Superficies K3, matrices de Hasse-Witt, y funciones hipergeométricas

Adriana Salerno
asalerno@bates.edu

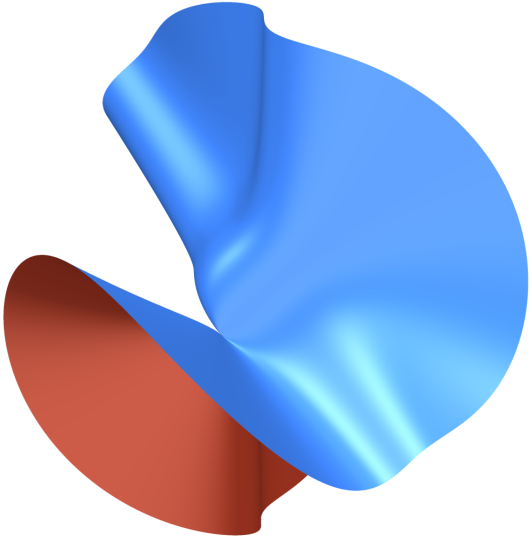
Bates College

19 de Noviembre, 2020

Colaboración con...

La idea principal

Demostrar teoremas artiméticos utilizando simetría especular.



La matriz de Hasse-Witt

Sea X una variedad "smooth" sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, donde $q = p^a$. Entonces, el operador de Frobenius $\mathcal{F}$ induce un mapa a p-lineal

$$H^n(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^n(X, \mathcal{O}_X).$$

La matriz de Hasse-Witt $\mathrm{HW}_p(X)$ es la matriz de este mapa (en alguna base).

La matriz de Hasse-Witt para variedades Calabi-Yau

- Toda variedad Calabi-Yau X satisface que $H^n(X, \mathcal{O}_X)$ es unidimensional.
- La "matriz" de Hasse-Witt es también unidimensional (o sea, podríamos llamarla la constante de Hasse-Witt).

El número de puntos $\pmod{p}$

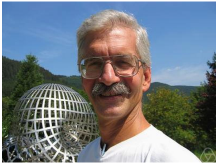


Figure: Nick Katz (Oberwolfach)

Una fórmula de Katz implica...

La matriz de Hasse-Witt de una variedad Calabi–Yau determina su número de puntos $\pmod{p}$.

El algoritmo de Katz

Sea X una hipersuperficie de Calabi-Yau en $\mathbb{P}^n$ dada por una ecuación f. Entonces la matriz de Hasse–Witt $\mathrm{HW}_p(X)$ es determinada por el coeficiente $(x_0 \cdots x_n)^{p-1}$ en f^{p-1}.

Katz y la familia de Fermat/Dwork

Consideremos la familia X_ψ de hipersuperficies Calabi–Yau en $\mathbb{P}^n$ dada por

$$x_0^{n+1} + x_1^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} - (n+1)\psi x_0 \ldots x_n = 0.$$

Si $n+1$ y p son coprimos, entonces $\mathrm{HW}_p(X)$ es dada por una serie hipergeométrica truncada.

Funciones y ecuaciones hipergeométricas

Para la familia Fermat X_ψ de hipersuperficies Calabi-Yau en $\mathbb{P}^n$:

- La ecuación de Picard-Fuchs es una ecuación diferencial hipergeométrica.
- La solución jolomórfica de esta ecuación de Picard-Fuchs es una serie hipergeométrica.
- Truncar esta serie nos da $\mathrm{HW}_p(X)$.

Teoría de cuerdas

Localmente, "space-time" es

$$M_{3,1} \times V.$$

- $M_{3,1}$ "space-time" de cuatro dimensiones
- V es una variedad compleja de dimensión d
- En física se requiere $d = 3$ (6 real dimensions)
- V es una variedad Calabi-Yau

Simetría especular (Simetría de espejo)

Los físicos dicen . . .

- Las variedades de Calabi-Yau aparecen en pares (V, V°).
- Los universos descritos por $M_{3,1} \times V$ y $M_{3,1} \times V^\circ$ tienen la misma física observable.

Los matemáticos dicen . . .

- Las variedades de Calabi-Yau aparecen en pares de familias $(V_\alpha, V^\circ_\alpha)$.
- La simetría espacular intercambia las estructuras complejas y las simplécticas.
- Se pueden relacionar las variaciones de estructuras complejas y simplécticas.

Aritmética en la familia de Fermat de grado 5

Figure: Philip Candelas

Figure: Xenia de la Ossa

Figure: Fernando Rodríguez Villegas

Simetría especular de Greene–Plesser

- Queremos obtener el espejo de “smooth quintics” en $\mathbb{P}^4$

Simetría especular de Greene–Plesser

- Queremos obtener el espejo de "smooth quintics" en $\mathbb{P}^4$
- Consideramos la familia de Fermat X_ψ dada por

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5\psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

Simetría especular de Greene–Plesser

- Queremos obtener el espejo de "smooth quintics" en $\mathbb{P}^4$
- Consideramos la familia de Fermat X_ψ dada por

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5\psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

- Esta familia permite una acción por el grupo $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$

Simetría especular de Greene–Plesser

- Queremos obtener el espejo de "smooth quintics" en $\mathbb{P}^4$
- Consideramos la familia de Fermat X_ψ dada por

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5\psi x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

- Esta familia permite una acción por el grupo $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$
- Tomando el cociente por la acción de grupo y resolviendo singularidades obtenemos la familia espejo Y_ψ.

Un patrón aritmético

Cuando $\psi \in \mathbb{Z}$, podemos comparar el número de puntos sobre X_ψ y su espejo Y_ψ sobre cuerpos finitos:

$$\#X_\psi(\mathbb{F}_q) \equiv \#Y_\psi(\mathbb{F}_q) \pmod{q}.$$

Otras dimensiones

Theorem (Wan '06)

Sea X_ψ la familia de Fermat de grado $n+1$ en $\mathbb{P}^n$, sea Y_ψ su espejo de Greene–Plesser. Entonces para $\psi \in \mathbb{F}_q$ tal que X_ψ y Y_ψ son "smooth",

$$\#X_\psi(\mathbb{F}_{q^k}) \equiv \#Y_\psi(\mathbb{F}_{q^k}) \pmod{q^k}.$$

Figure: Daqing Wan

Una definición importante ...

Definition (Magyar–Whitcher '18)

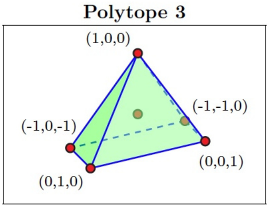
Sean X_ψ y Y_ψ un par especular de familias "smooth" de Calabi-Yau definidas sobre $\mathbb{Q}$. Supongamos que para cualquier primo p donde X_ψ y Y_ψ son de buena reducción y cualquier cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ de característica p y órden q,

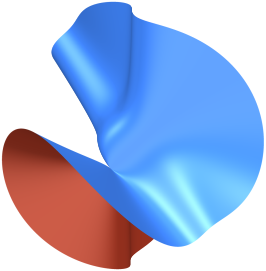
$$\#X_\psi(\mathbb{F}_q) \equiv \#Y_\psi(\mathbb{F}_q) \pmod{q}.$$

Entonces X_ψ y Y_ψ tienen *strong arithmetic mirror symmetry* (simetría especular aritmética fuerte?) y son un *par especular fuerte*.

Este proyecto: explorar consecuencias tóricas

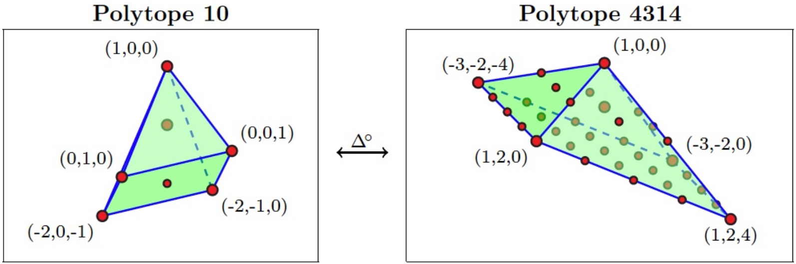
Queremos demostrar "strong arithmetic mirror symmetry" para ciertas familias de variedades Calabi-Yau realizadas como hipersuperficias tóricas.





La estrategia de Batyrev

Podemos describir familias especulares de variedades Calabi–Yau utilizando objectos combinatorios llamados reflexive polytopes (politopos reflexivos?).



Politopo reflexivo

Definition

Un politopo Δ sobre un látice se dice ser reflexivo si Δ° también es un politopo soibre un látice'

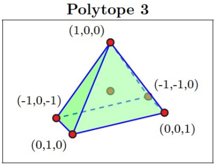
- Si Δ es reflexivo, $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$.
- Δ y Δ° son un par especular.

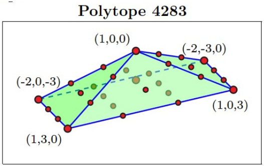
Politopo reflexivo

Definition

Un politopo Δ sobre un látice se dice ser reflexivo si Δ° también es un politopo soibre un látice'

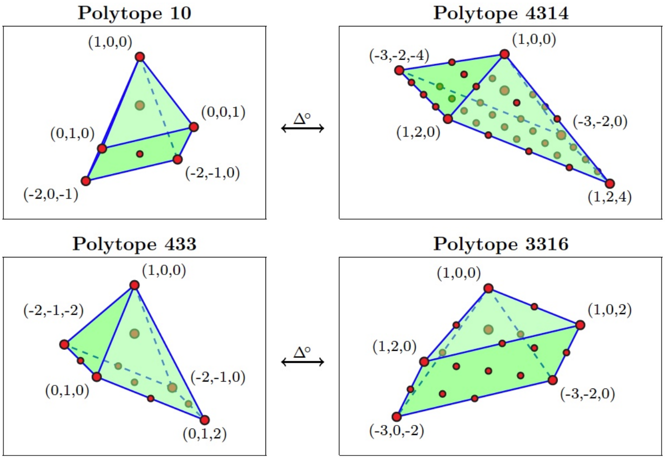
- Si Δ es reflexivo, $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$.
- Δ y Δ° son un par especular.





Politopos combinatoriamente equivalentes

Dos politopos se dicen combinatoriamente equivalente si hay una biyección entre sus faces que preserva inclusiones.



Resultado principal

Theorem (S, Whitcher '19)

Sean Δ y Γ politopos reflexivos de dimensión n combinatoriamente equivalentes. Sean $X_{\psi,\Delta}$ y $W_{\psi,\Gamma}$ hipersuperficies de Calabi-Yau correspondientes. Entonces:

1. *Si Δ° y Γ° satisfacen un criterio de cociente tórico, entonces para todo ψ las matrices de Hasse–Witt de $X_{\psi,\Delta}$ y $W_{\psi,\Gamma}$ son iguales.*
2. *Si Δ y Γ satisfacen un criterio de cociente tórico,entonces para todo ψ las matrices de Hasse–Witt de $X_{\psi,\Delta}$ y $W_{\psi,\Gamma}$ difieren $\pmod{p}$ por un entero N independiente de ψ:*

$$\mathrm{HW}_p(X_\psi) \equiv \mathrm{HW}_p(X_\psi) + N \pmod{p}.$$

Demostración via Picard-Fuchs

- Resultado de Huang-Lian-Yau-Yu '18 relaciona las matrices de Hasse-Witt a ecuaciones de Picard Fuchs.

Demostración via Picard-Fuchs

- Resultado de Huang-Lian-Yau-Yu '18 relaciona las matrices de Hasse-Witt a ecuaciones de Picard Fuchs.

Lemma (Magyar-Whitcher '18)

Sean Δ y Γ politopos reflexivos que satisfacen un criterio de cociente tórico. Entonces las ecuaciones de PF de $X_{\psi,\Delta}$ y $W_{\psi,\Gamma}$ son iguales.

-

Strong mirror symmetry

Corollary (S, Whitcher '19)

Sean Δ y Γ politopos reflexivos de dimensión n combinatoriamente equivalentes. Sean $X_{\psi,\Delta}$ y $W_{\psi,\Gamma}$ hipersuperficies de Calabi-Yau correspondientes. Si Δ° y Γ° satisfacen un criterio de cociente tórico, entonces para todo ψ las matrices de Hasse–Witt

$$\#X_{\psi,\Delta} \equiv \#W_{\psi,\Gamma} \pmod{p}.$$

Example: A grouping of combinatorially equivalent $K3$s

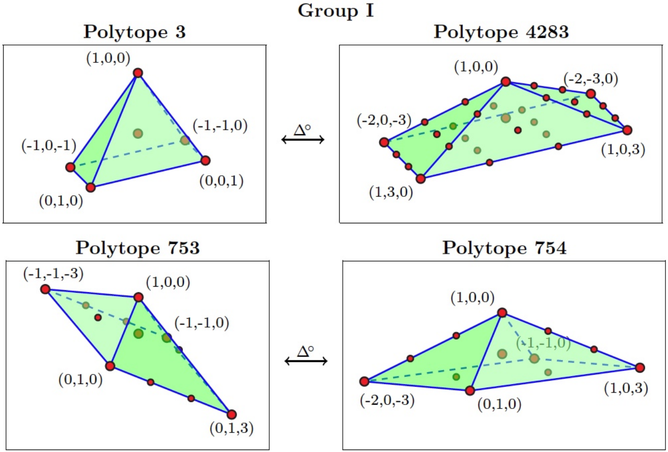


Figure: Magyar-Whitcher '18

From polytopes to hypersurfaces

Polytope 3:

$$\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 + z_2^3 z_4^3 + z_3^3 z_4^3 + z_2^3 z_5^3 + z_3^3 z_5^3 + z_1^3$$

Polytope 753:

$$z_{10} z_{11} z_3^3 z_5^3 z_6^3 z_7^3 + z_{10}^2 z_2^3 z_5^3 z_6^2 z_7 z_8^2 z_9 + z_{11}^2 z_3^3 z_4^3 z_6 z_7^2 z_8 z_9^2 + z_{10} z_{11} z_2^3 z_4^3 z_8^3 z_9^3$$
$$+\psi z_1 z_{10} z_{11} z_{12} z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 + z_1^3 z_{10} z_{11}$$

Picard Fuchs equation and point count

$$F'''(t) + \frac{6(t^3+27)}{t^4+108t}F''(t) + \frac{7t^2}{t^4+108t}F'(t) + \frac{t}{t^4+108t}F(t) = 0,$$

Picard Fuchs equation and point count

$$F'''(t) + \frac{6(t^3+27)}{t^4+108t} F''(t) + \frac{7t^2}{t^4+108t} F'(t) + \frac{t}{t^4+108t} F(t) = 0,$$

is equivalent to the hypergeometric differential equation satisfied by

$${}_3F_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \mid -\frac{t^3}{108}\right).$$

Picard Fuchs equation and point count

$$F'''(t) + \frac{6(t^3+27)}{t^4+108t}F''(t) + \frac{7t^2}{t^4+108t}F'(t) + \frac{t}{t^4+108t}F(t) = 0,$$

is equivalent to the hypergeometric differential equation satisfied by

$${}_3F_2\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{5}{6} \mid -\frac{t^3}{108}\right).$$

We match with HLYY coordinates (expanding around the point of maximally unipotent monodromy):

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3};1,1 \mid -\frac{108}{t^3}\right).$$

Picard Fuchs equation and point count

$$F'''(t) + \frac{6(t^3+27)}{t^4+108t}F''(t) + \frac{7t^2}{t^4+108t}F'(t) + \frac{t}{t^4+108t}F(t) = 0,$$

is equivalent to the hypergeometric differential equation satisfied by

$${}_3F_2\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{5}{6} \mid -\frac{t^3}{108}\right).$$

We match with HLYY coordinates (expanding around the point of maximally unipotent monodromy):

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3};1,1 \mid -\frac{108}{t^3}\right).$$

The point count is

$$\#X_t \equiv 1 + \left[{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3};1,1 \mid -\frac{108}{t^3}\right)\right]^{(p-1)} \bmod p.$$

Picard-Fuchs equations and symmetric squares

Theorem (Doran)

The Picard-Fuchs equation of a family of rank-19 lattice-polarized K3 surfaces can be written as the symmetric square of a second-order homogeneous linear Fuchsian differential equation.

Picard-Fuchs equations and symmetric squares

Theorem (Doran)

The Picard-Fuchs equation of a family of rank-19 lattice-polarized K3 surfaces can be written as the symmetric square of a second-order homogeneous linear Fuchsian differential equation.

The symmetric square root of the PF equation above is:

$$F''(t) + \frac{2t^3 + 54}{t^4 + 108t} F'(t) + \frac{t^2}{4(t^4 + 108t)} F(t) = 0$$

Picard-Fuchs equations and symmetric squares

Theorem (Doran)

The Picard-Fuchs equation of a family of rank-19 lattice-polarized K3 surfaces can be written as the symmetric square of a second-order homogeneous linear Fuchsian differential equation.

The symmetric square root of the PF equation above is:

$$F''(t) + \frac{2t^3 + 54}{t^4 + 108t} F'(t) + \frac{t^2}{4(t^4 + 108t)} F(t) = 0$$

which has hypergeometric solution:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{5}{6} \middle| -\frac{t^3}{108}\right)$$

Fun hypergeometric fact

Classical (c.f. Slater):

$$ {}_2F_1\left(a, b; a+b+\frac{1}{2} | z\right)^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2} | z\right) $$

Fun hypergeometric fact

Classical (c.f. Slater):

$$ {}_2F_1\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}|z\right)^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2}|z\right) $$

So

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{5}{6}| - \frac{t^3}{108}\right)^2 = {}_3F_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \mid -\frac{t^3}{108}\right) $$

Fun hypergeometric fact

Classical (c.f. Slater):

$$ {}_2F_1\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}|z\right)^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2}|z\right) $$

So

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{5}{6}| - \frac{t^3}{108}\right)^2 = {}_3F_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \mid -\frac{t^3}{108}\right) $$

The point count is a quadratic residue $\pmod{p}$!

Modularity!

Look up in J. Harnad CRM report '98, and then Conway & Norton (Monstrous Moonshine '79):

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6};\frac{5}{6}\middle| -108z^3\right) $$

is associated to the modular group $\Gamma_0(3)+$, meaning it has all of its Atkin Lehner involutions.

Gracias!