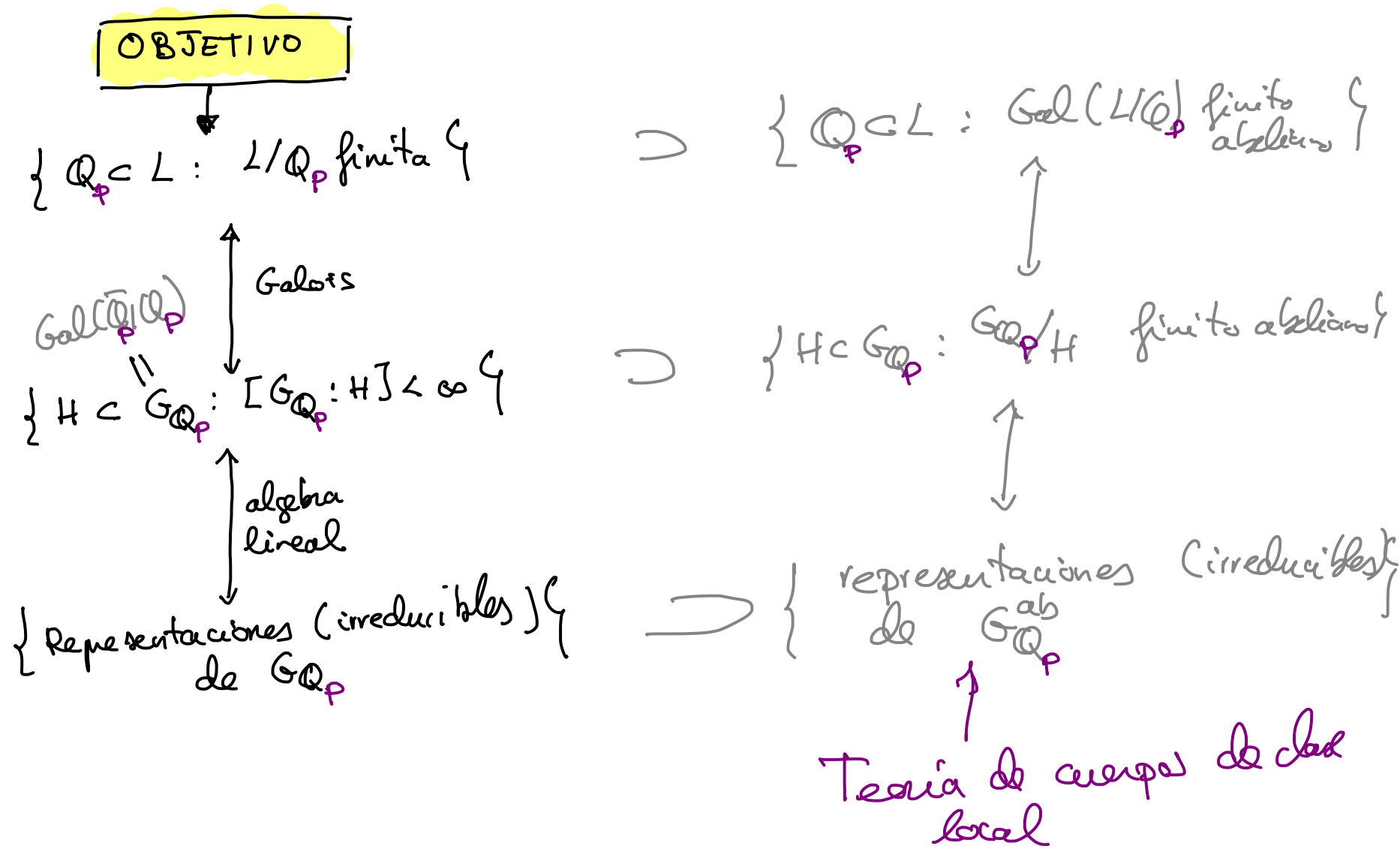


La involución de Aubert-Zelevinsky

Alberto Mínguez (Universidad de Viena)

La involución de Aubert-Zelevinsky

Alberto Mínguez (junto a H. Atobe)



IDEA Principio local-global de Hasse: intentar entender el problema sobre $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$ y luego intentar pegar la info obtenida.

GEOMÉTRICAMENTE: Para entender una estructura geométrica, intentar entenderla localmente en cada uno de sus puntos y luego tratar de juntar toda esa información.

Teoría de cuerpos de clase

Fijamos un número primo p .

$\nwarrow$ *inercia* $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Q}_p^{\text{un}})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_p & \longrightarrow & G_{\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & I_p & \longrightarrow & W_{\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$W_{\mathbb{Q}_p} \subset G_{\mathbb{Q}_p}$ es denso $\leadsto$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. irreducibles} \\ \text{de } G_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. irreducibles} \\ \text{de } W_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. irreducibles} \\ \text{de } W_{\mathbb{Q}_p} \\ \text{det tiene orden finito} \end{array} \right\}$$

Teoría de cuerpos de clase: $\text{art} : \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} W_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$

Corolario:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. irreducibles} \\ \text{de } \mathbb{Q}_p^\times \\ \parallel \\ GL(1, \mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. de dim 1} \\ \text{de } W_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\}$$

Conjetura 1: Cambia 1 por n .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. irreducibles} \\ GL(n, \mathbb{Q}_p) \\ \text{lisas} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Reps. de dim } n \\ \text{de } W_{\mathbb{Q}_p} \\ \text{lisas - semisimples} \end{array} \right\}$$

AUTOMORFO

Def. Rep. de $GL(n, \mathbb{F})$: rep. lisa

i.e. el estabilizador de todo vector es un abierto de $GL(n, \mathbb{F})$.

NB: La topología del e.v. subyacente no importa (da igual $\mathbb{C}$ -representaciones que $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -representaciones)

GALOIS

Def. Rep. de dim n de $W_{\mathbb{Q}_p}$:

rep. lisa semi-simple.

(no necesariamente irreducible)

no parámetro de Langlands.

Dados parámetros $\phi_i: W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_i)$

$\dim(V_i) = n_i$, $1 \leq i \leq r$

no $\phi_1 \oplus \dots \oplus \phi_r$, suma

de parámetros de dim $n = \sum n_i$

Dados representaciones irreducibles π_i de $GL(n_i, \mathbb{Q}_p)$ podemos construir una rep de $GL(n, \mathbb{Q}_p)$?

¡Si! En efecto, podemos formar la rep. de $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ parabólicamente inducida

$$i_P^{GL(n)} (\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r) \in \text{Rep}(GL(n))$$

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & n_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} n_r \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \subset GL_n$$

Conjetura 2 Existe una biyección natural entre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{reps. irred de } GL_n(\mathbb{Q}_p) \\ \text{no obtenidas via inducción} \\ \text{(cuspidales)} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{reps. irreducibles} \\ \text{de dim } n \text{ de } W_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\}$$

△ Conjetura 2 es cierta pero la conjetura 1 no!

Pb. - Una representación inducida no es necesariamente irreducible!

$$\left| \left\{ \begin{array}{l} \text{reps. irreducibles} \\ \text{de } GL(n, \mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \right| \geq \left| \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ reps de dim } n \\ \text{de } W_{\mathbb{Q}_p} \\ \text{lisas continuas} \end{array} \right\} \right|$$

Solución (Deligne): Cambiamos $\mathbb{C}$ por $\overline{\mathbb{Q}}_p$ y liso por continuo en el lado galoisiano $\Leftrightarrow$ reps lisas de monodromia

$$\boxed{WD_{\mathbb{Q}_p} = W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C})} \quad (\text{grupo de Weil-Deligne}).$$

Teorema (Harris-Taylor, Henniart, Scholze):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{reps lisas irreducibles} \\ \text{de } GL(n, \mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \xleftrightarrow[\text{natural}]{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{reps. lisas de} \\ \text{dimensión } n \text{ de } WD_{\mathbb{Q}_p} \end{array} \right\}$$

||

$$\left\{ \phi: WD_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \right\}$$

Y si cambiamos $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ por otro grupo de Lie G p -ádico?

Conjetura: Cambiamos $GL(n)$ por G

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{reps. lisas irreducibles} \\ \text{de } G(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \xleftrightarrow[\text{natural}]{1:1} \left\{ \phi: WD_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow G^{\vee}(\mathbb{C}) \right\}$$

(1) En vez de $G(\mathbb{C})$ usamos $G^v(\mathbb{C})$ el grupo dual
(cambiando raíces por corraíces en el sistema de raíces)

$$GL_n \longleftrightarrow GL_n$$

$$SL_n \longleftrightarrow \mathbb{P}GL_n$$

$$Sp_n \longleftrightarrow SO_{2n+1}$$

$$SO_{2n} \longleftrightarrow SO_{2n}$$

(2) L-paquetes: uno espera que la aplicación

$$\{ \text{reps. lisas de } G(\mathbb{Q}_p) \} \xrightarrow{\text{natural}} \{ \phi: WD_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow G^v(\mathbb{C}) \}$$

sea sobreyectiva de finitas finitas

i.e para cada parámetro ϕ existe un número finito

Π_ϕ de representaciones de $G(\mathbb{Q}_p)$ que se envían hacia ϕ .

Las reps de Π_ϕ también se pueden escribir en función de ϕ : Consideremos el centralizador

$Z_{G^v}(\phi)$ de la imagen de ϕ en G^v

$$S_\phi = \pi_0 \left(\frac{Z_{G^v}(\phi)}{Z_{G^v}} \right) \quad (\text{2-grupo finito})$$

Uno espera que:

$$\Pi_\phi \cong \hat{S}_\phi := \{ \text{reps. irreducibles de } S_\phi \} \quad \text{signos!}$$

Conjetura 3 (Langlands)

$$\{ \text{reps. lisas irreducibles de } G(\mathbb{Q}_p) \} \longleftrightarrow \{ (\phi, \rho): \phi: WD_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow G^v(\mathbb{C}), \rho \in \hat{S}_\phi \}$$

Teorema (Arthur '12) Supongamos que G es Sp_n o bien SO_{2n+1} .

Entonces la conjetura 3 es cierta.

Remarca: Hoy día se conocen muchos otros grupos para los cuales la conjetura 3 es cierta.

La involución de Aubert-Zelevinsky

Notación:

- F cuerpo p -ádico
- $G \in \{ GL_n(F), Sp_n(F), SO_{2n+1}(F) \}$ escindido
- $P = MN$ subgrupo parabólico estándar de G
- $i_P^G(\pi_M)$ inducción parabólica $\pi_M \in \text{Rep}(M)$
- $\text{Jac}_P(\pi)$ restricción de Jacquet $\pi \in \text{Rep}(G)$

$$\text{Rep}(G) \xrightleftharpoons[i]{\text{Jac}} \text{Rep}(M)$$

- $\pi \mapsto [\pi]$ semi-simplificación. GL_2 $St \leftrightarrow 1_2$

Def Si $\pi \in \text{Rep}(G)$ sea:

$$D_G(\pi) := \sum_{\substack{P=MN \\ \text{estándar}}} (-1)^{\dim A_M} \left[i_P^G \circ \text{Jac}_P(\pi) \right]$$

= lineas del toro
maximal del centro de M

Historia

(1) Grupos finitos de tipo de Lie

- Alvis (1979), Curtis (1980), Kawanaka (1982)
- Irr $\rightarrow$ Irr Deligne-Lusztig (1982, 1983)

(2) Álgebras de Hecke

- Iwahori - Matsumoto (1965) (involución de álgebra)
- Kato (1993) $\rightarrow$ misma fórmula

(3) Grupos p -ádicos

- Zelevinsky (1980) para $GL_n(F)$
- Aubert (1995) general.

Teorema (Aubert '86, Schneider-Stuhler '97)

Si π es irreducible, existe $\varepsilon \in \{\pm 1\} \neq 1$ t.q.

$$\hat{\pi} := \varepsilon \cdot D_G(\pi)$$

es también irreducible. Además $\hat{\hat{\pi}} = \pi$.

Def $\hat{\pi}$ dual de Aubert-Zelevinsky de π .

Interés: π temperada $\leadsto \hat{\pi}$ puede ser no temperada

π unitaria $\leadsto \hat{\pi}$ unitaria

$\left\{ \begin{array}{l} \text{reps. irreducibles} \\ \text{de } G(F) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Langlands}]{\substack{\text{inv. de} \\ \text{Aubert-Zelevinsky}}} \left\{ (\phi, \rho) : \begin{array}{l} \phi: WD_F \rightarrow G^v(C) \\ \rho \in \hat{S}_\phi \end{array} \right\}$

Moeglin-Waldspurger '86: Hay un algoritmo explícito para calcular el dual de Aubert-Zelevinsky en el lado galoisiano si $G = GL_n(F)$.

Atobe-M. (2020): Algoritmo explícito para Sp_n, SO_{2n+1}

Historia: Resultados parciales de Aubert, Matic' y Jantzen.

Algunas ideas

$$G = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{F}) \text{ o } \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F})$$

ρ repr. irreducible cuspidal de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$.

Def La k -ésima ρ -derivada de $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ es la representación semisimple $D_\rho^{(k)}(\pi)$, que verifica:

$$[\mathrm{Jac}_{P_{\mathrm{dR}}}(\pi)] = \underbrace{\rho^{\otimes k}}_{\substack{\text{"} \\ \text{Rep}(\mathrm{GL}_{\mathrm{dR}} \times G_0)}} \otimes \underbrace{D_\rho^{(k)}(\pi)}_{\substack{\text{"} \\ \text{p} \times \dots \times \text{p} \\ \text{k-veces}}} + \sum_i \underbrace{\tau_i \otimes \pi_i}_{\text{redondeado}}$$

en donde P_{dR} subgrupo parabólico estandar de

Levi $\mathrm{GL}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{F}) \times G_0$ y

$\tau_i \otimes \pi_i \in \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{F}) \times G_0)$ t.q. $\tau_i \not\in \rho^{\otimes k} := \underbrace{\rho \otimes \dots \otimes \rho}_{\text{k-veces}}$.

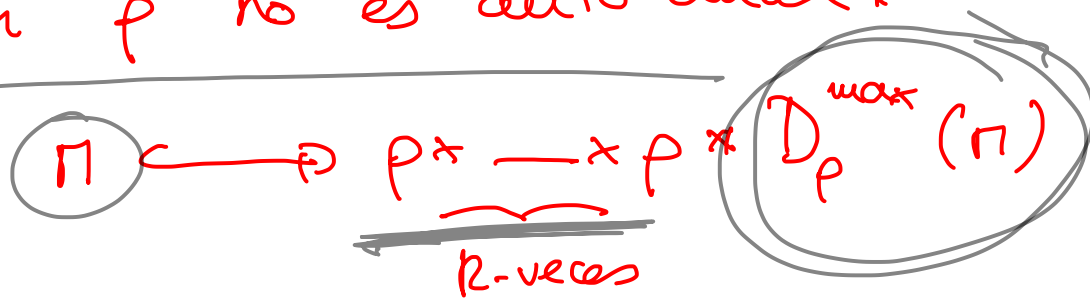
Def Si $D_\rho^{(k)}(\pi) \neq 0$ y $D_\rho^{(k+1)}(\pi) = 0$, llamamos $D_\rho^{(k)}(\pi)$ máxima ρ -derivada ($D_\rho^{\max}(\pi)$)

Prop $D_\rho^{(k)}(\hat{\pi}) = D_{\rho^v}^{(k)}(\pi)$

- $D_\rho^{\max}(\pi)$ irreducible?
- Formula explícita $D_\rho^{\max}(\pi)$?
- Podemos recuperar π a partir de $D_\rho^{\max}(\pi)$?

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\text{exp}} & D_\rho(\pi) \\ & \nearrow \wedge & \downarrow \wedge \\ \hat{\pi} & \xrightarrow{\text{exp}} & D_{\rho^v}(\hat{\pi}) \end{array}$$

✓ si p no es auto-dual.



~> Podemos asumir que $D_p(\pi) \neq 0 \Rightarrow p$ autodual
(decimos entonces que π es "rara")

~> Para las representaciones raras:

- Cálculo explícito (π temperada)
- $[0, 1]$ -derivadas (técnico).

~> Completa el algoritmo.

Remarca: La técnica de las p -derivadas y las $[0, 1]$ -derivadas (en el caso raro) permite determinar explícitamente cualquier representación inductivamente.

Correspondencia theta explícita

Ejemplo

Consideremos el caso $\rho = 1$:

$$\text{Sea } \pi(d_1^{p_1}, \dots, d_r^{p_r}) = \pi(\phi, \rho)$$

$$\text{con } \phi = \bigoplus_{i=1}^r S_{d_i}$$

$$\rho(S_{d_i}) = \rho_i \in \{\pm 1\}$$

$$\in \text{Irr}_{\text{temp}}(Sp_{14}(F))$$

$$1 \cdot 1^2 : F^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

$$\pi(1^-, 1^-, 3^+, 5^-, 5^-)$$

$$\downarrow D_{11^2}^{(1)}$$

$$L(\Delta[1, -2]; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\downarrow D_{11^1}^{(1)}$$

$$L(\Delta[0, -2]; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\downarrow D_{[0, -1]}^{(1)}$$

$$L(1^{-2}; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\downarrow D_{11^{-2}}^{(1)}$$

$$\pi(1^-, 1^-, 3^+)$$

$$L(11^{-2}, 11^{-1}, \Delta[0, -2]; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\uparrow \Delta_{\mathbb{C}}(11^{-2}x -)$$

$$L(11^{-1}, \Delta[0, -2]; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\uparrow \Delta_{\mathbb{C}}(11^{-1}x -)$$

$$L(\Delta[0, -2]; \pi(1^-, 1^-, 3^+))$$

$$\uparrow \Delta_{\mathbb{C}}[0, 1]_p x -$$

$$L(\Delta[0, -2]; \pi(1^+))$$

$$\uparrow \Delta_{\mathbb{C}}(11^2x -)$$

$$L(\Delta[0, -1]; \pi(1^+))$$

explicito