Algunas Consecuencias del Teorema de Ax-Schanuel para la función j

Sebastian Eterović

University of California, Berkeley

Septiembre 2020

La función $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que clasifica clases de isomorfismo de curvas elípticas.

La función $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que clasifica clases de isomorfismo de curvas elípticas.

Sea $\{\Phi_N(X,Y)\}_{N=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}[X,Y]$ la familia de *polinomios modulares*.

- $\Phi_N(X,Y)$ es un irreducible en $\mathbb{C}[X,Y]$.
- $\Phi_1(X,Y) = X - Y$.
- Para $N \geq 2$, $\Phi_N(X,Y)$ es simétrico y de grado total $\geq 2N$.

La función $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que clasifica clases de isomorfismo de curvas elípticas.

Sea $\{\Phi_N(X,Y)\}_{N=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}[X,Y]$ la familia de *polinomios modulares*.

- $\Phi_N(X,Y)$ es un irreducible en $\mathbb{C}[X,Y]$.
- $\Phi_1(X,Y) = X - Y$.
- Para $N \geq 2$, $\Phi_N(X,Y)$ es simétrico y de grado total $\geq 2N$.

Para todo $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ sea $\mathrm{red}(g)$ la única matriz de la forma rg con $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que la entradas de rg enteras y relativamente coprimos. Entonces, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, las siguiente afirmacions son equivalentes:

(M1): $\Phi_N(j(z_1), j(z_2)) = 0$,

(M2): $gz_1 = z_2$ para algún $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ con $\det(\mathrm{red}(g)) = N$.

La función j

La función j satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{j'''}{j'} - \frac{3}{2}\left(\frac{j''}{j'}\right)^2 + \frac{j^2 - 1968j + 2654208}{2j^2(j-1728)^2} \cdot (j')^2 = 0.$$

Sea $\Psi(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathbb{Q}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ la función racional que satisface $\Psi(j, j', j,'', j''') = 0$.

La función j satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{j'''}{j'} - \frac{3}{2}\left(\frac{j''}{j'}\right)^2 + \frac{j^2 - 1968j + 2654208}{2j^2(j-1728)^2} \cdot (j')^2 = 0.$$

Sea $\Psi(X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathbb{Q}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ la función racional que satisface $\Psi(j, j', j,'', j''') = 0$.

Denotaremos por $\mathbf{j} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^3$ la función $\mathbf{j}(z) := (j(z), j'(z), j''(z))$.

Variedades especiales y débilmente especiales

Para todo $z \in \mathbb{H}$ se tiene que $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z, j(z)) = 0 \iff z$ is cuadrático sobre $\mathbb{Q} \iff$ la curva elíptica asociada a z tiene multiplicación compleja.

Variedades especiales y débilmente especiales

Para todo $z \in \mathbb{H}$ se tiene que $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z, j(z)) = 0 \iff z$ is cuadrático sobre $\mathbb{Q} \iff$ la curva elíptica asociada a z tiene multiplicación compleja.

Una variedad algebraica $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice *débilmente especial* si está definida solo por ecuaciones de la forma $\Phi_N(X_i, X_k) = 0$ y $X_\ell = c$, para algún $c \in \mathbb{C}$.

Variedades especiales y débilmente especiales

Para todo $z \in \mathbb{H}$ se tiene que $\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z, j(z)) = 0 \iff z$ is cuadrático sobre $\mathbb{Q} \iff$ la curva elíptica asociada a z tiene multiplicación compleja.

Una variedad algebraica $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice *débilmente especial* si está definida solo por ecuaciones de la forma $\Phi_N(X_i, X_k) = 0$ y $X_\ell = c$, para algún $c \in \mathbb{C}$.

V se dice *especial* si es débilmente especial y si todo hiperplano de la forma $X_\ell = c$ que contiene a V, satisface que $c = j(z)$ para algún z cuadrático.

Sea $E_j \subset \mathbb{C}^2$ el grafo de la función j, y E_j^n el grafo de $j : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^n$. Sea $\pi_2 : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ la proyección sobre las últimas coordenadas.

Sea $E_j \subset \mathbb{C}^2$ el grafo de la función j, y E_j^n el grafo de $j : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^n$. Sea $\pi_2 : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ la proyección sobre las últimas coordenadas.

Teorema (Pila-Tsimerman, 2016)

Sea $V \subset \mathbb{C}^{2n}$ una variedad algebraica, y sea U una componente de $V \cap E_j^n$. Entonces:

$$\dim U = \dim V - n,$$

a menos que $\pi_2(U)$ está contenido en una subvariedad propia débilmente especial de $\mathbb{C}^n$.

Para una variedad analítica compleja M, sea $J_k M$ el k-ésimo *jet-space* de M.

Teorema (Pila-Tsimerman, 2016)

Sea $V \subset J_2\mathbb{H}^n \times J_2\mathbb{C}^n$ una variedad algebraica, y sea U una componente de $V \cap J_2 E_j^n$. Entonces

$$\dim U = \dim V - 3n,$$

a menos que la proyección de U a $\mathbb{C}^n$ esté contenida en una subvariedad propia débilmente especial, o alguna de las proyecciones de U a $J_2\mathbb{H}$ está contenida en $J_2^0\mathbb{H}$.

Teorema de Ax-Schanuel para j

Versión diferencial

Dos puntos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ se dicen *modularmente independientes* si para todo N se tiene que $\Phi_N(w_1, w_2) \neq 0$.

Teorema (Pila-Tsimerman, 2016)

Sea $(K; \partial_1, \ldots, \partial_m)$ *un cuerpo diferencial de característica 0, donde* $\partial_1, \ldots, \partial_m$ *son derivaciones que conmutan, sea* $C = \bigcap_{k=1}^m \ker \partial_k$*, y sean* $z_i, j_i, j_i', j_i', j_i''' \in K^\times$*,* $i = 1, \ldots, n$*, tales que para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *y todo* $k \in \{1, \ldots, m\}$*:*

$$\Psi\left(j_i, j_i', j_i'', j_i'''\right) = 0 \wedge \partial_k j_i = j_i' \partial_k z_i \wedge \partial_k j_i' = j_i'' \partial_k z_i \wedge \partial_k j_i'' = j_i''' \partial_k z_i.$$

Si $\{j_1, \ldots, j_n\}$ *es modularmente independiente (dos a dos), entonces*

$$\mathrm{tr.deg.}_C C\left(z_1, \ldots, z_n, j_1, \ldots, j_n, j_1', \ldots, j_n', j_1'', \ldots, j_n''\right) \geq 3n + \mathrm{ran}(\partial_k z_i)_{i,k}.$$

Problemas que discutiremos hoy

- Clausura existencial.
- La conjetura de Schanuel modular.
- La conjetura de Zilber-Pink para j.

Clausura existencial

Encontrar una conjunto minimal de condiciones geométricas que una variedad $V \subset \mathbb{C}^{2n}$ debe satisfacer para asegurar que para todo cuerpo finitamente generado $F \subset \mathbb{C}$ existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ tales que $(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) \in V$ y

$$\mathrm{tr.deg.}_F F(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) = \dim V.$$

Clausura existencial

Encontrar una conjunto minimal de condiciones geométricas que una variedad $V \subset \mathbb{C}^{2n}$ debe satisfacer para asegurar que para todo cuerpo finitamente generado $F \subset \mathbb{C}$ existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ tales que $(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) \in V$ y

$$\mathrm{tr.deg.}_F F(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) = \dim V.$$

Teorema (E.-Herrero, 2020)

Si $\pi : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ denota la proyección sobre las primera n coordenadas, y si $\pi(V)$ es Zariki denso en $\mathbb{C}^n$, entonces los puntos de V de la forma $(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n))$ forma un conjunto Zariski denso en V.

La conjetura de Schanuel para la exponencial

Conjetura (Schanuel, 1966(?))

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números complejos $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_n)) \geq n.$$

La conjetura de Schanuel para la exponencial

Conjetura (Schanuel, 1966(?))

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números complejos $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_n)) \geq n.$$

Teorema (Ax, 1971)

Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones meromorfas definidas en un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}$-linealmente independientes módulo $\mathbb{C}$. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_n, \exp(f_1), \ldots, \exp(f_n)) \geq n + \mathrm{rank}\left(\frac{\mathrm{df_i}}{\mathrm{d}z_k}\right)_{i,k}.$$

La conjetura de Schanuel para la exponencial

Conjetura (Schanuel, 1966(?))

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números complejos $\mathbb{Q}$-linealmente independientes. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_n)) \geq n.$$

Teorema (Ax, 1971)

Sean $f_1, \ldots, f_n$ funciones meromorfas definidas en un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}$-linealmente independientes módulo $\mathbb{C}$. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_n, \exp(f_1), \ldots, \exp(f_n)) \geq n + \mathrm{rank}\left(\frac{\mathrm{df_i}}{\mathrm{d}z_k}\right)_{i,k}.$$

C. Bertolin (2002) demostró que la conjetura de Schanuel se puede deducir de la conjetura generalizada de periodos de Grothendieck-André.

Sean $E_1, \ldots, E_n$ curvas elípticas, no isógenas de a pares. Dado E_ℓ, sean $\omega_{1\ell}$ y $\omega_{2\ell}$ sus periodos, sean $\eta_{1\ell}$ y $\eta_{2\ell}$ sus cuasi-periodos, sea $\tau_\ell = \frac{\omega_{1\ell}}{\omega_{2\ell}} \in \mathbb{H}^+$ (así $j(\tau_\ell)$ es el invariante j de E_ℓ), sea $q_\ell = \exp(2\pi i \tau_\ell)$, y sea $k_\ell = \mathrm{End}(E_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Conjetura (modular)

$$\begin{aligned} \mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(\{2\pi i, q_\ell, j(\tau_\ell), \omega_{1\ell}, \omega_{2\ell}, \eta_{1\ell}, \eta_{2\ell}\}_{\ell=1}^n\right) \quad &\geq \quad 4\sum_{\ell=1}^n (\dim_{\mathbb{Q}} k_\ell)^{-1} \\ &+ \quad \mathrm{ran}\,\langle q_\ell \rangle_{\ell=1}^n - n + 1, \end{aligned}$$

donde $\dim_{\mathbb{Q}} k_\ell$ es la dimensión de k_ℓ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, y $\mathrm{ran}\,\langle q_\ell \rangle_{\ell=1}^n$ es el rango del grupo abelian multiplicativo generado por $q_1, \ldots, q_n$.

Conjetura de Schanuel modular

Conjetura (Schanuel modular con derivadas: MSCD)

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ números no cuadráticos, en distintas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$-órbitas. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{j}(z_1), \ldots, \mathbf{j}(z_n)\right) \geq 3n.$$

Conjetura (Schanuel modular con derivadas: MSCD)

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ números no cuadráticos, en distintas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$-órbitas. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{j}(z_1), \ldots, \mathbf{j}(z_n)\right) \geq 3n.$$

Conjetura (Schanuel modular: MSC)

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ números no cuadráticos, en distintas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$-órbitas. Entonces:

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)\right) \geq n.$$

j-Derivaciones

Definición

Una j-derivación en $\mathbb{C}$ es una función $\partial : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades:

a. $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$,
b. $\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$,
c. Para todo $z \in \mathbb{H}$:

$$\partial(j(z)) = j'(z)\partial(z), \quad \partial(j'(z)) = j''(z)\partial(z), \quad \partial(j''(z)) = j'''(z)\partial(z).$$

j-Derivaciones

Definición

Una j-derivación en $\mathbb{C}$ es una función $\partial : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades:

a. $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$,
b. $\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$,
c. Para todo $z \in \mathbb{H}$:

$$\partial(j(z)) = j'(z)\partial(z), \quad \partial(j'(z)) = j''(z)\partial(z), \quad \partial(j''(z)) = j'''(z)\partial(z).$$

Teorema (E., 2018)

Existen j-derivaciones en $\mathbb{C}$ no triviales.

De hecho existen $|\mathbb{C}|$ j-derivaciones $\mathbb{C}$-linealmente independientes.

j-Clausura

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que $z \in j\mathrm{cl}(A)$ si para toda j-derivación ∂ que satisface $A \subset \ker \partial$ se tiene que $\partial(z) = 0$.

Decimos que A es $j\mathrm{cl}$-*cerrado* si $j\mathrm{cl}(A) = A$.

j-Clausura

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que $z \in j\mathrm{cl}(A)$ si para toda j-derivación ∂ que satisface $A \subset \ker \partial$ se tiene que $\partial(z) = 0$.

Decimos que A es $j\mathrm{cl}$-*cerrado* si $j\mathrm{cl}(A) = A$.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$. Decimos que $\dim^j(A) = n$ si existen $z_1, \ldots, z_n \in A$ y j-derivaciones $\partial_1, \ldots, \partial_n$ tales que $A \subset \bigcap \ker \partial_i$ y

$$\partial_i(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

y n es maximal con esta propiedad.

Ax-Schanuel y MSCD

Proposición (E., 2018)

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ *números en distintas* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$*-órbitas, y sea* $C \subset \mathbb{C}$ $j\mathrm{cl}$*-cerrado. Entonces:*

$$\mathrm{tr.deg.}_C C(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{j}(z_1), \ldots, \mathbf{j}(z_n)) \geq 3n + \dim^j(z_1, \ldots, z_n | C).$$

Ax-Schanuel y MSCD

Proposición (E., 2018)

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ *números en distintas* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$*-órbitas, y sea* $C \subset \mathbb{C}$ $j\mathrm{cl}$*-cerrado. Entonces:*

$$\mathrm{tr.deg.}_C C(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{j}(z_1), \ldots, \mathbf{j}(z_n)) \geq 3n + \dim^j(z_1, \ldots, z_n | C).$$

En particular podemos escoger

$$C = \bigcap_{\partial \text{ es } j\text{-derivación}} \ker \partial = j\mathrm{cl}(\emptyset).$$

En este caso, C es un subcuerpo numerable de $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado y tal que si $z \in C \cap \mathbb{H}$, entonces $\mathbf{j}(z) \in C^3$.

Aplicaciones a la clausura existencial

Sea $C = j\mathrm{cl}(\emptyset)$.

Teorema (Aslanyan-E.-Kirby: en preparación)

Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva plana irreducible que no es una línea horizontal o vertical. Si V no se puede definir sobre C, entonces para todo cuerpo $F \subset \mathbb{C}$ finitamente generado existe $z \in \mathbb{H}$ tal que $(z, j(z)) \in V$ y

$$\mathrm{tr.deg.}_F F(z, j(z)) = 1.$$

Aplicaciones a la clausura existencial

Sea $C = j\mathrm{cl}(\emptyset)$.

Teorema (Aslanyan-E.-Kirby: en preparación)

Sea $V \subset \mathbb{C}^2$ una curva plana irreducible que no es una línea horizontal o vertical. Si V no se puede definir sobre C, entonces para todo cuerpo $F \subset \mathbb{C}$ finitamente generado existe $z \in \mathbb{H}$ tal que $(z, j(z)) \in V$ y

$$\mathrm{tr.deg.}_F F(z, j(z)) = 1.$$

Un paso clave para este teorema es el siguiente resultado.

Teorema (Aslanyan-E.-Kirby: en preparación)

Sea $F \subset \mathbb{C}$ un cuerpo tal que $\mathrm{tr.deg.}_C F < \infty$. Entonces existen $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{H}$ en distintas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$-órbitas tales que:

1. $F \subseteq \overline{C\left(t_1, \ldots, t_m, \mathbf{j}\left(t_1\right), \ldots, \mathbf{j}\left(t_m\right)\right)}$,
2. $\mathrm{tr.deg.}_C C\left(t_1, \ldots, t_m, \mathbf{j}\left(t_1\right), \ldots, \mathbf{j}\left(t_m\right)\right) = 3m + \dim^j\left(t_1, \ldots, t_m\right)$.

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica.

Definición

Decimos que $X \subset V$ es una *componente atípica de* V si existe una subvariedad especial T de $\mathbb{C}^n$ tal que X es una componente irreducible de $V \cap T$ y

$$\dim X > \dim V + \dim T - n.$$

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica.

Definición

Decimos que $X \subset V$ es una *componente atípica de* V si existe una subvariedad especial T de $\mathbb{C}^n$ tal que X es una componente irreducible de $V \cap T$ y

$$\dim X > \dim V + \dim T - n.$$

Decimos que X es una *componente fuertemente atípica de* V si X es una componente atípica de V y ninguna coordenada de X es constante.

Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica.

Definición

Decimos que $X \subset V$ es una *componente atípica de V* si existe una subvariedad especial T de $\mathbb{C}^n$ tal que X es una componente irreducible de $V \cap T$ y

$$\dim X > \dim V + \dim T - n.$$

Decimos que X es una *componente fuertemente atípica de V* si X es una componente atípica de V y ninguna coordenada de X es constante.

Una componente (fuertmente) atípica de V se dice *maximal* (en V) si no está propiamente contenida en otra componente (fuertemente) atípica de V.

Conjetura de Zilber-Pink para j

Conjetura (Zilber-Pink)

Toda subvariedad de $\mathbb{C}^n$ tiene una cantidad finita de componentes atípicas maximales.

Conjetura de Zilber-Pink para j

Conjetura (Zilber-Pink)

Toda subvariedad de $\mathbb{C}^n$ tiene una cantidad finita de componentes atípicas maximales.

A partir de Ax-Schanuel se puede obtener un resultado parcial.

Teorema (Pila-Tsimerman, 2016)

Toda subvariedad de $\mathbb{C}^n$ tiene una cantidad finita de componentes fuertemente atípicas maximales.

Definición

Decimos que una variedad $V \subset \mathbb{C}^n$ es *libre* si no está contenida en la subvariedad especial propia de $\mathbb{C}^n$.

Teorema (E.-Herrero: en preparación)

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ una variedad algebraica irreducible libre de dimensión n definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ tal que la projección a las primera n coordenadas es Zariski densa en $\mathbb{C}^n$. Entonces la conjetura de Schanuel modular implica que existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ tales que $(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) \in V$ and

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, j(z_1), \ldots, j(z_n)) = n.$$

Moraleja

Hay varias funciones trascendentes que aparecen en geometría aritmética para las cuales existe un correspondiente teorema tipo Ax-Schanuel. En particular, la uniformización de variedades de Shimura puras: $p : X \to \mathrm{Sh}_K(G, X)$ (Mok-Pila-Tsimerman).

Moraleja

Hay varias funciones trascendentes que aparecen en geometría aritmética para las cuales existe un correspondiente teorema tipo Ax-Schanuel. En particular, la uniformización de variedades de Shimura puras: $p : X \to \mathrm{Sh}_K(G, X)$ (Mok-Pila-Tsimerman).

Aún más, las versiones de la conjetura de Zilber-Pink para variedades de Shimura también tienen algunos casos que se conocen gracias a Ax-Schanuel (Daw-Ren).

Moraleja

Hay varias funciones trascendentes que aparecen en geometría aritmética para las cuales existe un correspondiente teorema tipo Ax-Schanuel. En particular, la uniformización de variedades de Shimura puras: $p: X \to \mathrm{Sh}_K(G, X)$ (Mok-Pila-Tsimerman).

Aún más, las versiones de la conjetura de Zilber-Pink para variedades de Shimura también tienen algunos casos que se conocen gracias a Ax-Schanuel (Daw-Ren).

Vale la pena estudiar problemas análogos en estos casos usando métodos similares.