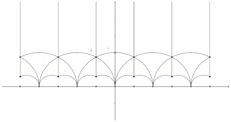
# Formas modulares y aritmética de cuerpos

Sara Arias de Reyna

15 Abril 2021



# FORMAS MODULARES Y ARITMÉTICA DE CUERPOS

**SEMINARIO LATINOAMERICANO DE TEORÍA DE NÚMEROS**

15/04/2021

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left( z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left( z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

Por ejemplo:

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left(z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}\right) \end{array}$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left( z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T(z) = z + 1$$

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left(z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}\right) \end{array}$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T(z) = z + 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Formas modulares

Sea

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

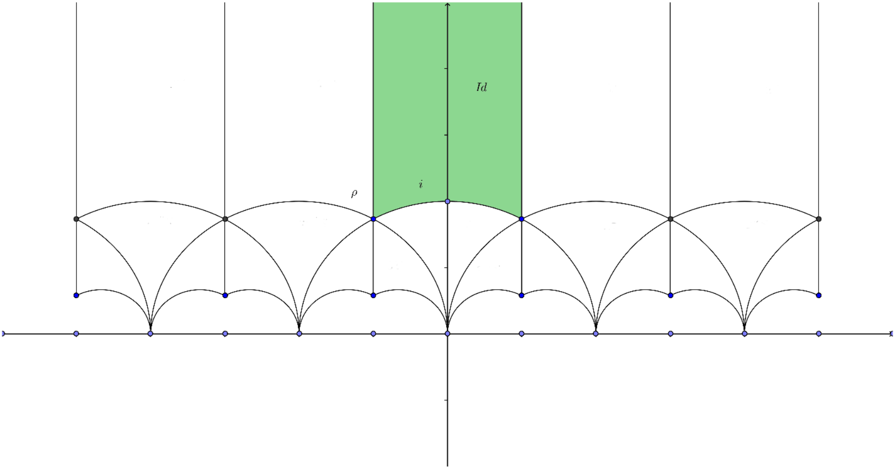
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \circlearrowleft & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left( z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

Por ejemplo:

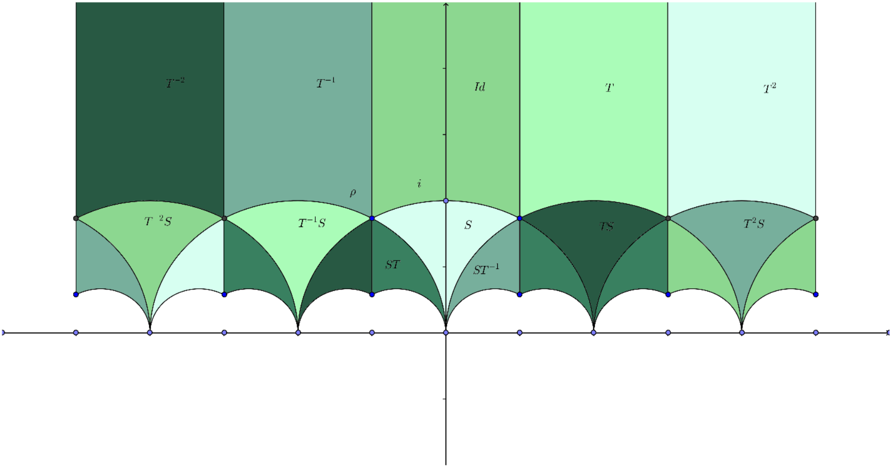
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T(z) = z + 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow S(z) = \frac{-1}{z}$$

# Formas modulares



# Formas modulares



# Formas modulares

Para cada $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, definimos:

# Formas modulares

Para cada $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, definimos:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

# Formas modulares

Para cada $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, definimos:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

# Formas modulares

Para cada $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, definimos:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

Las formas modulares son funciones holomorfas $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que tienen una cierta simetría respecto de un subgrupo $\Gamma$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

# Formas modulares

Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ o $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero.

# Formas modulares

Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ o $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero.

**Definición:** Una *forma modular respecto de $\Gamma$ con peso $k$* es una función holomorfa

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

tal que:

# Formas modulares

Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ o $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero.

**Definición:** Una *forma modular respecto de $\Gamma$ con peso $k$* es una función holomorfa

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

tal que:

- Para todo $z \in \mathcal{H}$ y todo $\gamma \in \Gamma$,

$$f(\gamma(z)) = (cz + d)^k f(z);$$

# Formas modulares

Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ o $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero.

**Definición:** Una *forma modular respecto de $\Gamma$ con peso $k$* es una función holomorfa

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

tal que:

- Para todo $z \in \mathcal{H}$ y todo $\gamma \in \Gamma$,

$$f(\gamma(z)) = (cz + d)^k f(z);$$

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

# Formas modulares

- $f$ es “holomorfa en las cúspides”

# Formas modulares

- $f$ es “holomorfa en las cúspides”

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

# Formas modulares

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$\rightsquigarrow f(z+1) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathcal{H}$$

# Formas modulares

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$\rightsquigarrow f(z+1) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathcal{H}$$

$\rightsquigarrow$ $f$ tiene un desarrollo de Fourier

# Formas modulares

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$\rightsquigarrow f(z+1) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathcal{H}$$

$\rightsquigarrow$ $f$ tiene un desarrollo de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

# Formas modulares

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$\rightsquigarrow f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathcal{H}$

$\rightsquigarrow$ $f$ tiene un desarrollo de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

# Formas modulares

- $f$ es "holomorfa en las cúspides"

Como $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$\rightsquigarrow f(z+1) = f(z) \text{ para todo } z \in \mathcal{H}$$

$\rightsquigarrow$ $f$ tiene un desarrollo de Fourier

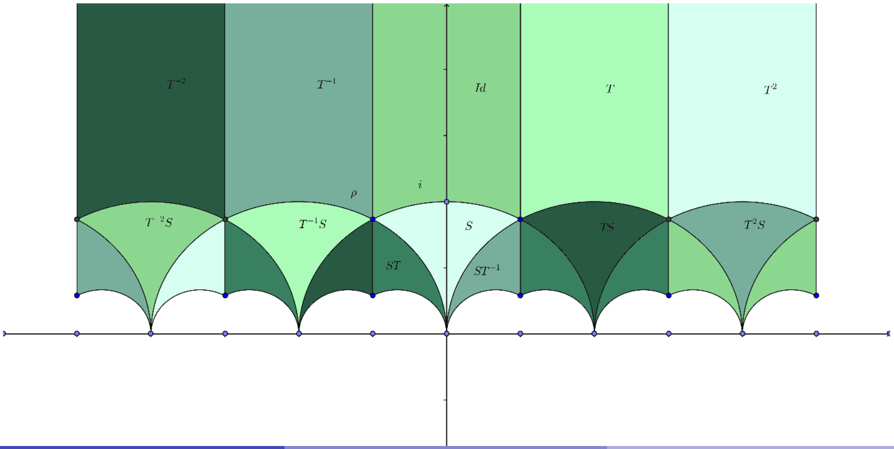
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ entonces decimos que $f$ es holomorfa en $\infty$

# Formas modulares

- $f$ es “holomorfa en las cúspides”

# Formas modulares

- *f* es “holomorfa en las cúspides”



# Formas modulares

**Definición:**

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.
- Diremos que $f$ está *normalizada* si el coeficiente $a_1$ del desarrollo de Fourier es 1.

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.
- Diremos que $f$ está *normalizada* si el coeficiente $a_1$ del desarrollo de Fourier es 1.
- Sea $f$ una forma modular respecto de $\Gamma_1(N)$.

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.
- Diremos que $f$ está *normalizada* si el coeficiente $a_1$ del desarrollo de Fourier es 1.
- Sea $f$ una forma modular respecto de $\Gamma_1(N)$.
    - $N$ es el *nivel* de $f$.

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.
- Diremos que $f$ está *normalizada* si el coeficiente $a_1$ del desarrollo de Fourier es 1.
- Sea $f$ una forma modular respecto de $\Gamma_1(N)$.
  - $N$ es el *nivel* de $f$.
  - Existe un carácter de Dirichlet $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que,

$$\text{para toda } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),\ f(\gamma(z)) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z).$$

# Formas modulares

**Definición:**

- Diremos que $f$ es una *forma cuspidal* si se anula en todas las cúspides.
- Diremos que $f$ está *normalizada* si el coeficiente $a_1$ del desarrollo de Fourier es 1.
- Sea $f$ una forma modular respecto de $\Gamma_1(N)$.
    - $N$ es el *nivel* de $f$.
    - Existe un carácter de Dirichlet $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que,

para toda $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $f(\gamma(z)) = \varepsilon(d)(cz+d)^k f(z)$.

$f$ se llama *carácter* o *Nebentypus* de $f$

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f \text{ es una forma cuspidal respecto de } \Gamma \text{ con peso } k\}$

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f$ es una forma cuspidal respecto de $\Gamma$ con peso $k\}$

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f \text{ es una forma cuspidal respecto de } \Gamma \text{ con peso } k\}$

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

CUANDO $k \geqslant 2$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$ SE PUEDE CALCULAR EXPLÍCITAMENTE.

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f$ es una forma cuspidal respecto de $\Gamma$ con peso $k\}$

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

CUANDO $k \geqslant 2$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$ SE PUEDE CALCULAR EXPLÍCITAMENTE.

EN PARTICULAR, SI $N$ ES SUFICIENTEMENTE GRANDE, $\mathcal{S}_k(\Gamma) \neq \{0\}$.

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f$ es una forma cuspidal respecto de $\Gamma$ con peso $k\}$

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Cuando $k \geqslant 2$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$ se puede calcular explícitamente.

En particular, si $N$ es suficientemente grande, $\mathcal{S}_k(\Gamma) \neq \{0\}$.

Para $k = 1$ no hay fórmulas para calcular $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$.

# Formas modulares

**¿Cuántas formas modulares hay?**

$\mathcal{S}_k(\Gamma) := \{f : f$ es una forma cuspidal respecto de $\Gamma$ con peso $k\}$

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

CUANDO $k \geqslant 2$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$ SE PUEDE CALCULAR EXPLÍCITAMENTE.

EN PARTICULAR, SI $N$ ES SUFICIENTEMENTE GRANDE, $\mathcal{S}_k(\Gamma) \neq \{0\}$.

Para $k = 1$ no hay fórmulas para calcular $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma))$. No podemos saber a priori si $\mathcal{S}_k(\Gamma) \neq \{0\}$ sin calcular explícitamente $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(F)$$

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(F)$$

donde $F = \mathbb{F}_{p^r}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ o $\mathbb{C}$.

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(F)$$

donde $F = \mathbb{F}_{p^r}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ o $\mathbb{C}$.

Diremos que $\rho$ es *impar* si $\det(\rho(c)) = -1$, siendo $c$ una conjugación compleja en $G_{\mathbb{Q}}$.

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(F)$$

donde $F = \mathbb{F}_{p^r}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ o $\mathbb{C}$.

Diremos que $\rho$ es *impar* si $\det(\rho(c)) = -1$, siendo $c$ una conjugación compleja en $G_{\mathbb{Q}}$.

Para cada primo $p$, decimos que $\rho$ es *no ramificada en* $p$ si la imagen del grupo de inercia en $p$ es trivial.

# Representaciones de Galois

Denotamos al grupo de Galois absoluto de los racionales por

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

En esta charla consideraremos representaciones de Galois de dimensión 2, es decir

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(F)$$

donde $F = \mathbb{F}_{p^r}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ o $\mathbb{C}$.

Diremos que $\rho$ es *impar* si $\det(\rho(c)) = -1$, siendo $c$ una conjugación compleja en $G_{\mathbb{Q}}$.

Para cada primo $p$, decimos que $\rho$ es *no ramificada en* $p$ si la imagen del grupo de inercia en $p$ es trivial. En este caso, existe un elemento (bien definido salvo conjugación)

$$\rho(\mathrm{Frob}_p) \in \mathrm{GL}_2(F).$$

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

Existe una familia $\{T_m\}_{m\geqslant 1}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{S}_k(\Gamma)$, que conmutan entre sí, llamados *operadores de Hecke*.

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

Existe una familia $\{T_m\}_{m \geqslant 1}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{S}_k(\Gamma)$, que conmutan entre sí, llamados *operadores de Hecke*.

Una forma modular $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ se llama una *autoforma de Hecke* si es una forma propia de $T_m$, para todo $m \geqslant 1$.

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

Existe una familia $\{T_m\}_{m\geqslant 1}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{S}_k(\Gamma)$, que conmutan entre sí, llamados *operadores de Hecke*.

Una forma modular $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ se llama una *autoforma de Hecke* si es una forma propia de $T_m$, para todo $m \geqslant 1$.

Si $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{2\pi inz}$ es una autoforma de Hecke normalizada, entonces

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

Existe una familia $\{T_m\}_{m\geqslant 1}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{S}_k(\Gamma)$, que conmutan entre sí, llamados *operadores de Hecke*.

Una forma modular $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ se llama una *autoforma de Hecke* si es una forma propia de $T_m$, para todo $m \geqslant 1$.

Si $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{2\pi inz}$ es una autoforma de Hecke normalizada, entonces

$$\rightsquigarrow \mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\{a_\ell : \ell \text{ primo}\})$$

es un cuerpo de números,

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sean $\Gamma = \Gamma_1(N)$ y $k \geqslant 0$ un entero

Existe una familia $\{T_m\}_{m\geqslant 1}$ una familia de operadores lineales en $\mathcal{S}_k(\Gamma)$, que conmutan entre sí, llamados *operadores de Hecke*.

Una forma modular $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ se llama una *autoforma de Hecke* si es una forma propia de $T_m$, para todo $m \geqslant 1$.

Si $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{2\pi i n z}$ es una autoforma de Hecke normalizada, entonces

$$\rightsquigarrow \mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\{a_\ell : \ell \text{ primo}\})$$

es un cuerpo de números, llamado *cuerpo de coeficientes*.

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

Shimura, Deligne, Deligne-Serre

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),$$

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

Shimura, Deligne, Deligne-Serre

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),$$

semisimple, impar, no ramificada fuera de $Np$,

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

Shimura, Deligne, Deligne-Serre

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),$$

semisimple, impar, no ramificada fuera de $Np$, tal que para $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det \rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

Shimura, Deligne, Deligne-Serre

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),$$

semisimple, impar, no ramificada fuera de $Np$, tal que para $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det \rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

Componiendo con la reducción $\overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$

# Formas modulares y representaciones de Galois

Sea $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n q^n$ una autoforma de Hecke normalizada respecto de $\Gamma_1(N)$ con peso $k \geqslant 0$, nebentypus $\varepsilon : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, y sea $\mathbb{Q}_f$ el cuerpo de coeficientes.
Fijemos inmersiones $\overline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$ para cada primo $p$

Shimura, Deligne, Deligne-Serre

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),$$

semisimple, impar, no ramificada fuera de $Np$, tal que para $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det \rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

Componiendo con la reducción $\overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Teorema de Modularidad

# Teorema de Modularidad

**Teorema de Modularidad:** (Khare, Wintenberger)

Sea $p$ un número primo y

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

# Teorema de Modularidad

**Teorema de Modularidad:** (Khare, Wintenberger)

Sea $p$ un número primo y

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

Existen enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ y una forma modular $f$ respecto de $\Gamma_1(N_{\overline{\rho}})$ con peso $k_{\overline{\rho}}$ autoforma de Hecke normalizada,

# Teorema de Modularidad

**Teorema de Modularidad:** (Khare, Wintenberger)

Sea $p$ un número primo y

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

Existen enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ y una forma modular $f$ respecto de $\Gamma_1(N_{\overline{\rho}})$ con peso $k_{\overline{\rho}}$ autoforma de Hecke normalizada, tal que $\overline{\rho}$ es isomorfa (como representación de Galois) a $\overline{\rho}_{f,p}$.

# Teorema de Modularidad

**Teorema de Modularidad:** (Khare, Wintenberger)

Sea $p$ un número primo y

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

Existen enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ y una forma modular $f$ respecto de $\Gamma_1(N_{\overline{\rho}})$ con peso $k_{\overline{\rho}}$ autoforma de Hecke normalizada, tal que $\overline{\rho}$ es isomorfa (como representación de Galois) a $\overline{\rho}_{f,p}$.

¿Cuáles son los enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ más pequeños posibles?

# Teorema de Modularidad

**Teorema de Modularidad:** (Khare, Wintenberger)

Sea $p$ un número primo y

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

Existen enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ y una forma modular $f$ respecto de $\Gamma_1(N_{\overline{\rho}})$ con peso $k_{\overline{\rho}}$ autoforma de Hecke normalizada, tal que $\overline{\rho}$ es isomorfa (como representación de Galois) a $\overline{\rho}_{f,p}$.

¿Cuáles son los enteros $N_{\overline{\rho}}$ y $k_{\overline{\rho}}$ más pequeños posibles?

PARA $k = 1$, HAY QUE CONSIDERAR LAS **FORMAS MODULARES DE KATZ**.

# Formas modulares de Katz

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada,

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $Np$, y tal que si $\ell \nmid Np$,

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $Np$, y tal que si $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\,\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada de peso $k = 1$,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $Np$, y tal que si $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada de peso $k = 1$,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $Np$, y tal que si $\ell \nmid Np$,

$$\mathrm{traza}\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada de peso $k = 1$,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $N$, y tal que si $\ell \nmid N$,

$$\mathrm{traza}\,\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada de peso $k = 1$,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $N$, y tal que si $\ell \nmid N$,

$$\mathrm{traza}\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell^{k-1}\varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

$\mathcal{S}_k(\Gamma)$ se puede identificar con un espacio de formas diferenciales sobre la curva modular $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*$.

Sea $N \geqslant 1$ un entero, y $p \nmid N$. Considerando el cambio de base de $X(\Gamma_1(N))$ a $\overline{\mathbb{F}}_p$, se puede definir un análogo geométrico de las formas modulares de peso $k$.

ÉSTAS SON LAS FORMAS MODULARES DE KATZ

- Las formas modulares de Katz también tienen una $q$-expansión $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, con $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
- Se pueden definir los operadores de Hecke en este contexto.
- Si $f$ es una forma de Hecke normalizada de peso $k = 1$,

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

impar, no ramificada fuera de $N$, y tal que si $\ell \nmid N$,

$$\mathrm{traza}\,\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \det(\overline{\rho}_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \varepsilon(\ell).$$

# Formas modulares de Katz

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N \nmid 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica.

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N \neq 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica. (También cuando $k \geqslant 2$, $N = 1$ y $p > 3$).

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N \neq 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica. (También cuando $k \geqslant 2$, $N = 1$ y $p > 3$).

CUANDO $k = 1$, HAY FORMAS MODULARES DE KATZ QUE NO PROVIENEN DE FORMAS MODULARES CLÁSICAS.

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N \neq 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica. (También cuando $k \geqslant 2$, $N = 1$ y $p > 3$).

CUANDO $k = 1$, HAY FORMAS MODULARES DE KATZ QUE NO PROVIENEN DE FORMAS MODULARES CLÁSICAS.

- No tenemos fórmulas para la dimensión del espacio de formas modulares de Katz de peso 1.

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N + 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica. (También cuando $k \geqslant 2$, $N = 1$ y $p > 3$).

CUANDO $k = 1$, HAY FORMAS MODULARES DE KATZ QUE NO PROVIENEN DE FORMAS MODULARES CLÁSICAS.

- No tenemos fórmulas para la dimensión del espacio de formas modulares de Katz de peso 1.
- Aparecen de forma esporádica.

# Formas modulares de Katz

Sea $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ una forma modular de Katz sobre $\overline{\mathbb{F}}_p$ de nivel $\Gamma_1(N)$ y peso $k$.

Cuando $k \geqslant 2$ y $N \neq 1$, $f$ es la reducción mod $p$ de una forma modular clásica. (También cuando $k \geqslant 2$, $N = 1$ y $p > 3$).

CUANDO $k = 1$, HAY FORMAS MODULARES DE KATZ QUE NO PROVIENEN DE FORMAS MODULARES CLÁSICAS.

- No tenemos fórmulas para la dimensión del espacio de formas modulares de Katz de peso 1.
- Aparecen de forma esporádica.

FIJEMOS $p$. ¿EXISTEN INFINITAS FORMAS MODULARES DE KATZ SOBRE $\overline{\mathbb{F}}_p$ DE PESO 1, AUTOFORMAS DE HECKE NORMALIZADAS, QUE NO PROVENGAN DE FORMAS MODULARES CLÁSICAS?

# Formas modulares y cuerpos de números

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im} \overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

¿Qué podemos decir sobre $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$?

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

¿Qué podemos decir sobre $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$?

$$\overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

¿Qué podemos decir sobre $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$?

$$\overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

¿Qué podemos decir sobre $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$?

$$\overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

$$\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Como $\overline{\rho}_{f,p}$ es continua, $\ker \overline{\rho}_{f,p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K_f)$ para cierto cuerpo de números $K_f$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f/\mathbb{Q}).$$

¿Qué podemos decir sobre $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$?

$$\overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

$$\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

**Ribet:** Si $f$ no tiene multiplicación compleja, la imagen $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}$ coincide con $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para casi todo primo $p$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$,

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$, tenemos que $\overline{\rho}_{f,p}(c)$ es una involución no escalar

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$, tenemos que $\overline{\rho}_{f,p}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p}(c) \neq \mathrm{Id}$

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$, tenemos que $\overline{\rho}_{f,p}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\mathrm{proj}}(c) \neq \mathrm{Id} \rightsquigarrow K_f^{\mathrm{proj}} \not\subset \mathbb{R}$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\text{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\text{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}_{f,p}^{\text{proj}}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\text{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}^{\text{proj}} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\text{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$, tenemos que $\overline{\rho}_{f,p}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow \overline{\rho}_{f,p}^{\text{proj}}(c) \neq \mathrm{Id} \rightsquigarrow K_f^{\text{proj}} \not\subset \mathbb{R}$.
- Por el resultado de Ribet, $\mathrm{Gal}(K_f^{\text{proj}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para casi todo $p$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Sea $f$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada, $p$ primo

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Sea $K_f^{\mathrm{proj}} = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p}}$. ¿Qué sabemos de $K_f^{\mathrm{proj}}$?

- $\mathrm{Im}\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p} \simeq \mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q})$.
- Como $\det(\overline{\rho}_{f,p}(c)) = -1$, tenemos que $\overline{\rho}_{f,p}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,p}(c) \neq \mathrm{Id} \rightsquigarrow K_f^{\mathrm{proj}} \not\subset \mathbb{R}$.
- Por el resultado de Ribet, $\mathrm{Gal}(K_f^{\mathrm{proj}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para casi todo $p$.

Recíprocamente, dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial.

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial.
  $\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}(c)$ es una involución no escalar

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial.
  $\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow$ $\det(\overline{\rho}(c)) = -1$

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial. $\rightsquigarrow \overline{\rho}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow \det(\overline{\rho}(c)) = -1$
- Como $\mathrm{Im}\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$ es isomorfa a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, $\overline{\rho}$ es irreducible

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial.
  $\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow$ $\det(\overline{\rho}(c)) = -1$
- Como $\mathrm{Im}\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$ es isomorfa a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, $\overline{\rho}$ es irreducible
- Por el Teorema de Modularidad, existe $f$ forma modular, autoforma de Hecke normalizada tal que $\overline{\rho} \simeq \overline{\rho}_{f,p}$.

# Formas modulares y cuerpos de números

Dada una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$, totalmente imaginaria, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, ¿existe una forma modular $f$, autoforma de Hecke normalizada, tal que $K = K_f^{\mathrm{proj}}$?

Consideremos la representación de Galois

$$\overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

siendo $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

- Existe un levantamiento

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

  tal que al componer con $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ obtenemos $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$.
- Como $K/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginario, $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}(c)$ es un elemento no trivial.
  $\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}(c)$ es una involución no escalar $\rightsquigarrow$ $\det(\overline{\rho}(c)) = -1$
- Como $\mathrm{Im}\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}$ es isomorfa a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, $\overline{\rho}$ es irreducible
- Por el Teorema de Modularidad, existe $f$ forma modular, autoforma de Hecke normalizada tal que $\overline{\rho} \simeq \overline{\rho}_{f,p}$.

$$\rightsquigarrow K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

# Formas modulares y ramificación

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Formas modulares y ramificación

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

# Formas modulares y ramificación

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

$$\rightsquigarrow \overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Formas modulares y ramificación

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

$$\rightsquigarrow \overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

EXISTE UNA AUTOFORMA DE HECKE NORMALIZADA $f$ DE PESO 1 TAL QUE $K = K_f^{\mathrm{proj}}$.

# Formas modulares y ramificación

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$$\rightsquigarrow \overline{\rho}^{\mathrm{proj}} : G_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

$$\rightsquigarrow \overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

EXISTE UNA AUTOFORMA DE HECKE NORMALIZADA $f$ DE PESO 1 TAL QUE $K = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Pero es difícil encontrar una extensión de Galois $K/\mathbb{Q}$ no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo:

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$,

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T-t)$.

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T-t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois.

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T-t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T-t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T - t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T - t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

# Aritmética de cuerpos

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T - t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T - t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$ Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T - t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T - t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$ Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $t \in \mathbb{Q}$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(T)$ en $t$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[T]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T-t)$,

$$E_t := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T-t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$ Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{t}$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$,

$$E_{\mathbf{t}} := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(T)$ es de Galois, $E_t$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T - t)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$ Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{t}$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$,

$$E_{\mathbf{t}} := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$es de Galois, $E_{\mathbf{t}}$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$.

$E_t/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{t}$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$,

$$E_{\mathbf{t}} := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$es de Galois, $E_{\mathbf{t}}$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$.

$E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q})$?

Excepto para un número finito de valores de $t$, $\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{t}$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$,

$$E_{\mathbf{t}} := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$es de Galois, $E_{\mathbf{t}}$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$.

$E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q})$?

Excepto para $\mathbf{t}$ en un cerrado de Zariski propio, $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T}))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$Existen infinitos valores $t \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_t/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)).$$

# Aritmética de cuerpos

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión finita de Galois con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$.

**Definición:** Para cada $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$, se define la especialización de $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{t}$ del siguiente modo: si $B$ es el cierre íntegro de $\mathbb{Q}[\mathbf{T}]$ en $E$, y $\mathfrak{P}$ es un ideal primo de $B$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$,

$$E_{\mathbf{t}} := B/\mathfrak{P}.$$

Como $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$es de Galois, $E_{\mathbf{t}}$ no depende de la elección de $\mathfrak{P}$ sobre $(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n)$.

$E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ es una extensión finita de Galois. ¿Qué podemos decir de $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q})$?

Excepto para $\mathbf{t}$ en un cerrado de Zariski propio, $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T}))$.

$\rightsquigarrow$ Teorema de Irreducibilidad de Hilbert

$\rightsquigarrow$ Existen infinitos valores $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^n$ tales que

$$\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})).$$

# Aritmética de cuerpos

# Aritmética de cuerpos

En términos explícitos:

- Sea $P(\mathbf{T}, Y) \in \mathbb{Q}[\mathbf{T}][Y]$ un polinomio mónico separable;

# Aritmética de cuerpos

En términos explícitos:

- Sea $P(\mathbf{T}, Y) \in \mathbb{Q}[\mathbf{T}][Y]$ un polinomio mónico separable;
- sea $E$ el cuerpo de descomposición de $P(\mathbf{T}, Y)$ sobre $\mathbb{Q}(\mathbf{T})$;

# Aritmética de cuerpos

En términos explícitos:

- Sea $P(\mathbf{T}, Y) \in \mathbb{Q}[\mathbf{T}][Y]$ un polinomio mónico separable;
- sea $E$ el cuerpo de descomposición de $P(\mathbf{T}, Y)$ sobre $\mathbb{Q}(\mathbf{T})$;
- sea $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T}))$.

# Aritmética de cuerpos

En términos explícitos:

- Sea $P(\mathbf{T}, Y) \in \mathbb{Q}[\mathbf{T}][Y]$ un polinomio mónico separable;
- sea $E$ el cuerpo de descomposición de $P(\mathbf{T}, Y)$ sobre $\mathbb{Q}(\mathbf{T})$;
- sea $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T}))$.
- Supongamos que $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$ verifica el cuerpo de descomposición $K$ de $P(\mathbf{t}, Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ tiene grupo de Galois $G$.

# Aritmética de cuerpos

En términos explícitos:

- Sea $P(\mathbf{T}, Y) \in \mathbb{Q}[\mathbf{T}][Y]$ un polinomio mónico separable;
- sea $E$ el cuerpo de descomposición de $P(\mathbf{T}, Y)$ sobre $\mathbb{Q}(\mathbf{T})$;
- sea $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T}))$.
- Supongamos que $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Q}^n$ verifica el cuerpo de descomposición $K$ de $P(\mathbf{t}, Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ tiene grupo de Galois $G$.

$$\rightsquigarrow E_{\mathbf{t}} = K.$$

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_{\mathbf{t}}$ tal que $E_{\mathbf{t}} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq G$

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_\mathbf{t}$ tal que $E_\mathbf{t} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_\mathbf{t}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_\mathbf{t} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_{\mathbf{t}}$ tal que $E_{\mathbf{t}} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_{\mathbf{t}} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_\mathbf{t}$ tal que $E_\mathbf{t} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_\mathbf{t}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_\mathbf{t} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito.

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_{\mathbf{t}}$ tal que $E_{\mathbf{t}} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_{\mathbf{t}} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito. Denotamos $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_{\mathbf{t}}$ tal que $E_{\mathbf{t}} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_{\mathbf{t}} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito. Denotamos $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.
Sea $I$ un conjunto de índices, y para cada $i \in I$, sea $f_i$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada.

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_{\mathbf{t}}$ tal que $E_{\mathbf{t}} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_{\mathbf{t}} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito. Denotamos $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.
Sea $I$ un conjunto de índices, y para cada $i \in I$, sea $f_i$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada.
Diremos que el conjunto $(f_i)_{i \in I}$ es una $G$-familia de Galois proyectiva $n$-paramétrica si existe una extensión de Galois finita $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$ tal que, para cada $i \in I$:

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_\mathbf{t}$ tal que $E_\mathbf{t} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_\mathbf{t}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_\mathbf{t} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito. Denotamos $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.
Sea $I$ un conjunto de índices, y para cada $i \in I$, sea $f_i$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada.
Diremos que el conjunto $(f_i)_{i\in I}$ es una $G$-familia de Galois proyectiva $n$-paramétrica si existe una extensión de Galois finita $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$ tal que, para cada $i \in I$:

- Existe $\mathbf{t}_i \in \mathbb{Q}^n$ tal que $K_{f_i}^{\mathrm{proj}} = E_{\mathbf{t}_i}$

# Familias de Galois de formas modulares

Sea $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

Para cada especialización $E_\mathbf{t}$ tal que $E_\mathbf{t} \not\subset \mathbb{R}$ y $\mathrm{Gal}(E_\mathbf{t}/\mathbb{Q}) \simeq G$

$\rightsquigarrow$ Existe (al menos una) forma modular $f$ tal que $E_\mathbf{t} = K_f^{\mathrm{proj}}$.

Esto motiva la definición de familia de Galois :

**Definición:** Sea $p$ un número primo, $n$ un entero y $G \subset \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ un subgrupo finito. Denotamos $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$.
Sea $I$ un conjunto de índices, y para cada $i \in I$, sea $f_i$ una forma modular, autoforma de Hecke normalizada.
Diremos que el conjunto $(f_i)_{i \in I}$ es una $G$-familia de Galois proyectiva $n$-paramétrica si existe una extensión de Galois finita $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})) \simeq G$ tal que, para cada $i \in I$:

- Existe $\mathbf{t}_i \in \mathbb{Q}^n$ tal que $K_{f_i}^{\mathrm{proj}} = E_{\mathbf{t}_i}$
- $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f_i}^{\mathrm{proj}}$ es conjugada con $G$ en $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),\ \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}), \ \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Si $f$ es una forma modular clásica

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}), \ \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Si $f$ es una forma modular clásica

$\rightsquigarrow$ Deligne-Serre $\rightsquigarrow$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}), \ \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Si $f$ es una forma modular clásica

$\rightsquigarrow$ Deligne-Serre $\rightsquigarrow$

Existe $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathrm{traza}\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \mathrm{traza}\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell), \ \det\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \det\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Recordemos: si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

$\rightsquigarrow$ Existe una autoforma de Hecke normalizada $f$ de peso 1 tal que

$$K = K_f^{\mathrm{proj}}.$$

$$\rightsquigarrow \rho_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2((\mathbb{Q}_f)_{\mathfrak{p}}),\ \overline{\rho}_{f,p} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Si $f$ es una forma modular clásica

$\rightsquigarrow$ Deligne-Serre $\rightsquigarrow$

Existe $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathrm{traza}\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \mathrm{traza}\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell),\ \det\rho_{f,p}(\mathrm{Frob}_\ell) = \det\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell)$$

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \\
& \mathrm{Im}\rho_f \arrow[r] \arrow[u, dash, "\subseteq"] & \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \arrow[u, dash, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ & \mathrm{Im}\rho_f \arrow[u, dash, "\subseteq"] \arrow[r] & \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \arrow[u, dash, "\subseteq"] \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$ es isomorfa a un cociente de un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

⇝ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \\
& \mathrm{Im}\rho_f \arrow[u, dash, "\subseteq"] \arrow[r] & \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \arrow[u, dash, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

⇝ $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$ es isomorfa a un cociente de un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ & \mathrm{Im}\rho_f \arrow[r] \arrow[u, dash, "\subseteq"] & \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \arrow[u, dash, "\subseteq"] \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$ es isomorfa a un cociente de un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Pero los subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ son grupos cíclicos, dihedrales, o bien $A_4$, $S_4$ o $A_5$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

$\rightsquigarrow$ $\overline{\rho}_{f,p}$ es la reducción de $\rho_f$ módulo $p$

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p) \\
& \mathrm{Im}\rho_f \arrow[u, dash, "\subseteq"] \arrow[r] & \mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p} \arrow[u, dash, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Im}\overline{\rho}_{f,p}$ es isomorfa a un cociente de un subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Pero los subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ son grupos cíclicos, dihedrales, o bien $A_4$, $S_4$ o $A_5$.

Si $p^r \neq 3, 5$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ y $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ no son cocientes de subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$

$\rightsquigarrow$ $f$ no es una forma modular clásica.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

**Definición:** Diremos que $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ es regular si $E \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

**Definición:** Diremos que $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ es regular si $E \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Si $E/\mathbb{Q}(T)$ es una extensión de Galois regular, tal que se verifican las dos condiciones:

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

**Definición:** Diremos que $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ es regular si $E \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Si $E/\mathbb{Q}(T)$ es una extensión de Galois regular, tal que se verifican las dos condiciones:

- Existe $t_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $E_{t_0}/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginaria;

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

**Definición:** Diremos que $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ es regular si $E \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Si $E/\mathbb{Q}(T)$ es una extensión de Galois regular, tal que se verifican las dos condiciones:

- Existe $t_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $E_{t_0}/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginaria;
- Existe $t_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $E_{t_1}/\mathbb{Q}$ es no ramificada en $p$;

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Necesitamos $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois, totalmente imaginaria, no ramificada en $p$, con $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

¿Podemos encontrar una extensión de Galois $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ con grupo de Galois $G \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$, que tenga infinitas especializaciones $E_{\mathbf{t}}/\mathbb{Q}$ que sean totalmente imaginarias y no ramificadas en $p$?

**Definición:** Diremos que $E/\mathbb{Q}(\mathbf{T})$ es regular si $E \cap \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Si $E/\mathbb{Q}(T)$ es una extensión de Galois regular, tal que se verifican las dos condiciones:

- Existe $t_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $E_{t_0}/\mathbb{Q}$ es totalmente imaginaria;
- Existe $t_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $E_{t_1}/\mathbb{Q}$ es no ramificada en $p$;

Entonces existen infinitas especializaciones $E_t/\mathbb{Q}$ que cumplen las dos condiciones simultáneamente.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión de Galois regular.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión de Galois regular.

**Definición:** Sea $p$ un número primo. Diremos que $E/\mathbb{Q}(T)$ tiene ramificación vertical en $p$ si el ideal primo $p\mathbb{Z}[T]$ de $\mathbb{Z}[T]$ ramifica en el cierre íntegro de $\mathbb{Z}[T]$ en $E$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión de Galois regular.

**Definición:** Sea $p$ un número primo. Diremos que $E/\mathbb{Q}(T)$ tiene ramificación vertical en $p$ si el ideal primo $p\mathbb{Z}[T]$ de $\mathbb{Z}[T]$ ramifica en el cierre íntegro de $\mathbb{Z}[T]$ en $E$.

**Lema:** Supongamos que $E$ es el cuerpo de descomposición de un polinomio mónico y separable $P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y]$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión de Galois regular.

**Definición:** Sea $p$ un número primo. Diremos que $E/\mathbb{Q}(T)$ tiene ramificación vertical en $p$ si el ideal primo $p\mathbb{Z}[T]$ de $\mathbb{Z}[T]$ ramifica en el cierre íntegro de $\mathbb{Z}[T]$ en $E$.

**Lema:** Supongamos que $E$ es el cuerpo de descomposición de un polinomio mónico y separable $P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y]$.

Entonces para todo primo $p$ tal que el discriminante $\Delta(T) \in \mathbb{Z}[T]$ del polinomio $P(T, Y)$ verifique $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$, se tiene que no hay ramificación vertical en $p$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

Sea $E/\mathbb{Q}(T)$ una extensión de Galois regular.

**Definición:** Sea $p$ un número primo. Diremos que $E/\mathbb{Q}(T)$ tiene ramificación vertical en $p$ si el ideal primo $p\mathbb{Z}[T]$ de $\mathbb{Z}[T]$ ramifica en el cierre íntegro de $\mathbb{Z}[T]$ en $E$.

**Lema:** Supongamos que $E$ es el cuerpo de descomposición de un polinomio mónico y separable $P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y]$.

Entonces para todo primo $p$ tal que el discriminante $\Delta(T) \in \mathbb{Z}[T]$ del polinomio $P(T, Y)$ verifique $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$, se tiene que no hay ramificación vertical en $p$.

$\rightsquigarrow$ En las condiciones del Lema anterior, existen infinitas especializaciones de $E/\mathbb{Q}(T)$ no ramificadas en $p$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11}),$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).
- Existe una especialización $E_t/\mathbb{Q}$ totalmente imaginaria

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).
- Existe una especialización $E_t/\mathbb{Q}$ totalmente imaginaria

**Ejemplos:**

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).
- Existe una especialización $E_t/\mathbb{Q}$ totalmente imaginaria

**Ejemplos:**

$$P(T, Y) = Y^5 - Y^4 - T$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).
- Existe una especialización $E_t/\mathbb{Q}$ totalmente imaginaria

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

**Teorema. (A., Legrand, Wiese):** Para $p = 3, 5, 7, 11$, existen infinitas formas modulares de Katz de peso 1, autoformas de Hecke normalizadas, que no provienen de formas modulares clásicas.

**Demostración:** Para cada uno de los grupos $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9), \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$, existe un polinomio mónico separable

$$P(T, Y) \in \mathbb{Z}[T][Y],$$

tal que su cuerpo de descomposición $E$ sobre $\mathbb{Q}(T)$ verifica:

- $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq G$.
- $E/\mathbb{Q}(T)$ es regular;
- $\Delta(T) \notin p\mathbb{Z}[T]$ (para $p = 3, 5, 7, 11$ resp.).
- Existe una especialización $E_t/\mathbb{Q}$ totalmente imaginaria

$$P(T, Y) = Y^7 - 56Y^6 + 609Y^5 + 1190Y^4 + 6356Y^3 + 4536Y^2 - 6804Y - 5832 - TY(Y+1)^3$$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

- Se conocen polinomios explícitos con grupo de Galois $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ para $13 \leqslant p \leqslant 29$

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

- Se conocen polinomios explícitos con grupo de Galois $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ para $13 \leqslant p \leqslant 29$ ¡pero $\Delta(T) \in p\mathbb{Z}[T]$!

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

- Se conocen polinomios explícitos con grupo de Galois $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ para $13 \leqslant p \leqslant 29$ ¡pero $\Delta(T) \in p\mathbb{Z}[T]$!
- En general, dado $p$ primo, no se sabe si existe una extensión de Galois regular $E/\mathbb{Q}(T)$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para algún $r$.

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

- Se conocen polinomios explícitos con grupo de Galois $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ para $13 \leqslant p \leqslant 29$ ¡pero $\Delta(T) \in p\mathbb{Z}[T]$!
- En general, dado $p$ primo, no se sabe si existe una extensión de Galois regular $E/\mathbb{Q}(T)$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para algún $r$.

Si para un $p$ dado, existiera $E/\mathbb{Q}(T)$ como arriba,

# Familias de Galois de formas modulares de peso 1

¿Qué pasa cuando $p > 11$?

- Se conocen polinomios explícitos con grupo de Galois $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ para $13 \leqslant p \leqslant 29$ ¡pero $\Delta(T) \in p\mathbb{Z}[T]$!
- En general, dado $p$ primo, no se sabe si existe una extensión de Galois regular $E/\mathbb{Q}(T)$ con $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}(T)) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ o $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ para algún $r$.

Si para un $p$ dado, existiera $E/\mathbb{Q}(T)$ como arriba, ¿son las formas modulares de Katz de peso 1 esporádicas, o existe una familia de Galois infinita de formas modulares de Katz?