Del teorema de Merel a una conjetura sobre grupos de Brauer de superficies K3

Anthony Várilly-Alvarado
Rice University

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números
4 de Marzo, 2021

Torsión en curvas elípticas

$E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica:

$$y^2 = x^3 + Ax + B \qquad 4A^3 + 27B^2 \neq 0.$$

Teorema (Mordell, 1922)

$E(\mathbb{Q}) \simeq E(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \times \mathbb{Z}^r.$

Teorema (Mazur, 1977)

$E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ *es isomorfo a uno de los siguientes 15 grupos*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad 1 \leq n \leq 10, \text{ or } n = 12, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \quad 1 \leq n \leq 4.$$

Torsión en curvas elípticas

Teorema (Merel, 1996)

Para cada $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ existe un entero $c = c(d)$ tal que:

Para todo cuerpo de números k con $[k : \mathbb{Q}] = d$ y toda curva elíptica E/k,

$$\#E(k)_{\mathrm{tors}} < c.$$

Pregunta

¿Existe acaso un Teorema de Merel para superficies algebraicas?

Curvas elípticas: $\omega_E \simeq \mathscr{O}_E$.

Consideremos superficies X benévolas tales que $\omega_X \simeq \mathscr{O}_X$.

Superficies benévolas tales que $\omega_X \simeq \mathscr{O}_X$

Benévola: proyectiva, suave, y geométricamente íntegra.

Dos tipos:

- Superficies geométricamente abelianas: $h^1(X, \mathscr{O}_X) = 2$.
- Superficies K3: $h^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, por ejemplo:
  1. $w^2 = x^6 + y^6 + z^6$ en $\mathbb{P}(1,1,1,3)$ (grado 2).
  2. $x^4 + y^4 = z^4 + w^4$ en $\mathbb{P}^3$ (grado 4).

Problema: Las superficies K3 no poseen una estructura de grupos.

¿Con qué reemplazamos $E(k)_{\text{tors}}$?

Exégesis de $E(k)_{\text{tors}}$

$$\begin{aligned}
E(k)_{\text{tors}} &\simeq (\operatorname{Pic}^0 E)_{\text{tors}} \\
&= (\operatorname{Pic} E)_{\text{tors}} \\
&\simeq \mathrm{H}^1(E, \mathscr{O}_E^\times)_{\text{tors}} \\
&\simeq \mathrm{H}^1_{\text{et}}(E, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \\
&\simeq \operatorname{im}\left(\mathrm{H}^1_{\text{et}}(E, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \to \mathrm{H}^1_{\text{et}}(\overline{E}, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}}\right)
\end{aligned}$$

Nótese que el Teorema 90 de Hilbert implica que

$$\ker\left(\mathrm{H}^1_{\text{et}}(E, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}} \to \mathrm{H}^1_{\text{et}}(\overline{E}, \mathbb{G}_m)_{\text{tors}}\right) \simeq \mathrm{H}^1_{\text{et}}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{G}_m) = 0.$$

Grupo de Brauer trascendente

Para una superficie K3 sobre un cuerpo numérico k, usamos

$$\operatorname{im}\big(\underbrace{\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}}}_{\mathrm{Br}(X)} \to \underbrace{\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(\overline{X},\mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}}}_{\mathrm{Br}(\overline{X})}\big)$$

Primer teorema de isomorfía:

$$\operatorname{im}\big(\mathrm{Br}(X)\to\mathrm{Br}(\overline{X})\big) \cong \mathrm{Br}(X)/\underbrace{\ker\big(\mathrm{Br}(X)\to\mathrm{Br}(\overline{X})\big)}_{\mathrm{Br}_1(X)}$$

$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$ es el grupo de Brauer trascendente de X.

¿Importa $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$?

El grupo de Brauer posee una filtración

$$\underbrace{\mathrm{Br}_0(X)}_{\mathrm{im}\left(\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}\,k)\to\mathrm{Br}(X)\right)} \subseteq \underbrace{\mathrm{Br}_1(X)}_{\ker\left(\mathrm{Br}(X)\to\mathrm{Br}(\bar{X})\right)} \subseteq \mathrm{Br}(X)$$

Conjetura (Skorogobatov 2009)

El grupo $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_0(X)$ *controla los fallos del principio de Hasse para superficies K3 sobre cuerpos de números.*

Pronto retomaremos el cociente $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X)$.

¿Es acaso $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$ un grupo finito?

$E(k)_{\mathrm{tors}}$ es un grupo finito.
¿Es acaso su análogo $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$ para superficies K3 finito?

Hay razón para preocuparse: Sea X K3, $k = \bar{k}$ y $\operatorname{car} k = 0$. Entonces

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Br}(X) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{22-\rho} \quad \rho = \operatorname{rk}\mathrm{NS}(X)$$

Por otro lado, tenemos que $E(k)_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$.

Theorem (Skorobogatov–Zarhin 2008)

Sea $k/\mathbb{Q}$ un cuerpo finitamente generado; sea X/k una K3.
El grupo $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$ es finito.

Conjeturas sobre cotas uniformes

Para cada $X/\mathbb{C}$ K3 tenemos que $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z}) \simeq U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$.

Llamamos $\Lambda_{K3} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ el retículo K3.

$NS(X) = \mathrm{Pic}(X)$ se incrusta primitivamente en $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$.

Conjetura (Cotas uniformes, versión débil (V.-A. 2015))

Sea k un cuerpo de números y sea $\Lambda \subset \Lambda_{K3}$ un subretículo primitivo.
Entonces existe un entero $B = B(k,\Lambda)$ tal que:
Para toda superficie K3 X/k con $\Lambda \hookrightarrow \mathrm{NS}(X)$, tenemos que

$$\#\,\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X) < B.$$

Comentarios

- Podriamos sustituir $B(k, \Lambda)$ por $B([k : \mathbb{Q}], \Lambda)$ (cotas uniformes, versión fuerte).
- Conjetura de Shafarevich, versión débil (1994):
  Para cada cuerpo de números k existen solo un número finito de posibles subretículos Λ.

  $\Longrightarrow$ podemos prescinder de Λ en la conjetura.
- Conjetura de Shafarevich, versión fuerte (1994):
  Dado $[k : \mathbb{Q}]$ existen solo un número finito de posibles subretículos Λ.

  $\Longrightarrow$ podemos prescinder de Λ en la versión fuerte de la conjectura.

Versión fuerte de la conjetura

Conjetura (cotas superiores fuerte + Shafarevich fuerte)

Sea $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces existe un entero $B = B(d)$ tal que:

Para todo cuerpo de números k con $[k : \mathbb{Q}] = d$ y toda K3 X/k,

$$\# \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X) < B.$$

Esta conjetura es el enunciado análogo en el contexto K3 del Teorema de Merel.

¿Qué pasó con el grupo $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X)$?

Lema

Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo k de característica 0. Asúmase que $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \simeq \mathbb{Z}^r$. Entonces existe un entero $M = M(r)$, independiente de X, tal que $\#\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X) < M$.

Idea de la demostración.

1. Pase a una extensión de Galois finita K/k tal que $\mathrm{Pic}(X_K) \cong \mathbb{Z}^r$.
2. Hochschild–Serre $\Longrightarrow \mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathbb{Z}^r)$.
3. $$\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^r) \simeq \frac{(\mathbb{Z}^r/|G|)^G}{(\mathbb{Z}^r)^G/(|G|)} \text{ donde } G = \mathrm{Gal}(K/k).$$

   $\Longrightarrow \#\mathrm{H}^1(G, \mathbb{Z}^r)$ divide $\#G^r$, indep. de la acción.
4. G actua a través de un subgrupo finito de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$.

¿Qué pasó con el grupo $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X)$?

Lema

Sea X una variedad algebraica sobre un cuerpo k de característica 0. Asúmase que $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \simeq \mathbb{Z}^r$. Entonces existe un entero $M = M(r)$, independiente de X, tal que $\#\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X) < M$.

Corolario

Existe una constante absoluta M tal que, para toda X K3 sobre un cuerpo de característica 0, tenemos que

$$\#\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0(X) < M.$$

Componentes ℓ-primarias: ¿una conjetura más accesible?

Conjetura (cotas uniformes de componentes ℓ-primarias)

Sea k un cuerpo de números, ℓ un entero primo, y sea $\Lambda \subset \Lambda_{K3}$ un subretículo primitivo.

Entonces existe un entero $B = B(k, \Lambda, \ell)$ tal que:

Para toda superficie K3 X/k con $\Lambda \hookrightarrow \mathrm{NS}(X)$, tenemos que

$$\# \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)[\ell^\infty] < B.$$

Versión fuerte: reemplaze $B(k, \Lambda, \ell)$ con $B([k : \mathbb{Q}], \Lambda, \ell)$.

En fin, antes Merel, vino Manin...

Teorema (Manin 1969)

Sea k un cuerpo de números, y sea ℓ un primo. Entonces existe un entero $c = c(k, \ell)$ tal que, para toda curva elíptica E/k,

$$\# E(k)[\ell^\infty] < c.$$

Evidencia

I Dimension de Kodaira de espacios de moduli pertinentes.

Trabajos con Tanimoto ('19) y Mckinnie/Sawon/Tanimoto ('17).

II Análogos condicionales con estructuras de nivel sobre variedades abelianas.

Trabajos con Abramovich ('17,'18,'19).

III Cases especiales:

i. Verificación (ℓ-primaria) para ciertos retículos Λ de alto rango. Trabajo con Viray ('17). Balestrieri/Johnson/Newton ('20)

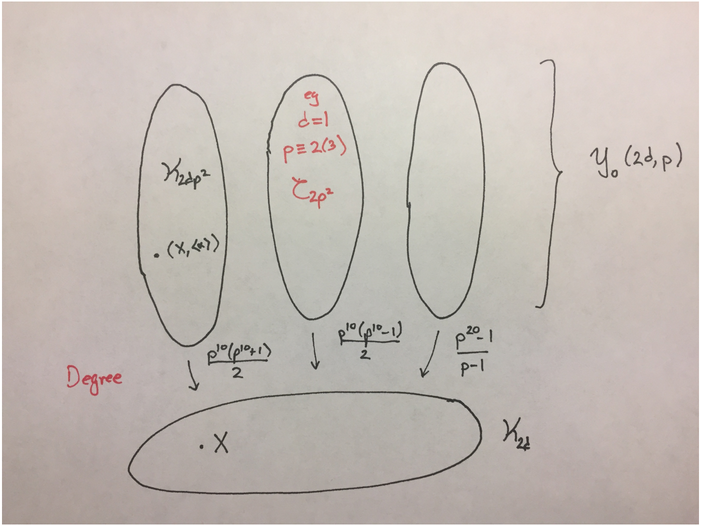
ii. K3 con multiplicación compleja. Orr/Skorobogatov ('18)

iii. Cotas para componentes ℓ-primarias en familias 1-dimensionales de K3. Cadoret/Charles ('20)

IV Conexiones con otras conjeturas. Orr/Skorobogatov/Zarhin

I. Trabajo con McKinnie, Sawon, y Tanimoto (2017)

Sea $p \nmid d$ un primo impar. Estructura "muy general":



II. Estructuras plenas de nivel sobre variedades abelianas

$A :=$ variedad abeliana de dim. g sobre un cuerpo de números k.

Una estructura plena de nivel m sobre A es un isomorfismo de k-esquemas en grupos

$$A[m] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^g \times (\mu_m)^g$$

(no necesariamente compatible con el pairing de Weil).

Theorem (Abramovich, V.-A. 2018)

Asúmase la conjectura de Lang.

Fíjese $g \in \mathbb{Z}_{>0}$, un primo ℓ y un cuerpo de números k.

Existe un entero $r = r(k, g, \ell)$ tal que no hay variedades abelianas sobre k de dimensión g con una estructura plena de nivel ℓ^r.

II. Estructuras plenas de nivel sobre variedades abelianas

Conjectura de Lang: dado una variedad benévola X de tipo general y dimensión positiva sobre un cuerpo de números k, el conjunto de puntos racionales $X(k)$ no es denso en la topología de Zariski.

Motor de la demostración:

$\pi_m : \mathscr{A}_g^{[m]} \to \mathscr{A}_g$: el mapa (finito) que olvida la estructura de nivel.

Teorema (Abramovich, V.-A. 2018; Brunebarbe 2020)

Sea $X \subset \mathscr{A}_g$ una subvariedad cerrada.

Existe un entero m_X tal que, para todo $m > m_X$,

cada componente irreducible de $\pi_m^{-1}(X) \subset \mathscr{A}_g^{[m]}$ es de tipo general.

III. Casos Especiales

Sean E y E' dos curvas elípticas sobre un cuerpo de números k, sin MC, con una isogenia cíclica de grado mínimo d entre ellas.

Sea $X = \mathrm{Kum}(E \times E') = (\widetilde{E \times E'})/\iota$, donde $\iota\colon x \mapsto -x$.

Sea $\Lambda_d = \mathrm{NS}(\overline{X})$.

Λ_d tiene rango 19, disc. $2d$, y es indep. de E, E' y de la isogenia.

Teorema (V.-A., Viray 2017)

Sea r un entero positivo y ℓ un número primo.

Existe un entero positivo $B = B(r, d, \ell)$ tal que

para toda K3 X/k con $[k : \mathbb{Q}] = r$ y $\mathrm{NS}(\overline{X}) \simeq \Lambda_d$,

$$\#\left(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)\right)[\ell^\infty] < B.$$

IV. Conexiones con otras conjecturas

Conjetura (Coleman c. 1994)

Sean d y g enteros positivos.
Considere toda variedad abeliana A de dimensión g sobre cuerpos de números de grado d.
Entonces las clases de isomorfismo de los anillos $\mathrm{End}(\overline{A})$ *forman un conjunto finito.*

Teorema (Orr, Skorobogatov, Zarhin; en prensa)

La conjetura de Coleman implica la versión más fuerte de la conjetura sobre grupos de Brauer de superficies K3.