Teoría analítica de números

4. Promedio de funciones aritméticas, números primos - entrega lunes 17/5

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

43. Usar la fórmula de sumación de Euler para deducir

    (a) Existe una constante A tal que

    $$\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

    (b) Existe una constante B tal que

    $$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{n\log n} = \log(\log x) + B + O\left(\frac{1}{x\log x}\right).$$

44. Si C es la constante de Euler entonces

    $$\sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + 2C\log x + O(1)\,.$$

45. Si $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, entonces

    $$\sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}\log x}{1-\alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{1-\alpha})\,.$$

46. (3p.) Para $s > 0$ real y $k \geq 1$ entero, encontrar una fórmula asintótica para las sumas parciales

    $$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,k)=1}} \frac{1}{n^s}$$

    con un término de error que tienda a 0 con $x \to \infty$. Incluir $s = 1$.
    Sugerencia: ver ejercicio 33.

47. (2p.) En este ejercicio x, y son reales, n, k son enteros.

    (a) Si $x = k + y$ con $0 \leq y < 1$ entonces $k = \lfloor x \rfloor$.

(b) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

(c) $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x = \lfloor x \rfloor, \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \neq \lfloor x \rfloor. \end{cases}$

(d) $\lfloor x/n \rfloor = \big\lfloor \lfloor x \rfloor / n \big\rfloor$ si $n \geq 1$.

48. (1p.) En este ejercicio x, y son reales.

(a) Si $0 < y < 1$, ¿cuáles son los posibles valores de $\lfloor x \rfloor - \lfloor x - y \rfloor$?

(b) ¿Cuáles son los posibles valores de $\{x\} - \{-x\}$?

49. (1p.) En este ejercicio x, y son reales.

(a) Probar que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ es 0 o 1.

(b) Probar que $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor$.

50. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado $n \geq 1$. Probar que $f(x)$ es compuesto para infinitos valores enteros de x.

51. Probar que para cualquier $n > 1$ existen n compuestos consecutivos.

52. Probar que no existen polinomios P y Q tales que $\pi(x) = P(x)/Q(x)$ para $x \geq 1$.

53. Considere una progresión aritmética de enteros

$$h, h+k, h+2k, \ldots, h+nk, \ldots$$

con $0 < k < 2000$. Probar que no existen 11 términos consecutivos de esta progresión que sean todos primos.

54. Para $x \geq 2$ definimos la integral logarítmica como

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

(a) Probar que

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log 2}.$$

Más en general existe una constante C_n tal que

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{\log^k x}\right) + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n.$$

(b) Probar que
$$\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} = O\left(\frac{x}{\log^n x}\right).$$
Concluir que $\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$, y que $\mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} \sim \frac{x}{\log^2 x}$.

55. Probar que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

(A)
$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right);$$

(B)
$$\vartheta(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

56. Sean $S(x)$ y $T(x)$ funciones a valores reales tales que
$$T(x) = \sum_{n \leq x} S\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{para todo } x \geq 1$$
Si $S(x) = O(x)$ y c es una constante positiva, probar que
$$S(x) \sim cx$$
implica
$$T(x) \sim cx \log x.$$

57. (2p.) Probar que la fórmula de Selberg es equivalente acada una de las dos afirmaciones siguientes:

(A)
$$\psi(x)\log x + \sum_{p \leq x} \psi\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2x\log x + O(x);$$

(B)
$$\vartheta(x)\log x + \sum_{p \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2x\log x + O(x);$$

58. (2p.) Sea $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. Probar que
$$M(x)\log x + \sum_{n \leq x} M\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = O(x)$$
y que
$$M(x)\log x + \sum_{p \leq x} M\left(\frac{x}{n}\right)\log p = O(x)$$

59. (3p.) Sea $A(x)$ definida para $x > 0$ tal que

$$T(x) = \sum_{n \le x} A\left(\frac{x}{n}\right) = ax \log x + bx + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

donde a y b son constantes. Probar que

$$A(x) \log x + \sum_{n \le x} A\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2ax \log x + o(x \log x).$$

Observar que la fórmula de Selberg es un caso particular.

60. Probar que $\psi(x) \sim x$ implica la fórmula de Selberg con error $o(x \log x)$ en vez de $O(x)$.

61. En este ejercicio se demuestra que si $\psi(x)/x$ tiene límite, el límite debe ser 1. Usamos el resultado visto en clase

$$\sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \log x + O(x).$$

(a) Sea $\delta = \limsup \psi(x)/x$. Dado $\varepsilon > 0$, elegir $N = N(\varepsilon)$ tal que $x \ge N$ implica que $\psi(x) \le (\delta + \varepsilon)x$. Probar la desigualdad

$$\sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \le (\delta + \varepsilon)x \log x + x\psi(N),$$

y deducir que $\delta \ge 1$.
Sugerencia: dividir la suma en $n \le x/N$ y $n > x/N$.

(b) Sea $\gamma = \liminf \psi(x)/x$ y usar un argumento similar al para deducir que $\gamma \le 1$. Concluir que si $\psi(x)/x$ tiene límite, debe ser 1.

62. (a) Probar que

$$\psi(x) \le \pi(x) \log(x) + \frac{x^{1/2} \log^2 x}{2 \log 2}.$$

Sugerencia: $\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \ldots$. Acotar el primer término por $\pi(x)\log(x)$ y cada uno de los restantes $\log_2(x)$ términos por $\pi(x^{1/2})\log(x^{1/2})$.

(b) Usando que $\psi(x) \le cx$ (visto en clase) probar que para x suficientemente grande

$$\pi(x) \log(x) \le \psi(x) + \frac{8cx \log\log x}{3 \log x} + \frac{x}{\log x}.$$

Sugerencia: $\psi(x) \ge \vartheta(x) \ge \log(x/\log^2 x)\big(\pi(x) - \pi(x/log^2 x)\big)$. Usar $\pi(y) \le y$ para mostrar $\pi(x)\log x \le \psi(x) + \psi(x)\frac{2\log\log x}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{\log x}$. Para concluir usar que $2\log\log x < (\log x)/4$ para x suficientemente grande y que $\psi(x) \le cx$.

(c) Concluir que

$$\psi(x) = \pi(x)\log(x) + O\left(\frac{x \log\log x}{\log x}\right).$$

Usar el ejercicio anterior para probar que si $\pi(x)/\frac{x}{\log x}$ tiene límite, debe ser 1.

63. (a) Considere dos series de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{y} \qquad G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

absolutamente convergentes para $\mathrm{Re}(s) > a$. Probar que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

para $\mathrm{Re}(s) > a$, donde $h = f * g$.

(b) Probar que $\zeta(s) \neq 0$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$, y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

En particular $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^2 = 1/\zeta(2)$.

64. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica módulo 2π tal que $f(x) = x^2$ para $x \in (-\pi, \pi)$.

(a) Calcular su serie de Fourier.

(b) Evaluar en $x = \pi$ para obtener $\zeta(2) = \pi^2/6$.

(c) Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x^4$ para obtener $\zeta(4) = \pi^4/90$.

65. (a) Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\zeta(2)}{2}.$$

(b) Probar que existe una constante C tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + C,$$

para $0 < x < 2\pi$.

Sugerencia: integrar la parte imaginaria de la fórmula del ejercicio 9.

(c) Evaluando en $x = 0$ y en $x = \pi$ encontrar dos relaciones diferentes entre $\zeta(2)$ y C, y resolver para obtener $\zeta(2) = \pi^2/6$.

66. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función periódica módulo 2π tal que $f(x) = x$ para $x \in (-\pi, \pi)$.

(a) Calcular los coeficientes de Fourier de f:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx\,.$$

(b) Usar la identidad de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\, dx$$

para concluir $\zeta(2) = \pi^2/6$.