Teoría analítica de números

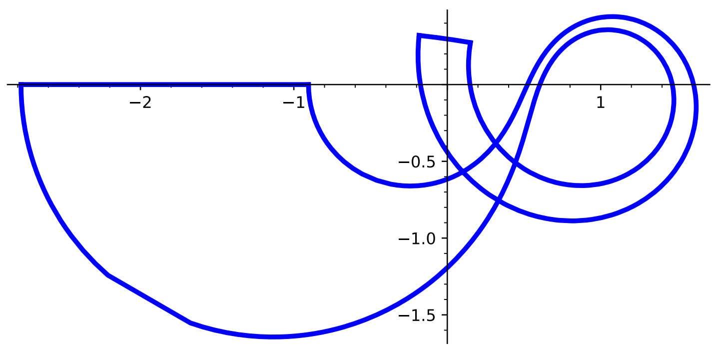
6. Ceros de la función ζ y funciones L - entrega viernes 14/6

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

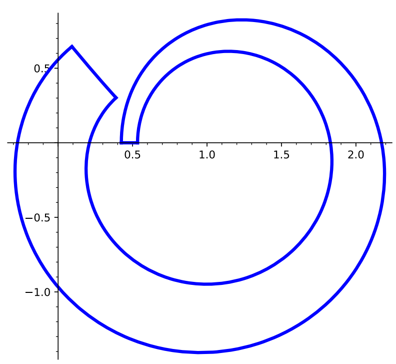
Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

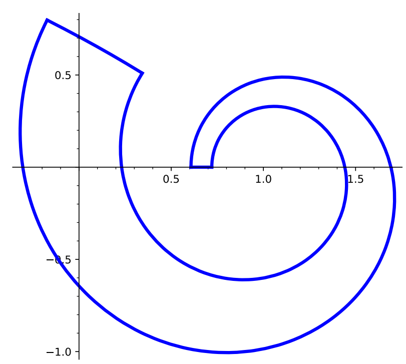
89. El siguiente gráfico muestra $\zeta(s)$ cuando s recorre el borde del rectángulo de vértices $\{0.3, 0.7, 0.7 + 14.5i, 0.3 + 14.5i\}$.



Concluir que $\zeta(s)$ tiene un cero en dicho rectángulo y que su parte real es $1/2$.
En efecto, el primer cero no trivial es $1/2 + it$ *con* $t = 14.13472514\ldots$.

90. Los dos gráficos siguientes muestran $L(s, \chi_3)$ y $L(s, \chi_4)$ en el borde de los rectángulo de vértices $\{0.3, 0.7, 0.7+8.5i, 0.3+8.5i\}$ y $\{0.3, 0.7, 0.7+6.5i, 0.3+6.5i\}$ respectivamente.





Observar que "giran" siempre en la misma dirección, a diferencia de $\zeta(s)$. ¿Por qué?
Los primeros ceros no triviales tienen $t = 8.039737\ldots$ *y* $t = 6.020948\ldots$ *respectivamente*

91. Probar que $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
Otra interpretación: $\cos(-2\theta) + 4\cos(-\theta) + 6\cos(0) + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$. *¿Qué son los coeficientes* $1, 4, 6, 4, 1$*?*

92. Sean $A > B > 0$. Probar que si $K > 0$ y $\beta \leq 1$ cumplen

$$\frac{A}{\sigma - \beta} < \frac{B}{\sigma - 1} + K$$

para todo $1 < \sigma < 2$, entonces

$$\beta < 1 - \frac{c}{K},$$

donde $c > 0$ depende solamente de A y de B.
Sugerencia: escribir $\sigma = 1 + \delta/K$ *y obtener una cota* $\beta < \cdots$*, encontrar un* δ *adecuado.*

93. Sea χ un caracter primitivo módulo q. Probar que siempre que $1 - 1/\log q \leq \sigma \leq 1$,

   (a) $|L(\sigma, \chi)| < c_0 \log q$.
   (b) $|L'(\sigma, \chi)| < c_1 \log^2 q$.

   Sugerencia: ver Davenport, página 96.

94. Probar que para $T \to \infty$ vale

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log T)$$

donde la suma es sobre los ceros no triviales $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$.
Sugerencia: ver Davenport, páginas 98 y 99.

95. Sea χ un caracter primitivo módulo q. Probar que para t real

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} = O(\mathscr{L})$$

donde $\mathscr{L} = \log q(|t| + 2)$ y la suma es sobre los ceros no triviales $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s, \chi)$.

96. (6p.) Leer uno de los siguientes artículos expositorios:

   (a) Brian Conrey, *The Riemann Hypothesis* (2003).
   (b) Andrew Granville y Greg Martin, *Prime Number Races* (2006).
   (c) Don Zagier, *The First 50 Million Prime Numbers* (1977).

   Escribir acerca del artículo elegido, comentando alguna idea interesante que te haya llamado la atención y sobre qué aspecto te gustaría conocer más.