Teoría analítica de números

3. Funciones aritméticas - entrega lunes 3/5

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

23. Probar
    - (a) $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ para p primo y $a \geq 1$.
    - (b) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ siempre que $(m, n) = 1$.
    - (c) $a \mid b$ implica $\varphi(a) \mid \varphi(b)$.

24. (1p.) Encontrar todos los enteros n que cumplen:

    (a) $\varphi(n) \leq 2$, (b) $\varphi(n) = n/2$, (c) $\varphi(n) = \varphi(2n)$, (d) $\varphi(n) = 12$.

25. Sea f una función aritmética tal que $f(1) = 1$. Probar
    - (a) f es multiplicativa $\iff f(p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t}) = f(p_1^{a_1}) \dots f(p_t^{a_t})$.
    - (b) f es completamente multiplicativa $\iff f$ es multiplicativa y $f(p^a) = f(p)^a$.

26. Si f y g son completamente multiplicativas, ¿necesariamente $f * g$ lo es? Probar o dar un contraejemplo.

27. En este ejercicio se demuestra que el inverso de Dirichlet de una función multiplicativa es multiplicativa. Supongamos g es multiplicativa y sea $f = g^{-1}$ su inverso.
    - (a) Probar que para p primo y $k \geq 1$ tenemos
    $$f(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} g(p^i) f(p^{k-i}) \,.$$
    - (b) Sea h la (única) función multiplicativa que coincide con f en las potencias de primos. Probar que $h * g$ coincide con δ en las potencias de primos. Concluir que $h * g = \delta$, que $f = h$, y que f es multiplicativa.

28. Probar
$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d \mid n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \,.$$

$\sim 1/6$

$\prod_{i=1}^{8} \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right) > \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2} \cdot \frac{5-1}{2} \dots \sim 0.171$

(9) 0.1635

$p < 10^6 \to 0.0406$

$n = p_9$

$n > \varphi(n) > \frac{n}{2}$

$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \mid n} \left(\frac{p-1}{p}\right)$

$p < 10^8 \to 0.0304$

$10^9 \to 0.027\dots$

$\prod_{p<x} \frac{p-1}{p}$? $\qquad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\,\omega\left(\frac{n}{d}\right) \qquad f(p^2q) \qquad \frac{\varphi(n)}{n}$

$\asymp \log x$ $\qquad$ máximo $\{1, p, q, pq\}$

29. Probar que $\varphi(n) > n/6$ para todo n con al menos 8 factores primos distintos.

30. Sea $\omega(n)$ el número de factores primos distintos de n (con $\omega(1) = 0$). Sea $f = \mu * \omega$. Probar que $f(n)$ es 0 o 1 para todo n. Describir el conjunto $\{n \ : \ f(n) = 1\}$.

31. Probar que
$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n)\,.$$

$\mu(d) \neq 0 \Rightarrow \log d = \sum_{p|d} \log p$

32. Probar que
$$\sum_{d|n} \mu(d) \log^m d = 0$$
siempre que $m \geq 0$ y n tiene más de m factores primos distintos.
Sugerencia: inducción.

$(n = p_1 \cdots p_k$ $\quad k > m$ $\qquad \Rightarrow \sum_{d|n} \sum_{p|d} \log p \left(\mu(d) \log^{m-1} d\right) \qquad d = \frac{n}{p}$

$\prod\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ $\quad$ log $\quad$ $\sum \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) \approx \sum -\frac{1}{p} \to -\infty \quad = -\log\log x$

$\sum_{p|n} \log p \sum_{p|d|n} -\mu(d) \qquad d \mid \frac{n}{p} \qquad \log d = (\log d) + (\log p)$

33. Sea $f(x)$ definida para todo x racional en el intervalo $[0,1]$ y sean
$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\,, \qquad F^*(n) = \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} f(k/n)\,.$$

(a) Probar que $F^* = \mu * F$.

(b) Probar que la suma de las raíces primitivas n-ésimas de la unidad es $\mu(n)$:
$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i k/n} = \mu(n)\,.$$

34. Sea $f(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$. Probar que f es multiplicativa pero no completamente multiplicativa.

35. Sea f multiplicativa y $F(n) = \prod_{d|n} F(d)$. ¿Es F necesariamente multiplicativa? Probar o dar un contraejemplo.

36. Sea f multiplicativa. Probar que

(a) $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ para todo n libre de cuadrados.

(b) $f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2)$ para todo primo p.

37. Sea f multiplicativa. Probar que f es completamente multiplicativa si y sólo si $f^{-1}(p^a) = 0$ para todo primo p y $a \geq 2$.

n libre de $\square$

$\Rightarrow \boxed{\omega(d) + \omega\left(\frac{n}{d}\right) = \omega(n)}$

38. Probar que si f es completamente multiplicativa, entonces

$$f \cdot (g * h) = (f \cdot g) * (f \cdot h)$$

donde g y h son funciones aritméticas. Aquí $(f \cdot g)(n) = f(n)\, g(n)$.

39. Probar que si f es multiplicativa y vale la relación del ejercicio anterior para $g = \mu$, $h = \mu^{-1}$, entonces f es completamente multiplicativa.

40. Probar que si f es completamente multiplicativa, entonces

$$(f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1}$$

para toda función aritmética g con $g(1) \neq 0$.

41. Probar que si f es multiplicativa y vale la relación del ejercicio anterior para $g = \mu$, entonces f es completamente multiplicativa.

42. Sea f multiplicativa y sea g cualquier función aritmética. Probar que son equivalentes

(a) Para todo primo p y $n \geq 1$ vale

p fijo

$$\boxed{f(p^{n+1})} = f(p)\boxed{f(p^n)} - g(p)\boxed{f(p^{n-1})}.$$

(b) La serie de Bell de f para p cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) X^k = \frac{1}{1 - f(p)X + g(p)X^2}.$$

$\sum f(n)\, n^{-s}$ $\parallel$ $\prod_p f_p(p^{-s})$

En tal caso, la serie de Dirichlet de f tiene el producto de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s} + g(p)p^{-2s}},$$

en su región de convergencia.

$F = f(1) + f(p)X + f(p^2)X^2 + \cdots f(p^n)X^n$ $f(p^{n-1})X^n$

$xF = f(1)X + f(p)X^2 + \cdots$ $f(p^{n-2})$

$x^2F = f(1)X^2 + \cdots$

$F = f(p)\cdot xF - g(p)x^2F + f \cdots$

Ejercicio

$F(0) = 0 \qquad F(1) = 1$

$$\boxed{F(n+2) = F(n) + F(n+1)} \; *$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) x^n$$

(polinomio).

(a) $\left(1 + x - x^2\right) G(x) = -1$

(b) $$G(x) = \frac{1}{\boxed{x^2 - x - 1}} = \frac{*}{x - \phi} + \frac{*}{x + \bar{\phi}}$$

$= \ldots$

$\rightarrow$ Fórmula para $F(n)$.