Teoría analítica de números
1. Introducción - entrega lunes 5/4

Entrega de ejercicios. Cada ejercicio vale tantos puntos como partes o según se indique. Habrá 6 listas regulares con entregas 5/4, 19/4, 3/5, 17/5, 31/5, 14/6, y una lista final. Hay que entregar ejercicios que sumen al menos 10 puntos en cada una de las listas regulares.

La entrega de la lista final será luego de finalizado el curso y hay que sumar 20 puntos.

Página del curso. `http://www.cmat.edu.uy/~tornaria/2021/TAN/`

1. (a) Sea p un primo impar y sea $q = (p-1)/2$. Probar que
$$(q!)^2 + (-1)^q \equiv 0 \pmod{p}.$$
Concluir que si $p \equiv 1 \pmod 4$ entonces $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$.

   (b) Probar que si $p \equiv 3 \pmod 4$ entonces $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$.

2. (2p.) Sea n un entero positivo que no es un cuadrado. Probar que para todo entero a coprimo con n existen enteros x e y que cumplen
$$ax \equiv y \pmod{n}, \qquad 0 < x < \sqrt{n}, \quad 0 < |y| < \sqrt{n}.$$

3. Sea p un primo, $p \equiv 1 \pmod 4$, sea $q = (p-1)/2$ y $a = q!$.

   (a) Probar que existen enteros x, y con $0 < x < \sqrt{p}$, $0 < y < \sqrt{p}$, tales que
$$a^2x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

   (b) Probar que tales x, y vale $p = x^2 + y^2$.
Concluir que todo primo $p \equiv 1 \pmod 4$ es la suma de dos cuadrados.

   (c) Probar que ningún primo $p \equiv 3 \pmod 4$ es la suma de dos cuadrados.

4. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $n \geq 1$, y sea r una solución a la congruencia
$$f(r) \equiv 0 \pmod{p^n}.$$
Una solución levantada de r módulo p^{n+1} es un $a \equiv r \pmod{p^n}$ tal que
$$f(a) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}.$$

   (a) Si $f'(r) \not\equiv 0 \pmod p$, existe una única solución levantada de r módulo p^{n+1}.

   (b) ¿Qué pasa cuando $f'(r) \equiv 0 \pmod p$?

5. (4p.) Probar la identidad de Euler.

6. Probar que
$$\sum_p \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} p^{-ms} < 1\,.$$

7. Probar que hay infinitos primos de la forma $4n+3$.
Sugerencia: si $\{p_1, \ldots, p_n\}$ son todos, considerar los factores primos de $4p_1 \cdots p_n - 1$.

8. Probar que hay infinitos primos de la forma $4n+1$.
Sugerencia: si $\{p_1, \ldots, p_n\}$ son todos, considerar los factores primos de $4(p_1 \cdots p_n)^2 + 1$.

9. Probar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta} = -\log(2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)) - \frac{1}{2}(\theta - \pi)i\,,$$
donde $0 < \theta < 2\pi$.
Sugerencia: $-\log(1-z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} z^m$ para $|z| < 1$.

10. Sea $q \equiv 1 \pmod 4$ primo. Probar que
$$\sum_{\substack{R=1 \\ \left(\frac{R}{q}\right)=+1}}^{q-1} R = \sum_{\substack{N=1 \\ \left(\frac{N}{q}\right)=-1}}^{q-1} N = \frac{1}{4}q(q-1)\,.$$
Sugerencia: $\left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{q-m}{q}\right)$.

11. Completar los detalles del método de Dirichlet para evaluar $L(1)$ (Davenport, p. 11):
   (a) Definiendo $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$, probar que
   $$\Gamma(s) n^{-s} = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx}\, dx = \int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx\,.$$
   Sugerencia: cambios de variable.
   (b) Probar que
   $$\sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{n}{q}\right) x^n = \frac{x}{G} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) \frac{x^q - 1}{x - e_q(-m)}\,.$$
   Sugerencia: evaluar ambos lados en $e_q(i)$ para $i = 0, \ldots, q-1$.
   (c) Concluir que
   $$\Gamma(s) L(s) = \frac{-1}{G} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) \int_0^1 \frac{1}{x - e_q(-m)} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx$$
   (d) Evaluar en $s = 1$ e integrar para obtener una fórmula para $L(1)$.