Aritmética de superficies sobre cuerpos finitos

Marc Hindry, Université de Paris (Diderot Paris 7)

Institut de mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche

Jueves 27 de Mayo 2021

Seminario latinoamericano de teoría de números

Resumen y plan

Resumen: *El teorema de Brauer-Siegel indica una relación asintótica entre los tres invariantes más importantes de un cuerpo de números : el discriminante, el número de classes y el regulador de las unidades. El enunciado no involucra funciones zeta pero la prueba es basada en ellas. Quiero mostrar una analogía - fórmulas y prueba - reemplazando un cuerpo de números por una superficie algebraica definida sobre un cuerpo finito. En esta analogía el grupo de classes corresponde al grupo de Brauer de la superficie, el grupo de unidades (y su regulador) corresponde al grupo de Néron-Severi y el discriminante al género geométrico.*

Plan:

1. El grupo de Néron-Severi de una superficie
2. Teorema de Brauer-Siegel (para un cuerpo de números)
3. Los invariantes de una superficie
4. Teoremas para superficies – analogías con Brauer-Siegel
5. La función Zeta de una superficie
6. La conjectura de Artin-Tate
7. Estimaciones analíticas y conclusión
8. Variedades de dimensión superior

1. Grupo de Néron-Severi de una superficie

Sea X superficie lisa y projectiva definida sobre un cuerpo k (Ejemplo estándar: una superficie en $\mathbf{P}^3$ definida por un polinomio homogéneo $F \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$ de grado D). Dadas dos curvas C_1, C_2 sobre X, se puede definir el número de intersecciones $(C_1 \cdot C_2)$; este número es invariante bajo deformación algebraica. Así podemos definir el *grupo de Néron-Severi* $\mathrm{NS}(X/K)$ como el grupo de combinaciones $\mathbf{Z}$-lineales de curvas irreducibles módulo deformación algebraica.

Teorema. (Néron, Severi) *El grupo* $\mathrm{NS}(X/K)$ *es un grupo de tipo finito y el emparejamiento*[1] *de intersección*

$$\mathrm{NS}(X/K) \times \mathrm{NS}(X/K) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

tiene como núcleo el grupo (finito) de torsión $\mathrm{NS}(X/K)_{\mathrm{tor}}$.

[1] "*pairing*" en inglés, "*accouplement*" en francés.

El regulador (o discriminante) de Néron-Severi

Definición. Sea $\rho = \mathrm{rk}\,\mathrm{NS}(X/K)$ y sean $C_1, \ldots, C_\rho$ curvas produciendo una base de $\mathrm{NS}(X/K)$ módulo torsión. El *regulador* es

$$\mathrm{Reg}(X/K) := \left|\det\left((C_i \cdot C_j)\right)_{1 \leq i,j \leq \rho}\right|$$

Problema. Dar una cota para el regulador en termos invariantes simples de la superficie. Escogemos como invariante de la superficie el *género geométrico* $p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \omega_X)$. Ejemplo: para una superficie de grado D en $\mathbf{P}^3$, tenemos $p_g = \frac{(D-1)(D-2)(D-3)}{6}$.

¡Cuidado! En total generalidad, no se puede esperar tal estimación. Sea X_1 la superficie obtenida con la explosión de un punto de X, de grado t sobre K, entonces $\rho(X_1/K) = \rho(X/K) + 1$ y $\mathrm{Reg}(X_1/K) = t\,\mathrm{Reg}(X/K)$, pero $p_g(X_1) = p_g(X)$.

La pregunta principal

Desde el punto de vista de la geometría es un problema difícil o sin solución.
Sin embargo, desde el punto de vista de la aritmética, digamos cuando $K = \mathbf{F}_q$, $q = p^f$, esperamos que para muchas superficies tengamos:

Pregunta principal: (para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$)

$$¿\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) \leq C_\epsilon q^{p_g(X)(1+\epsilon)}?$$

Se trata de encontrar condiciones razonables o sea familias de superficies para los cuales la desigualdad sera verdadera.

Nota: el enunciado no habla de función zeta.

2. Teorema de Brauer-Siegel

Sea F un cuerpo de números, consideramos:

1. El grado $[F : \mathbf{Q}] = n = r_1 + 2r_2$. El rango de $\mathcal{O}_F^\times$ es $r = r_1 + r_2 - 1$.
2. El (valor absoluto del) discriminante Δ_F.
3. El número de clases h_F, es decir, el cardinal de $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$.
4. El número de raíces de la unidad w_F, es decir, el cardinal de $\mathcal{O}_{F,\mathrm{tor}}^\times = \mathbf{G}_m(\mathcal{O})_{\mathrm{tor}}$.
5. El regulador de unidades: si ϵ_i's forman una base de $\mathcal{O}_F^\times$ módulo torsión y si los σ_i' describen (pares de) imersiones $F \hookrightarrow \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, entonces $R_F := \left|\det(\log|\sigma_j(\epsilon_i)|)_{1\leq i,j\leq r}\right|$.

Teorema. (Brauer-Siegel) *Cuando* $[F : \mathbf{Q}]$ *es acotado y* Δ_F *tiende hacia el infinito*

$$\lim \frac{\log(h_F R_F)}{\log\sqrt{\Delta_F}} = 1.$$

Lo que se puede expresar como $C_\epsilon^{-1}\Delta_F^{\frac{1}{2}-\epsilon} \leq h_F R_F \leq C_\epsilon \Delta_F^{\frac{1}{2}+\epsilon}$.

Esbozo de la prueba de Brauer-Siegel

La demostración del Teorema de Brauer-Siegel utiliza la función zeta de Dedekind.

$$\zeta_F(s) := \sum_{\mathfrak{A}} N\mathfrak{A}^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

definida inicialmente para $\Re(s) > 1$ y extendida analíticamente al plano complejo menos un polo en $s = 1$, con una ecuación funcional vinculando $\zeta_F(s)$ y $\zeta_F(1-s)$. El residuo en $s = 1$ es dado por la famosa fórmula de clases:

$$\zeta_F^*(1) := \lim(s-1)\zeta_F(s) = \frac{h_F R_F}{\sqrt{\Delta_F}} \cdot \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_F}$$

Los términos de más a la derecha (en esta fórmula) serán facílmente estimados, el corazón de la prueba es una estimación del valor especial $\zeta_F^*(1)$.

Lema 1.

$$\zeta_F^*(1) \leq C_n \log \Delta_F^{n-1}.$$

Lema 2. La función $\zeta_F(s)$ no tiene más de un cero en el disco $|s-1| \leq 1/\log \Delta_F$. Si existe tal cero, es real y pertenece al intervalo $[1-1/\log \Delta_F, 1[$ (se llama un cero de Landau-Siegel).
Lema 3. Si la función $\zeta_F(s)$ no tiene un cero de Siegel (por ejemplo si HRG es cierta) entonces:

$$\frac{C_n'}{\log \Delta_F} \leq \zeta_F^*(1) \leq C_n \log \Delta_F^{n-1}.$$

Lema 4. Tenemos la estimación (inefectiva) siguiente:

$$\zeta_F^*(1) \geq C_\epsilon \Delta_F^{-\epsilon}.$$

Se deduce fácilmente que $C_{1,\epsilon}\Delta_F^{\frac{1}{2}-\epsilon} \leq h_F R_F \leq C_2 \Delta^{\frac{1}{2}} \log \Delta_F^{n-1}$.
Stark ha mostrado que ceros de Siegel, si existen, provienen de subcuerpos cuadráticos de F.

3. Invariantes de una superficie

- El género geométrico $p_g(X)$.
- El grupo de Brauer $\mathrm{Br}(X/K) := H^2(X, \mathbf{G}_m)$.
- Los números de Betti $b_i(X) = \dim H^i(X)$ (para alguna cohomología de Weil). Ejemplo: para una superficie de grado D in $\mathbf{P}^3$, tenemos $b_0 = b_4 = 1$, $b_1 = b_3 = 0$ y $b_2 = D^3 - 4D^2 + 6D - 2$.
- La variedad de Picard tiene dimensión $b_1(X)/2$; cuando la característica es $p > 0$, el invariante

$$\delta(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) - b_1(X)/2$$

es a veces positivo (cuando $\mathrm{Pic}(X)$ no es reducido).

Si uno quiere comparar $p_g(X)$ con $\chi(\mathcal{O}_X)$ y los b_i's tenemos

$$\chi(\mathcal{O}_X) + \dim \mathrm{Pic}(X) - 1 = p_g(X) - \delta(X)$$

Gonalidad aritmética

Definición. La gonalidad aritmética de una superficie $X/\mathbf{F}_q$ es el número real

$$\gamma(X/\mathbf{F}_q) := \sup_{m\geq 1} \frac{\sharp X(\mathbf{F}_{q^m})}{\sharp \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{q^m})}.$$

Si existe $\pi : X \to \mathbf{P}^2$ de grado d entonces $\gamma(X) \leq d$.
Ejemplo: una superficie X de grado D in $\mathbf{P}^3$, entonces $\gamma(X) \leq D$.
En general, utilizando la fórmula de los puntos fijos de Lefschetz, tenemos

$$1 \leq \gamma(X) \leq \sum_{i=0}^{4} b_i q^{\frac{i}{2}-2} \leq \sum_{i=0}^{4} b_i$$

Recordamos la estimación obvia (serie converge para $|T| < 1/q^2$):

$$\sum_{m\geq 1} \sharp X(\mathbf{F}_{q^m}) \frac{T^m}{m} \leq \gamma(X) \sum_{m\geq 1} \sharp \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{q^m}) \frac{T^m}{m}$$

4. Teoremas para superficies

Teorema. (R. Griffon) Sea X_D la superficie de Fermat $X_0^D + X_1^D + X_2^D + X_3^D = 0$ en $\mathbf{P}^3$ (para D primo con q) entonces $\mathrm{Br}(X_D/\mathbf{F}_q)$ es finito, $\rho \leq cD^3/\log D$ y además:

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\log \sharp\mathrm{Br}(X_D/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X_D/\mathbf{F}_q)}{p_g(X_D)\log q} = 1.$$

Teorema (M. H —) Suponemos que el grupo de Brauer de X es finito y que X cumple las dos condiciones numéricas siguientes

1. $b_1(X) \leq Cb_2(X)^{1-\eta}$;
2. $\gamma(X) \leq Cb_2(X)^{1-\eta}$

Entonces $\rho \leq cb_2/\log b_2$ y además:

$$\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) \leq \sharp\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) \leq C_\epsilon q^{p_g(X)(1+\epsilon)}.$$

Nota: El resultado de Griffon es el análogo exacto de Brauer-Siegel, mientras el segundo Teorema da sólo "*la mitad de Brauer-Siegel*".

Análogos del teorema de Brauer-Siegel

Se puede resumir las analogías en una tabla

cuerpo de números F	curva elíptica $E/\mathbf{Q}$	superficie $X/\mathbf{F}_q$
$\zeta_F(s)$	$L(E,s)$	$L(H^2(X),s)$
$\zeta_F^*(1)$	$L^*(E,1)$	$L^*(X,1)$
R_F	$\mathrm{Reg}(E/\mathbf{Q})$	$\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q)$
$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$	$Ш(E/\mathbf{Q})$	$\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q))$
$\sqrt{\Delta_F}$	$H(E/\mathbf{Q})$	$q^{p_g(X)}$
$2^{r_1}(2\pi)^{r_2}$	$\prod_p c_p(E)$	$q^{\delta(X)}$
$\mathbf{G}_m(\mathcal{O}_F)_{\mathrm{tor}}$	$E(\mathbf{Q})^2_{\mathrm{tor}}$	$\mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)^2_{\mathrm{tor}}$
$\frac{\log(h_F R_F)}{\log\sqrt{\Delta_F}}$	$\frac{\log\left(\sharp Ш(E/\mathbf{Q})\mathrm{Reg}(E/\mathbf{Q})\right)}{\log H(E/\mathbf{Q})}$	$\frac{\log(\sharp\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q))}{\log q^{p_g(X)}}$

5. La función Zeta de una superficie

Definición $Z(X/\mathbf{F}_q, T) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sharp X(\mathbf{F}_{q^m})T^m}{m}\right)$ y también $\zeta(X,s) = Z(X, q^{-s})$.

Las conjeturas de Weil (Weil, Grothendieck, Deligne) dicen que

$$Z(X/\mathbf{F}_q, T) = \frac{P_1(T)P_1(qT)}{(1-T)P_2(T)(1-q^2T)}$$

donde $P_1(T) = \prod_{j=1}^{b_1(X)}(1-\alpha_j T)$ con $|\alpha_j| = \sqrt{q}$ y $P_2(T) = \prod_{j=1}^{b_2(X)}(1-\beta_j T)$ con $|\beta_j| = q$. De hecho $P_i(X, T) = \det(1 - \mathrm{Frob}_q T \mid H^i(X))$ (donde $H^i(X)$ es una cohomología de Weil). Además $L_2(X/\mathbf{F}_q, s) := P_2(X/\mathbf{F}_q, q^{-s})$ y $\zeta(X,s)$ satisfacen las ecuaciones funcionales:

$$L_2(X/\mathbf{F}_q, s) = \pm q^{b_2(X)(1-s)} L_2(X/\mathbf{F}_q, 2-s),$$

$$\zeta(X, 2-s) = \pm q^{(1-s)\chi(X)}\zeta(X,s).$$

6. La conjetura de Artin-Tate

Conjetura (Artin-Tate) *Sea $X/\mathbf{F}_q$ una superficie lisa proyectiva. El grupo de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ es finito, la función $L_2(X/\mathbf{F}_q, s)$ se anula en $s=1$ con orden $\rho = \mathrm{rk}\,\mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)$ y tenemos, cuando s tiende hacia 1, que:*

$$\lim \frac{L_2(X/\mathbf{F}_q, s)}{(1-q^{1-s})^\rho} = \frac{\sharp\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q)}{q^{p_g(X)}} \cdot \frac{q^{\delta(X)}}{\sharp\mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)^2_{\mathrm{tor}}}.$$

Utilizando cohomología ℓ-adica y también p-adica Tate y Milne han mostrado:

Teorema. (Tate-Milne) *Tenemos siempre*

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q) \leq \mathrm{ord}_{s=1} L_2(X/\mathbf{F}_q, s),$$

además la igualdad es equivalente a la finitud de $\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)$ o a la finitud de una componente ℓ-primaria $\mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)[\ell^\infty]$. Cuando la superficie cumple estas condiciones, la totalidad de la conjetura de Artin-Tate es cierta.

La conjetura de Artin-Tate es conocida para superficies racionales, superficies K3, superficies dominadas por un producto de curvas.

7. Estimaciones analíticas y conclusión

Utilizamos la hipótesis numérica para mejorar las cotas "triviales"

Cotas triviales:

$$\rho \leq b_2 \quad \text{y} \quad q^{-b_2/2} \leq |L_2^*(X/\mathbf{F}_q, 1)| \leq 2^{b_2}.$$

Proposición. *Supongamos que $b_1(X)$ y $\gamma(X)$ están acotadas por $C_1 b_2^{1-\eta}$, entonces:*

$$\rho \leq c b_2 / \log b_2,$$

$$|L_2^*(X/\mathbf{F}_q, 1)| \leq \exp\left(c b_2 \frac{\log \log b_2}{\log b_2} \right).$$

Lema 1. *Para $\sigma > 2$* $|\log \zeta(X, s)| \leq \gamma(X) \log(1 - q^{2-\sigma})^{-1} + c_1$

Lema 2. *Para $\sigma > 1$* $|\log L_2(X, s)| \leq b_2(X) \log(1 - q^{1-\sigma})^{-1}$

Lema 3. *Para $\sigma > 2$* $|\log \zeta(X, s)| \leq b_2 \log(1 - q^{2-\sigma})^{-1} + c_2 b_1$

Lema (Phragmén-Lindelöf) *Sea f holomorfa y acotada en $a \leq \Re(s) \leq b$ y sea $M_\sigma := \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(\sigma + it)|$, entonces, para $a \leq \sigma \leq b$, tenemos*

$$M_\sigma \leq M_a^{\frac{b-\sigma}{b-a}} M_b^{\frac{\sigma-a}{b-a}}.$$

Cota superior

La conjetura de Artin-Tate se reescribe así:

$$\sharp \mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) = q^{p_g(X)} \cdot L_2^*(X/\mathbf{F}_q, 1)\sharp \mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)_{\mathrm{tor}}^2 q^{-\delta(X)}$$

Añadiendo la cota superior para L_2 y la comparación (válida bajo la hipótesis) entre p_g y b_2, vemos que sólo necesitamos una estimación del tipo

$$\sharp \mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)_{\mathrm{tor}} \leq C_\epsilon q^{\epsilon p_g},$$

para deducir

$$\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) \leq \sharp \mathrm{Br}(X/\mathbf{F}_q)\mathrm{Reg}(X/\mathbf{F}_q) \leq q^{p_g(X)(1+\epsilon)}.$$

Observación. La hipótesis numérica es satisfecha por superficies en $\mathbf{P}^3$ o más generalmente por superficies dadas por intersecciones completas en $\mathbf{P}^N$; de hecho estas cumplen $\delta(X) = 0$, $b_1 = 0$ y $\mathrm{NS}(X/\mathbf{F}_q)_{\mathrm{tor}} = 0$.

¿Cota inferior para el valor especial?

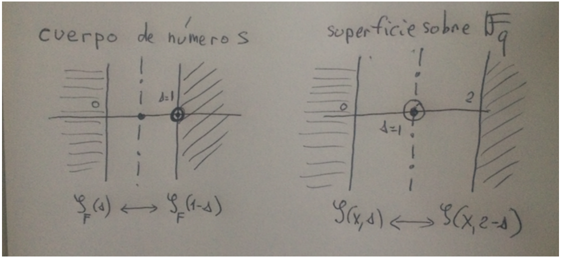
Observaciones. a) No se puede mejorar la desigualdad de Liouville :

$$|P(q^{-1})| \geq q^{-\deg(P)}$$

sin tener más información sobre el polinomio $P(T)$. Por ejemplo si $A = 2q^d - 1$, entonces el polinomio $P(T) = 1 - AT^d + q^{2d}T^{2d}$ tiene sus raíces sobre el circulo $|T| = q^{-1}$ y $P(q^{-1}) = (2q^d - A)/q^d$ entonces logramos $P(q^{-1}) = q^{-d}$.

Centro o borde de la banda crítica

b) Hay una diferencia analítica importante: en el teorema clásico de Brauer-Siegel estudiamos el comportamiento de $\zeta_F(s)$ cerca de $s = 1$ al borde de la banda crítica, Entonces se espera que los ceros estén alejados. En cambio en el caso de superficies sobre $\mathbf{F}_q$ el valor $s = 1$ es el centro de la banda crítica, entonces hay muchos ceros cerca de $s = 1$.



Por esta razón no esperamos que el comportamiento demostrado por Griffon en el caso de superficies de Fermat siga siendo válido en general.

Cotas inferiores (continuación)

c) Consideramos la superficie X birracional con $D(t)y^2 = f(x)$, donde $y^2 = f(x)$ define una curva elíptica con función zeta $\frac{1-aT+qT^2}{(1-T)(1-qT)} = \frac{(1-\alpha T)(1-\bar{\alpha}T)}{(1-T)(1-qT)}$ y $D(t)$ es un polinomio separable de grado $2g+1$ (o $2g+2$). De ahi, sigue que la función zeta de la curva $u^2 = D(t)$ puede escribirse $\frac{L(T)}{(1-T)(1-qT)} = \frac{\prod_{j=1}^{2g}(1-\beta_j T)}{(1-T)(1-qT)}$. Entonces el valor especial $L_2^*(X,1)$ es, olvidando pequeños factores, $L^*(\alpha^{-1})L^*(\bar{\alpha}^{-1})$ (el $*$ significa que se quita un factor que se anula α^{-1} o $\bar{\alpha}^{-1}$). De la ecuación funcional $L(T) = q^g T^{2g} L(1/qT)$ concluimos que $L(T) = T^g G(T^{-1} + qT)$ donde $\deg G = g$ y todos los ceros de G son reales y en el intervalo $[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$. Concluimos que

$$L^*(\alpha^{-1})L^*(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{G(a)^2}{q^g}$$

(acuerdénse que $a \in [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$).

8. Variedades de dimensión más grande

Tentativa de fórmulación de una conjetura para variedades de dimensión superior. Sea $X/\mathbf{F}_q$ una variedad lisa proyectiva de dimensión d. Notamos $N^j(X)$ al grupo de ciclos algebraicos de codimensión j módulo equivalencia numérica, el cual es un grupo abeliano libre de rango finito $\rho_j(X)$, es decir $N^j(X) = \mathbf{Z}D_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}D_{\rho_j}$. La construcción de la teoría de intersección nos proporciona un emparejamiento

$$N^j(X) \times N^{d-j}(X) \to \mathbf{Z}.$$

Escogiendo $E_1, \ldots, E_{\rho_j}$ como una base de $N^{d-j}(X)$, definimos

$$\mathrm{Reg}_j(X) = \left|\det(D_i \cdot E_h)_{1 \leq i,h \leq \rho_j}\right|.$$

Por analogía sugerimos que, bajo condiciones numéricas, tendremos:

Pregunta general: ¿ $\mathrm{Reg}_j(X/\mathbf{F}_q) \leq C_\epsilon q^{\chi_j(X)(1+\epsilon)}$?

donde j-ésima característica de Euler (definida por Milne) es

$$\chi_j(X) := \sum_{0 \leq i \leq \dim X,\, 0 \leq h \leq j} (-1)^{i+h}(j-h) \dim H^i(X, \Omega^h).$$