# La no anulación de funciones de Dirichlet cúbicas en $s = 1/2$

Matilde N. Lalín,
trabajo conjunto con Alexandra Florea y Chantal David

Université de Montréal & Centre de recherches mathématiques
mlalin@dms.umontreal.ca
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números
9 de julio, 2020

# Functiones $L$ de Dirichlet

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_{p\text{ primo}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\qquad \mathrm{Re}(s)>1,$$

donde $\chi$ es un carácter de Dirichlet módulo $d$.

Si $\chi$ no es principal, $L$ tiene una continuación analítica a $\mathbb{C}$ y verifica una ecuación funcional $s\longleftrightarrow 1-s$.

Hipótesis de Riemann Generalizada: Los ceros de $L(s,\chi)$ tales que $0<\mathrm{Re}(s)<1$ satisfacen $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Valores centrales de funciones $L$

$f =$ objeto aritmético, $L(s,f)$ función $L$-asociada.

$$\Lambda(s,f) = \omega_f \Lambda(1-s,\overline{f}), \qquad |\varepsilon_f| = 1, \quad \overline{f} \text{ objeto dual.}$$

$$\text{punto central } = \frac{1}{2}$$

Filosofía general: $L(\frac{1}{2},f) = 0$ por una razón profunda o una razón trivial como que $f = \overline{f}, \omega_f = -1$.

Si $\chi$ es un carácter de Dirichlet (cuadrático), la conjetura de Chowla predice que

$$L(\tfrac{1}{2},\chi) \neq 0.$$

Los momentos

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} L(\tfrac{1}{2},\chi)^k$$

(donde la $*$ indica caracteres primitivos) están asociados con resultados de no anulación.

Aplicando Cauchy–Schwartz,

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} L\left(\tfrac{1}{2},\chi\right) \leq$$

$$\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} L\left(\tfrac{1}{2},\chi\right)^2\right)^{1/2}\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} 1\right)^{1/2}\left(\#\left\{\chi \bmod d, d\leq X, L\left(\tfrac{1}{2},\chi\right.\right.\right.$$

$$\#\left\{\chi \bmod d, d \leq X, L\left(\tfrac{1}{2},\chi\right)\neq 0\right\}^* \geq \frac{\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right)^2}{\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ d\leq X}} L\left(\frac{1}{2},\chi\right)^2}.$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Momentos de funciones $L$ de Dirichlet primitivas

Usando la teoría de matrices aleatorias, Keating and Snaith (2000) conjeturaron que

$$\sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi^2=\chi_0,\, d\leq X}}^{*} L(\tfrac{1}{2},\chi)^k \sim c_k X (\log X)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

- $k = 1$ Jutila (1981)
- $k = 2$ Jutila (1981), Soundararajan (término principal secundario, 2000)
- $k = 3$ Soundararajan (2000), Diaconu, Goldfeld, Hoffstein (2003)
- $k = 4$ Shen (2019+, asumiendo HRG) usando ideas de Soundararajan y Young (2010).

$$\text{no anulación} \gg \frac{X}{\log X} \sim X^{1-\varepsilon}.$$

Université de Montréal

Centre de Recherches Mathématiques

# Momentos regularizados

- Selberg utilizó momentos regularizados para probar que una proporción positiva de ceros de $\zeta(s)$ están en la línea crítica $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.
- Soundararajan (2000) utilizó momentos regularizados para probar que al menos 7/8 de los $L(\frac{1}{2}, \chi)$ no se anulan (caso cuadrático).
  Idea:
  $$M(\chi) \approx \sum_{\ell \leq X^{1/2-\varepsilon}} \frac{\mu(\ell)}{\sqrt{\ell}} \chi(\ell)$$
  se comporta "como $L(\frac{1}{2}, \chi)^{-1}$".
  $$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi^2=\chi_0,\, d\leq X}} L(\tfrac{1}{2}, \chi) M(\chi) \sim c_1 X$$
  $$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi^2=\chi_0,\, d\leq X}} |L(\tfrac{1}{2}, \chi) M(\chi)|^2 \sim c_2 X$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

## Momentos con caracteres cúbicos

- Conjetura (Conrey-Farmer-Keating-Rubinstein-Snaith (2005))

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod d \\ \chi^3=\chi_0,\, d\leq X}} L(\tfrac{1}{2},\chi)^k \sim c_k X.$$

- $\mathbb{Q}$ (caso no Kummer),

$$\#\{\chi \pmod d \,:\, \chi^3=\chi_0,\, d\leq X\}^* \sim CX$$

Baier & Young (2010)

$$\text{primer momento } \sim cX$$

- $\mathbb{Q}(\xi_3)$ (caso Kummer, funciones $L$ de Hecke),

$$\#\{\chi \pmod d \,:\, \chi^3=\chi_0,\, N(d)\leq X\}^* \sim CX\log X$$

Luo (2004)

$$\text{primer momento } \sim cX \text{ para una familia delgada.}$$

# Cuerpos de funciones

Sea $q$ una potencia de un primo impar, $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de $q$ elementos.

| Cuerpos de números | | Cuerpos de funciones |
|---|---|---|
| $\mathbb{Q}$ | $\leftrightarrow$ | $\mathbb{F}_q(T)$ |
| $\mathbb{Z}$ | $\leftrightarrow$ | $\mathbb{F}_q[T]$ |
| $p$ primo positivo | $\leftrightarrow$ | $P(T)$ polinomio mónico irreducible |
| $\lvert n\rvert = \lvert\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\rvert = n \in \mathbb{N}$ | $\leftrightarrow$ | $\lvert F(T)\rvert = \lvert\mathbb{F}_q[T]/(F(T))\rvert = q^{\deg F}$ |
| Hipótesis de Riemann ☹ | $\leftrightarrow$ | Hipótesis de Riemann ☺ |

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F\in\mathbb{F}_q[T] \\ F \text{ mónico}}} \frac{1}{|F|^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{q^{ns}} = \frac{1}{1-q^{1-s}}$$

# Funciones $L$ de Dirichlet $L$-functions sobre cuerpos de funciones

Un carácter de Dirichlet es un morfismo

$$\chi : (\mathbb{F}_q[T]/(D(T)))^* \to \mathbb{C}^*$$

extendido a $\mathbb{F}_q[T]$ por periodicidad y con la condición que

$$\chi(A) = 0 \text{ cuando } (A, D) \neq 1.$$

La función $L$ de Dirichlet es

$$L(s,\chi) = \sum_{f \text{ mónico}} \frac{\chi(f)}{|f|^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{ns}} \sum_{\deg f = n} \chi(f).$$

## Funciones $L$ de Dirichlet $L$-functions sobre cuerpos de funciones

Si $u = q^{-s}$, podemos escribir

$$L(s,\chi) = \mathcal{L}(u,\chi) = \sum_{f \text{ mónico}} \chi(f) u^{\deg(f)} = \prod_{\substack{P \text{ irreducible} \\ \text{mónico}}} (1-\chi(P)u^{\deg(P)})^{-1}.$$

Si $h$ es el conductor de $\chi$,

- $\mathcal{L}(u,\chi)$ es un polinomio de grado $\leq \deg(h)-1$.
- Satisface una ecuación funcional. Si $\chi$ es impar:

$$\mathcal{L}(u,\chi) = \omega(\chi)(\sqrt{q}u)^{\deg(h)-1}\mathcal{L}(\tfrac{1}{qu},\overline{\chi}),$$

- Los ceros no triviales están en la circunferencia $|u| = \frac{1}{\sqrt{q}}$ (Hipótesis de Riemann).

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Momentos de funciones $L$ de Dirichlet cuadráticas sobre cuerpos de funciones

Andrade y Keating (2014) conjeturaron

$$\sum_{\substack{\chi^2=\chi_0\\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} L(\tfrac{1}{2},\chi)^k \sim q^{2g+1}P_k(2g+1),$$

donde $P_k$ es un polinomio de grado $\frac{k(k+1)}{2}$.
Lo probaron para $k=1$.

Florea (2017, varios artículos) encontró el término de segundo orden para $k=1$ y probó casos para $k=2,3,4$.

Bui y Florea (2016) probaron la no anulación para $\geq 94\%$. Usando densidad de nivel uno (estudiando ceros en la familia de funciones que están cerca de $1/2$.)

Li (2018) anulación $\gg (q^{2g+1})^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$.

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Caracteres cúbicos sobre cuerpos de funciones (caso Kummer)

Sea $q \equiv 1 \pmod 3$ impar y fijemos

$$\Omega : \text{ raíces de la unidad en } \mathbb{C}^* \to \text{ raíces de 1 en } \mathbb{F}_q^*.$$

Para $P$ mónico irreducible y $f \in \mathbb{F}_q[T]$ tales que $P \nmid f$, definimos

$$f^{\frac{q^{\deg(P)}-1}{3}} \equiv \Omega(\alpha) \pmod P \qquad \chi_P(f) := \alpha$$

y para $P \mid f$,

$$\chi_P(f) = 0.$$

Si $Q = P_1^{e_1} \cdots P_k^{e_k}$, el símbolo de Jacobi es

$$\chi_Q(f) = \prod_{i=1}^{k} \chi_{P_i}(f)^{e_i}.$$

Université de Montréal

Centre de Recherches Mathématiques

# Caracteres cúbicos sobre cuerpos de funciones (caso no Kummer)

Sea $q \equiv 2 \pmod 3$ impar y fijemos

$$\Omega : \text{ raíces de la unidad en } \mathbb{C}^* \to \text{ raíces de 1 en } \mathbb{F}_{q^2}^*.$$

Para $P$ mónico irreducible de grado par y $f \in \mathbb{F}_q[T]$ tales que $P \nmid f$, definimos

$$f^{\frac{q^{\deg(P)}-1}{3}} \equiv \Omega(\alpha) \pmod P \qquad \chi_P(f) := \alpha$$

Escribimos $P = \pi\tilde{\pi}$ en $\mathbb{F}_{q^2}[T]$, y obtenemos $\chi_\pi, \chi_{\tilde{\pi}}$ caracteres en $\mathbb{F}_{q^2}[T]$. Entonces

$$\chi_P = \chi_\pi|_{\mathbb{F}_q[T]}.$$

Se extienden como antes...

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Primeros momentos de funciones $L$ cúbicas sobre cuerpos de funciones

Teorema (David, Florea, L. (2019+))

*Sea $q$ una potencia de un primo impar tal que* $q \equiv 2 \pmod 3$. *Entonces*

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} L(\tfrac{1}{2},\chi) = Aq^{g+2} + O\left(q^{\frac{7g}{8}+\varepsilon g}\right).$$

Teorema (David, Florea, L. (2019+))

*Sea $q$ una potencia de un primo impar tal que* $q \equiv 1 \pmod 3$. *Sea $\chi_3$ un carácter cúbico fijo de $\mathbb{F}_q^*$*

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g \\ \chi|_{\mathbb{F}_q^*}=\chi_3}}^{*} L(\tfrac{1}{2},\chi) = C_1 g q^{g+1} + C_2 q^{g+1} + O\left(q^{g\frac{1+\sqrt{7}}{4}+\varepsilon g}\right).$$

# No anulación para funciones cúbicas

- Usando cotas superiores del segundo momento, la no anulación es $\gg q^{g(1-\varepsilon)}$ para los $\chi$ cúbicos primitivos de género $g$.
- Ellenberg-Li-Shusterman (2019+) usaron geometría algebraica para probar no anulación para $\gg q^g/g^{1/2}$.
- La densidad de nivel uno no da una proporción positiva de no anulación.

**Teorema (David, Florea, L. (2020+))**

*Sea $q$ una potencia de primo impar tal que $q \equiv 2 \pmod 3$. El número de caracteres cúbicos primitivos $\chi$ de conductor de grado $g$ sobre $\mathbb{F}_q[T]$ tal que $L(\frac{1}{2}, \chi) \neq 0$ es $\geq cq^g$, donce $c > 0$ es explícita.*

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Estrategia general

- Calcular el segundo momento es una pregunta abierta. Hay que acotarlo.
-
$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}} L(\tfrac{1}{2},\chi)M(\chi) \sim B_1 q^g,$$
$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}} |L(\tfrac{1}{2},\chi)M(\chi)|^2 \leq B_2 q^g.$$
- Cauchy–Schwartz da
$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g \\ L(\frac{1}{2},\chi)\neq 0}} 1 \geq \frac{B_1^2}{B_2} q^g.$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# La cota del segundo momento regularizado

Buscamos

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} \left|L(\tfrac{1}{2},\chi)M(\chi)\right|^2 \leq B_2 q^g.$$

El método para encontrar la cota depende de trabajos de

- Soundararajan (2009): cota superiores casi estrictas para momentos de $\zeta(s)$ (assumiendo HR).
- Harper (2013+): cotas superiores estrictas para momentos de $\zeta(s)$ (asumiendo HR).
- Lester & Radziwiłł (2019+): cotas superiores estrictas para momentos regularizados en la familia de torsiones cuadráticas de modular forms (asumiendo HRG).

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

## Acotar la función $L$

Una version para cuerpos de funciones de un teorema de Soundararajan (2009), Bui, Florea, Keating, Rodity-Gershon (2019): Acotar $\log|L(\frac{1}{2},\chi)|$ por un polinomio de Dirichlet corto.

$$\log|L(\tfrac{1}{2},\chi)| \leq \sum_{\deg(P)\leq N} \frac{\mathrm{Re}(\chi(P))(N-\deg(P))}{N|P|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N\log q}}} + \sum_{\deg(P)\leq N/2} \frac{\mathrm{Re}(\chi(P))(N-2\deg(P))}{2N|P|^{1+\frac{2}{N\log q}}} + \frac{g}{N} + O(1),$$

Digamos $N \approx \frac{g}{1000}$,

$$|L(\tfrac{1}{2},\chi)| \leq \exp\left(\sum_{\deg P\leq N} \frac{\mathrm{Re}(\chi(P))a(P,N)}{|P|^{\frac{1}{2}}} + \text{cosas chicas}\right).$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# La construcción del regularizador

Utilizando la cota

$$e^t \leq (1 + e^{-\ell/2}) \sum_{s \leq \ell} \frac{t^s}{s!}$$

para $t \leq \ell/e^2$ y $\ell$ par, conseguimos sumas que parecen

$$\sum_{\substack{P|f \Rightarrow \deg(P) \leq N \\ \Omega(f) \leq \ell}} \frac{\chi(f)\nu(f)}{|f|^{\frac{1}{2}}},$$

donde $\nu$ est una función multiplicativa definida como $\nu(P^a) = \frac{1}{a!}$ y $\Omega(f)$ es el número de factores primos de $f$ con multiplicidad.
Esto lleva a

$$M(\chi) \text{``}{=}\text{''} \sum_{\substack{P|f \Rightarrow \deg(P) \leq N \\ \Omega(f) \leq \ell}} \frac{\lambda(f)\chi(f)\nu(f)}{|f|^{\frac{1}{2}}},$$

donde $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ es la función de Liouville.

# El segundo momento regularizado

Con esta construcción

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} |L(\tfrac{1}{2},\chi)M(\chi)|^2 \ll q^g (\log g)^{O(1)}.$$

Si repartimos los primos en dos intervalos (segun el grado)

$$I_0 = \left(0, \frac{g}{\log g}\right], \qquad I_1 = \left(\frac{g}{\log g}, N\right],$$

$I_0$ es problemático, pero al ser mas corto, podemos calcular mas momentos, entonces,

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} |L(\tfrac{1}{2},\chi)|^2 |M(\chi)|^2 \ll q^g (\log\log g)^{O(1)}.$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Ideas de la prueba

Siguiendo a Lester y Radziwiłł(2019+), tomamos

$$I_0 = (0, g\theta_0], \quad I_1 = (g\theta_0, g\theta_1], \ldots, I_J = (g\theta_{J-1}, g\theta_J],$$

donde

$$\theta_j = \frac{e^j}{(\log g)^{1000}}, \ell_j = 2\left[\theta^{-0.9}\right], \quad j = 0, \ldots, J$$

y $J \approx \log \frac{(\log g)^{1000}}{1000}$. Definimos

$$M_j(\chi) = \sum_{\substack{P|f \Rightarrow P \in I_j \\ \Omega(f) \leq \ell_j}} \frac{\lambda(f)\chi(f)\nu(f)}{|f|^{\frac{1}{2}}},$$

$$M(\chi) = \prod_{j=0}^{J} M_j(\chi).$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# El primer momento regularizado

Para encontrar el primer momento regularizado hay que evaluar

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}} L(\tfrac{1}{2},\chi)\chi(h)$$

donde $h$ es un polynomio (de grado bajo) que viene del regularizador (de corta longitud).

# Caracteres cúbicos sobre cuerpos de funciones (caso no Kummer)

Sea $q \equiv 2 \pmod 3$ impar y fijemos

$$\Omega: \text{ raíces de la unidad en } \mathbb{C}^* \to \text{ raíces de 1 en } \mathbb{F}_{q^2}^*.$$

Para $P$ mónico irreducible de grado par y $f \in \mathbb{F}_q[T]$ tales que $P \nmid f$, definimos

$$f^{\frac{q^{\deg(P)}-1}{3}} \equiv \Omega(\alpha) \pmod P \qquad \chi_P(f) := \alpha$$

Escribimos $P = \pi\tilde{\pi}$ en $\mathbb{F}_{q^2}[T]$, y obtenemos $\chi_\pi, \chi_{\tilde{\pi}}$ caracteres en $\mathbb{F}_{q^2}[T]$. Entonces

$$\chi_P = \chi_\pi|_{\mathbb{F}_q[T]}.$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Etapa inicial (caso no Kummer)

$\{$caracteres cúbicos primitivos sobre $\mathbb{F}_q[T]\}$

$$\Updownarrow$$

$\{$símbolos de résiduos cúbicos $\chi_F(h) = \left(\frac{h}{F}\right)_3$, $F \in \mathbb{F}_{q^2}[T]$ libre de cuadrados,

$$P \mid F \Rightarrow P \not\in \mathbb{F}_q[T]\}$$

$$\sum_{\substack{\chi \text{ cúbico} \\ \text{género}(\chi)=g}}^{*} L(\tfrac{1}{2}, \chi) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_{q^2}[T] \\ \text{libre de cuadrados} \\ \deg(F)=g/2+1 \\ P|F \Rightarrow P \not\in \mathbb{F}_q[T]}} L(\tfrac{1}{2}, \chi_F).$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Ecuación funcional aproximada

$$L^*(s,\chi) = \omega(\chi) q^{g\left(\frac{1}{2}-s\right)} L^*\left(1-s,\overline{\chi}\right),$$

$q \equiv 2 \pmod 3$:

$$L\left(\tfrac{1}{2},\chi_F\right) = \overbrace{\sum_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg(h)\leq A}} \frac{\chi_F(h)}{q^{\deg(h)/2}}}^{\sum_\chi \rightsquigarrow S_{\mathrm{principal}}} + \overbrace{\omega(\chi) \sum_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg(h)\leq g-A-1}} \frac{\overline{\chi(f)}}{q^{\deg(f)/2}}}^{\sum_\chi \rightsquigarrow S_{\mathrm{dual}}}$$

$$+ \frac{1}{1-\sqrt{q}} \sum_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg(h)=A+1}} \frac{\chi(f)}{q^{\deg(f)/2}} + \frac{\omega(\chi)}{1-\sqrt{q}} \sum_{\substack{h\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg(h)=g-A}} \frac{\overline{\chi(f)}}{q^{\deg(f)/2}}.$$

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# El término principal

Si $f = \cube$,

$$S_{\text{principal}} = \sum_{f=\cube} + \sum_{f\neq\cube}, \qquad \chi_F(f) = \begin{cases} 1 & (F,f)=1, \\ 0 & (F,f)\neq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{f=\cube} = \sum_{\substack{F\in\mathbb{F}_{q^2}[T] \\ \text{libre de cuadrados} \\ \deg(F)=g/2+1 \\ P|F\Rightarrow P\notin\mathbb{F}_q[T]}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{F}_q[T] \\ \deg(k)\leq A/3 \\ (k,F)=1}} \frac{1}{q^{3\deg(k)/2}}$$

$$= Mq^g + Nq^{g-\frac{A}{6}} + O\left(q^{g-\frac{A}{2}}\right)$$ usa la fórmula de Perron (residuo).

$$\sum_{f\neq\cube} \ll q^{\frac{A+g}{2}+\varepsilon g}$$ cota de Lindelöf (consecuencia de HR).

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# El término dual

$$S_{\text{dual}} = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_{q^2}[T] \\ \text{libre de cuadrados} \\ \deg(F) = g/2+1 \\ P|F \Rightarrow P \notin \mathbb{F}_q[T]}} \omega(\chi_F) \sum_{\substack{f \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg(f) \leq g-A-1}} \frac{\overline{\chi_F}(fh^2)}{q^{\deg(f)/2}}$$

Si $a \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right)$, definimos,

$$e(\alpha) = e^{\frac{2\pi i \operatorname{tr}(a_1)}{p}}, \text{ si } \alpha = \cdots + \frac{a_1}{T} + \cdots$$

La suma de Gauss

$$G(V, F) = \sum_{a \bmod F} \chi_f(a) e\left(\frac{aV}{F}\right)$$

$$\omega(\chi_F) = q^{-\frac{g}{2}-1} G_{q^2}(1, F)$$

# Cubic Gauss sums

Necesitamos entender

$$q^{-\frac{g}{2}-1}\sum_{\substack{f\in\mathbb{F}_q[T]\\ \deg(f)\leq g-A-1}}\frac{1}{q^{\deg(f)/2}}\sum_{\substack{F\in\mathbb{F}_{q^2}[T]\\ \text{libre de cuadrados}\\ \deg(F)=g/2+1\\ P|F\Rightarrow P\notin\mathbb{F}_q[T]\\ (F,fh)=1}} G_{q^2}(fh^2,F)$$

Las sumas de Gauss cúbicas cumplen:

- Son "casi" multiplicativas. Si $(F_1,F_2)=1$,

$$G(V,F_1F_2)=G(V,F_1)G(V,F_2)\chi_{F_1}^2(F_2).$$

- Hoffstein (1992) y Patterson (2007) estudiaron su funcion generatriz.

$$\Psi_f(u)=\sum_F G(f,F)u^{\deg F}$$

(en el contexto de la teoría de las series de Eisenstein metaplécticas)

# Ideas in the proof - la función generatriz de las sumas de Gauss cúbicas

- Ecuación funcional

$$\Psi_f(u) \longleftrightarrow \Psi_f\left(\frac{1}{q^2u}\right) \qquad (s \leftrightarrow 2-s)$$

- Polos en $u^3 = \frac{1}{q^4}$.

$$\rho(f) = \mathrm{Res}_{u^3=\frac{1}{q^4}} \Psi_f(u)$$

- Identidades que permiten deducir $\rho(f)$ de la factorización de $f$.

Empleando la fórmula de Perron (teorema del residuo)

$$S_{\mathrm{dual}} = -Nq^{g-\frac{A}{6}} + O_g\left(q^{\frac{3g}{2}-\frac{5}{6}A} + q^{\frac{5g}{6}}\right)$$

# Juntando cosas

$$S_{\mathrm{principal}} = Mq^{g} + Nq^{g-\frac{A}{6}} + O\left(q^{g-\frac{A}{2}} + q^{\frac{A+g}{2}+\varepsilon g}\right)$$

$$S_{\mathrm{dual}} = -Nq^{g-\frac{A}{6}} + O_g\left(q^{\frac{3g}{2}-\frac{5}{6}A} + q^{\frac{5g}{6}}\right)$$

Si tomamos $A = \frac{3g}{4}$, entonces $O\left(q^{\frac{7g}{8}+\varepsilon g}\right)$.

Université de Montréal

CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

# Una constante explícita (ligeramente chica)

**Teorema (David, Florea, L. (2020+))**

*Sea $q$ una potencia de primo impar tal que $q \equiv 2 \pmod 3$. Entonces*

$$\frac{\#\left\{\chi,\ \text{cúbico, género}(\chi) = g,\ L(\tfrac{1}{2},\chi) \neq 0\right\}^*}{\#\left\{\chi,\ \text{cúbico, género}(\chi) = g,\right\}^*} \geq 0.47 e^{-e^{182}}$$

# ¡Muchas gracias por su atención!

Université de Montréal

Centre de Recherches Mathématiques