Teoría analítica de números
2. Caracteres de Dirichlet - entrega lunes 19/4

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

12. (a) Sea χ un caracter de Dirichlet módulo q, entonces:

$$\sum_{n=0}^{q-1} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } \chi = \chi_0\,; \\ 0 & \text{si } \chi \neq \chi_0\,. \end{cases}$$

Sugerencia: directo.

(b) Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{q}\,; \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 1 \pmod{q}\,. \end{cases}$$

Sugerencia: estructura de caracteres de Dirichlet módulo q.

13. Probar que $L(2s, \chi_0) \neq 0$ para $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

14. Sea χ un caracter de Dirichlet módulo q, sea $q_1 > 0$ el menor entero positivo tal que

$$\chi(n + tq_1) = \chi(n) \qquad \text{siempre que } (n, q) = (n + tq_1, q) = 1\,.$$

(a) Si $(n, q_1) = 1$, entonces existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $(n + tq_1, q) = 1$.

Se define $\chi_1(n) = \begin{cases} \chi(n + tq_1) & \text{cuando } (n, q_1) = 1, \text{ con } t \text{ como en (a)}; \\ 0 & \text{cuando } (n, q_1) > 1. \end{cases}$

(b) Probar que χ_1 está bien definido y es multiplicativo.

(c) Probar que $q_1 \mid q$.

15. Sea p un primo impar. Escribimos $p^\star = \pm p \equiv 1 \pmod 4$.

(a) Mostrar que la LRC (Ley de Reciprocidad Cuadrática) implica que

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p^\star}{q}\right)$$

para todo primo impar q.

El *símbolo de Jacobi* se define para $n = p_1 \dots p_r > 0$ impar como

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{m}{p_r}\right).$$

(b) Extender al símbolo de Jacobi:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p^\star}{n}\right)$$

para todo entero impar n.

El *símbolo de Kronecker* extiende el símbolo de Jacobi a $n \in \mathbb{Z}$ con

$$\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } m \equiv \pm 1 \pmod 8\,; \\ -1 & \text{si } m \equiv \pm 3 \pmod 8\,; \\ 0 & \text{si } m \equiv 0 \pmod 2\,. \end{cases} \qquad \left(\frac{m}{-1}\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } m > 0; \\ -1 & \text{si } m < 0\,; \\ 0 & \text{si } m = 0\,. \end{cases}$$

(c) Probar que la LRC es equivalente a

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p^\star}{n}\right)$$

para todo entero n.

(d) Concluir que

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{n}{|d|}\right)$$

siempre que $d \equiv 0, 1 \pmod 4$.

Deducir que $\chi_d(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ es un caracter de Dirichlet real módulo $|d|$.

16. (2p.) Probar que χ_d es primitivo si y solo si d es un discriminante fundamental. Concluir que los caracteres de Dirichlet primitivos reales son exactamente los χ_d para d discriminante fundamental.

17. Probar que $K \mapsto \operatorname{disc}(K)$ es una biyección entre el conjunto de cuerpos cuadráticos (extensiones cuadráticas de $\mathbb{Q}$) y el conjunto de discriminantes fundamentales.

18. Sea $f = ax^2 + bxy + cy^2$ de discriminante $d = b^2 - 4ac$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

    (a) Probar que $d \equiv 0, 1 \pmod 4$.

    (b) d es un cuadrado si y sólo si $f = L_1 \cdot L_2$ (producto de formas lineales).

    (c) d es fundamental si y sólo si toda f de discriminante d cumple $(a, b, c) = 1$.

19. Usando el Teorema de Lagrange, probar que el conjunto de clases de formas cuadráticas binarias de discriminante d es finito.

20. Probar
$$\sum_{m>\sqrt{N}} \frac{1}{m}\left(\frac{d}{m}\right) = O(N^{-\frac{1}{2}})\,.$$

21. (4p.) Sea f una forma cuadrática binaria de discriminante d fundamental. Probar
$$\#\{(x,y)\in \mathbb{Z}/d\times\mathbb{Z}/d \;:\; (f(x,y),d)=1\} = |d|\,\varphi(|d|)\,.$$

Sugerencias: (a) Usar el Teorema Chino para ver que alcanza probarlo para $d=p^k$.
(b) O bien $p\nmid a$ o bien $p\nmid c$, ver que puede suponer $p\nmid a$.
(c) Si p impar, usar $4af=(2ax+by)^2-dy^2$.
(d) Si $p=2$, probar y usar $f\equiv ax+cy \pmod 2$.

22. Sea f una forma cuadrática binaria de discriminante $d<0$ y sea $N>0$.
Considere la elipse $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;:\; f(x,y)\le N\}$.

   (a) Probar que el área de E es $A=\frac{2\pi}{\sqrt{|d|}}N$.
   (b) Probar que $\#E\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) = A+O(\sqrt{N})$.
   (c) Probar que $\#\{(x,y)\in E \;:\; (x,y)\equiv(x_0,y_0) \pmod d\} = \frac{A}{|d|^2}+O(\sqrt{N})$.
   (d) Concluir usando el ejercicio anterior que
$$\#\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;:\; f(x,y)\le N,\,(f(x,y),d)=1\} = \frac{\varphi|d|}{|d|}\frac{2\pi}{\sqrt{|d|}}N+O(\sqrt{N})\,.$$