Sobre funciones L p-ádicas de formas de Bianchi

Luis Santiago Palacios

Universidad de Santiago de Chile

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

1 de Julio de 2021

Objetivo de la charla

1. Obtener la ecuación funcional de la función L p-ádica de:
   - Formas de Bianchi cuspidales de "*pendiente pequeña*".
   - Ciertas formas de Bianchi cuspidales "*críticas*" que provienen de formas modulares clásicas.
2. Presentar las bases de un trabajo en curso sobre la función L p-ádica de formas de Bianchi en el caso Eisenstein.

Estructura de la charla

1) Motivación
2) Espacio hiperbólico
3) Notaciones
4) Formas de Bianchi
5) Caracteres de Hecke
6) Función L clásica
7) Función L p-ádica
8) Ecuación funcional de la función L p-ádica
9) Caso Eisenstein-Bianchi

1) Motivación

Caso $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$

- Curvas Elípticas $E/\mathbb{Q}$
- Formas modulares f
- Teorema de modularidad, $L(E,s) = L(f_E,s)$
- Función L p-ádica de formas modulares

Caso GL_2/K con K cuerpo imaginario cuadrático

- Curvas Elípticas E/K
- **Formas de Bianchi** $\mathcal{F}$
- Conjetura de Shimura-Taniyama para K, $L(E,s) = L(\mathcal{F}_E,s)$
- Función L p-ádica de formas modulares de Bianchi

2) Espacio hiperbólico

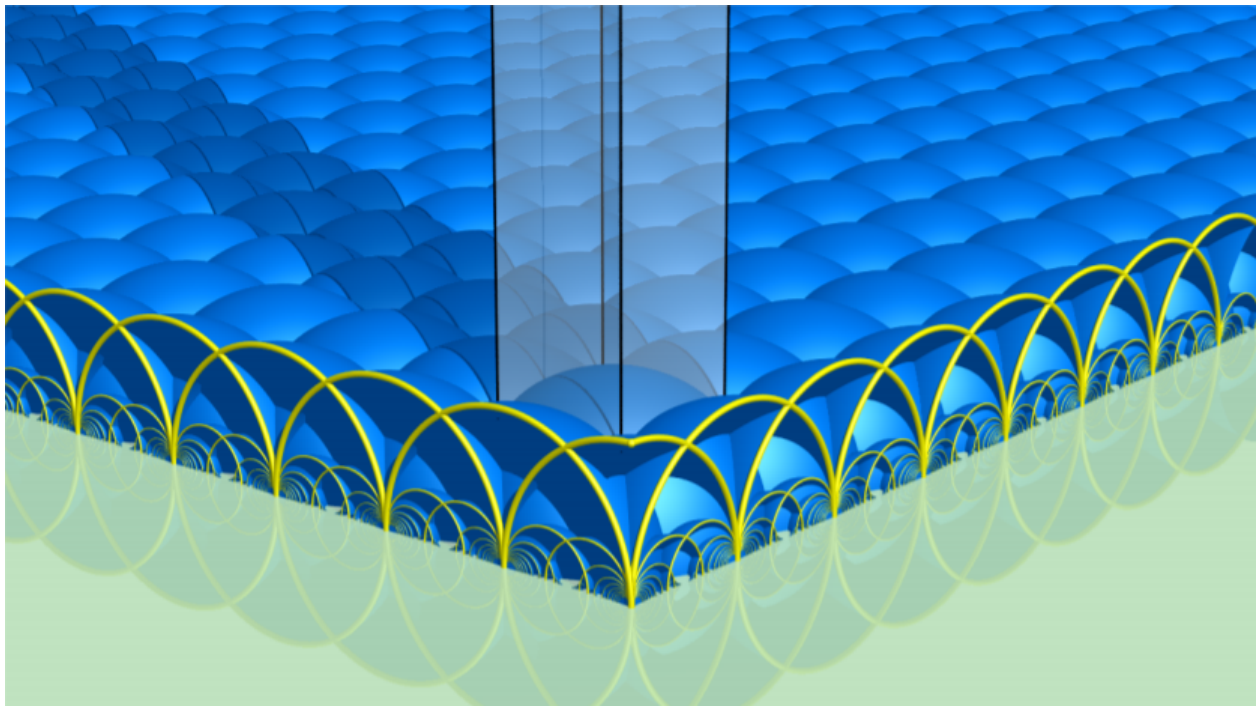
- Espacio hiperbólico $\mathcal{H}_3 := \{(z,t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ actúa en $\mathcal{H}_3$ por

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot (z,t) = \left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}|t|^2}{|cz+d|^2+|ct|^2}, \frac{|ad-bc|t}{|cz+d|^2+|ct|^2} \right).$$

- En el contexto Bianchi aparecen cocientes del tipo $\mathcal{H}_3/\Gamma$ para ciertos subgrupos discretos Γ de $\mathrm{SL}_2(K)$.
- En el caso de formas modulares, los cocientes $\mathcal{H}_2/\Gamma_0(N)$ para $N \geqslant 4$ son curvas algebraicas.
- En nuestro caso los cocientes $\mathcal{H}_3/\Gamma$ son variedades hiperbólicas tres dimensionales. NO SON VARIEDADES ALGEBRAICAS.

- Para nuestro estudio p-ádico de las formas de Bianchi utilizamos la cohomología singular de $\mathcal{H}_3/\Gamma$ (por ejemplo, símbolos modulares de Bianchi).

Dominio fundamental de $\mathcal{H}_3/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$



Por J. Leys.

3) Notaciones

- Sea K cuerpo cuadrático imaginario con número de clases 1, anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ e ideal diferente $\mathcal{D}$ generado por $\delta = \sqrt{-D}$ ($-D$ discriminate de K).
- Para $\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal definimos

$$\Gamma_0(\mathfrak{n}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K) : c \in \mathfrak{n}\mathcal{O}_K \right\}.$$

- Sea $V_n(\mathbb{C})$ el espacio de polinomios homogéneos en dos variables de grado $n \geqslant 0$ y denotemos por $\rho_n : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to V_n(\mathbb{C})$ la representación irreducible compleja de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.
- Sea $\mathcal{F} : \mathcal{H}_3 \to V_n(\mathbb{C})$, entonces para $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ podemos definir el operador slash $\mathcal{F}|_\gamma$ tal que para $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$(\mathcal{F}|_\gamma)(z,t) := \mathcal{F}(\gamma \cdot (z,t))\rho_n \begin{pmatrix} cz+d & \overline{c}t \\ -ct & \dfrac{\overline{c}t}{cz+d} \end{pmatrix}^{-1}.$$

4) Formas de Bianchi

Una **forma de Bianchi** de peso (k, l) y nivel $\Gamma_0(\mathfrak{n})$ es una función $\mathcal{F} : \mathcal{H}_3 \to V_{k+l+2}(\mathbb{C})$ que satisface:

(i) Automorfía: $\mathcal{F}|_\gamma = \mathcal{F}$ para todo $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathfrak{n})$.

(ii) Armonicidad: $\Psi\mathcal{F} = 0$ y $\Psi'\mathcal{F} = 0$, con Ψ, Ψ' operadores de Casimir.

(iii) Crecimiento: $\mathcal{F}$ tiene crecimiento polinomial en las cúspides $\mathbb{P}^1(K)$ (la frontera de $\mathcal{H}_3$).

Denotamos por $M_{k,l}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ el espacio de tales formas.

$\mathcal{F}$ se dice **cuspidal** si satisface

$$\int_{\mathcal{O}_K \backslash \mathbb{C}} \mathcal{F}|_\sigma(z, t)dz = 0, \text{ para todo } \sigma \in \mathrm{GL}_2(K) \text{ y } t > 0.$$

Denotamos por $S_{k,l}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ el espacio de formas de Bianchi cuspidales.

Observación: Sea $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_K)$ entonces $S_{k,l}(\Gamma) = 0$ cuando $k \neq l$.

Sea $\mathcal{F} \in S_{k,k}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ con $\mathfrak{n} = (\nu)$, $\mathfrak{q} = (\pi_\mathfrak{q})$ ideal primo de $\mathcal{O}_K$

Expansión de Fourier-Whittaker

$$\mathcal{F}(z,t)\binom{X}{Y} = \sum_{n=0}^{2k+2} \mathcal{F}_n(z,t) X^{2k+2-n} Y^n,$$

$$\mathcal{F}_n(z,t) := t^{\binom{2k+2}{n}} \sum_{\alpha \in K^\times} \left[c(\alpha\delta) \left(\frac{\alpha}{i|\alpha|} \right)^{k+1-n} K_{n-k-1}(4\pi|\alpha|t) e^{2\pi i(\alpha z + \overline{\alpha z})} \right].$$

donde $c(\cdot)$ son los coeficientes de Fourier y $K_n(x)$ es la función de Bessel.

Operadores de Hecke

- Para cada ideal $I \subset \mathcal{O}_K$, existen operadores de Hecke T_I actuando sobre $\mathcal{F}$.
- Por ejemplo, para $I = \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$ definimos
  $\mathcal{F}|_{U_\mathfrak{q}} := |\pi_\mathfrak{q}|^{2k} \sum_{b \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{q})^\times} \mathcal{F}|_{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & \pi_\mathfrak{q} \end{pmatrix}}$.
- Definimos la involución de Fricke $W_\mathfrak{n}$ por $\mathcal{F}|_{W_\mathfrak{n}} := |\nu|^k \mathcal{F}|_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}}$.

5) Caracteres de Hecke

Sea $\psi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caracter de Hecke sobre K

- Denotaremos ψ_∞ y ψ_f la restricción de ψ a los ideles infinitos y finitos
- Para $\mathfrak{q}$ un ideal primo, denotaremos $\psi_\mathfrak{q}$ la restricción de ψ a $K_\mathfrak{q}^\times$
- Para un ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_K$ denotamos $\psi_\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{m}} \psi_\mathfrak{q}$

Asociado a ψ hay un **conductor** y un **tipo al infinito**.

Si ψ tiene conductor $\mathfrak{f}$, para cada ideal $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{m}} \mathfrak{q}^{n_\mathfrak{q}}$ de $\mathcal{O}_K$ definimos

$$\psi(\mathfrak{m}) := \begin{cases} \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{m}} \psi_\mathfrak{q}(\pi_\mathfrak{q})^{n_\mathfrak{q}} & : (\mathfrak{m}, \mathfrak{f}) = 1, \\ 0 & : \text{si no.} \end{cases}$$

6) Función L

- Para ψ un caracter de Hecke definimos la función L de $\mathcal{F}$ torcida por ψ por

$$L(\mathcal{F},\psi,s) := w^{-1}\sum_{\alpha\in K^\times} c(\alpha\delta)\psi((\alpha\delta))N((\alpha\delta))^{-s}$$

  con $w = |\mathcal{O}_K^\times|$ y $c(\cdot)$ coeficientes de Fourier de $\mathcal{F}$.

- $L(\mathcal{F},\psi,s)$ converge para $Re(s) \gg 0$ y vía continuación analítica se extiende para todo $s \in \mathbb{C}$.

- Si ψ tiene tipo al infinito (q,r) definimos

$$\Lambda(\mathcal{F},\psi) := \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{(2\pi i)^{q+1}(2\pi i)^{r+1}} L(\mathcal{F},\psi,1).$$

.

7) Función L p-ádica

- Definimos el grupo de clases de rayo de K módulo p^∞ como

$$\mathrm{Cl}_K(p^\infty) := K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times / \mathbb{C}^\times \prod_{v \nmid p} \mathcal{O}_v^\times = (\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times / \mathcal{O}_K^\times.$$

- Consideramos el espacio de caracteres continuos

$$\mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty), \mathbb{C}_p^\times)$$

Las **funciones L p-ádicas de formas de Bianchi** son naturalmente funciones localmente analíticas en $\mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$.

- Sea ψ un caracter algebraico de Hecke sobre K de conductor dividiendo p^∞, entonces podemos asociar a ψ un caracter localmente algebraico $\psi_{p-\mathrm{fin}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$ tal que

$$\psi|_{\left(\mathbb{A}_K^{(p,\infty)}\right)^\times} = \psi_{p-\mathrm{fin}}|_{\left(\mathbb{A}_K^{(p,\infty)}\right)^\times}.$$

- Sea $\mathcal{F} \in S_{k,k}(\Gamma_0(\mathfrak{n}\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathfrak{p}))$ una autoforma de Bianchi y autovalor $\lambda_\mathfrak{p}$ para el operador $U_\mathfrak{p}$. Decimos que $\mathcal{F}$ tiene pendiente pequeña si $v(\lambda_\mathfrak{p}) < (k+1)/e_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p}|p$, en otro caso decimos que $\mathcal{F}$ tiene pendiente crítica.

Sea $\mathcal{F}$ una autoforma cuspidal de Bianchi de peso (k,k) y nivel $\Gamma_0(\mathfrak{n}\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{n}=(\nu)$ coprimo con (p), que satisface una de las siguientes propiedades:

a) Tiene pendiente pequeña y es una $\mathfrak{p}$-estabilización sucesiva para cada $\mathfrak{p}|p$ de una forma de Bianchi nueva $\mathcal{F}_{\text{new}} \in S_{k,k}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$.

b) Tiene pendiente crítica y es **cambio de base a** K de una forma modular decente, es nueva fuera de p, regular y Σ-suave.

Entonces:

- Si $\mathcal{F}$ satisface a), $L_p(\mathcal{F},-)$ fue construida por **Williams** en el 2017 usando símbolos modulares sobreconvergentes de Bianchi.
- Si $\mathcal{F}$ satisface b), $L_p(\mathcal{F},-)$ fue construida por **Barrera y Williams** en el 2018 usando familias p-ádicas de formas de Bianchi.

8) Ecuación funcional de la función L p-ádica

Teorema (P. 2020)

Sea $\mathcal{F}$ como antes, entonces para todo $\kappa \in \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$, la función L p-ádica $L_p(\mathcal{F}, -)$ satisface la siguiente ecuación funcional

$$L_p(\mathcal{F}, \kappa) = -\epsilon(\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{k/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}L_p(\mathcal{F}, \kappa^{-1}\sigma_p^{k,k}),$$

con $\mathfrak{n} = (\nu)$, $\epsilon(\mathfrak{n}) = \pm 1$ autovalor de $W_\mathfrak{n}$.

Donde

- $(x_{-\nu,p})_\mathfrak{p} = \begin{cases} -\nu & : \mathfrak{p}|p \\ 1 & : \text{si no.} \end{cases}$
- $\sigma_p^{k,k} : (\mathbb{A}_K^\times)^f \to \mathbb{C}_p^\times$ definida por $\sigma_p^{k,k}(x) := \begin{cases} x_\mathfrak{p}^k x_{\overline{\mathfrak{p}}}^k & : p = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}, \\ x_\mathfrak{p}^k \overline{x_\mathfrak{p}^k} & : p = \mathfrak{p} \text{ o } p = \mathfrak{p}^2. \end{cases}$

Demostración:

I) Encontrar la ecuación funcional de $L(\mathcal{F}, -)$ para $\mathcal{F}$ satisfaciendo a).

II) Transferir la ecuación funcional de 1) a una familia p-ádica de formas de Bianchi interpolando $\mathcal{F}$ como en parte b).

III) Especializar la ecuación funcional obtenida en 2) en $\mathcal{F}$.

Demostración de I)

Sea ψ un caracter de Hecke de conductor $\mathfrak{f}|p^\infty$ y tipo al infinito $0 \leqslant (q,r) \leqslant (k,k)$

- **Interpolación de la función L p-ádica**: Para $\mathcal{F}$ como en a) tenemos

$$L_p(\mathcal{F}, \psi_{p-\text{fin}}) = \left[\prod_{\mathfrak{p}|p}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{\mathfrak{p}}\psi(\mathfrak{p})}\right)\right] \cdot \left[\frac{Dw\tau(\psi^{-1})}{(-1)^{k+q+r}2\lambda_{\mathfrak{f}}\Omega_{\mathcal{F}}}\right]\Lambda(\mathcal{F},\psi).$$

- **Ecuación funcional de la función L (Jacquet-Langlands 1970)**: Recordar la autoforma nueva $\mathcal{F}_{\text{new}} \in S_{k,k}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ entonces

$$\Lambda(\mathcal{F}_{\text{new}}, \psi) = \frac{-\epsilon(\mathfrak{n})|\nu|^k\tau(\psi|\cdot|_{\mathbb{A}_K}^{-k})}{\psi_{\mathfrak{f}}(-\nu)\psi_\infty(-\nu)\tau(\psi^{-1})}\Lambda(\mathcal{F}_{\text{new}}, \psi^{-1}|\cdot|_{\mathbb{A}_K}^k).$$

- De lo anterior obtenemos

$$L_p(\mathcal{F}, \psi_{p-\mathrm{fin}}) = -\epsilon(\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{k/2}\psi_{p-\mathrm{fin}}^{-1}(x_{-\nu,p})L_p(\mathcal{F}, \psi_{p-\mathrm{fin}}^{-1}\sigma_p^{k,k}).$$

- Definimos $G(\mathcal{F}, -)$ la función sobre $\mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$ tal que

$$G(\mathcal{F}, \kappa) := L_p(\mathcal{F}, \kappa) + \epsilon(\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{k/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}L_p(\mathcal{F}, \kappa^{-1}\sigma_p^{k,k})$$

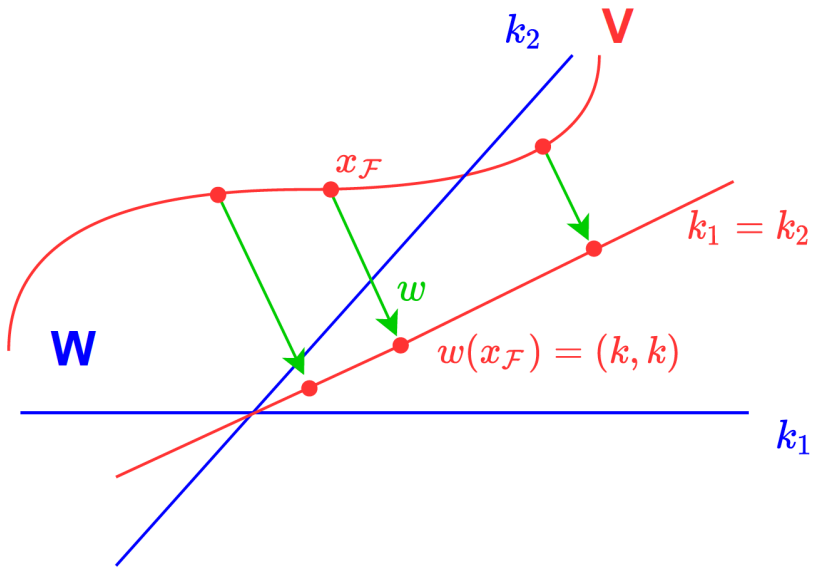
  para $\kappa \in \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$. Entonces $G(\mathcal{F}, \psi_{p-\mathrm{fin}}) = 0$ para cada caracter ψ como antes.

- Como $\mathcal{F}$ tiene pendiente pequeña, **los resultados de Loeffler en 2014 (*P*-adic integration on Ray class groups and non-ordinary *p*-adic *L*-functions)** implican que $G(\mathcal{F}, -)$ está determinada unívocamente por sus valores en los caracteres p-ádicos $\psi_{p-\mathrm{fin}}$ que provienen de ψ, luego $G(\mathcal{F}, -) = 0$.

Demostración de II): Ecuación de I) en familias

Construcción de L_p en el caso crítico

- Sea $\mathcal{F}$ una autoforma cuspidal de Bianchi de peso (k,k) y nivel $\Gamma_0(\mathfrak{n}\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathfrak{p})$, que es **cambio de base a** K de una forma modular decente, nueva fuera de p, regular y Σ-suave.



- Sea W el espacio de pesos Bianchi.
- Sea V una vecindad de $\mathcal{F}$ contenida en el cambio de base a K de la curva de Hecke construída por Coleman-Mazur.

Observación: No todos los $y \in V$ corresponden a formas de Bianchi.

Existe una única función L p-ádica de 3 variables

$$\mathcal{L}_p : V \times \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty)) \to L, \text{ para } L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$$

tal que si denotamos por $\mathcal{F}_y$ la autoforma de Bianchi correspondiente al punto clásico $y \in V$, entonces $\mathcal{L}_p(y, -) = c_y L_p(\mathcal{F}_y, -)$ cuando $\mathcal{F}_y$ tiene pendiente pequeña, con $c_y \in L^\times$ un periodo p-ádico en y.

Definición

Para $\mathcal{F}$ como antes y de pendiente crítica, definimos la función L p-ádica de $\mathcal{F}$ como $L_p(\mathcal{F}, -) := \mathcal{L}_p(x_\mathcal{F}, -)$.

Transferencia de la ecuación de I) a V

- **Tomar un V conveniente**: encogiendo V, existe $S \subset V$ un conjunto Zariski-denso de puntos clásicos tal que para todo $y \in S$ tenemos:
  - $\mathcal{F}_y$ es una p-estabilización sucesiva para cada $\mathfrak{p}|p$ de una forma nueva de nivel $\Gamma_0(\mathfrak{n})$;
  - $\mathcal{F}_y$ tiene pendiente pequeña;
  - Si $w(y) = (k_y, k_y)$ es el peso de $\mathcal{F}_y$ entonces $k_y \equiv k \pmod{p-1}$ (Osea trabajamos en uno de los $p-1$ discos del espacio de pesos sobre $\mathbb{Q}$).

Teorema (P. 2020)

Sea V como antes, entonces para cada $y \in V$ de peso $w(y) = (k_y, k_y)$, y todo $\kappa \in \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$ tenemos

$$\mathcal{L}_p(y, \kappa) = -\epsilon(\mathfrak{n})\omega_{\mathrm{Tm}}(\mathrm{N}(\mathfrak{n}))^{k/2}\langle \mathrm{N}(\mathfrak{n})\rangle^{k_y/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}\mathcal{L}_p(y, \kappa^{-1}\omega_{\mathrm{Tm}}^k\langle\cdot\rangle^{k_y}).$$

Donde ω_{Tm} es la multiplicación de los caracter de Teichmüller en $\mathfrak{p}|p$ y $\langle x\rangle := \omega_{\mathrm{Tm}}(x)^{-1}x$ para $x \in (\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$.

Demostración Teorema:

- Sea $y \in S$ de peso $w(y) = (k_y, k_y)$, por la ecuación funcional 1) para todo $\kappa \in \mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$, $L_p(\mathcal{F}_y, -)$ satisface

$$L_p(\mathcal{F}_y, \kappa) = -\epsilon(\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{k_y/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}L_p(\mathcal{F}_y, \kappa^{-1}\sigma_p^{k_y,k_y})$$

- multiplicando a ambos lados por c_y, como $N(\mathfrak{n}) = w_{\mathrm{Tm}}(\mathrm{N}(\mathfrak{n}))\langle \mathrm{N}(\mathfrak{n})\rangle$ y dado que $k_y \equiv k \pmod{p-1}$ tenemos

$$\mathcal{L}_p(y, \kappa) = -\epsilon(\mathfrak{n})\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{k_y/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}\mathcal{L}_p(y, \kappa^{-1}\sigma_p^{k_y,k_y})$$

$$= -\epsilon(\mathfrak{n})\omega_{\mathrm{Tm}}(\mathrm{N}(\mathfrak{n}))^{k/2}\langle \mathrm{N}(\mathfrak{n})\rangle^{k_y/2}\kappa(x_{-\nu,p})^{-1}\mathcal{L}_p(y, \kappa^{-1}\omega_{\mathrm{Tm}}^{k}\langle\cdot\rangle^{k_y})$$

- Como S es Zariski denso en V obtenemos la ecuación funcional en V.

■

Demostración de III): especializar

- **Especializar la ecuación obtenida en el Teorema anterior en el punto** $x_{\mathcal{F}} \in V$

■

9) Caso Eisenstein-Bianchi

Objetivo

Construcción de la función L p-ádica de una serie de Eisenstein-Bianchi de pendiente pequeña.

Nuestro trabajo está modelado por los siguientes artículos:

- "P-adic L-functions of Bianchi modular forms", Williams 2017
- "The p-adic L-function of evil Eisenstein series", Bellaïche-Dasgupta 2012.

Ingredientes de la construcción de la función L p-ádica

- $\mathcal{C}$-cuspidalidad
  - Sea $\mathcal{C}$ el subconjunto $\Gamma_0(\mathfrak{n})$-invariante de $\mathbb{P}^1(K)$ definido por $\mathcal{C} := \Gamma_0(\mathfrak{n})\infty \bigcup \Gamma_0(\mathfrak{n})0$.
  - Una forma de Bianchi $\mathcal{F}$ se dice $\mathcal{C}$-cuspidal si se anula en todas las cúspides de $\mathcal{C}$.
- Símbolos modulares parciales de Bianchi sobre $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(V_{k,I}^*(L)) := \mathrm{Hom}_{\Gamma_0(\mathfrak{n})}(\mathbb{Z}[\mathcal{C}]^0, V_{k,I}^*(L))$$

  donde $L \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ y $V_{k,I}^*(L) = \mathrm{Hom}(V_{k,I}(L), L)$ con $V_{k,I}(L) = V_k(L) \otimes_L V_I(L)$.
- Símbolos modulares parciales sobreconvergentes de Bianchi sobre $\mathcal{C}$ denotados por $\mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(\mathcal{D}_{k,I}(L))$ donde $\mathcal{D}_{k,I}(L) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathcal{A}_{k,I}(L), L)$ con $\mathcal{A}_{k,I}(L)$ el espacio de funciones localmente analíticas en $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ definido sobre L y dotado con una (k, I)-acción de $\Gamma_0(\mathfrak{n})$.

Teorema de control parcial (P. 2020)

Para cada primo $\mathfrak{p}|p$, sea $\lambda_{\mathfrak{p}} \in L^{\times}$. Entonces cuando $v(\lambda_{\mathfrak{p}}) < (\min\{k, l\} + 1)/e_{\mathfrak{p}}$ si $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}$ o, $v(\lambda_{\mathfrak{p}}) < k + 1$ y $v(\lambda_{\overline{\mathfrak{p}}}) < l + 1$ si $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$, la restricción de la función de especialización

$$\rho : \mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(\mathcal{D}_{k,l}(L))^{\{U_{\mathfrak{p}}=\lambda_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}|p\}} \to \mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(V^*_{k,l}(L))^{\{U_{\mathfrak{p}}=\lambda_{\mathfrak{p}}:\mathfrak{p}|p\}}$$

a los $\lambda_{\mathfrak{p}}$-autoespacios simultáneos del operador $U_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo.

- Sea $\mathcal{F}$ una autoforma de Bianchi con autovalor $\lambda_{\mathfrak{p}}$ para el operador $U_{\mathfrak{p}}$. Decimos que $\mathcal{F}$ tiene pendiente pequeña si $v(\lambda_{\mathfrak{p}}) < (l + 1)/e_{\mathfrak{p}}$ cuando $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}$ o, $v(\lambda_{\mathfrak{p}}) < k + 1$ y $v(\lambda_{\overline{\mathfrak{p}}}) < l + 1$ cuando $p = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$, en otro caso decimos que $\mathcal{F}$ tiene pendiente crítica.

Sea $\mathcal{F}$ una autoforma $\mathcal{C}$-cuspidal de pendiente pequeña:

1. Asociamos a $\mathcal{F}$ un autosímbolo $\phi_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(V_{k,I}^*(L))$.
2. Levantamos $\phi_{\mathcal{F}}$ a su único correspondiente autosímbolo sobreconvergente $\Psi_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Symb}_{\Gamma_0(\mathfrak{n}),\mathcal{C}}(\mathcal{D}_{k,I}(L))$ (Teorema de control parcial).
3. Definimos la función L p-ádica de $\mathcal{F}$ como la función localmente analítica $L_p(\mathcal{F},-)$ en $\mathfrak{X}(\mathrm{Cl}_K(p^\infty))$ por

$$L_p(\mathcal{F},-) := \Psi_{\mathcal{F}}(\{0\}-\{\infty\})|_{(\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^\times}.$$

¿Cómo volver $\mathcal{C}$-cuspidal una serie de Eisenstein-Bianchi?