Sobre el mínimo esencial de la altura de Faltings

Ricardo Menares

Pontificia Universidad Católica de Chile (Santiago)

Colaboración con José Burgos Gil (ICMAT)
y Juan Rivera-Letelier (Rochester)

Seminario Latinoameticano de Teoría de Números

14 de Mayo de 2020

Motivación

Altura de Weil: $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Escogemos un cuerpo de números K con $\alpha \in K$ y denotamos por M_K el conjunto de lugares de K.

$$h_W(\alpha) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{v \in M_K} \log \max\{1, |\alpha|_v\}\right)$$
$$= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{p \text{ primo}} \sum_{v|p} \log^+ |\alpha|_v + \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \log^+ |\sigma(\alpha)|\right)$$

Si $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$ está representado como fracción reducida, entonces

$$h_W\left(\frac{a}{b}\right) = \log \max\{|a|, |b|\}.$$

Además, $h_W(\alpha) = 0$ si y solo si α es una raíz de la unidad.

Teorema de Bilu

Teorema.(Bilu) Sea $\alpha_n \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ una sucesión genérica tal que $h_W(\alpha_n) \to 0$. Entonces, la sucesión de conjugados $Gal(\alpha_n)$ se equidistribuye sobre $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ siguiendo la medida de Lebesgue.

Equidistribución significa que para cualquier función continua y acotada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}]} \left(\sum_{\beta \in Gal(\alpha_n)} f(\beta) \right) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Altura de Zhang-Zagier

Altura de Zhang-Zagier: para $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, se define

$$h_Z(\alpha) = h_W(\alpha) + h_W(1-\alpha).$$

¿Hay un "Teorema de Bilu" para esta altura? ¿A qué corresponde la hipótesis $h_W(\alpha_n) \to 0$ en el caso de h_Z?

Notar que $\inf h_Z = h_Z(0) = h_Z(1) = h_Z(e^{\pm\pi i/3}) = 0$.

Teorema ($\pm$1993)

- (S.-W. Zhang) Existe $C > 0$ tal que $h_Z(\alpha) \geq C$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ salvo un número finito.
- (Zagier) Para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ con $\alpha \neq 0, 1, e^{\pm\pi i/3}$, se tiene

$$h_Z(\alpha) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0.2406059...$$

Altura de Zhang-Zagier

Ya con el resultado de Zhang
Existe $C > 0$ *tal que* $h_Z(\alpha) \geq C$ *para todo* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *salvo un número finito.*

vemos que no es posible tener una sucesión genérica con $h_Z(\alpha_n) \to 0$. Esto lleva a considerar el *mínimo esencial de* h_Z: el menor valor de acumulación de $h_Z(\alpha_n)$ cuando α_n es una sucesión genérica.

$$\mu^{ess}(h_Z) = \inf\{x : \text{ el conjunto}\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : h_Z(\alpha) \leq x\} \text{ es infinito}\}.$$

Ignoramos el valor de $\mu^{ess}(h_Z)$. Tampoco sabemos si es realizado por un número algebraico, menos aún si lo realizan una infinidad.
Teorema (Doche 2000-01)

$$1.28177702 \leq \mu^{ess}(h_Z) \leq 1.289735$$

Por comparación, consideremos

$$\mu^{ess}(h_W) = \inf\{x : \text{ el conjunto}\{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : h_W(\alpha) \leq x\} \text{ es infinito}\}.$$

Como $\inf h_W = 0$ se realiza en el conjunto infinito de las raíces de la unidad, tenemos $\mu^{ess}(h_W) = 0$.

El resultado de Zhang está motivado por un problema de tipo Bogomolov: una subvariedad de torsión $T \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ es el trasladado por un punto de torsión de una subvariedad tórica. Concretamente,

$$T = \{(x, y) : x^n y^m = \zeta\}, \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}, \quad \zeta \text{ raíz de la unidad.}$$

Teorema.(S.-W. Zhang, $\pm$1993) Sea $X \subseteq \mathbb{C}^2$ una subvariedad propia. Entonces $\mu^{ess}(h|_{X(\overline{\mathbb{Q}})}) = 0$ si y solo si X contiene una subvariedad de torsión.

Aquí $h : \overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ es $h(\alpha, \beta) = h_W(\alpha) + h_W(\beta)$.
La altura de Zhang-Zagier corresponde al caso $X = \{x + y = 1\}$.

Función de Green hiperbólica

Sea

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi i \tau},$$

el discriminante modular. Definimos $g_\infty : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ por

$$g_\infty(\tau) := -\log |(4\pi y)^6 \Delta(\tau)|, \quad \tau = x + iy.$$

Es una función continua e invariante por $SL_2(\mathbb{Z})$. Como $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es sobreyectiva y separa las órbitas de $SL_2(\mathbb{Z})$, podemos definir $g_{hyp} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$g_\infty = g_{hyp} \circ j.$$

Observación: normalizamos j de tal manera que

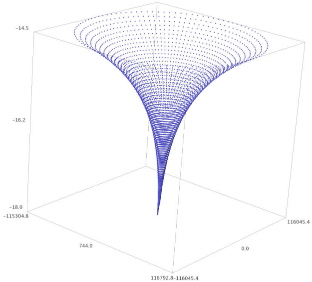
$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n, \quad c_n \in \mathbb{Z}.$$

Función de Green hiperbólica

$$g_\infty(\tau) := -\log\left|(4\pi y)^6 \Delta(\tau)\right|, \quad \tau = x + iy.$$

$$g_\infty = g_{hyp} \circ j.$$

La función g_{hyp} alcanza su mínimo solamente en 0.
Equivalentemente, g_∞ alcanza su mínimo solamente en la órbita bajo $SL_2(\mathbb{Z})$ de $\rho := e^{\pi i/3}$.



Altura de Faltings

Sea K un cuerpo de números y E/K una curva elíptica. Para cada incrustación $\sigma : K \to \mathbb{C}$, tenemos

$$E^{\sigma}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau_{\sigma}\mathbb{Z}, \quad \tau_{\sigma} \in \mathbb{H}.$$

La altura de Faltings es

$$h_F(E/K) = \frac{1}{12[K:\mathbb{Q}]} \left(\log N_{K/\mathbb{Q}} \Delta_{E/K} + \sum_{\sigma : K \to \mathbb{C}} g_{\infty}(\tau_{\sigma}) \right).$$

Aquí, $\Delta_{E/K}$ es el discriminante minimal de E.

- Para cualquier curva elíptica E/K, con K cuerpo de números, existe una extensión finita K'/K tal que E admite un modelo semiestable sobre K'
- Si K'' es otra tal extensión, entonces $h_F(E/K') = h_F(E/K'')$

Esto permite definir la *altura de Faltings estable* $h_F : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ por

$$h_F(\alpha) := h_F(E/K), \quad j(E) = \alpha, \quad E/K \text{ semiestable.}$$

¿Hay un "Teorema de Bilu" para esta altura? ¿Qué podemos decir del mínimo esencial?

Teorema (Burgos Gil, M., Rivera-Letelier, 2016). Se tiene que

$$\inf h_F = h_F(0) < h_F(1) < \mu^{ess}(h_F) < h_F(-1).$$

Los valores $h_F(0)$ y $h_F(1)$ son aislados y solo se alcanzan en un punto.
Más precisamente,

$$10^{-4} < h_F(1) - h_F(0) < \mu^{ess}(h_F) - h_F(0) < 2 \cdot 10^{-4},$$

$$-0.748629 \leq h_F(1) < \mu^{ess}(h_F) \leq -0.748622$$

.
Además, la imagen de h_F es densa en el intervalo $[-0.748622, \infty)$.
Observación: $\inf h_F = h_F(0)$ es un resultado de Deligne.
$h_F(0) = -\frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{3}{(2\pi)^3} \Gamma \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right) = -0.7487524855033....$

Resultados experimentales

- Primeros 4 mínimos:

$$h_F(0) = -0.74875248..., \quad h_F(1) = -0.74862817...$$

$$h_F(e^{\pi i/3}) = -0.74862517..., \quad h_F(e^{\pi i/5}) = -0.74862366...$$

- Siguiente valor conocido: $-0.74862330...$, se alcanza en las raíces de

$$x^8 - 2x^7 + 2x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

- $-0.74862345 \leq \mu^{ess}(h_F) \leq -0.74862278.$

Cotas superiores y densidad de la imagen

Teorema de Fekete-Szëgo: para $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$S_a^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = 1\}.$$

Entonces existe una sucesión $\alpha_n \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$ tal que los conjuntos $Gal(\alpha_n)$ se equidistribuyen siguiendo la medida de Lebesgue en S_a^1. Es decir, para toda función continua y acotada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, se cumple

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}]} \sum_{\beta \in Gal(\alpha_n)} f(\beta) = \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}) d\theta.$$

Observación: Fekete-Szëgo es un enunciado más general, en el que S_a^1 se puede reemplazar por un conjunto compacto, invariante por conjugación compleja y de capacidad 1.

Cotas superiores y densidad de la imagen

Teorema de Fekete-Szëgo: para todo $a \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\alpha_n \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$ tal que los conjuntos $Gal(\alpha_n)$ se equidistribuyen siguiendo la medida de Lebesgue en S^1_a.
Una sucesión como en el teorema necesariamente es genérica, luego

$$\mu^{ess}(h_F) = \inf\{x : \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : h_F(\alpha) \leq x\} \text{ es infinito.}\}$$
$$\leq \liminf h_F(\alpha_n)$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} 12 \cdot h_F(\alpha_n) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}]} \sum_{\beta \in Gal(\alpha_n)} g_{hyp}(\beta) = \int_0^{2\pi} g_{hyp}(a + e^{i\theta}) d\theta.$$

Conclusiones:

- $\mu^{ess}(h_F) \leq M := \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} g_{hyp}(a+e^{i\theta})d\theta$
- La imagen de h_F es densa en el conjunto $T := \{\frac{1}{12}\int_0^{2\pi} g_{hyp}(a+e^{i\theta})d\theta, a\in\mathbb{R}\}$

En particular, como $a \mapsto \int_0^{2\pi} g_{hyp}(a+e^{i\theta})d\theta$ es continua y $\lim_{|w|\to\infty} g_{hyp}(w) = +\infty$, vemos que la imagen de h_F es densa en $[M,\infty)$.
La cota superior para $\mu^{ess}(h_F)$ se obtiene por medio de una estimación rigurosa para M (aritmética del intervalo). Tomando $a = 0.205$ obtenemos $M \leq -0.748622$

Cotas inferiores

La altura de Faltings de una curva elíptica semiestable E/K puede escribirse en términos de $\alpha = j(E)$:

$$\begin{aligned}
12 \cdot h_F(E/K) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\log N_{K/\mathbb{Q}}\Delta_{E/K} + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} g_\infty(\tau_\sigma)\Big) \\
&= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{p \text{ primo}} \sum_{v|p} \underbrace{\log^+ |\alpha|_v}_{\geq 0} + \sum_{\beta \in Gal(\alpha)} g_{hyp}(\beta)\right) \\
&\geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\beta \in Gal(\alpha)} g_{hyp}(\beta)\Big) \\
&\geq \inf g_{hyp} = g_{hyp}(0)
\end{aligned}$$

Además, la igualdad se alcanza si y sólo si $\alpha = j(E) = 0$. Así vemos que $\inf h_F = h_F(0)$, alcanzándose solamente en 0. Obtenemos la “cota trivial” $\mu^{ess}(h_F) \geq \inf h_F = h_F(0)$.

Mejorando la cota inferior trivial

Tomemos $\alpha \neq 0$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ y $0 \leq a \leq 1$. La fórmula del producto

$$\Big(\prod_{v \in M_K} |\alpha|_v\Big)^a = 1 \qquad \text{y la desigualdad}$$

$$\log^+ x - a \log x \geq 0, \quad x > 0, \quad 0 \leq a \leq 1,$$

implican que para $\alpha \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
12 h_F(\alpha) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_p \sum_{v|p} (\log^+ |\alpha|_v - a \log |\alpha|_v) \\
&\quad + \sum_{\beta \in Gal(\alpha)} g_{hyp}(\beta) - a \log |\beta| \Big) \\
&\geq \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\sum_{\beta \in Gal(\alpha)} g_{hyp}(\beta) - a \log |\beta| \Big) \\
&\geq \inf_{z \neq 0} g_{hyp}(z) - a \log |z|
\end{aligned}$$

Deducimos que $\forall 0 \leq a \leq 1$

$$12\mu_{ess}(h_F) \geq \inf_{z\in\mathbb{C}} g_{hyp}(z) - a\log|z|.$$

Esto nos lleva a un "problema min-max"

$$12\mu_{ess}(h_F) \geq \sup_{0\leq a\leq 1} \inf_{z\in\mathbb{C}} g_{hyp}(z) - a\log|z|.$$

Usando propiedades de concavidad de g_{hyp}, podemos mostrar que el problema se resuelve con $z = 1$ y $a = \partial_x g_{hyp}(1)$. Es decir,

$$12\mu_{ess}(h_F) \geq g_{hyp}(1) = 12h_F(1).$$

Esto muestra nuestra cota inferior y como $g_{hyp}(1) > g_{hyp}(0)$, que $h_F(0)$ es un valor aislado.

¿Un algoritmo para calcular el mínimo esencial?

Cotas superiores: Experimentalmente, ningún conjunto compacto invariante por conjugación y de capacidad 1 permite una mejora significativa en la cota que ya tenemos.
Cota inferiores: el método que presentamos puede extenderse un poco.
Usando el lenguaje geométrico de teoría de Arakelov, lo que hemos hecho puede decirse así: la altura de Faltings estable proviene de considerar la curva modular de nivel 1 y el fibrado en rectas M_{12} (formas modulares de peso 12). Dada una sección s, consideramos la métrica de Peterson

$$\|s\|_{Pet}(\tau) = |y^6 s(\tau)|.$$

Entonces $h_F(E/K)$ corresponde a tomar el grado aritmético de la sección $s = \Delta$ al "evaluarla" en E.
El truco de usar la fórmula del producto para insertar un término corresponde a cambiar de sección, tomando $s = j^a \cdot \Delta$. Ver los "ancillary files" del manuscrito en arxiv.

Comentarios

- El teorema de Fekete-Szëgo adélico (Teorema de Rumely) debe permitir mejorar las cotas superiores. La tesis en curso de M. Morales considera esta herramienta, en el caso de la altura de Zhang-Zagier y similares
- Es un problema abierto encontrar un algoritmo para determinar el mínimo esencial de cualquier función altura donde el problema no sea obvio (como para la altura de Weil, alturas tóricas o la altura de Néron-Tate en variedades abelianas)
- Este tipo de análisis debe poder hacerse para curvas de Shimura. Sin embargo, aparecen nuevas dificultades. Para ninguna curva de Shimura (que no sea una curva modular) se conoce siquiera el mínimo de la altura de Faltings.

¡Gracias!