Teoría analítica de números

4. Promedio de funciones aritméticas, números primos - entrega lunes 17/5

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

43. Usar la fórmula de sumación de Euler para deducir

    (a) Existe una constante A tal que

$$\sum_{n\le x}\frac{\log n}{n}=\frac{1}{2}\log^2 x+A+O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

    (b) Existe una constante B tal que

$$\sum_{2\le n\le x}\frac{1}{n\log n}=\log(\log x)+B+O\left(\frac{1}{x\log x}\right).$$

44. Si C es la constante de Euler entonces

$$\sum_{n\le x}\frac{d(n)}{n}=\frac{1}{2}\log^2 x+2C\log x+O(1).$$

45. Si $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, entonces

$$\sum_{n\le x}\frac{d(n)}{n^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}\log x}{1-\alpha}+\zeta(\alpha)^2+O(x^{1-\alpha}).$$

46. (3p.) Para $s>0$ real y $k\ge 1$ entero, encontrar una fórmula asintótica para las sumas parciales

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}\frac{1}{n^s}$$

ver ej 33.

    con un término de error que tienda a 0 con $x\to\infty$. Incluir $s=1$.
    Sugerencia: ver ejercicio 33.

47. (2p.) En este ejercicio x, y son reales, n, k son enteros.

    (a) Si $x=k+y$ con $0\le y<1$ entonces $k=\lfloor x\rfloor$.

$9x+a$

$\boxed{x^2+1}$

(b) $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.

(c) $\lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor & \text{si } x=\lfloor x\rfloor, \\ -\lfloor x\rfloor - 1 & \text{si } x\neq \lfloor x\rfloor. \end{cases}$

(d) $\lfloor x/n\rfloor = \big\lfloor \lfloor x\rfloor/n\big\rfloor$ si $n\geq 1$.

$11^2+1=122 \equiv 0\ (61)$

48. (1p.) En este ejercicio x, y son reales.

   (a) Si $0<y<1$, ¿cuáles son los posibles valores de $\lfloor x\rfloor - \lfloor x-y\rfloor$?

   (b) ¿Cuáles son los posibles valores de $\{x\}-\{-x\}$?

$x\equiv 11\ (61) \Rightarrow x^2+1\equiv 0\ (61)$

49. (1p.) En este ejercicio x, y son reales.

   (a) Probar que $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor$ es 0 o 1.

   (b) Probar que $\lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor \geq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor$.

50. Sea $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ de grado $n\geq 1$. Probar que $f(x)$ es compuesto para infinitos valores enteros de x.

51. Probar que para cualquier $n>1$ existen n compuestos consecutivos.

INP $\Rightarrow$

52. Probar que no existen polinomios P y Q tales que $\pi(x)=P(x)/Q(x)$ para $x\geq 1$.

53. Considere una progresión aritmética de enteros

$$h, h+k, h+2k, \ldots, h+nk, \ldots$$

con $0<k<2000$. Probar que no existen 11 términos consecutivos de esta progresión que sean todos primos.

54. Para $x\geq 2$ definimos la integral logarítmica como

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

   (a) Probar que

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{2}{\log 2}.$$

   Más en general existe una constante C_n tal que

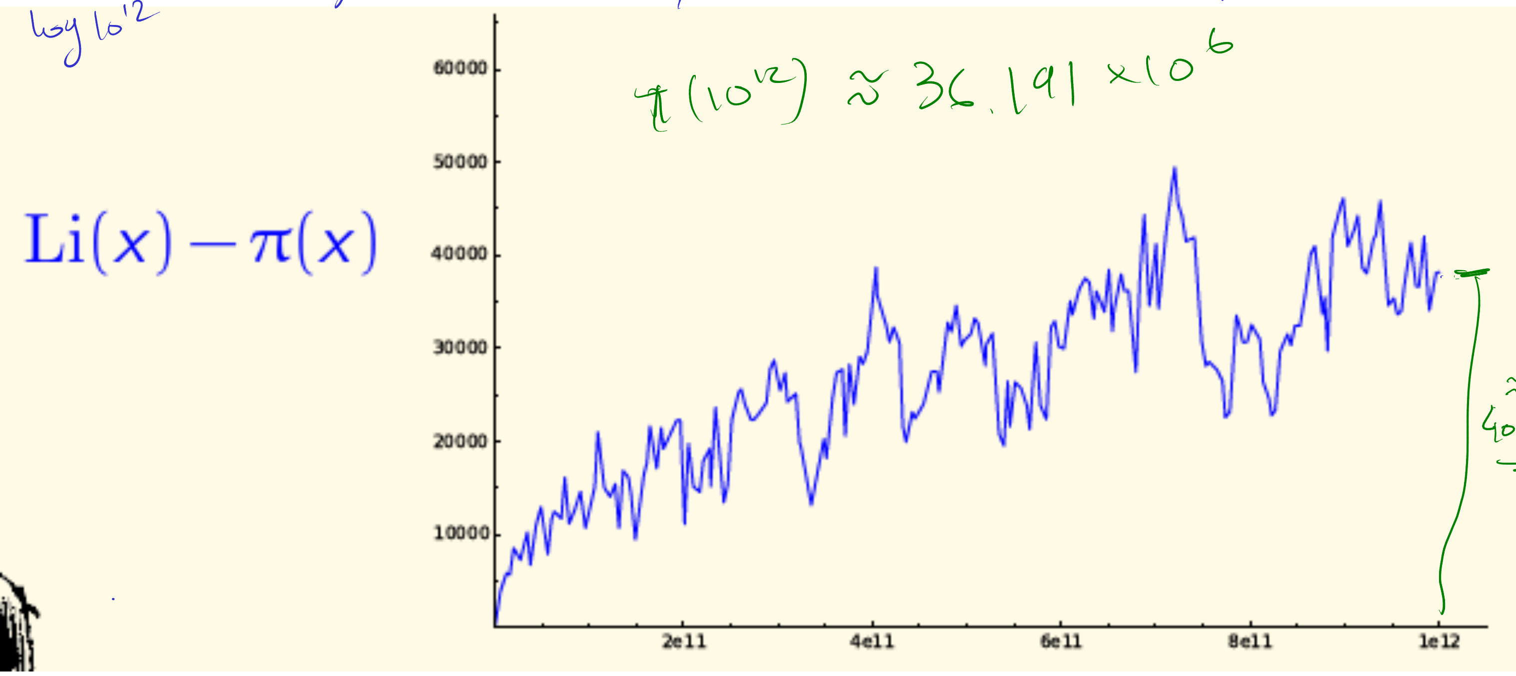
$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{\log^k x}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n.$$

Conj:

$\pi(x)\sim \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} \iff \pi(x)\sim Li(x)$

$\pi(x) - Li(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$

$\frac{10^{12}}{\log 10^{12}} \approx 36{,}191 \times 10^9$ / $Li(10^{12}) \approx 37{,}607 \times 10^9$



$\pi(10^{12}) \approx 36.191 \times 10^6$

≈ 40.000

$h, h+k, h+2k, \ldots, h+nk, \ldots$

$\boxed{a_n = h+nk}$ $\qquad$ $\boxed{0<k<2000}$

$$\overbrace{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}^{210}$$

$(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 > 2000)$

Si hay 11 primos consecutivos $\Rightarrow |k| > 2000$.

Sup hay 2 primos consecutivos ¿k?

¿$k=5$? $(2,7)$ ......

hay 3 primos consec. $(k=4)$

$\{3,7,11\} \rightarrow \{a, a+4, a+8\}$

$\equiv a \quad \equiv a+1 \quad \equiv a+2$

$11, 11+k, \ldots$

$\{a, a+2, a+4\} \leftarrow \{3,5,7\}$

$\boxed{h, h+k, h+2k, h+3k \text{ primos} \rightarrow 3|k}$

$f(x) = x^2 - x + 41$

$(163 = 4 \cdot 41 - 1)$

$f(n)$ es primo para $n = 0, 1, \ldots, 39, 40$

$e^{\pi\sqrt{163}} \approx$ entero

262537412640768743.99999999999925007259

$\approx (640320)^3 + 744$