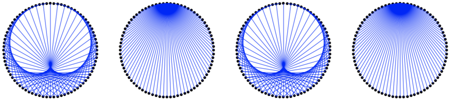
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS PUCV

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Sobre el Programa de Langlands y la Conjetura de Ramanujan Generalizada



2 0 2 0

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

Luis Lomelí

Instituto de Matemáticas PUCV

Los Números

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p \arrow[d] \\
\mathbb{Q} \arrow[d] & & \mathbb{F}_p[t] \arrow[d] \\
\mathbb{Q}_p, \mathbb{R} & & \mathbb{F}_p(t) \arrow[d] \\
 & & \mathbb{F}_p((t))
\end{tikzcd}$$

Los Números

Los dos caminos distintos, llevan a propiedades en común y tratamos en esta charla de manera paralela a a los *cuerpos globales:*

Característica 0	**Característica p**
$$\begin{array}{c} C \\ \big| \\ \mathbb{Q} \end{array}$$	$$\begin{array}{c} C \\ \big| \\ \mathbb{F}_p(t) \end{array}$$

En característica 0 tenemos a los cuerpos de números, y en característica p a los cuerpos de funciones.

Valuaciones

C un cuerpo global. $\mathcal{O}$ su de anillo de enteros. $\mathfrak{p}$ un ideal primo. Para cada valuación v, tenemos la completación

$$C \underset{\text{analítica}}{\overset{\text{localización}}{\rightsquigarrow}} C_v.$$

Cada ideal primo no trivial de $\mathcal{O}$, nos produce una valuación no arquimediana. Nosotros, escribimos

$$v \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O})$$

para referirnos a una valuación v que corresponde a un ideal primo, normalizada de acuerdo a

$$\left|C^{\times}\right|_v = \left|C_v^{\times}\right|_v = q_v^{\mathbb{Z}},$$

donde q_v es la cardinalidad del cuerpo residual $\kappa_v = \mathcal{O}_v \,/\, \mathfrak{p}_v$.

Valuaciones no-Arquimedianas

Sea E/C una extensión de cuerpo globales con anillos de enteros $\mathcal{O}$ y $\mathfrak{o}$, respectivamente. Para $v \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{o})$, tenemos

$$v \longleftrightarrow \mathfrak{p},$$

donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $\mathfrak{o}$. La factorización única de $\mathfrak{p}\,\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}$ nos conduce a valuaciones no arquimedianas arriba de v:

$$\mathfrak{p}\,\mathcal{O} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] w_1 \arrow[dr, dash] & \cdots & w_g \arrow[dl, dash] & \mathrm{Val}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}) \\ & v & & \mathrm{Val}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{o}) \end{tikzcd}$$

donde $w_i \longleftrightarrow \mathfrak{p}_i$, for $1 \le i \le g$. Escribimos

$$w|v.$$

Valuaciones Arquimedianas

Podemos denotar a las valuaciones en en infinito por medio de

$$\mathrm{Val}_\infty(C) \neq \emptyset \iff \mathrm{car}(C) = 0,$$

donde escribimos

$$v \mid \infty \iff v \in \mathrm{Val}_\infty(C).$$

Hay dos posibilidades

$$C_v = \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad C_v = \mathbb{C}\,.$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

Por ejemplo, si el cuerpo global es $C = \mathbb{Q}$, tenemos grupos de puntos racionales

$$G = \mathbf{G}\,(\,\mathbb{Q}\,)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

Por ejemplo, si el cuerpo global es $C = \mathbb{Q}$, tenemos grupos de puntos racionales

$$G = \mathbf{G}\left(\mathbb{Q}_p\right)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor **G** que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \leadsto \quad G = \mathbf{G}(R).$$

Por ejemplo, si el cuerpo global es $C = \mathbb{Q}$, tenemos grupos de puntos racionales

$$G = \mathbf{G}\,(\,\mathbb{R}\,)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor **G** que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

Por ejemplo, si el cuerpo global es $C = \mathbb{Q}$, tenemos grupos de puntos racionales

$$G = \mathbf{G}\,(\,\mathbb{C}\,)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor **G** que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\,(\,C\,)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor **G** que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\left(C_v\right)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\left(\overline{C}_v\right)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor **G** que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\left(\mathbb{C}_v\right)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\,(\,\mathcal{O}\,)$$

Esquemas de Grupos

Trabajamos sobre un esquema de grupo reductivo escindido (que tomamos definido sobre $\mathbb{Z}$), el cual es un funtor $\mathbf{G}$ que asigna a cada anillo R un grupo lineal algebraico

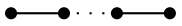
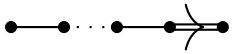
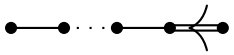
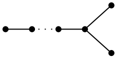
$$R \quad \rightsquigarrow \quad G = \mathbf{G}(R).$$

O sobre un cuerpo global C, donde tenemos

$$G = \mathbf{G}\left(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}\right)$$

Ejemplos de Esquemas de Grupos

El grupo general linear y los grupos clásicos:

$A_{\ell-1}$		$\mathbf{G}_\ell = \mathrm{GL}_\ell$
B_ℓ		$\mathbf{G}_\ell = \mathrm{SO}_{2\ell+1}$
C_ℓ		$\mathbf{G}_\ell = \mathrm{Sp}_{2\ell}$
D_ℓ		$\mathbf{G}_\ell = \mathrm{SO}_{2\ell}$

GL_1

Adèles:

Sobre $\mathbb{Q}$, la topología producto

$$\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Q}_p$$

no es localmente compacta.

Similarmente para un cuerpo global C, por lo que se define el producto restringido

$$\mathbb{A}_C = \prod_{v \in \mathrm{Val}_\infty} C_v \prod_{v \in \mathrm{Val}_\mathfrak{p}}{}'(C_v : \mathcal{O}_v).$$

Por ejemplo, un elemento $x \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ tiene $x = (x_\infty, x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots)$, donde $x_p \in \mathbb{Z}_p$ para casi toda valuación $v \in \mathrm{Val}_\mathfrak{p}$.

GL_1

Por medio de la celebrada tesis de Tate, podemos hacer Análisis de Fourier sobre los adèles de un cuerpo global. Aquí, requerimos de un carácter

$$\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad \psi = \otimes \psi_v.$$

Donde el producto tensorial varía sobre todas las valuaciones v, e incluimos a $v = \infty$. Para cada v, Tate define factores ε

$$\varepsilon(s, \chi_v, \psi_v).$$

Theorem (Tate)

Let $\chi = \otimes' \chi_v$ *be an automorphic representation of* $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$*, i.e., un Grössencharakter. Si*

$$L(s, \chi) = \prod_v L(s, \chi_v) \quad y \quad \varepsilon(s, \chi) = \prod_v \varepsilon(s, \chi_v, \psi_v),$$

GL_1

Por medio de la celebrada tesis de Tate, podemos hacer Análisis de Fourier sobre los adèles de un cuerpo global. Aquí, requerimos de un carácter

$$\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad \psi = \otimes \psi_v.$$

Donde el producto tensorial varía sobre todas las valuaciones v, e incluimos a $v = \infty$. Para cada v, Tate define factores ε

$$\varepsilon(s, \chi_v, \psi_v).$$

Theorem (Tate)

Let $\chi = \otimes' \chi_v$ be an automorphic representation of $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$, i.e., un Grössencharakter. Si

$$L(s, \chi) = \prod_v L(s, \chi_v) \quad y \quad \varepsilon(s, \chi) = \prod_v \varepsilon(s, \chi_v, \psi_v),$$

$$L(s, \chi) = \varepsilon(s, \chi) L(1 - s, \chi^{-1}).$$

Representaciones Automorfas

Tomanodo a $\mathbf{G}$ un esquema de grupo reductivo (escindido), definido sobre un cuerpo global C con adéles $\mathbb{A}$, estudiamos a

$$G = \mathbf{G}(\mathbb{A}).$$

Para el subgrupo $\Gamma = \mathbf{Z}(\mathbb{A})\mathbf{G}(C)$ de G, Langlands realizó un

estudio de las series de Einsenstein series, donde una representación automorfa ocurre como una componente irreducible de la representación regular del espacio $\mathscr{L}^2$ de funciones con valores complejos

$$\mathscr{L}^2(\Gamma \backslash G) = \mathscr{L}^2(\Gamma \backslash G)_{\mathrm{disc}} \oplus \mathscr{L}^2(\Gamma \backslash G)_{\mathrm{cont}},$$

¿Formas modulares?

Si tomamos $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, con el subgrupo principal de congruencia $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Las formas modulares viven dentro del espectro discreto $\mathscr{L}^2(\Gamma\backslash G)_{\mathrm{disc}}$. De particular interés es la forma modular de Ramanujan de peso 12

$$\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n,$$

donde $q = \exp(2\pi iz)$ y z es una variable en el espacio hiperbólico $\mathfrak{h}$. Los coeficientes $\tau(n)$ que aparecen en la expansión de Fourier de $\Delta(z)$ dan la función τ de Ramanujan. Es multiplicativa y satisface en primos:

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1}).$$

La conjetura original de Ramanujan se enuncia:

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}},$$

Correspondencia de Langlands Global

Para el grupo adélico $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ y $\Gamma = \mathbf{Z}(\mathbb{A})\mathrm{GL}_n(C)$, la correspondencia global de Langlands predice

$$\left\{ \begin{array}{c} \Pi \text{ una representación cuspidal} \\ \text{automorfa de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_C) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Phi_\Pi : \mathcal{L} \to {}^L\mathrm{GL}_n \text{ un} \\ L\text{-parámetro irreducible} \end{array} \right\}$$

la cual, concuerda retroactivamente con el caso abeliano de GL_1. Si C es un cuerpo de funciones, el grupo $\mathcal{L}$ es básicamente el grupo de Weil $\mathcal{W}$ y la correspondencia es un resultado de V. G. Drinfeld para GL_2 y de L. Lafforgue for GL_n. El caso de un cuerpo de números C sigue abierto, y cuando se resuelva el problema se conocerá el grupo conjetural $\mathcal{L}$ asociado al grupo absoluto de Galois.associated to the absolute Galois.

La correspondencia debe ser de tal forma que se preserva la información aritmética que contienen las funciones L y factores ε. El la izquierda se tienen funciones L automorfas que genralizan las de Hecke-Tate, y por la derecha funciones L de Artin.

Correspondencia de Langlands local

Además, se debe concordar con la correspondencia de Langlands para $\mathrm{GL}_n(F)$, sobre un cuerpo local no arquimediano F, donde se conoce la biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi \text{ una representación irreducible} \\ \text{admisible de } \mathrm{GL}_n(F) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \phi_\pi : \mathcal{W}'_F \to {}^L\mathrm{GL}_n \\ \text{un } L\text{-parámetro} \end{array} \right\},$$

donde se utiliza el grupo de Weil-Deligne $\mathcal{W}'_F$ del lado de Galois.
La correspondencia es carcterizada únicamente al preservar funciones L y factores ε locales.
Esta correspondencia se conoce gracias a Harris-Taylor y Henniart, y también se cuenta con una demostración de Scholze.

Funtorialidad de Langlands y Ramanujan

Aquí hay varios enfoques hacia la funtorialidad, donde se conoce el caso de los grupos clásicos. Pasamos ahora a la pizarra para hablar sobre estas conjeturas y las funciones L automorfas.

Para las notas correspondientes, se puede consultar el artículo survey:

- *Langlands Program and Ramanujan Conjecture: a survey*, to appear in Contemporary Mathematics AMS. http://arxiv.org/abs/1812.05203