mathsf{G}_\ell(A) := \overline{\rho_\ell(\Gamma_k)}^{Zar}$.

Definición

El grupo de **clases de Tate classes** de codimensión p es definido por

$$\mathcal{T}^p := H^{2p}_{\acute{e}t}(A, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathsf{G}_\ell(A)}.$$

Conjeturas de Tate para variedades proyectivas y lisas

- k – un campo finitamente generado con grupo de Galois absoluto Γ_k,
- X – una variedad proyectiva lisa definida sobre k,
- ℓ – un número primo $\ell \neq \mathrm{char}(k)$.

Consideremos el mapeo de ciclos:

$$cl^j : Z^j(X) \to H^{2j}_{\acute{e}t}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{\Gamma_k}.$$

Conjeturas de Tate para variedades proyectivas y lisas

Conjetura algebraica de Tate

$A^j(X) := \mathrm{Im}\ cl^j$ es finitamente generado, y tenemos el siguiente isomorfismo

$$A^j(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2j}_{\acute{e}t}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{\Gamma_k};$$

Conjetura analítica de Tate

El rango de la imagen del mapeo de ciclos $A^j(X)$ es igual al orden del polo de la función L de $H^{2j}_{\acute{e}t}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ en $s = j + \dim_a(k)$, donde $\dim_a(k)$ es el grado de transcendencia del campo k.

Conjeturas motívicas algebraica y analítica de Tate

Conjetura motívica algebraica de Tate

Sea $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$, entonces para cada número primo ℓ tenemos

$$G_{\ell,k}(M) = \mathcal{G}_k(M)_{\mathbb{Q}_\ell}.$$

Conjetura motívica analítica de Tate

Sea $M = (X, p, n) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ un motivo de peso 1, donde X es una variedad proyectiva y lisa definida sobre un campo finitamente generado k. Entonces, para cada entero j el rango de $A^j(X)$ es igual al orden del polo de la función L ordinaria $L_{2j}(s, M)$ en $s = j + \dim_a(k)$.

Cuál es la relación entre la conjetura algebraica y analítica Tate conjectures?

Teorema (C.-F., Kim 2020)

Sea k un campo finitamente generado ***entonces****, las conjeturas algebraica y analítica de Tate son equivalentes.*

La conjetura motívica algebraica de Tate implica la conjetura algebraica de Tate?

Conjetura motívica algebraica de Tate

Sea $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ entonces, para cada número primo ℓ tenemos

$$G_{\ell,k}(M) = \mathcal{G}_k(M)_{\mathbb{Q}_\ell}.$$

Teorema (C.-F., Kim 2020)

Sea X una variedad abeliana definida sobre un campo de números k y sea M un motivo abeliano asociado a X. Fijemos un encaje $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que X_σ verifica la conjetura de Hodge ***entonces*** *la conjetura motívica de Tate para M implica la conjetura algebraica de Tate para X.*

Idea de la prueba

- Sea X/k una variedad abeliana definida sobre un campo de números k de dimensión g.
- La conjetura algebraica de Tate es equivalente a la siguiente igualdad para cada entero $1 \leq j \leq g$:

$$H^{2j}_{ét}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_{\ell,k}(X)^\circ} = A^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell}. \tag{1}$$

- Sabemos que, para cada motivo abeliano M, la conjetura motívica de Tate es equivalente a la conjetura motívica de Mumford–Tate (C.-F., Commelin 2019).
- Por ende, sea M un motivo abeliano asociado a X, sabemos que

$$G_{\ell,k}(M) = \mathcal{G}_k(M)_{\mathbb{Q}_\ell} \iff G^\circ_{\ell,k}(M) = G_\sigma(M)_{\mathbb{Q}_\ell}. \tag{2}$$

- En particular, tenemos las siguientes igualdades:

$$G_{\ell,k}(M)^\circ = \mathcal{G}_k(M)^\circ_{\mathbb{Q}_\ell} = G_\sigma(M)_{\mathbb{Q}_\ell}. \tag{3}$$

Idea de la prueba

- Fijemos un encaje $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que X_σ verifica la conjetura de Hodge. Entonces, para cada entero $1 \leq j \leq g$ tenemos:
$$H_B^{2j}(X_\sigma, \mathbb{Q})^{G_\sigma(X_\sigma)} = A^j(X_\sigma). \tag{4}$$
- De la ecuación (3) tenemos, para cada entero $1 \leq j \leq g$:
$$H_{ét}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(j))^{G_{\ell,k}(X)^\circ} = A^j(X)_{\mathbb{Q}_\ell}. \tag{5}$$
- De la ecuación (1) probamos que la conjetura motívica de Tate para el motivo abeliano asociado M, implica la conjetura algebraica de Tate para la variedad abeliana X.

La conjetura motívica analítica de Tate implica la conjetura analítica de Tate?

Conjecture motívica analítica de Tate

Sea $M = (X, p, n) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ un motivo de peso 1, donde X es una variedad proyectiva lisa definida sobre un campo finitamente generado k. Entonces, para cada entero j el rango de $A^j(X)$ es igual al orden del polo de la función L ordinaria $L_{2j}(s, M)$ en $s = j + \dim_a(k)$.

Teorema (C.-F., Kim 2020)

La conjetura motívica analítica de Tate implica la conjetura analítica de Tate.

De la conjetura algebraica de Tate conjecture hacia la conjetura de Sato–Tate

Teorema (Tate '63)

Sea E una curva elíptica definida sobre un campo de números k sin multiplicación compleja. Entonces la conjetura analítica de Tate para E^m implica la conjetura de Sato–Tate para E.

De la conjetura algebraica de Tate conjecture hacia la conjetura de Sato–Tate

Teorema (Tate '63 + ε)

Sea E una curva elíptica definida sobre un campo de números k sin multiplicación compleja. Entonces la conjetura analítica de Tate para E^m implica la conjetura de Sato–Tate para E, y ***entonces****, la conjetura algebraica de Tate conjecture para E^m implica la conjetura de Sato–Tate para E.*

La conjetura de Sato–Tate: el caso de la curvas elípticas

- Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica dada por una ecuación de Weierstraß simple:

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad a,\ b \in \mathbb{Z}.$$

- Sea p un número primo de buena reducción para E y definimos:

$$N_E(p) := |E(\mathbb{F}_p)|.$$

- Gracias al trabajo de Hasse, inspirado por una conjetura de Artin sabemos que:

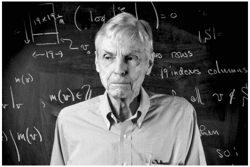
$$|N_E(p) - (p+1)| \leq 2\sqrt{p}.$$

Pregunta

¿Cómo está distribuida la cantidad $\frac{N_E(p)-(p+1)}{2\sqrt{p}} \in [-1, 1]$ cuando $p \to \infty$? ¿Está distribuida uniformemente?

Conjetura de Sato–Tate

M. Sato



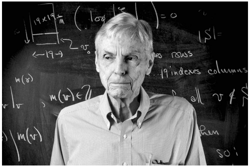
J. Tate

Conjetura de Sato–Tate

La sucesión de trazas de Frobenius normalizadas, asociada a una curva elíptica E/k sin multiplicación compleja, está uniformemente distribuida con respecto a el pushforward de la medida de Haar en $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{ST}(E)$ bajo el mapa de la traza.

Conjetura de Sato–Tate

M. Sato



J. Tate

Conjetura de Sato–Tate

La sucesión de trazas de Frobenius normalizadas, asociada a una curva elíptica E/k sin multiplicación compleja, está uniformemente distribuida con respecto a el pushforward de la medida de Haar en $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{ST}(E)$ bajo el mapa de la traza.

Conjetura de Sato–Tate

Cuando el campo k es totalmente real, la conjetura de Sato–Tate fue probada por Clozel, Harris, Shepherd-Barron, y Taylor en (2008-2010).

Recientemente, Allen, Calegari, Caraiani, Gee, Helm, Le Hung, Newton, Scholze, Taylor, y Thorne probaron dicha conjetura para curvas elípticas (y todas sus potencias simétricas) definidas sobre un campo con multiplcación compleja usando el resultado de automorphismos potenciales.

Además, dicha conjetura fue generalizada por Serre para variedades abelianas de dimensión superior y para motivos.

Hacia la conjetura algebraica de Sato–Tate

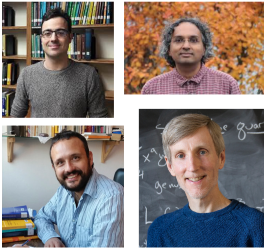
Grzegorz Banaszak

Kiran S. Kedlaya

- 2015-2016: Banaszak y Kedlaya desarrollaron aún más la conjetura algrebraica de Sato–Tate y la conjetura motivica de Sato–Tate.
- Cuando la conjetura algebraica de Sato–Tate es cierta entonces, se puede deducir potencialmente nuevos casos de la conjetura generalizada de Sato–Tate.

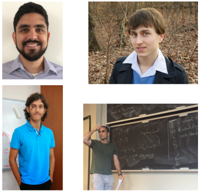
Clasificación de todos los grupos posibles de Sato–Tate

- 2012: Fité, Kedlaya, Rotger y Sutherland clasificaron los 52 grupos posibles de Sato–Tate asociados a una variedad abeliana $\mathrm{Jac}(C)$, cuando $g(C) = 2$.
- 2019: Fité, Kedlaya & Sutherland propusieron una clasificación de los 410 grupos de Sato–Tate posibles para una variedad abeliana de dimensión 3 definida sobre un campo de números.



Fité, Kedlaya,
Rotger & Sutherland

La conjetura generalizada de Sato–Tate para una variedad abeliana en particular



Arora, Landesman, Lombardo & Morrow

Teorema (Arora, C.-F., Landesman, Lombardo & Morrow, 2018)

La conjetura generalizada de Sato–Tate es verdadera para la Jacobiana de todos los $\mathbb{Q}$-twists de la curva hyperelíptica de género 3 definida por $y^2 = x^8 - 14x^4 + 1$.

De la conjetura de Sato–Tate hacia la conjetura de Nagao

Teorema (Kim 2018)

La conjetura generalizada de Sato–Tate implica parcialmente la conjetura de Nagao para familias de curvas hyperelípticas definidas por twists quadraticos.

Hacia la conjetura motívica de Nagao

Heuristica de Nagao

Relacionar el rango de una curva elíptica definida sobre $\mathbb{Q}(T)$ con una fórmula límite proveniente de un promedio ponderado de trazas de Frobenius de cada fibra.

Setting:

- $\mathcal{E}$: una curva elíptica definida sobre $\mathbb{Q}(T)$ con ecuación de Weierstraß dada por

$$\mathcal{E} : y^2 = x^3 + A(T)x + B(T) \qquad A(T),\ B(T) \in \mathbb{Z}[T].$$

- $\Delta_{\mathcal{E}} = 4A(T)^3 + 27B(T)^2 \neq 0.$

Hacia la conjetura motívica de Nagao

Definición (Traza de Frobenius de cada fibra)

Para cada número primo p y todo punto $t \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$a_p(\mathcal{E}_t) = p + 1 - |\mathcal{E}_t(\mathbb{F}_p)|.$$

Definición (Promedio Fibrado de las trazas de Forbenius en p)

$$A_p(\mathcal{E}) = \frac{1}{p} \sum_{t=0}^{p-1} a_p(\mathcal{E}_t).$$

Conjetura de Nagao 1997

$$-\lim_{X \to \infty} \frac{1}{X} \sum_{p \leq X} A_p(\mathcal{E}) \log p = \mathrm{rank}\mathcal{E}(\mathbb{Q}(T)).$$

Hacia la conjetura motívica de Nagao

- k – un campo de números;
- $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$ – un motivo puro con factor de Euler en $\mathfrak{p}$ dado por

$$L_{\mathfrak{p},j}(s, M) := det(1 - q_j^{-s}\,\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \mid (\wedge^j r_\ell(M))^{I_\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C})^{-1};$$

- Los coeficientes locales de $L_{\mathfrak{p},j}(s, M)$ estan dados por

$$a_{\mathfrak{p},2j}(M) := Tr(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} \mid (\wedge^{2j} r_\ell(M))^{I_\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C}), \quad j = 0, \ldots, \dim(X).$$

Hacia la conjetura motívica de Nagao

Nagao	Nagao motívica
$\mathcal{E}/\mathbb{Q}(T)$	$\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_{k(C)})$
$\forall p, \forall t \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{E}_t/\mathbb{F}_p$	$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k), \forall t \in C$ $\mathcal{M}_t \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$
$a_p(\mathcal{E}_t)$	$a_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}_t)$

Hacia la conjetura motívica de Nagao

Definición (Promedio fibrado de las trazas de Forbenius en $\mathfrak{p}$)

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}) = \frac{1}{q_{\mathfrak{p}}} \sum_{t \in \tilde{C}(\mathbb{F}_p)} a_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}_t).$$

Conjetura motívica de Nagao [C.-F., Kim 2020]

Para cada entero j tenemos

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \sum_{q_{\mathfrak{p}} \leq X} \mathcal{A}_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}) \log q_{\mathfrak{p}} = \mathrm{rank} A^j(\mathcal{M}).$$

Hacia la conjetura motívica de Nagao

Nagao	Nagao motívica
$\mathcal{E}/\mathbb{Q}(T)$	$\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_{k(C)})$
$\forall p$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{E}_t/\mathbb{F}_p$	$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, $\forall t \in C$ $\mathcal{M}_t \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mot}_k)$
$a_p(\mathcal{E}_t)$	$a_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}_t)$
Fijemos p $A_p(\mathcal{E})$	Fijemos $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ $\mathcal{A}_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M})$

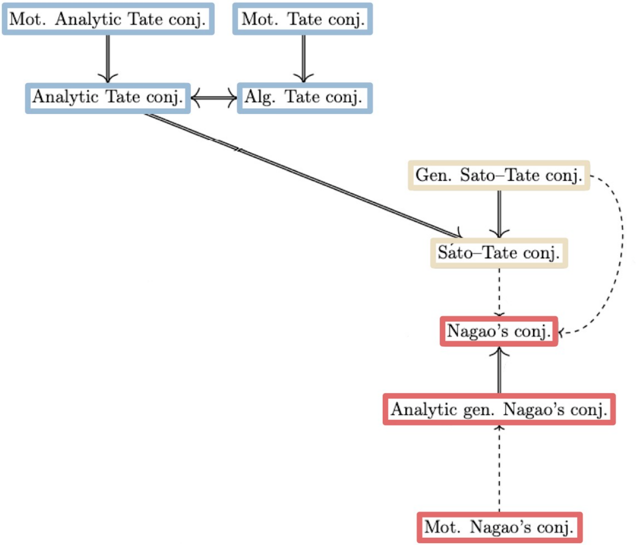
Conjetura de Nagao

$$-\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \sum_{p\leq X} A_p(\mathcal{E}) \log p = \mathrm{rank}\mathcal{E}(\mathbb{Q}(T))$$

Conjetura motívica de Nagao

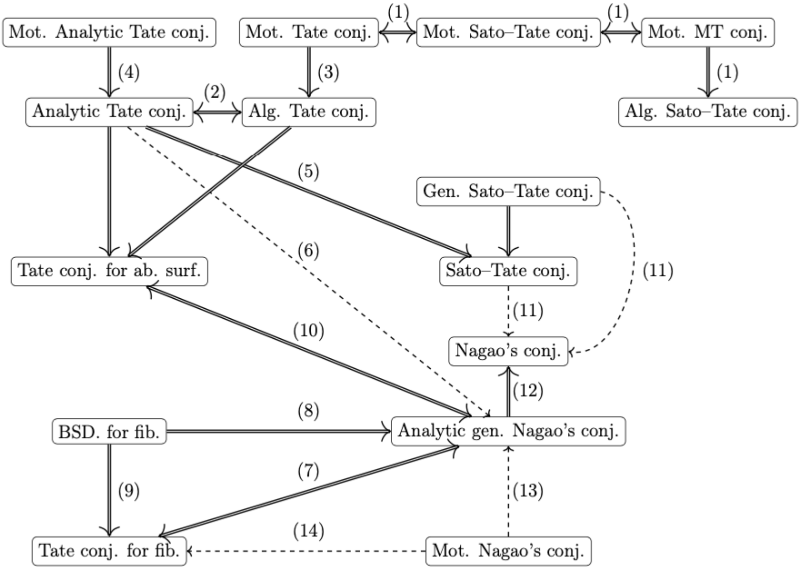
$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \sum_{q_{\mathfrak{p}}\leq X} \mathcal{A}_{\mathfrak{p},2j}(\mathcal{M}) \log q_{\mathfrak{p}} = \mathrm{rank}\mathcal{A}^j(\mathcal{M})$$

Diagrama


Mot. Analytic Tate conj.
Mot. Tate conj.
Analytic Tate conj.
Alg. Tate conj.
Gen. Sato–Tate conj.
Sato–Tate conj.
Nagao's conj.
Analytic gen. Nagao's conj.
Mot. Nagao's conj.

Relaciones entre las conjeturas

FIGURE 1. Bridges between Tate conjectures



Preguntas?

"Papers should include more side remarks, open questions, and such. Very often, these are more interesting than the theorems actually proved. Alas, most people are afraid to admit that they don't know the answer to some question, and as a consequence they refrain from mentioning the question, even if it is a very natural one. What a pity! As for myself, I enjoy saying 'I do not know'."

– J.-P. Serre

Gracias!