Una cota tipo Chabauty-Coleman para superficies en variedades abelianas

Jerson Caro
Trabajo conjunto con Héctor Pasten

Pontificia Universidad Católica de Chile

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números
Junio 3, 2021

Parte I:
El método de Chabauty-Coleman

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?
- Por suerte, encontramos algunos puntos racionales de C

$$C(\mathbb{Q}) \supset \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,\pm 6),(10,\pm 120),\infty\},$$

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?
- Por suerte, encontramos algunos puntos racionales de C

$$C(\mathbb{Q}) \supset \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,\pm 6),(10,\pm 120),\infty\},$$

Pero, ¿cuántos faltan?

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?
- Por suerte, encontramos algunos puntos racionales de C

  $$C(\mathbb{Q}) \supset \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,\pm 6),(10,\pm 120),\infty\},$$

  Pero, ¿cuántos faltan?
- El problema de encontrar puntos racionales, es mucho más fácil en $\mathbb{F}_p$.

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?
- Por suerte, encontramos algunos puntos racionales de C

$$C(\mathbb{Q}) \supset \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,\pm 6),(10,\pm 120),\infty\},$$

  Pero, ¿cuántos faltan?
- El problema de encontrar puntos racionales, es mucho más fácil en $\mathbb{F}_p$.
- Por ejemplo, C tiene buena reducción en 7, y notamos que

$$C(\mathbb{F}_7) = \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,6),(3,-6),\infty\}.$$

Consideremos C la curva definida por $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$.

- ¿Podemos calcular $C(\mathbb{Q})$?
- Por suerte, encontramos algunos puntos racionales de C

  $$C(\mathbb{Q}) \supset \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,\pm 6),(10,\pm 120),\infty\},$$

  Pero, ¿cuántos faltan?
- El problema de encontrar puntos racionales, es mucho más fácil en $\mathbb{F}_p$.
- Por ejemplo, C tiene buena reducción en 7, y notamos que

  $$C(\mathbb{F}_7) = \{(0,0),(1,0),(2,0),(5,0),(6,0),(3,6),(3,-6),\infty\}.$$

- **Un dato importante:** $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(J(\mathbb{Q})) = 1$ y $g(C) = 2$.

Desarrollo Histórico

En 1922 Mordell conjeturó que para $C/\mathbb{Q}$ una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$, $C(\mathbb{Q})$ es finito.

Desarrollo Histórico

En 1922 Mordell conjeturó que para $C/\mathbb{Q}$ una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$, $C(\mathbb{Q})$ es finito.

- En 1941 Chabauty demostró que si $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) < g$, donde J es el Jacobiano de C entonces se cumple la conjetura de Mordell.

Desarrollo Histórico

En 1922 Mordell conjeturó que para $C/\mathbb{Q}$ una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$, $C(\mathbb{Q})$ es finito.

- En 1941 Chabauty demostró que si $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) < g$, donde J es el Jacobiano de C entonces se cumple la conjetura de Mordell.
- En 1983 Faltings demostró la conjetura de Mordell sin condiciones sobre el Jacobiano de C.

Desarrollo Histórico

En 1922 Mordell conjeturó que para $C/\mathbb{Q}$ una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$, $C(\mathbb{Q})$ es finito.

- En 1941 Chabauty demostró que si $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) < g$, donde J es el Jacobiano de C entonces se cumple la conjetura de Mordell.
- En 1983 Faltings demostró la conjetura de Mordell sin condiciones sobre el Jacobiano de C.
- En 1985 Coleman, siguiendo las ideas de Chabauty, encontró una cota efectiva para $\#C(\mathbb{Q})$.

Desarrollo Histórico

En 1922 Mordell conjeturó que para $C/\mathbb{Q}$ una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$, $C(\mathbb{Q})$ es finito.

- En 1941 Chabauty demostró que si $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) < g$, donde J es el Jacobiano de C entonces se cumple la conjetura de Mordell.
- En 1983 Faltings demostró la conjetura de Mordell sin condiciones sobre el Jacobiano de C.
- En 1985 Coleman, siguiendo las ideas de Chabauty, encontró una cota efectiva para $\#C(\mathbb{Q})$.

Falting además en 1994, siguiendo la ideas de Vojta para demostrar la conjetura de Mordell, demostró la conjetura de Mordell-Lang para subvariedades de Variedades Abelianas.

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

- Sea Γ la clausura p-ádica de $J(\mathbb{Q})$ en $J(\mathbb{Q}_p)$. Γ es un subgrupo de Lie p-ádico de $J(\mathbb{Q}_p)$.

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

- Sea Γ la clausura p-ádica de $J(\mathbb{Q})$ en $J(\mathbb{Q}_p)$. Γ es un subgrupo de Lie p-ádico de $J(\mathbb{Q}_p)$.
- La teoría de grupos de Lie p-ádicos muestra que $\dim \Gamma \leq r$. Esto implica que

$$\dim \Gamma < g = \dim J.$$

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

- Sea Γ la clausura p-ádica de $J(\mathbb{Q})$ en $J(\mathbb{Q}_p)$. Γ es un subgrupo de Lie p-ádico de $J(\mathbb{Q}_p)$.
- La teoría de grupos de Lie p-ádicos muestra que $\dim \Gamma \leq r$. Esto implica que

$$\dim \Gamma < g = \dim J.$$

- $C(\mathbb{Q}_p)$ genera $J(\mathbb{Q}_p)$, así que no esta contenida en Γ.

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

- Sea Γ la clausura p-ádica de $J(\mathbb{Q})$ en $J(\mathbb{Q}_p)$. Γ es un subgrupo de Lie p-ádico de $J(\mathbb{Q}_p)$.
- La teoría de grupos de Lie p-ádicos muestra que $\dim \Gamma \leq r$. Esto implica que

$$\dim \Gamma < g = \dim J.$$

- $C(\mathbb{Q}_p)$ genera $J(\mathbb{Q}_p)$, así que no esta contenida en Γ.
- Se sigue que $C(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma$ es finito.

Idea de la Prueba de Chabauty

Tomamos $x_0 \in C(\mathbb{Q})$ y así incluimos C en J por el morfismo $x \mapsto [x - x_0]$. Sea $r = \operatorname{rk} J(\mathbb{Q})$.

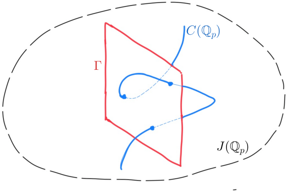
- Sea Γ la clausura p-ádica de $J(\mathbb{Q})$ en $J(\mathbb{Q}_p)$. Γ es un subgrupo de Lie p-ádico de $J(\mathbb{Q}_p)$.
- La teoría de grupos de Lie p-ádicos muestra que $\dim \Gamma \leq r$. Esto implica que

$$\dim \Gamma < g = \dim J.$$

- $C(\mathbb{Q}_p)$ genera $J(\mathbb{Q}_p)$, así que no esta contenida en Γ.
- Se sigue que $C(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma$ es finito.
- Finalmente, notamos que $C(\mathbb{Q}) = C(\mathbb{Q}_p) \cap J(\mathbb{Q}) \subset C(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma$.

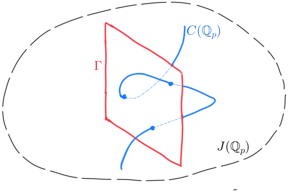
El método de Chabauty-Coleman

Coleman consideró $\Gamma \cap C(\mathbb{Q}_p)$ como ceros de cierta función analítica p-ádica sobre $C(\mathbb{Q}_p)$ construida al integrar sobre cierto diferencial.



El método de Chabauty-Coleman

Coleman consideró $\Gamma \cap C(\mathbb{Q}_p)$ como ceros de cierta función analítica p-ádica sobre $C(\mathbb{Q}_p)$ construida al integrar sobre cierto diferencial.



Teorema (Coleman 1985)

Si C es una curva suave y proyectiva (definida sobre $\mathbb{Q}$) con género ≥ 2 cuyo Jacobiano J satisface $1 + \operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) \leq g$ y p es un primo de buena reducción para C con $p > 2g$, entonces

$$\#C(\mathbb{Q}) \leq \#C_p(\mathbb{F}_p) + 2g - 2.$$

Parte II:
Resultados y aplicaciones sobre $\mathbb{Q}$

Objetivo

La condición en el anterior método sobre la curva y su Jacobiano son

$$\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) + \dim C \leq \dim J.$$

Objetivo

La condición en el anterior método sobre la curva y su Jacobiano son

$$\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) + \dim C \leq \dim J.$$

En aras de generalizarlo para la subvariedad X de una variedad abeliana A, nuestra condición debería ser

$$\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) + \dim X \leq \dim A.$$

Objetivo

La condición en el anterior método sobre la curva y su Jacobiano son

$$\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) + \dim C \leq \dim J.$$

En aras de generalizarlo para la subvariedad X de una variedad abeliana A, nuestra condición debería ser

$$\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) + \dim X \leq \dim A.$$

A continuación nuestros resultados para superficies dentro de una variedad abeliana A con $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$.

Resultados sobre $\mathbb{Q}$

Para una variedad suave V definida sobre $\mathbb{Q}$ de buena reducción en p, denotamos su reducción por V_p.

Resultados sobre $\mathbb{Q}$

Para una variedad suave V definida sobre $\mathbb{Q}$ de buena reducción en p, denotamos su reducción por V_p.

Teorema A (C.- Pasten)

Sea X una superfice de tipo general suave, proyectiva y geométricamente irreducible contenida en un variedad abeliana A de dimensión 3, ambas definidas sobre $\mathbb{Q}$. Sea $p > (128/9) \cdot c_1^2(X)^2$ un primo de buena reducción para X y A. Si $\mathrm{rk}(A(\mathbb{Q})) \leq 1$ y X_p no contiene curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_p^{alg}$, entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \cdot c_1^2(X)$$

Resultados sobre $\mathbb{Q}$

Teorema B (C.- Pasten)

Sea X una superfice de tipo general suave, proyectiva y geométricamente irreducible contenida en un variedad abeliana A de dimensión $n \geq 3$, ambas definidas sobre $\mathbb{Q}$. Sean H un divisor amplio sobre A y p un primo de buena reducción para X y A que satisface

$$p > \max \left\{ 3c_1^2(X) + 2, \frac{n! \cdot (3 \deg(H^2.X) + \deg(H.K_X))^n}{n^n \cdot \deg(H^n)} \right\}$$

Si $\mathrm{rk}(A(\mathbb{Q})) \leq 1$ y A_p es simple sobre $\mathbb{F}_p^{alg}$, entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3 \right) \cdot c_1^2(X).$$

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.
- $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ (óptima segun las hipótesis de Chabauty cuando $\dim A = 3$).

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.
- $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ (óptima segun las hipótesis de Chabauty cuando $\dim A = 3$).
- $X_p := X \otimes \mathbb{F}_p$ cumple un análogo a la finitud sobre $\mathbb{Q}$.

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.
- $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ (óptima segun las hipótesis de Chabauty cuando $\dim A = 3$).
- $X_p := X \otimes \mathbb{F}_p$ cumple un análogo a la finitud sobre $\mathbb{Q}$.

Entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + 4p \cdot c_1^2(X).$$

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.
- $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ (óptima segun las hipótesis de Chabauty cuando $\dim A = 3$).
- $X_p := X \otimes \mathbb{F}_p$ cumple un análogo a la finitud sobre $\mathbb{Q}$.

Entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + 4p \cdot c_1^2(X).$$

Comparemos ahora nuestra cota con la dado por Coleman:

Elementos técnicos en los resultados

Nuestros resultados se resumen en:
Sea X una superficie buena en una variedad abeliana A sobre $\mathbb{Q}$, y sea p un primos de buena reducción para X y A. Nuestras hipótesis son:

- $p >$ cierta cantidad geométrica computable.
- $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ (óptima segun las hipótesis de Chabauty cuando $\dim A = 3$).
- $X_p := X \otimes \mathbb{F}_p$ cumple un análogo a la finitud sobre $\mathbb{Q}$.

Entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + 4p \cdot c_1^2(X).$$

Comparemos ahora nuestra cota con la dado por Coleman:

$$\#C(\mathbb{Q}) \leq \#C_p(\mathbb{F}_p) + c_1(C).$$

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$

Corolario

Sea A una variedad abeliana de dimensión 3 con $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ y $\operatorname{End}(A_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$. Existe un conjunto de primos $\mathcal{P}$ de densidad 1 que satisface: Sea X una superficie de tipo general, suave proyectiva y geometricamente irreduciblebe contenida en A y sea $p \in \mathcal{P}$ un primo de buena reducción para X y A con $p > (128/9) \cdot c_1^2(X)$. Entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \cdot c_1^2(X).$$

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$

Corolario

Sea A una variedad abeliana de dimensión 3 con $\operatorname{rk} A(\mathbb{Q}) \leq 1$ y $\operatorname{End}(A_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$. Existe un conjunto de primos $\mathcal{P}$ de densidad 1 que satisface: Sea X una superficie de tipo general, suave proyectiva y geometricamente irreduciblebe contenida en A y sea $p \in \mathcal{P}$ un primo de buena reducción para X y A con $p > (128/9) \cdot c_1^2(X)$. Entonces

$$\#X(\mathbb{Q}) \leq \#X_p(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \cdot c_1^2(X).$$

Prueba: Por Teorema A y usamos resultados de Chavdarov sobre primos de reducción geometricamente simple para variedades abelianas.

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$ (puntos cuadráticos)

Sea $C^{(2)}$ el cuadrado simétrico de la curva C sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ nos permite clasificar $x \in C$ con orbita de Galois de orden 2.

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$ (puntos cuadráticos)

Sea $C^{(2)}$ el cuadrado simétrico de la curva C sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ nos permite clasificar $x \in C$ con orbita de Galois de orden 2.

Corolario ($g \geq 3$)

Sea $C/\mathbb{Q}$ una curva no hiperelíptica suave, proyectiva, y geométricamente irreducible de género $g \geq 3$ cuyo Jacobiano satisface $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) \leq 1$. Sea $p > (8g-10)^g$ un primo de buena reducción para C. Suponga que C_p es no hiperelíptica y que J_p es geometricamente simple. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ es finito y

$$\# C^{(2)}(\mathbb{Q}) \leq \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \cdot (4g-9)(g-1)$$

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$ (puntos cuadráticos)

Sea $C^{(2)}$ el cuadrado simétrico de la curva C sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ nos permite clasificar $x \in C$ con orbita de Galois de orden 2.

Corolario ($g \geq 3$)

Sea $C/\mathbb{Q}$ una curva no hiperelíptica suave, proyectiva, y geométricamente irreducible de género $g \geq 3$ cuyo Jacobiano satisface $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) \leq 1$. Sea $p > (8g-10)^g$ un primo de buena reducción para C. Suponga que C_p es no hiperelíptica y que J_p es geometricamente simple. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ es finito y

$$\#C^{(2)}(\mathbb{Q}) \leq \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \cdot (4g-9)(g-1)$$

Prueba: Por Theorema B, con $H = 2\Theta$ y $X = W_2 \subset J$.

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$ (puntos cuadráticos)

Corolario ($g = 3$)

Sea $C/\mathbb{Q}$ una curva no hiperelíptica de género $g = 3$ cuyo Jacobiano satisface $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) \leq 1$. Sea $p \geq 521$ un primo de buena reducción para C. Suponga que C_p es no hiperelíptica y que $(C_p)^{(2)}$ no contiene curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_p^{alg}$. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ es finito y

$$\begin{aligned} \# C^{(2)}(\mathbb{Q}) &\leq \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + 6 \cdot \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \\ &< \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + 7.1 \cdot p. \end{aligned}$$

Aplicación sobre $\mathbb{Q}$ (puntos cuadráticos)

Corolario ($g = 3$)

Sea $C/\mathbb{Q}$ una curva no hiperelíptica de género $g = 3$ cuyo Jacobiano satisface $\operatorname{rk} J(\mathbb{Q}) \leq 1$. Sea $p \geq 521$ un primo de buena reducción para C. Suponga que C_p es no hiperelíptica y que $(C_p)^{(2)}$ no contiene curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_p^{alg}$. Entonces $C^{(2)}(\mathbb{Q})$ es finito y

$$\begin{aligned} \# C^{(2)}(\mathbb{Q}) &\leq \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + 6 \cdot \frac{p-1}{p-2} \cdot \left(p + 4p^{1/2} + 3\right) \\ &< \#(C_p)^{(2)}(\mathbb{F}_p) + 7.1 \cdot p. \end{aligned}$$

Prueba: Por Teorema A.

Parte III:
Idea de la Prueba

Idea de la prueba

Sea Γ la clausura p-ádica de $A(\mathbb{Q})$ en $A(\mathbb{Q}_p)$. Notamos que

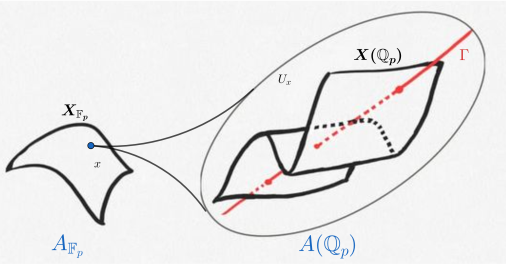
$$X(\mathbb{Q}) = X(\mathbb{Q}_p) \cap A(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma.$$

Idea de la prueba

Sea Γ la clausura p-ádica de $A(\mathbb{Q})$ en $A(\mathbb{Q}_p)$. Notamos que

$$X(\mathbb{Q}) = X(\mathbb{Q}_p) \cap A(\mathbb{Q}) \subset X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma.$$

Consideramos red : $A(\mathbb{Q}_p) \to A_p(\mathbb{F}_p)$. Entonces, queremos para cada disco residual $U_x = \mathrm{red}^{-1}(x)$ con $x \in X_p(\mathbb{F}_p)$ acotar $\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x$



Acotando $\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x$

- Consideramos el subgrupo analítico a 1-parámetro $\gamma : p\,\mathbb{Z}_p \to \Gamma \cap U_x$.

Acotando $\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x$

- Consideramos el subgrupo analítico a 1-parámetro $\gamma : p\,\mathbb{Z}_p \to \Gamma \cap U_x$.
- Sea f una ecuación local para X sobre U_x. Entonces $f \circ \gamma(z)$ es una serie de potencias p-ádica y

$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq n_0(f \circ \gamma(z), 1/p).$$

Acotando $\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x$

- Consideramos el subgrupo analítico a 1-parámetro $\gamma : p\,\mathbb{Z}_p \to \Gamma \cap U_x$.
- Sea f una ecuación local para X sobre U_x. Entonces $f \circ \gamma(z)$ es una serie de potencias p-ádica y

$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq n_0(f \circ \gamma(z), 1/p).$$

- Escribimos $f \circ \gamma(z) = \sum_n a_n z^n \in \mathbb{Q}_p[[z]]$ entonces para acotar $n_0(f \circ \gamma(z), 1/p)$ tenemos que encontrar un N pequeño tal que $|a_N| \geq 1$ **(Ahora vamos a atacar este problema)** .

Curvas ω-integrales

Sea k un campo. Sean Z, Y k-esquemas y $\omega \in H^0(Y, \Omega^1_Y)$. Decimos que un morfismo $\phi : Z \to Y$ es ω-*integral* si $\phi^\bullet(\omega) = 0$, donde $\phi^\bullet$ es definido como sigue

$$\phi^\bullet : H^0(Y, \Omega^1_Y) \to H^0(Y, \phi_*\phi^*\Omega^1_Y) = H^0(Z, \phi^*\Omega^1_Y) \to H^0(Z, \Omega^1_Z).$$

Curvas ω-integrales

Sea k un campo. Sean Z, Y k-esquemas y $\omega \in H^0(Y, \Omega^1_Y)$. Decimos que un morfismo $\phi : Z \to Y$ es ω-*integral* si $\phi^\bullet(\omega) = 0$, donde $\phi^\bullet$ es definido como sigue

$$\phi^\bullet : H^0(Y, \Omega^1_Y) \to H^0(Y, \phi_*\phi^*\Omega^1_Y) = H^0(Z, \phi^*\Omega^1_Y) \to H^0(Z, \Omega^1_Z).$$

- Nuestro trabajo en este punto esta inspirado en [Garcia-Fritz' 15] sobre $\mathbb{C}$.

Construyendo curvas ω-integrales

- Tomamos $\omega_1, \omega_2 \in H^0(A, \Omega^1_{A/\mathbb{Q}_p})$ independientes que reduzcan bien módulo p tales que γ es ω_i-integral para $i = 1, 2$.

Construyendo curvas ω-integrales

- Tomamos $\omega_1, \omega_2 \in H^0(A, \Omega^1_{A/\mathbb{Q}_p})$ independientes que reduzcan bien módulo p tales que γ es ω_i-integral para $i = 1, 2$.
- Obtenemos una inmersión cerrada sobre $\mathbb{Q}_p$

$$\phi_m^0 : \operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p[z]/(z^{m+1}) \to A_{\mathbb{Q}_p},$$

la cuál es ω_i-integral para $i = 1, 2$, al expresar $\gamma(z)$ como serie de potencias y reducir módulo z^{m+1}. **Para nuestro objetivo asumimos** $m < p$.

Construyendo curvas ω-integrales

- Tomamos $\omega_1, \omega_2 \in H^0(A, \Omega^1_{A/\mathbb{Q}_p})$ independientes que reduzcan bien módulo p tales que γ es ω_i-integral para $i = 1, 2$.
- Obtenemos una inmersión cerrada sobre $\mathbb{Q}_p$

$$\phi_m^0 : \operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p[z]/(z^{m+1}) \to A_{\mathbb{Q}_p},$$

  la cuál es ω_i-integral para $i = 1, 2$, al expresar $\gamma(z)$ como serie de potencias y reducir módulo z^{m+1}. **Para nuestro objetivo asumimos $m < p$.**
- Similarmente (recordar que escogimos ω_i que redujeran bien)

$$\phi_m : \operatorname{Spec} k[z]/(z^{m+1}) \to A_k$$

  definido sobre $k := \mathbb{F}_p^{alg}$.

Aplicación al resultado

Recordamos que queremos encontrar un N pequeño tal que $|a_N| \geq 1$.

- Si $f \circ \gamma$ cumple que $|a_i| < 1$ para $i \leq m$, obtenemos que $f \circ \phi_m^0$ módulo p es 0, lo que implica que ϕ_m es una inmersión cerrada sobre X_k.

Aplicación al resultado

Recordamos que queremos encontrar un N pequeño tal que $|a_N| \geq 1$.

- Si $f \circ \gamma$ cumple que $|a_i| < 1$ para $i \leq m$, obtenemos que $f \circ \phi_m^0$ módulo p es 0, lo que implica que ϕ_m es una inmersión cerrada sobre X_k.
- Sean $w_1, w_2 \in H^0(X_k, \Omega^1_{X_k/k})$ obtenidos al reducir ω_i módulo p y restringir a X_k.

Aplicación al resultado

Recordamos que queremos encontrar un N pequeño tal que $|a_N| \geq 1$.

- Si $f \circ \gamma$ cumple que $|a_i| < 1$ para $i \leq m$, obtenemos que $f \circ \phi_m^0$ módulo p es 0, lo que implica que ϕ_m es una inmersión cerrada sobre X_k.
- Sean $w_1, w_2 \in H^0(X_k, \Omega^1_{X_k/k})$ obtenidos al reducir ω_i módulo p y restringir a X_k.
- Necesitamos entonces una cota superior (lo denotaremos por $m(x)$) para cualquier m que satisface:
  "Existe una inmersión cerrada

$$\phi : \operatorname{Spec} k[z]/(z^{m+1}) \to X_k$$

  soportado en x y que sea w_i-integral para $i = 1, 2$."

Cotas geométricas para ciertas curvas ω-integrales

Sean $w_1, w_2 \in H^0(X_k, \Omega^1)$ tal que $w_1 \wedge w_2 \in H^0(X_k, \Omega^2)$ no es la sección trivial. Escribimos $\mathrm{div}(w_1 \wedge w_2) =: D = \sum_{j=1}^{q} a_j D_j$ donde los divisores D_j son primos y $a_j \geq 1$ para cada j. Para cada j, sea $\nu_j : \widetilde{D_j} \to D_j \subseteq X_k$ el morfismo normalización.

Cotas geométricas para ciertas curvas ω-integrales

Sean $w_1, w_2 \in H^0(X_k, \Omega^1)$ tal que $w_1 \wedge w_2 \in H^0(X_k, \Omega^2)$ no es la sección trivial. Escribimos $\operatorname{div}(w_1 \wedge w_2) =: D = \sum_{j=1}^{q} a_j D_j$ donde los divisores D_j son primos y $a_j \geq 1$ para cada j. Para cada j, sea $\nu_j : \widetilde{D_j} \to D_j \subseteq X_k$ el morfismo normalización.

Lema

Si $\phi : \operatorname{Spec} k[z]/(z^{m+1}) \to X_k$ soportado en x es w_i-integral para $i = 1, 2$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{y \in \nu_j^{-1}(x)} a_j(\operatorname{ord}_y(\nu_j^{\bullet} w_i) + 1) \geq m.$$

Cotas en U_x

Un argumento de análisis p-ádico

$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq n_0(f \circ \gamma(z), 1/p) \leq 1 + \frac{p-1}{p-2} \cdot m(x).$$

Cotas en U_x

Un argumento de análisis p-ádico

$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq n_0(f \circ \gamma(z), 1/p) \leq 1 + \frac{p-1}{p-2} \cdot m(x).$$

- $x \notin \operatorname{supp}(D)$. Tenemos que $m(x) \leq \sum_{\emptyset}(\dots) = 0$. Luego

$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq 1 + \frac{p-1}{p-2} \cdot m(x) = 1.$$

Cotas en U_x

Un argumento de análisis p-ádico

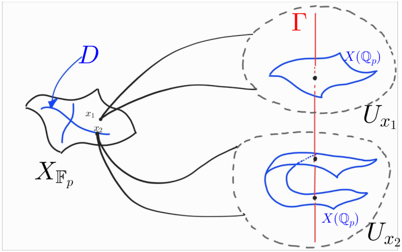
$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq n_0(f \circ \gamma(z), 1/p) \leq 1 + \frac{p-1}{p-2} \cdot m(x).$$

- $x \notin \operatorname{supp}(D)$. Tenemos que $m(x) \leq \sum_{\emptyset}(\dots) = 0$. Luego

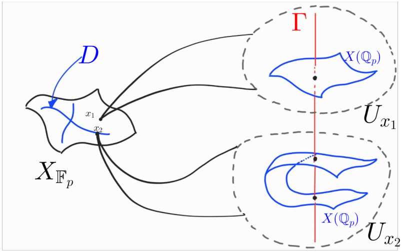
$$\#X(\mathbb{Q}_p) \cap \Gamma \cap U_x \leq 1 + \frac{p-1}{p-2} \cdot m(x) = 1.$$

- $x \in \operatorname{supp}(D)$. En este caso usamos la hipótesis de Riemann para curvas singulares, Teoría de intersección, entre otros. Cuando sumamos sobre todos estos puntos obtenemos una cota en términos del primo p y $c_1^2(X) = (D.D)$.

Último paso



Último paso



$$\#X(\mathbb{Q}_p)\cap\Gamma = \sum_{x\in X_p(\mathbb{F}_p)} \#X(\mathbb{Q}_p)\cap\Gamma\cap U_x \leq \sum_{x\in X_p(\mathbb{F}_p)} \left(1+\frac{p-1}{p-2}\cdot m(x)\right)$$
$$< \#X_p(\mathbb{F}_p) + \frac{p-1}{p-2}\cdot (p+4p^{1/2}+3)\cdot c_1^2(X).$$

Muchas gracias