Teoría analítica de números

5. Series de Dirichlet: función ζ y funciones L - entrega lunes 31/5

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

67. Sean $A = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x}$ y $B = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log(x)}{x}$.
En este ejercicio se muestra el método usado por Chebyshev para acotar A y B.
Recordar $T(x) = \sum_{n\le x} \log n = \sum \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x\log x - x + O(\log x)$.
    (a) Sea $T_1(x) = T(x) - 2T(x/2)$. Probar que
$$(\pi(x) - \pi(x/2))\log(x/2) \le \sum_{\frac{x}{2}<n\le x} \Lambda(n) \le T_1(x) \le \sum_{p\le x} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \le \pi(x)\log x$$
y usando la fórmula asintótica para $T(x)$ concluir que $\log 2 \le A$ y $B \le 2\log 2$.
    (b) Sea $T_2(x) = T(x) - T(x/2) - T(x/3) - T(x/5) + T(x/30)$. Probar que
$$(\pi(x) - \pi(x/6))\log(x/6) \le T_2(x) \le \pi(x)\log x$$
y concluir que $\alpha \le A$ y $B \le \frac{6}{5}\alpha$ donde $\alpha = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30} = 0.92129....$
Sugerencia: $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{5n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{30n} \right\rfloor \le 1$ *con igualdad para* $x/6 < n \le x$.

68. Probar que si $(a,q) = 1$ entonces existe una constante $A_{a,q}$ tal que
$$\sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv a \pmod q}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(q)} \log\log x + A_{a,q} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

69. Probar que
$$\sum_{\substack{m=1 \\ (n,m)=1}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n^2} = \frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}$$

70. Probar que para $\operatorname{Re} s = 1$, $s \ne 1$, la serie $\sum n^{-s}$ tiene sumas parciales acotadas pero no converge.

71. Probar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

72. Sea $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}$ donde $f(n)$ es completamente multiplicativa y la serie converge absolutamente para $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Probar que para $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ vale

$$-\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{n^s}\,.$$

73. Probar que $\zeta(s) \neq 0$ para $\operatorname{Re} s > 1$.

    Sugerencia: ¿qué significa que el producto de Euler converge? Alternativamente, usar el resultado del ejercicio 63(b).

74. Probar que $\zeta(s) < 0$ para $0 < s < 1$.

75. Sea $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$.

    (a) Probar que $\xi(s)$ es real en $s \in \mathbb{R}$ y en $\operatorname{Re} s = 1/2$, y que $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$.

    (b) Probar que los ceros de $\xi(s)$ están todos en la banda crítica $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, que están ubicados de manera simétrica respecto al eje real y al eje $\operatorname{Re} s = 1/2$, y que coinciden con los ceros no triviales de $\zeta(s)$ con igual multiplicidad.

76. Probar que $\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)\overline{\tau(\chi)}$ para todo carácter de Dirichlet χ.

77. Sea χ un carácter de Dirichlet módulo q, y sea χ_1 el carácter primitivo módulo q_1 que induce χ, donde $q = q_1 r$.

    (a) Probar que si $(q_1, r) > 1$ entonces $\tau(\chi) = 0$.

    (b) Probar que $\tau(\chi) = \mu(r)\chi_1(r)\tau(\chi_1)$.

    Sugerencia: por (a) basta probarlo para $(q_1, r) = 1$. *En tal caso todo* m *se puede escribir como* $m \equiv uq_1 + vr \pmod{q}$*...*

78. Sea χ un carácter primitivo par, y sea $\psi(x,\chi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2\pi x/q}$. Probar

$$\psi(1/x,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{q^{1/2}}\, x^{1/2}\psi(x,\overline{\chi})$$

79. (a) Probar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha)\, e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = -i\, x^{3/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, e^{-n^2\pi x + 2\pi i n\alpha}\,.$$

    Sugerencia: derivar la fórmula probada en clase.

    (b) Sea χ un carácter primitivo impar, y sea $\psi_1(x,\chi) = \sum_{-\infty}^{\infty} n\chi(n) e^{-n^2\pi x/q}$. Probar

$$\psi_1(1/x,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{iq^{1/2}}\, x^{3/2}\psi_1(x,\overline{\chi})$$

80. *Fórmula de Jensen.*

(a) Sea $F(z)$ holomorfa y sin ceros en $|z| \leq 1$. Probar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F(e^{i\theta})\right| \, d\theta = \log|F(0)| \, .$$

(b) Probar que si $0 < |\rho| < 1$ entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta} - \rho\right| \, d\theta = 0 \, .$$

Sugerencia: $\log\left|e^{i\theta} - \rho\right| = \log\left|1 - \rho\, e^{-i\theta}\right|$*;* $\log(1 - \rho\, z)$ *es holomorfa en* $|z| \leq 1$.

(c) Si $f(z)$ es holomorfa en $|z| \leq R$, sin ceros en $|z| = R$ y en $z = 0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(R\, e^{i\theta})\right| \, d\theta - \log|f(0)| = \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr \, ,$$

donde $n(r)$ es la cantidad de ceros de f en $\{|z| \leq r\}$ contados con multiplicidad.

Sugerencia: escribir $f(R\, z) = (z - \rho_1) \ldots (z - \rho_n)\, F(z)$ *con* $0 < |\rho_i| < 1$ *y* $F(z)$ *holomorfa y sin ceros en* $|z| \leq 1$.

81. Sea $\{r_1, r_2, \ldots\}$ una sucesión de reales positivos positivos tal que $\#\{r_i \ : \ 0 < r_i < R\} = O(R^\alpha)$ para todo $\alpha > \rho$. Probar que $\sum r_n^{-\beta}$ converge para todo $\beta > \rho$.

82. Sea $\{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$ una sucesión de complejos no nulos tal que $\sum |\rho_n|^{-2}$ converge.

(a) Probar que

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\rho_n}\right) e^{z/\rho_n}$$

converge absoluta y uniformemente en compactos de $\mathbb{C} - \{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$. Concluir que $P(z)$ define una función entera cuyo conjunto de ceros (con multiplicidad) es precisamente $\{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$.

(b) Probar que existen R arbitrariamente grandes tal que $|R - |\rho_i|| > |\rho_i|^{-2}$ para todo i.

(c) Probar que si $\sum |\rho_i|^{-1}$ converge entonces $|P(z)| = e^{C|z|}$ para una constante C.

Sugerencia: usar que $|(1 - x)e^x| \leq e^{2|x|}$ *para todo* $x \in \mathbb{C}$.

83. (a) Definiendo $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ para $\operatorname{Re} s > 0$, probar que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

(b) Probar que $1/\Gamma(s)$ es una función entera de orden 1.

(c) Probar la fórmula de Weierstrass para la función Γ

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

84. Sea f una función meromorfa y sea $g(z) = f'(z)/f(z)$ su derivada logarítmica. Probar los polos de g coinciden con los ceros y polos de f, son todos simples y su residuo indica el orden de cero (si es positivo) o de polo (si es negativo) de f.

85. (a) Probar que

$$\int_1^{\infty} \{x\}\, x^{-2}\, dx = 1 - \gamma\,.$$

(b) Calcular

$$\lim_{s\to 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right)$$

Sugerencia: usar $\zeta(s) = s/(s-1) - s\int_1^{\infty} \{x\}\, x^{-1-s}\, dx$ *para* $\mathrm{Re}(s) > 1$.

86. (a) Probar que

$$-\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right).$$

Sugerencia: usar el ejercicio 83.

(b) Calcular $-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)}$.

87. Sabiendo que $\sum_{\rho_i} \frac{1}{\rho_i} = -B = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{log(4\pi)}{2} < 0.0231$ (suma sobre los ceros no triviales de ζ) probar que $\mathrm{Im}\,\rho_i > 6.5$ para todos los ceros.

88. Probar la fórmula para la derivada logarítmica de $L(s,\chi)$:

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = B(\chi) - \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

(suma sobre ceros no triviales de $L(s,\chi)$.)