# Análogos $p$-ádicos de módulos singulares

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números

LATeN, 17 de Septiembre, 2020

Marc Masdeu

Universitat Autònoma de Barcelona

# El 12º problema de Hilbert

- Sea $K/\mathbb{Q}$ un cuerpo de números.

**El *Jugendtraum* de Kronecker**

Describir **todas** las extensiones abelianas de $K$ a través de "funciones modulares".

Caso más sencillo: $K = \mathbb{Q}$.

**Teorema (Kronecker–Weber (1853, 1886))**

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right).$$

La función **transcendental** $f(z) = e^{2\pi i z}$ toma valores **algebraicos** en los argumentos **racionales**!

La teoría de la **multiplicación compleja** es la parte más **bella** no sólo de las matemáticas, sino de **toda la ciéncia.**

David Hilbert

# $K$ cuadrático imaginario: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ con $D < 0$

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{H}$ a través de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \frac{az+b}{cz+d}$.
Consideramos *funciones modulares*:

- Meromorfas en $\mathbb{H}$,
- Invariantes por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, y
- Crecimiento lento: su serie de Laurent es $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$.

**Hecho:** todas ellas son funciones racionales en

$$j(z) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots, \quad q = e^{2\pi i z}.$$

Escribimos $\mathbb{H}^{\mathrm{CM}} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid [\mathbb{Q}(\tau) \colon \mathbb{Q}] = 2\}$.

### Teorema (Kronecker, Weber, Takagi, Hasse)

Si $\tau \in \mathbb{H}^{\mathrm{CM}}$, entonces $j(\tau) \in \mathbb{Q}(\tau)^{\mathrm{ab}}$. Además, tenemos:

$$K^{\mathrm{ab}} = \bigcup_{\tau \in K \cap \mathbb{H}^{\mathrm{CM}}} \bigcup_{n \geqslant 1} K\left(j(\tau), \wp_\tau(1/n), \zeta_n\right).$$

# Algebraicidad de $j(\tau)$ (I)

- $E_k(z) = 1 + C_k \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$, con $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{1\leqslant d|n} d^{k-1}$.
- $\Delta(z) = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728}$
  $= \frac{(1+240s_3)^3-(1-504s_5)^2}{1728} = \frac{5s_3+7s_5}{12} + (100s_3^2 - 147s_5^2 + 8000s_3^2)$.
  - **Ejercicio:** $\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[[q]]$.
- $j(z) = \frac{E_4(z)}{\Delta(z)} = q^{-1} + 744 + 196884q + \cdots = \sum_{n\geqslant -1} d_n q^n \in \mathbb{Z}[q^{-1}, q]]$.
- **Ejercicio:**

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \left(M_2(\mathbb{Z})^{\det=m}\right) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid d > 0, ad = m, 0 \leqslant b < d \right\}$$

$$F(X) = \prod_{\gamma\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash M_2(\mathbb{Z})^{\det=m}} (X - j(\gamma z)) \in \mathcal{O}(\mathbb{H})[X] \quad \text{(bien definido)}$$

Coeficientes de $F(X)$: funciones holomorfas, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariantes, meromorfas en $\infty$.

$\rightsquigarrow F(X) \in \mathbb{C}[j(z)][X]$.

$\Longrightarrow \exists\ \Psi_m(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tal que $F(X) = \Psi_m(X, j(z))$.

# Algebraicidad de $j(\tau)$ (II)

Desarrollando $\prod_{\gamma\in M_2(\mathbb{Z})^{\det=m}}(X - j(\gamma z))$ obtenemos

$$\prod_{\substack{ad=m\\ b \bmod d}} \left(X - j\left(\frac{az+b}{d}\right)\right) = \prod\left(X - \sum_{n=-1}^{\infty} c_n \zeta_d^{bn} q^{an/d}\right).$$

Como $\zeta_d \mapsto \zeta_d^i$ fija LHS, obtenemos un polinomio en $\mathbb{Z}[X][q^{-1},q]]$. Finalmente, vemos que $\Psi_m(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$.

- Supongamos $m$ **no es cuadrado perfecto**, y miremos $\Psi_m(X,X)$. ¿Cómo es la $q$-expansión de $\Psi_m(j(z),j(z))$?
    - $j(z) = q^{-1} + \cdots$
    - $j(\frac{az+b}{d}) = \zeta_d^{-b} q^{-a/d} + \cdots$.

  $a \neq d \implies$ los dos términos no se cancelan. Luego $\Psi_m(j(z),j(z))$ tiene como coeficiente principal una raíz de la unidad.

  Como también $\Psi_m(X,X) \in \mathbb{Z}[X]$, la raíz tiene que ser $\pm 1$.

# Algebraicidad de $j(\tau)$ (III)

## Polinomios modulares

Para todo $m \geqslant 1$ existe $\Psi_m(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ tal que

1. $\Psi_m(X, j(z))$ tiene como raíces $j(\gamma z)$ con $\det \gamma = m$.
2. Si $m \neq \square$, $\Psi_m(X,X)$ es mónico salvo signo.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned}\Psi_2(X,Y) = X^3 + Y^3 - X^2Y^2 + 1488(X^2Y + XY^2) - 162000(X^2+Y^2)\\ + 40773375XY + 8748000000(X+Y) - 157464000000000\end{aligned}$$

Supongamos que $\tau$ satisface $A\tau^2 + B\tau + C = 0$.
Tomamos $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} B & C \\ -A & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

- $m := \det\gamma = AC \geqslant 1$ ($B^2 - 4AC < 0$).
- $\gamma\tau = \frac{B\tau + C}{-A\tau} = \tau$.

$\implies 0 = \Psi_m(j(\gamma\tau), j(\tau)) = \Psi_m(j(\tau), j(\tau))$.

- Por lo tanto $j(\tau)$ es un entero algebraico. $\square$

# $K$ cuadrático real: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ con $D > 0$.

**Problema:** $\mathbb{H} \cap \mathbb{R} = \emptyset$!

En 1999, Darmon propuso considerar un análogo $p$-ádico de $\mathbb{H}$.

Fijemos un primo $p$ inerte $K$.

$K_p$ es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}_p$.

Escribimos $\mathbb{H}_p = K_p \setminus \mathbb{Q}_p$.

Sea $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$, que actúa sobre $\mathbb{H}_p$ via $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \frac{az+b}{cz+d}$.

- $\Gamma \frown \mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{H}_p) =$ funciones rígido-analíticas en $\mathbb{H}_p$.
- $\Gamma \frown \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{H}_p) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}) =$ funciones rígido-meromorfas en $\mathbb{H}_p$.

**Nuevo problema:** $\{f : \Gamma\backslash\mathbb{H}_p \to K_p\} = K_p$ (constantes).

# Interludio: cohomología de grupos (I)

- $G$ un grupo, $V$ un $\mathbb{Z}[G]$-módulo.
- $H^*(G,-)$: functor derivado de $V \mapsto V^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, V)$.
- Ponemos $C^1(G,V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], V)$, y entonces

$$Z^1(G,V) = \left\{\varphi\colon C^1(G,V) \mid \varphi(gh) = \varphi(g) + g\varphi(h)\right\},$$

$$B^1(G,V) = \{\varphi_v \mid v \in V\}, \quad \varphi_v(g) = gv - v.$$

- Finalmente, $H^1(G,V) = Z^1(G,V)/B^1(G,V)$.

# Interludio: cohomología de grupos (II)

- $H_*(G,-)$: functor derivado de $V \mapsto V_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} V$.
- $Z_1(G,V) = \{\sum g_k \otimes v_k \in \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} V \mid \sum_k g_k^{-1} v_k - v_k = 0\}$.
- $B_1(G,V) = \langle g \otimes v - gh \otimes v + h \otimes g^{-1} v \mid g, h \in G, v \in V \rangle$.
  $\rightsquigarrow H_1(G,V) = Z_1(G,V)/B_1(G,V)$.
- Hay un morfismo canónico
  $$H^i(G,V) \times H_i(G,W) \to H_0(G, V \otimes_{\mathbb{Z}} W) = V \otimes_{\mathbb{Z}[G]} W.$$
- Así, dado un pairing $G$-equivariante $V \otimes_{\mathbb{Z}[G]} W \to L$ ($L$ cualquier anillo), obtenemos
  $$H^i(G,V) \times H_i(G,W) \to L.$$
- **Ejemplo:** $\mathcal{M}_\tau^\times \times \operatorname{Div}' K_p \to \mathbb{C}_p^\times$.
  - $\langle \phi, \sum_P n_P P \rangle = \prod_P \phi(P)^{n_P}$.
- **Ejemplo':** $\mathcal{M}_\tau^\times / \mathbb{C}_p^\times \times \operatorname{Div}_0' K_p \to \mathbb{C}_p^\times$.

# Paso a la cohomología

El problema es que $\mathrm{H}^0(\Gamma, \mathcal{M}) = K_p$.
Darmon propuso fijarse entonces en $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ (fíjense en $\times$).
Supongamos dada una classe $J \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
Dado $z \in \mathbb{H}_p^{\mathsf{RM}} = \{z \in \mathbb{H}_p \mid \mathbb{Q}(z) \text{ cuadrático real}\}$, tenemos:

$$\Gamma_z = \mathrm{Stab}_\Gamma(z) = \langle \gamma_z \rangle \rightsquigarrow \theta_z = [\gamma_z \otimes z] \in H_1(\Gamma, \mathrm{Div}\, \mathbb{H}_p).$$

Podemos definir

$$J[z] = \langle J, \theta_z \rangle = J(\gamma_z)(z) \in K_p^\times.$$

## Darmon–Vonk

Para cada $\tau \in K \cap \mathbb{H}_p$ construyen $J_\tau \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.

## Conjetura (Darmon–Vonk)

Si $\tau' \notin \Gamma\tau$, la cantidad $J_\tau[\tau']$ pertenece a $\mathbb{Q}(\tau)^{\mathsf{ab}}\mathbb{Q}(\tau')^{\mathsf{ab}}$.

# La construcción de Darmon–Vonk

Henri Darmon

Jan Vonk

# La construcción de Darmon–Vonk

Fijemos inyecciones $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ and $K \hookrightarrow \mathbb{Q}_{p^2}$.
Dado $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ y $w \in K$ ($w'$ conjugado de $w$), definimos:

$$\delta_\gamma(w) = \begin{cases} +1 & w' < \frac{a}{c} < w, \\ -1 & w' > \frac{a}{c} > w, \\ 0 & \text{si } \frac{a}{c} \notin (w, w'). \end{cases}$$

## Lema

La aplicación $\gamma \mapsto \sum_{w \in \Gamma\tau} \delta_\gamma(w) \cdot (w)$ es un cociclo, que da lugar a $[\delta] = [\delta_\tau] \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Div}^0 \Gamma\tau)$.

## Lema

La clase del cociclo $\gamma \mapsto \Phi_\tau^\times(\gamma) = \displaystyle\prod_{\substack{w \in \Gamma\tau \\ w' < \frac{a}{c} < w}} \frac{z - w}{z - w'}$

define una clase de cohomología en $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / K_p^\times)$.

# Cociclos

$$\Phi_\tau^\times \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / K_p^\times).$$

Consideramos la sucesión exacta

$$0 \to K_p^\times \to \mathcal{M}^\times \to \mathcal{M}^\times / K_p^\times \to 0.$$

Da lugar a la siguiente sucesión larga

$$\cdots \to \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / K_p^\times) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(\Gamma, K_p^\times).$$

Módulo $12$-torsión, $\mathrm{H}^2(\Gamma, K_p^\times) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma_0(p), K_p^\times)$.
Relacionado con formas modulares de peso $2$ y nivel $\Gamma_0(p)$.

## Proposición (Darmon–Vonk)

Sea $p$ un primo $\{p \mid p \leqslant 31\} \cup \{41, 47, 59, 71\}$. Entonces $\left(\Phi_\tau^\times / \Phi_{p\tau}^\times\right)^{12}$ se levanta a $J_\tau^\times \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.

- En general: a $\Phi_\tau^\times$ se le aplica $T_\ell$ que mate $H^1(\Gamma_0(p), K_p^\times)$.

# Ejemplos

En alguna parte está una teoría que explicaría mis **observaciones empíricas**, pero esta teoría aún está por descubrir.

# Ejemplos

**$p = 2$**

$$J^{\times}_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\left[\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right] = \frac{-37\pm 48\sqrt{-3}}{91} \pmod{2^{1000}}.$$

**$p = 7$**

$$J^{\times}_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = \frac{1}{17}\left(3\pm 8\sqrt{2}\pm 12\sqrt{-1}\pm 2\sqrt{-2}\right) \pmod{7^{400}}.$$

**$p = 5$**

$$J^{\times}_{\sqrt{3}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \overset{?}{\in} \mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{3},\sqrt{17}),$$

satisface (módulo $5^{200}$) el polinomio
$194481x^8 + 1100736x^7 + 20364174x^6 + 71994624x^5 + 840839779x^4 + 71994624x^3 + 20364174x^2 + 1100736x + 194481$.

# Interludio: los puntos de Stark–Heegner

Harold Stark

Kurt Heegner

# Interludio: los puntos de Stark–Heegner

En 1999, Darmon ya había construido unos ciclos

$$\bar{\Phi}_E^\times \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / K_p^\times)$$

asociados a curvas elípticas de conductor $p$.

**Tate:** $\eta_{\text{Tate}} : E(K_p) \overset{\cong}{\to} K_p^\times / q_E^{\mathbb{Z}}$.

Demostró que $\bar{\Phi}_E^\times$ se podía levantar a

$$\Phi_E^\times \in \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / q_E^{\mathbb{Z}}).$$

## Conjetura (Darmon, 1999)

$$\eta_{\text{Tate}}^{-1}\left(\Phi_E^\times[\tau]\right) \in E(\mathbb{Q}(\tau)^{\text{ab}}).$$

**Notación:** $\Delta(\tau) = \operatorname{Div}\Gamma_0\tau$, y $\Delta_0(\tau) = \operatorname{Div}^0\Gamma_0\tau$.

Si $\tau = \infty$, escrivimos $\Delta = \Delta(\infty) = \operatorname{Div}\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (igual para $\Delta_0$).

Fijémonos que $\Phi^\times[\tau] = \langle \Phi^\times, \theta_\tau \rangle$, con $\theta_\tau = [\gamma_\tau \otimes \tau] \in \mathrm{H}_1(\Gamma_0, \Delta(\tau))]$.

**Trabajo conjunto con Xevi Guitart (UB) and Xavier Xarles (UAB).**

Pongamos $\mathcal{M}_\tau^\times = \{f \in \mathcal{M}^\times \mid \operatorname{div}(f) \subset \Gamma\tau\}$, recordad $\operatorname{div} \bar{\Phi}_\tau^\times = [\delta_\tau]$.

Tenemos s.e.c. $0 \to \Delta_0 \otimes \Delta(\tau) \to \Delta \otimes \Delta(\tau) \to \Delta(\tau) \to 0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{\Phi}_\tau^\times \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathcal{M}_\tau^\times / K_p^\times) \arrow[d, "\operatorname{div}"] \arrow[ddd, bend left=60, "\eta"] & \\
 & {[\delta_\tau]} \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{H}^1(\Gamma, \overline{\mathrm{Div}}\Gamma\tau) \arrow[d, "\cong"', "\text{Shapiro}"] & \\
\text{torsión} & \varphi_\tau^{\text{DIT}} \arrow[r, leftrightsquigarrow] \arrow[ddr, squiggly] & \mathrm{H}^1(\Gamma_0, \Delta(\tau)) \arrow[d, "\cong"', "\text{Borel–Serre}"] & \\
\cancel{\mathrm{H}_1(\Gamma_0, \Delta \otimes \Delta(\tau))} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}_1(\Gamma_0, \Delta(\tau)) \arrow[r, "\delta"] & \Big(\Delta_0 \otimes \Delta(\tau)\Big)_{\Gamma_0} \arrow[r] & \Big(\Delta \otimes \Delta(\tau)\Big)_{\Gamma_0} \\
 & {[\gamma_\tau \otimes \tau]} \arrow[r, mapsto] & {[(\gamma_\tau\infty - \infty) \otimes \tau]} &
\end{tikzcd}
$$

# Generalización cuaterniónica: ciclos

Sea $B$ un álgebra de cuaterniones indefinida y no ramificada en $p$.
Elegimos immersiones $\iota_\infty \colon B \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$ y $\iota_p \colon B \hookrightarrow M_2(\mathbb{Q}_p)$.
Elegimos un orden maximal $R \subset B$ tal que $\iota_p(R) \subseteq M_2(\mathbb{Z}_p)$.
Definimos $\Gamma_0 = R_1^\times$ (unidades de norma $1$).
Si $\psi \colon \mathcal{O} \hookrightarrow R$ es un embedding optimal ($\mathcal{O} \subset K$ un orden),

$$\gamma_\psi = \psi(u), \quad \langle u \rangle = \mathcal{O}_1^\times/\text{tors}.$$

Si $\gamma_\psi z_\psi = z_\psi$, entonces $\bar{\theta}_\psi = [\gamma_\psi \otimes z_\psi] \in H_1(\Gamma_0, \Delta(z_\psi))$.
**Si** $\Gamma_0^{\mathbf{ab}} = H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ **es torsión**, entonces $\theta_\psi \in H_1(\Gamma_0, \Delta_0(z_\psi))$.

- $\theta_\psi$ fue considerada por M.Greenberg y otros, para construir puntos de Darmon cuaterniónicos.
- Si $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ no es torsión, se puede usar operadores de Hecke para levantar $\bar{\theta}_\psi$.

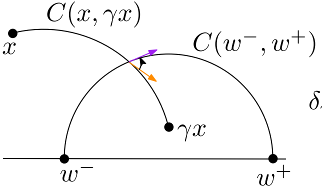
# Generalización cuaterniónica: cociclos

Sea $x \in \mathbb{H}$ arbitrario. $\iota_\infty(\gamma_\psi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tiene dos puntos fijos en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$\tau_\infty^\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

- $\iota_p(\gamma_\psi)$ también fija dos puntos $\tau^\pm \in \mathbb{H}_p$.

Dado $\gamma \in \Gamma_0$, y $w^\pm = \gamma_w \tau_\infty^\pm \in \Gamma_0 \tau_\infty^\pm$, definimos $\delta_\gamma(w)$:




$\delta_\gamma(w) = 1$

**Hecho:** El conjunto $\{w^+ \in \Gamma_0 \tau_\infty^+ \mid \delta_\gamma(w) \neq 0\}$ es finito.

$\rightsquigarrow \gamma \mapsto \sum_w \delta_\gamma(w) \cdot (w) \in Z^1(\Gamma_0, \Delta(\tau))$.

$\rightsquigarrow [\varphi_\tau] \in H^1(\Gamma_0, \Delta(\tau))$ (independiente del punto base $x$).

**Si $\Gamma_0^{\mathbf{ab}}$ es torsión**, se puede levantar la clase a $H^1(\Gamma_0, \Delta_0(\tau))$.

El isomorfismo de Shapiro nos da $J^\times \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / K_p^\times)$.

# Ejemplo con $p = 5$

- $B = \left(\frac{6,-1}{\mathbb{Q}}\right)$, discriminante $6$.
- $R = \langle 1, i, 1+i+j, i+k \rangle$.
- $\mathcal{O}_{K_1} = \mathbb{Z}(\frac{1+\sqrt{53}}{2})$ y $\psi_1(\frac{1+\sqrt{53}}{2}) = 1/2 - 3/2i - 1/2j$.
  - $\rightsquigarrow \gamma_{\psi_1} = 51/2 + 21/2i + 7/2j$.

  $\mathcal{O}_{K_2} = \mathbb{Z}(\sqrt{23})$ y $\psi_2(\sqrt{23}) = 2i + j$.
  - $\rightsquigarrow \gamma_{\psi_2} = 1151 + 480i + 240j$.
- Obtenemos

$$J^{-}_{\psi_1,\psi_2} = 5097114146652682609628966289836186849646369846880613556118303693903 6$$

$$+9674029354607221223815165708202713711819464972332940921086896674730\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{97})$$

- El período $J^{-}_{\psi_1,\psi_2}$ satisface, salvo raíces de la unidad, el polinomio

  $f(x) = 41177889x^4 + 7867012x^3 + 33058502x^2 + 7867012x + 41177889.$
- Se tiene $L = K_1K_2(f)$ es el compositum de los narrow class fields de $K_1$ y $K_2$, como predice la conjetura.

# Existencia de un objeto global?

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ ($h^+_{K_1} = 1$), $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ ($h^+_{K_2} = 2$).
- Calculamos $J_3(53,23) \in \mathbb{Q}_{3^2}$ usando $B$ de discriminante $10$.

$$J_3(53,23) = 2263329212681251489468 + 6644010739654744556634\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{46})$$

- Calculamos $J_5(53,23) \in \mathbb{Q}_{5^2}$ usando $B$ de discriminante $6$.

$$J_5(53,23) = 76500603105371600283097752216081 + 71876326310173029976331143056540\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{47})$$

- El compuesto $M$ de los cuerpos de clases narrow está generado por

$$x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497.$$

- Existe $\iota_3\colon M \hookrightarrow \mathbb{Q}_{3^2}$ y $\iota_5\colon M \hookrightarrow \mathbb{Q}_{5^2}$.
- Comprovamos que existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1$ y $u_2$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{53},\sqrt{23}) \subset M$ tales que:
  - $\iota_3(\alpha u_1) = J_3(53,23)$ y $\iota_5(\alpha u_2) = J_5(53,23)$.
- El ideal generado por $\alpha$ está soportado sobre primos de normas $2$ y $31$, predicho por un análogo de la factorización de Gross–Zagier.

# ¡ Muchas gracias !

http://www.mat.uab.cat/~masdeu/