

TRABAJO MONOGRÁFICO

**Flujo geodésico en variedades de
curvatura negativa**

Por: María Victoria García

Orientador: Rafael Potrie

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

Agradecimientos

No quería dejar de dedicar aunque sea esta breve sección, para agradecer a todos aquellos que me acompañaron estos años y de alguna manera también tuvieron que ver con este trabajo.

Primero que nada me gustaría agradecer a Rafael por su enorme paciencia, disposición, y por su buena onda, por realmente hacer de este proceso algo disfrutable. No puedo enumerar todas las cosas que aprendí en este tiempo, muchas más de las que pude incluir. Por eso también, muchas gracias.

A Eleonora y a Miguel, por leer esta monografía, y porque con ellos aprendí también muchas de las cosas que usé en este trabajo.

A mis compañeros con los que tuve la suerte de compartir esta carrera. En especial quisiera agradecer a Bruno, Luispe, y a Santi, que me explicaron varias cosas que incluí en la monografía, y también a Alejandro por ayudarme con los dibujos. Muchas veces dejaron de hacer sus cosas para detenerse a explicarme algo que no entendía, lo cual es invaluable, no podría tener mejores compañeros. Genios todos!!

A mi familia que siempre me apoyó, como Odie, que tantas veces se acostó sobre mis pies y me acompañó mientras estudiaba, no pasa un día que no me acuerde de tí. A mamá, por no dejar de meterle y de ser un ejemplo para cualquier estudiante.

A mis amigos que también están siempre en la vuelta por cualquier cosa, que aunque no te puedan ayudar a estudiar, igual te vienen a cebar mate, los adoro!

Por último y no menos importante, a Diego, que me acompaña siempre y cree en mí. A él, que piensa a veces que no puede ayudarme mucho, pero hace que todo sea más fácil. A él, que me sigue pidiendo que le explique qué es eso las curvas negativas, mil gracias!

Resumen

El objetivo de esta monografía, es estudiar el flujo geodésico en el fibrado tangente de una variedad Riemanniana de curvatura negativa. El resultado principal que veremos, es debido a D. Anosov [1], y nos dice que si además la variedad es compacta, el flujo geodésico en el tangente unitario es ergódico. A los efectos de dar una prueba de este resultado, se darán las definiciones y enunciados previos necesarios.

Abstract

The objective of this monograph, is to study the geodesic flow on the tangent bundle of a Riemannian manifold of negative curvature. The main result we are going to see, which is due to D. Anosov [1], says that, if the manifold is also compact, then the geodesic flow on the unit tangent bundle is ergodic. With the aim of giving a proof of this result, we are showing the previous definitions and statements that are used.

Contents

1	Introducción	5
2	Preliminares de geometría Riemanniana	8
2.1	Introducción	8
2.2	Métricas Riemannianas	8
2.3	Conexiones afines	9
2.4	Geodésicas	12
2.5	El tensor de curvatura	12
2.6	La curvatura seccional	13
3	El fibrado tangente	14
3.1	Introducción	14
3.2	El flujo geodésico	14
3.3	Geometría del fibrado tangente	15
3.4	La métrica de Sasaki	18
3.5	La forma de volumen	18
4	Hiperbolicidad y flujos de Anosov	22
4.1	Introducción	22
4.2	Definiciones	22
4.3	Ejemplos	26
5	El flujo geodésico en curvatura negativa	28
5.1	Introducción	28
5.2	Los campos de Jacobi	28
6	Definiciones y teoremas de medida y ergodicidad.	31
6.1	Introducción	31
6.2	Transformaciones medibles	31
7	El ejemplo del bitoro	36
8	Foliaciones	41
8.1	Introducción	41
8.2	Definiciones y ejemplos	41
9	Continuidad absoluta y ergodicidad del flujo geodésico	48
10	Consecuencias	50

1 Introducción

Una variedad Riemanniana es un espacio topológico con una estructura diferenciable y una métrica, que localmente “se parece” al espacio Euclídeo. Las geodésicas son las curvas que minimizan localmente la distancia entre dos puntos de la variedad. Si una curva γ es una geodésica, entonces es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0,$$

donde $\frac{D}{dt}$ se refiere a la derivada covariante. De modo que las geodésicas en la variedad, serían análogas a las rectas del espacio Euclídeo. En mecánica, la primera ley de Newton nos dice que la trayectoria descrita naturalmente por un cuerpo que se mueve sin estar bajo la acción de ninguna fuerza, es una geodésica, ya que si $\gamma(t)$ representa la posición del cuerpo, su aceleración $\ddot{\gamma}(t)$ será igual a cero. Es por eso que las geodésicas en general son de interés en el estudio de la mecánica en espacios no necesariamente Euclídeos. Un ejemplo de esto, es el problema que surge de querer predecir el movimiento de cada elemento de un conjunto de n cuerpos, que se atraen entre sí debido a las fuerzas de interacción gravitatoria. Más particularmente, la motivación original para estudiar el problema de los n cuerpos, fue predecir el movimiento de los cuerpos celestes, como el Sol, los planetas del sistema solar y las demás estrellas. La principal pregunta sería: ¿Es posible predecir las posiciones y velocidades de los n cuerpos en cualquier momento del futuro, conociendo las posiciones y velocidades iniciales?.

Supongamos que q_i representa la posición del i -ésimo cuerpo, de masa m_i , en \mathbb{R}^3 , y $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. La ecuación que modela el movimiento del i -ésimo cuerpo bajo la acción de las fuerzas atractivas es la siguiente:

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} F_{ij},$$

donde

$$F_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}, \text{ con } r_{ij} = \|q_i - q_j\|,$$

y G es la constante de gravitación universal. Se tiene entonces un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. El espacio de fases para este sistema, no incluye las colisiones, o sea, los casos en que $q_i = q_j$ para algún $i \neq j$. Si consideramos la energía potencial del sistema, $-U$, definida mediante

$$U = \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Además el sistema posee energía cinética (asociada al movimiento) que se expresa mediante

$$K = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle,$$

y luego la energía total resulta

$$H = K - U.$$

Newton también formuló que la energía total debe ser constante a lo largo de cada solución. Se puede probar que, eligiendo una métrica apropiada, las soluciones a esta ecuación a lo largo de las cuales la energía total H es constante, son geodésicas. Poincaré, quien se dedicó a estudiar este problema, decía que dada una solución particular para el sistema, siempre se puede encontrar una solución periódica, de modo tal que la diferencia entre las dos soluciones sea arbitrariamente pequeña a lo largo de un intervalo de tiempo arbitrariamente largo. De ser cierto, esto sería muy útil, ya que a pesar de no poder conocer todas las órbitas, sabríamos que pasan arbitrariamente cerca de órbitas periódicas. ¿En qué casos se puede afirmar que esto es cierto? En el caso en que $n = 3$, se puede probar que el espacio de fases “es” $S^2 - \{\text{conjunto de colisiones}\}$. O sea, el sistema de ecuaciones ordinarias en \mathbb{R}^3 de Newton, se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales en $S^2 - \{\text{colisiones}\}$ (la esfera con 3 agujeros). Además, este espacio admite una métrica que le otorga curvatura seccional negativa (-1). (Por más detalles sobre el problema de n cuerpos ver [3])

A lo largo de esta monografía nos dedicaremos a probar el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea M una variedad Riemanniana compacta, con una métrica de clase C^3 y curvatura seccional negativa. Entonces el flujo geodésico $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ es ergódico.*

Este teorema fue probado originalmente por D. Anosov, y su prueba se encuentra en [1]. Nosotros probaremos previamente que en condiciones de hipótesis de este teorema, el flujo geodésico es de Anosov. La ergodicidad de un flujo junto con la propiedad de Anosov tiene, como una de sus consecuencias, la existencia de órbitas periódicas densas.

Por otra parte, la ergodicidad misma tiene también sus aplicaciones. La teoría ergódica, como muchas otras teorías matemáticas, surge como respuesta a la necesidad de describir un fenómeno físico. Imaginemos que tenemos un conjunto de partículas de un gas confinadas a un recipiente de volumen finito (medida de Liouville finita), que interactúan entre sí debido a las colisiones. Supongamos que $x = (x_1, \dots, x_n)$ representa el vector de las posiciones de las n partículas del gas (n puede ser muy grande). Agregamos además la hipótesis de que la energía total de este sistema, o sea, la suma de las energías que posee cada partícula, debe permanecer constante a

lo largo del tiempo. El estado del sistema evoluciona según la ecuación diferencial

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n).$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales, determina un flujo $P_t(x)$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ representa un punto del espacio de fases (estados posibles), llamémosle M , y $P_t(x)$ sería el estado del sistema en tiempo t , si el estado inicial era x . Dicho en otros términos, $P_t(x)$ es la solución que en $t = 0$ pasa por x . $P_t : M \rightarrow M$ será un homeomorfismo para todo t , que además preservará la medida Liouville. Boltzmann planteó la hipótesis de que un sistema que parte de un estado inicial cualquiera, eventualmente pasará por todos los estados posibles del espacio de fases, lo que se conoce como *hipótesis ergódica*. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable en el espacio de fases M , entonces si quisiéramos medir la evolución de f para un sistema de estado inicial x , a lo largo de un período de tiempo, tendríamos

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(P_t(x)) dt.$$

Para obtener el promedio temporal de f a lo largo de toda la evolución del sistema, deberíamos tomar el límite cuando T tiende a infinito de la expresión de arriba, asumiendo que este existe para todo x , o al menos para *casi todo* $x \in M$. Cuando f representa una magnitud física del sistema que se desea medir, no siempre es fácil calcular estos promedios, ya que medir una magnitud física requiere determinado período de tiempo, durante el cual el estado del sistema puede variar considerablemente. Además, para algunos sistemas la evolución en el tiempo es difícil de calcular debido a que la dependencia respecto de las condiciones iniciales es muy fuerte, y estas pueden ser desconocidas. Sin embargo siempre se conocen cuales son todos los estados posibles. Es por esto que es de gran utilidad asumir que los promedios temporales de más arriba son independientes de x , y además coinciden con los promedios espaciales (en el espacio de fases), definidos mediante

$$\int_M f(x) d\mu(x),$$

donde μ representa la medida de Liouville en M . Se puede encontrar más información sobre los orígenes de la teoría ergódica en [6].

Dada una variedad, probaremos la ergodicidad del flujo geodésico en el tangente unitario bajo ciertas hipótesis: compacidad de la variedad y curvatura seccional negativa. Veremos primero que este flujo en T^1M es de Anosov, o sea, que TT^1M puede descomponerse en un subespacio E^s que se contrae exponencialmente con el flujo, y otro E^u que se expande exponencialmente con el mismo. Daremos previamente la definición de difeomorfismo de Anosov, y veremos un ejemplo en el toro \mathbb{T}^2 . Luego

mostraremos como construir un flujo de Anosov a partir de un difeomorfismo de Anosov.

Para ver que el flujo geodésico en T^1M es de Anosov, precisaremos comprender previamente la estructura de TT^1M , ya que no es fácil trabajar en este espacio como lo sería en TM . Dado que la estructura de este último nos es familiar, veremos que, dado $\theta = (x, v) \in TM$ podemos identificar $T_\theta TM$ con $T_xM \oplus T_xM$ mediante un isomorfismo lineal. Veremos también que podemos estudiar el comportamiento del flujo geodésico en términos de la evolución de los campos de Jacobi. Esto nos permitirá construir una familia de conos invariantes por el flujo, y veremos que la existencia de estos conos implica que el flujo es de Anosov.

Dedicaremos una sección a definir una forma de volumen en TM y ver que el flujo geodésico preserva esta forma de volumen, y por tanto la medida que esta induce. Esto es importante ya que la ergodicidad de un flujo requiere en particular que preserve la medida.

Mostraremos también como se construye un ejemplo de una variedad en condiciones de hipótesis del teorema 1.1, y para este caso particular veremos una prueba de la ergodicidad del flujo geodésico en el tangente unitario. Para probar el caso general, estudiaremos las foliaciones estable de inestable de TM a través del flujo, y veremos que son absolutamente continuas. Esto junto con el teorema ergódico de Birkhoff, que también enunciaremos, y el conocido argumento de Hopf, nos dará la ergodicidad.

Finalmente, veremos como mencionábamos más arriba, que una consecuencia de que el flujo geodésico sea ergódico y de Anosov, es la existencia de órbitas periódicas densas.

2 Preliminares de geometría Riemanniana

2.1 Introducción

Vamos a comenzar por dar algunas definiciones y enunciar algunos resultados sobre geometría Riemanniana, que nos serán útiles más adelante. Los resultados de esta sección y sus demostraciones pueden encontrarse en los capítulos 1, 2, 3 y 4 de [9].

2.2 Métricas Riemannianas

Definición 2.1. Dada una variedad diferenciable M , una *métrica Riemanniana* es una correspondencia que a cada punto $p \in M$, le asocia un producto interno para su espacio tangente T_pM , que varía diferenciablemente con p . O sea

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

es un producto interno para todo $p \in M$.

Observación 2.1. Que los productos internos varían diferenciablemente con p , quiere decir que si $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es una parametrización de M alrededor de p , con $\psi(x_1, \dots, x_n) = q \in \psi(U)$, luego $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(q)\}_{i=1, \dots, n}$ es una base de $T_q M$. Pongamos

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q,$$

entonces las $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Ejemplo 2.1. Si $M = \mathbb{R}^n$, y hacemos la identificación

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0)$$

y ponemos la métrica

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}$$

tenemos una métrica Riemanniana, que es la métrica Euclídea usual.

2.3 Conexiones afines

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de los campos de vectores en una variedad M .

Definición 2.2. Una *conexión afín* ∇ en M es un mapa

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que reúne las siguientes propiedades:

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

La expresión $\nabla_X Y$ deberíamos pensarla como la derivada del campo Y en la dirección del campo X .

Definición 2.3. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de $T_p M$ asociada a una cierta parametrización ϕ . Si escribimos

$$\nabla_{X_i} X_j(p) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(p) X_k$$

entonces los Γ_{ij}^k , son funciones C^∞ que serán los coeficientes de la conexión asociados a la parametrización ϕ .

Proposición 2.4. *Dada una variedad diferenciable con una conexión ∇ , existe una única correspondencia que a cada campo de vectores V a lo largo de una curva $c : I \rightarrow M$, le asocia otro campo de vectores $\frac{DV}{dt}$ a lo largo c , llamado derivada covariante de V a lo largo de c , que satisface las siguientes propiedades:*

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$. Para todo V, W campos a lo largo de c , $f \in C^\infty(I)$.
- Si existe $Y \in \mathcal{X}(M)$ tal que $V(t) = Y(c(t))$ para todo $t \in I$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Observación 2.2. *Observar que este último requisito de la derivada covariante tiene sentido, ya que si escribimos la conexión en términos de coordenadas locales, queda en evidencia que $\nabla_X Y(p)$ depende únicamente del valor de X en p , y del valor de Y a lo largo de una curva tangente a X en p , en un entorno de p .*

Definición 2.5. Decimos que un campo V a lo largo de una curva $c : I \rightarrow M$ es *paralelo*, si $\frac{DV}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 2.6. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇ , y sea $c : I \rightarrow M$ una curva diferenciable en M , tal que $\dot{c}(t_0) = V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Luego, existe un único campo V a lo largo de c , paralelo, con $V(t_0) = V_0$.*

Definición 2.7. Al campo de la proposición anterior, le llamaremos *transporte paralelo* de V_0 a lo largo de c .

Definición 2.8. Diremos que una conexión afín en una variedad Riemanniana M es *compatible con la métrica*, si dados V y W campos de vectores a lo largo de una curva $c : I \rightarrow M$, se tiene

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Definición 2.9. Diremos que una conexión afín en una variedad Riemanniana M es *simétrica*, si para todo par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se tiene

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X; Y],$$

donde

$$[X, Y] = XY - YX.$$

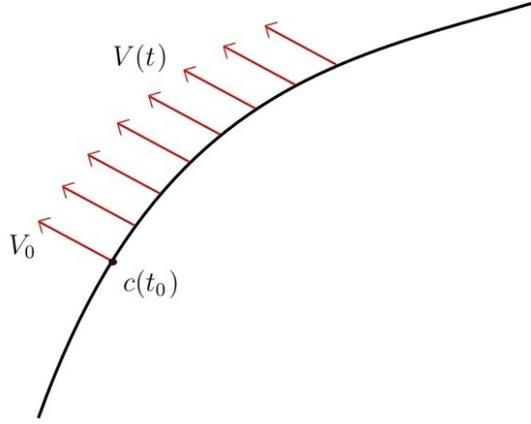


Figure 1: Transporte paralelo de V_0 a lo largo de c .

Observación 2.3. ¿Qué significa en realidad XY ? Recordemos que si X e Y son campos de vectores en M , a cada punto $p \in M$ le asocian un vector $v \in T_pM$, donde v es una derivación. En particular, v es un mapa que toma funciones $f \in C^\infty(M)$ y devuelve un número real (ver [9], pág. 6). Luego, si $\{\frac{\partial}{x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{x_n}(p)\}$ es una base de T_pM asociada a una determinada parametrización alrededor de p , podemos escribir los campos en coordenadas locales:

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{x_i}(p),$$

$$Y(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial}{x_j}(p).$$

Luego

$$XY(f) = X(Y(f)) = X\left(\sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial f}{x_j}(p)\right),$$

y esto es a su vez

$$\sum_{i,j=1}^n a_i \left[\frac{\partial b_j}{x_i} \frac{\partial f}{x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right].$$

Observar que XY ya no es un campo de vectores, dado que aparecen derivadas de orden mayor que 1, sin embargo existirá siempre un campo $Z \in \mathcal{X}(M)$ tal que $Z = XY - YX$, por lo cual tiene sentido pensar $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 2.10 (Levi-Civita). *Dada una variedad Riemanniana M , existe una única conexión ∇ en M que es simétrica y compatible con la métrica de M .*

Definición 2.11. A la conexión del teorema anterior, le llamamos *conexión de Levi-Civita* o *conexión Riemanniana*.

2.4 Geodésicas

Definición 2.12. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ es una *geodésica*, si

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0, \quad t \in I,$$

donde $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$.

Proposición 2.13. *Si $\phi : U \rightarrow M$ es una parametrización de M , y $\gamma(t) = \phi(x_1(t), \dots, x_n(t))$, entonces γ es una geodésica si y solo si se satisfacen la ecuaciones*

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Proposición 2.14. *Dado un punto $p \in M$, existe un abierto $V \subset M$, entorno de p , números positivos δ y ϵ , y un mapa diferenciable*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

donde

$$\mathcal{U} = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M, |v| < \epsilon\},$$

tal que la curva $\gamma_{(q,v)} : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, con $\gamma_{(q,v)}(t) = \gamma(t, q, v)$ es la única geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por el punto p con velocidad v .

Definición 2.15. Una variedad Riemanniana M se dice *completa* si, para todo $p \in M$ las geodésicas, $\gamma(t)$, que pasan por p están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a decir que M es un espacio métrico completo con la distancia inducida por la métrica Riemanniana.

2.5 El tensor de curvatura

Definición 2.16. Dada una variedad Riemanniana M , definimos su curvatura, R , como la correspondencia que, a cada par de campos de vectores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ le asocia un mapa $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definido mediante

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$, y donde ∇ denota la conexión Riemanniana en M .

Proposición 2.17. *La curvatura tiene las siguientes propiedades:*

1. R es $C^\infty(M)$ -bilineal como función definida en $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$.
2. Para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, el operador $R(X, Y)$ es $C^\infty(M)$ -lineal.
3. *Identidad de Bianchi:* $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Dados campos $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$, notaremos mediante (X, Y, Z, T) a $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$.

Proposición 2.18. *Se cumplen para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ las siguientes propiedades:*

1. $(X, Y, Z, T) + (Z, X, Y, T) + (Y, Z, X, T)$.
2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$.
3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$.
4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

2.6 La curvatura seccional

Denotemos por $|x \wedge y|$ a la expresión

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa el área del paralelogramo determinado por los vectores x e y .

Proposición 2.19. *Considero una variedad Riemanniana M , $p \in M$ y σ un subespacio de dimensión 2 de T_pM , y $\{x, y\}$ una base cualquiera de σ . Luego el valor*

$$k(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|}$$

no depende de la base $\{x, y\}$ de σ elegida.

Definición 2.20. Al valor $k(x, y)$ definido en la proposición anterior, le llamaremos *curvatura seccional* de σ . Podemos notarlo $k(\sigma)$.

3 El fibrado tangente

3.1 Introducción

En esta sección se estudiará el fibrado tangente. Si M es una variedad de dimensión n , daremos una caracterización para TTM que nos permita comprender su estructura. Para ello, dado $\theta = (x, v) \in TM$, encontraremos una descomposición natural de $T_\theta TM$ en dos subespacios de dimensión n , que podremos identificar con $T_x M$ mediante un isomorfismo lineal. Se introduce, además, una métrica que hace que estos subespacios sean ortogonales. Esta métrica también facilitará el estudio del campo y el flujo geodésico, cuya definición se da al principio de esta sección. Finalmente, demostraremos que el campo geodésico preserva una forma de volumen en TM . En general, se han extraído estas ideas de [14] y [9].

3.2 El flujo geodésico

Definición 3.1. Dada N una variedad (o un conjunto cualquiera), un *flujo* $\{\varphi_t\}$ en N es un mapa

$$\varphi : \mathbb{R} \times N \longrightarrow N$$

tal que

$$\begin{aligned}\varphi(0, x) &= x \text{ para todo } x \in N, \\ \varphi(\varphi(x, t), s) &= \varphi_{t+s}(x).\end{aligned}$$

O sea, es una acción de \mathbb{R} sobre N .

Sea M una variedad Riemanniana completa, $\gamma_{(x,v)} : \mathbb{R} \longrightarrow M$ la única geodésica que en tiempo 0 pasa por x con velocidad v , dada por la proposición 2.14. Esto es: $\gamma(0)_{(x,v)} = x$, $\gamma'_{(x,v)}(0) = v$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\phi_t : TM \longrightarrow TM$ mediante:

$$\phi_t(x, v) := (\gamma_{(x,v)}(t), \gamma'_{(x,v)}(t)).$$

Debido a la completitud de la variedad M , se tiene que ϕ_t es un difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.2. *La familia de difeomorfismos $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un flujo en $N = TM$.*

Proof. Basta ver que se cumple la propiedad de grupo: $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Tenemos: $\phi_t(\phi_s(x, v)) = \phi_t(\gamma_{(x,v)}(s); \gamma'_{(x,v)}(s))$. Y esto es, por definición, la única geodésica que en tiempo 0 pasa por $\gamma_{(x,v)}(s)$ con velocidad $\gamma'_{(x,v)}(s)$ evaluada en t . Y justamente por ser única coincide con $\gamma_{(x,v)}$, es decir $(\gamma_{(x,v)}(t+s); \gamma'_{(x,v)}(t+s)) = \phi_t \circ \phi_s(x, v)$.

□

Definición 3.3. Al flujo $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ en TM le llamaremos *flujo geodésico*.

Definición 3.4. Llamaremos *campo geodésico* al campo $G : TM \rightarrow T(TM)$, que tiene como trayectorias a las curvas $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$. O sea, $G(\theta) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi(t)$.

También podríamos definir el campo geodésico de forma explícita, como sigue:

Sea $\psi : U \rightarrow M$ una parametrización. Considero el campo G , como aquel cuyas órbitas son de la forma $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde $\gamma(t) = \psi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ responde a la ecuación diferencial:

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i'(t) x_j'(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

siendo $\Gamma_{i,j}^k$ los coeficientes de la conexión ∇ en las coordenadas locales de ψ , y donde ∇ es la conexión dada por la definición 2.11. Luego definiríamos el flujo geodésico como el flujo generado por el campo G . O sea, las soluciones a las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} x' = G(x) \\ x(0) = p \in TM \end{cases} \quad (1)$$

En general el campo geodésico se puede definir de manera global, pero el flujo no necesariamente está definido para todo t en \mathbb{R} . En nuestro caso particular, la completitud de M (ver definición 2.15) nos permite definir ϕ_t para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Geometría del fibrado tangente

Sea $\pi : TM \rightarrow M$ la proyección canónica, o sea $\pi(x, v) = x$, para todo $x \in M$, $v \in T_x M$.

Definición 3.5. Llamaremos *subfibrado vertical*, al subfibrado que cumple que su fibra por un punto $\theta = (x, v) \in TM$, $V(\theta)$ es el núcleo de $d_\theta \pi$. O sea

$$V(\theta) = \text{Ker}(d_\theta \pi).$$

Proposición 3.6. *El subfibrado vertical es isomorfo al espacio tangente a $T_x M \subset TM$ en el punto θ .*

Proof. Probaremos primero que $V(\theta) \subseteq T_\theta(T_x M)$:

Observar antes que nada que $T_\theta T_x M \simeq T_x M$. Sea $\theta = (x, v) \in TM$, y sea γ una curva en TM tal que

$$\gamma(0) = \theta$$

y

$$\gamma(t) = (x, v(t)),$$

de modo que $Im(\gamma) \subseteq T_x M$. Luego $\pi(\gamma(t)) = x$ para todo t . Sea $v = \gamma'(0) \in T_\theta(T_x M)$. Como la función π es constante en $T_x M$, se tiene que $D\pi(v) = 0$. Entonces $v \in Ker(D\pi)$, y luego $T_\theta(T_x M) \subseteq Ker(D\pi)$

Ahora probemos que $V(\theta) \supseteq T_\theta(T_x M)$:

Como $D\pi$ es sobreyectiva y su dominio, TTM , tiene dimensión $2d$, donde d es la dimensión de M , su núcleo $Ker(D\pi)$ debe tener dimensión d también. Y podemos concluir $T_\theta(T_x M) = Ker(D\pi)$. □

Supongamos que M tiene una métrica Riemanniana. Definimos el mapa de conexión $K : TTM \rightarrow TM$ como sigue:

Sea $\xi \in T_\theta TTM$ y $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ una curva con $z(0) = \theta$, $z'(0) = \xi$. Esta curva, será a su vez levantada de otra curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Esto significa que $\alpha = \pi \circ z$. Consideremos también un campo de vectores Z a lo largo de α , ($Z(t) \in T_{\alpha(t)} M$), tal que $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$.

Definimos $K_\theta(\xi) := (\nabla_\alpha Z)(0)$, donde ∇ es la conexión Riemanniana de la definición 2.11.

Definición 3.7. Se define el *subfibrado horizontal* como aquel cuya fibra por el punto θ está dada por $H(\theta) = Ker(K_\theta)$.

Proposición 3.8. K_θ está bien definida (i.e. no depende de la curva z elegida).

Proof. Sea $w : (-\delta, \delta) \rightarrow TM$ otra curva con $w(0) = \theta$, $w'(0) = \xi$, y sea β la curva en M dada por $\beta(t) = \pi \circ w(t)$. Consideremos además el campo W tal que $w(t) = (\beta(t), W(t))$.

Luego,

$$\beta'(0) = (\pi \circ w)'(0)$$

y esto es

$$d_\theta \pi(w'(0)) = d_\theta \pi(\xi).$$

Por otro lado,

$$\alpha'(0) = (\pi \circ z)'(0) = d_\theta \pi(z'(0)),$$

y esto también es $d_\theta \pi(\xi)$. Entonces $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Además tenemos:

$$\begin{cases} z(0) = \theta = (\alpha(0), Z(0)) \\ w(0) = \theta = (\beta(0), W(0)) \end{cases}$$

De modo que, por las propiedades de la conexión Riemanniana (2.2), se tiene $\nabla_{\beta'} W(0) = \nabla_{\alpha'} Z(0) = K_\theta(\xi)$ como queríamos ver. □

Podríamos también definir el subfibrado horizontal de otra manera. Consideramos $L_\theta : T_x M \rightarrow T_\theta TM$ definida como sigue: dado $u \in T_x M$, consideramos $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = u$. Sea $Z(t)$ el transporte paralelo de v a lo largo de α , y sea $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM / \sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Definimos entonces $L_\theta(u) := \sigma'(0) \in T_\theta TM$.

Proposición 3.9. *Los subespacios $H(\theta)$ e $Im(L_\theta)$ definidos anteriormente coinciden.*

Proof. Si consideramos $\xi = \sigma'(0)$, es claro que $K_\theta(\xi) = 0$, ya que es igual a $(\nabla_\alpha Z)(0) = 0$ porque Z es paralelo. Podemos concluir entonces que $Im(L_\theta) \subseteq Ker(K_\theta)$. A su vez, si $v \in Ker(K_\theta)$, entonces $K_\theta(v) = \nabla_{\alpha'} Z(0) = 0$. Por definición de transporte paralelo, y como éste es único, Z debe ser el transporte paralelo de v a lo largo de α . Por definición de L_θ se tiene $v \in Im(L_\theta)$. □

Proposición 3.10. *Se cumple $d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}$.*

Proof. Sean $\theta = (x, v) \in TM$, $u \in T_x M$ y σ como en la definición de L_θ . $\sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$ por lo tanto $(\pi \circ \sigma)(t) = \alpha(t)$. Luego

$$(\pi \circ \sigma)'(0) = d_\theta \pi(\sigma'(0)) = \alpha'(0) = u.$$

Pero $\sigma'(0) = L_\theta(u)$ por definición. Entonces tenemos:

$$d_\theta \pi \circ L_\theta(u) = u.$$

De modo que

$$d_\theta \pi \circ L_\theta = Id_{T_x M}.$$

□

Proposición 3.11. *Las transformaciones lineales $d_\theta \pi|_{H(\theta)} : H(\theta) \rightarrow T_x M$ y $K_\theta|_{V(\theta)} : V(\theta) \rightarrow T_x M$ son isomorfismos.*

Proof. Veamos primero que $d_\theta \pi|_{H(\theta)}$ es un isomorfismo. Aplicando la proposición 3.9 tenemos $d_\theta \pi(H(\theta)) = d_\theta \pi(Im L_\theta)$, y por la proposición 3.10 se tiene $d_\theta \pi \circ L_\theta(T_x M) = T_x M$. Luego, $d_\theta \pi|_{H(\theta)}$ es sobreyectiva. Sea $v \in H(\theta)$ tal que $d_\theta \pi(v) = 0$. Entonces $v = L_\theta(w)$ para algún $w \in T_x M$. Se tiene:

$$0 = d_\theta \pi(v) = d_\theta \pi(L_\theta(w)) = w,$$

por lo tanto

$$v = L_\theta(w) = L_\theta(0) = 0.$$

Entonces $Ker(d_\theta \pi|_{H(\theta)}) = \{0\}$.

Ahora veamos que $K_\theta|_{V(\theta)}$ es un isomorfismo. Sea $v \in T_x M$, $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\beta(0) = x$, y sea V un campo a lo largo de β tal que $\nabla_{\beta'} V(0) = v$. Consideramos $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ tal que $z(t) = (\beta(t), V(t))$. De modo que, por la definición de K_θ , tenemos:

$$K_\theta(z'(0)) = \nabla_{\beta'} V(0) = v.$$

Luego, $K_\theta|_{V(\theta)}$ sobreyectiva. De la proposición 3.6 concluimos además que $\dim(V(\theta)) = \dim(T_x M) = d$, entonces debe ser también inyectiva. \square

Corolario 3.12. *La dimensión de $H(\theta)$ coincide con la de $T_x M$.*

Corolario 3.13. *El mapa $j_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_x M \oplus T_x M$, tal que $j_\theta(\xi) = (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi))$, es un isomorfismo lineal.*

El corolario anterior nos permite establecer la correspondencia $\xi \mapsto (\xi_h, \xi_v)$. De modo que se tiene la identificación natural: $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$.

3.4 La métrica de Sasaki

Para ésta descomposición de $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$, podemos definir una métrica natural que hace que $H(\theta)$ y $V(\theta)$ sean ortogonales:

$$\ll \xi, \eta \gg_\theta := \langle d_\theta \pi(\xi), d_\theta \pi(\eta) \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}$$

El campo geodésico $G : TM \rightarrow TTM$ se puede expresar en términos de j_θ . Teníamos $G(\theta) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t(\theta) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t))$, donde γ_θ es la única geodésica en M de condición inicial θ . O sea, que en $t = 0$ pasa por x con velocidad v .

Por la unicidad del transporte paralelo, $t \mapsto \gamma'_\theta(t)$ debe ser el transporte paralelo de v a lo largo de γ_θ . Entonces, $G(\theta) = L_\theta(v) \in H(\theta)$. Identificando $L_\theta(v)$ con su imagen por la aplicación j_θ , tenemos:

$$L_\theta(v) \mapsto \underbrace{(d_\theta \pi(L_\theta(v)), 0)}_{=Id|_{T_x M}(v)} = (v, 0) \in T_x M \oplus T_x M.$$

3.5 La forma de volumen

Ahora vamos a probar que el flujo geodésico preserva una forma de volumen. Para esto, seguiremos la sugerencia de prueba dada en el ejercicio 14 del cap. 3 de [9].

Definición 3.14. *Sea $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de los campos en una variedad M y $X \in \mathcal{X}(M)$. Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ un referencial geodésico en $p \in M$ tal que $X = \sum_{i=1}^n (f_i E_i)$. Definimos la divergencia de X , que notaremos $\text{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:*

$$\text{div} X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p).$$

Observación 3.1. Si $M = \mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p).$$

Proposición 3.15. Sea M una variedad Riemanniana orientada de dimensión n , y el elemento de volumen ν , una n -forma diferencial en M , definida en una base mediante

$$\nu(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}}$$

donde \pm hace referencia a la orientación de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Si $X \in \mathcal{X}(M)$, definimos $i(X)\nu(Y_2, \dots, Y_n) = \nu(X, Y_2, \dots, Y_n)$, $Y_2, \dots, Y_n \in \mathcal{X}(M)$. Entonces $d(i(X)\nu) = \operatorname{div} X \nu$.

Proof. Dado $p \in M$ considero un referencial geodésico en p , $\{E_1, \dots, E_n\}$, y un campo $X = \sum_{i=1}^n (f_i E_i)$. Considero la familia de 1-formas $\{w_i\}_i$ tales que $w_i(E_i) = \delta_{ij}$. Claramente $w := w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ es una forma de volumen, ya que es una n -forma y solo se anula en 0. Considero además la $(n-1)$ -forma $\theta_i = w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_{i+1} \wedge \dots \wedge w_n$.

Veamos primero que $i(X)\nu = \sum_i (-1)^{i+1} f_i \theta_i$. Escribamos $Y_i = \sum_{j=1}^n g_j^i E_j$. Se tiene

$$\nu(X, Y_2, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y_2 \rangle & \dots & \langle X, Y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_n, X \rangle & \langle Y_n, Y_2 \rangle & \dots & \langle Y_n, Y_n \rangle \end{vmatrix}.$$

Observar también que

$$\langle X, Y_i \rangle = \sum_j f_j g_j^i \langle E_j, E_j \rangle = \sum_j f_j g_j^i,$$

y que

$$\langle Y_i, Y_k \rangle = \left\langle \sum_j g_j^i E_j, \sum_j g_j^k E_j \right\rangle = \sum_j g_j^i g_j^k.$$

Luego el determinante anterior es

$$\begin{vmatrix} \sum_j (f_j)^2 & \sum_j f_j g_j^2 & \dots & \sum_j f_j g_j^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_j f_j g_j^n & \sum_j g_j^n g_j^2 & \dots & \sum_j g_j^n g_j^n \end{vmatrix} = \sum_{i, j_2, \dots, j_n=1}^n \underbrace{f_i g_{j_2}^2 \dots g_{j_n}^n}_{k_{i, j_2, \dots, j_n}} \underbrace{\nu(E_i, E_{j_2}, \dots, E_{j_n})}_{M_{i, j_2, \dots, j_n}}.$$

Por otro lado $\theta_i(Y_2, \dots, Y_n) = \theta_i(\sum_{j_2=1}^n g_{j_2}^2 E_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n g_{j_n}^n E_{j_n})$, y esto es

$$\sum_{j_2, \dots, j_n=1}^n \underbrace{g_{j_2}^2 \dots g_{j_n}^n}_{\eta_{j_2, \dots, j_n}} \underbrace{\theta_i(E_{j_2}, \dots, E_{j_n})}_{N_{j_2, \dots, j_n}}.$$

Observar que $k_{i, j_2, \dots, j_n} = f_i \eta_{j_2, \dots, j_n}$. Si desarrollamos el determinante M_{i, j_2, \dots, j_n} por la primer columna se tiene:

$$\sum_{i, j_2, \dots, j_n=1}^n k_{i, j_2, \dots, j_n} M_{i, j_2, \dots, j_n} = \sum_{i=1}^n f_i (-1)^{i+1} \underbrace{\left(\sum_{j_2, \dots, j_n=1}^n \eta_{j_2, \dots, j_n} N_{j_2, \dots, j_n} \right)}_{\theta_i(Y_2, \dots, Y_n)}$$

Entonces $i(X)\nu(Y_2, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n f_i (-1)^{i+1} \theta_i(Y_2, \dots, Y_n)$ como queríamos ver.

Ahora podemos escribir

$$d(i(X))\nu = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i$$

y por otra parte se tiene

$$df_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \omega_j = \sum_j E_j(f_i) \omega_j.$$

Luego, en $[\sum_j E_j(f_i) \omega_j] \wedge \theta_i$ sobrevive solo el i -ésimo término, y se tiene

$$d(i(X))\nu = \underbrace{\sum_i (-1)^{i+1} E_i(f_i)}_{div(X)} \underbrace{\omega \wedge \theta_i}_\nu + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i.$$

Aquí el segundo termino se anula, dado que, como $d\omega_k = 0$ en p para todo k , se tiene que $d\theta_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, concluyendo la prueba. \square

Proposición 3.16. *Sea M una variedad Riemanniana y $X \in \mathcal{X}(M)$. Sea $p \in M$ con $X(p) \neq 0$. Sean $((t, x_2, \dots, x_n))$ coordenadas en un entorno abierto U de p , de modo que $\frac{\partial}{\partial t} = X$. Sea $\nu = g dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ la forma de volumen en M . Entonces*

$$i(X)\nu = g dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

y luego

$$div X = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Proof. Por definición sabemos

$$i(X)\nu(Y_2, \dots, Y_n) = \nu(X, Y_2, \dots, Y_n) = gdt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(X, Y_2, \dots, Y_n).$$

Observar que $dt(X) = 1$, y $dx_i(X) = 0$ para todo $i = 2, \dots, n$. Entonces $i(X)\nu(Y_2, \dots, Y_n)$ es

$$\begin{aligned} g[dt(X)dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(Y_2, \dots, Y_n) + \dots + dx_n(X)dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}(Y_2, \dots, Y_n)] \\ = gdx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(Y_2, \dots, Y_n). \end{aligned}$$

Ahora, en vista de la proposición anterior (3.15), debe ser $d(gdx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(Y_2, \dots, Y_n)) = \operatorname{div}X\nu$. La expresión de la izquierda en esta igualdad es

$$\frac{\partial g}{\partial t}dt \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{\partial g}{\partial t}dt \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Y esto es

$$\frac{\partial g}{\partial t} \frac{1}{g} \nu.$$

Entonces debe ser

$$\operatorname{div}X = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t}.$$

□

Observación 3.2. *La proposición anterior, nos dice que la divergencia del campo determina como varía la forma de volumen en la dirección de ese campo.*

Proposición 3.17. *La divergencia del campo geodésico G es 0.*

Proof. Sea $p \in M$ y (u_1, \dots, u_n) coordenadas normales alrededor de p , de modo que las geodésicas que pasan por p son de la forma $\exp_p(tv)$. Luego, en p los símbolos de Christoffel se anulan ($\Gamma_{ij}^k(p) = 0$). Luego, si un campo $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, su divergencia en p se puede calcular como lo haríamos en \mathbb{R}^n , esto es

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_i}.$$

Sean (u_i, v_j) las coordenadas en TM , donde un vector $v \in T_pM$ se escribe como $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial u_i}$. La métrica natural en TM , dado θ en TM , es

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \langle d_\theta\pi(\xi), d_\theta\pi(\eta) \rangle + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle.$$

Como hemos identificado TTM con $TM \oplus TM$, sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ bases de T_pM . Luego la forma de volumen en TM es $\sqrt{\det(g_{ik})} = dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \wedge d\hat{v}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{v}_n$,

donde $\{dv_1, \dots, dv_n, d\hat{v}_1, \dots, d\hat{v}_n\}$ es una base de de las formas diferenciales en $T_\theta TM$, y $g_{lk} = \ll v_l, \hat{v}_k \gg$. Y esta es la expresión de la forma de volumen con la métrica producto, ya que

$$\ll v_l, \hat{v}_k \gg = \langle v_{lH}, \hat{v}_{kH} \rangle_{T_p M} + \langle v_{lV}, \hat{v}_{kV} \rangle_{T_p M}.$$

Recordar que si pensamos $G : TM \rightarrow T_p M \oplus T_p M$ entonces $G(p, v) = (v, 0)$, o sea $(\dot{\gamma}_\theta(0), 0)$. Como $v_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, entonces $G(v_i) = \frac{\partial^2}{\partial^2 u_i} = -\sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_k}$ (ecuación de las geodésicas). $G(u_i) = \frac{\partial}{\partial u_i} = v_i$.

Luego la divergencia de G en p se escribe

$$\operatorname{div} G(p) = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial^2 u_i}(p) - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_k} \right)(p),$$

y esto es

$$\sum_i \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial u_i}}_{=0}(p) - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\sum_{jk} \underbrace{\Gamma_{jk}^i}_{=0 \text{ en } p} v_j v_k \right)(p) = 0.$$

□

Corolario 3.18. *El campo geodésico G preserva la forma de volumen, y por tanto la medida asociada a la forma de volumen.*

4 Hiperbolicidad y flujos de Anosov

4.1 Introducción

En esta sección daremos las definiciones de flujo y difeomorfismo de Anosov. Veremos como construir flujos de Anosov a partir de un difeomorfismo también de Anosov, y también daremos algún ejemplo. Las definiciones y enunciados de esta sección han sido extraídos en general de [12], [7], [8] [13].

4.2 Definiciones

Definición 4.1. Un mapa lineal en $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice hiperbólico, si todos sus valores propios tienen módulo distinto de 1.

Si E_λ es el subespacio propio asociado al valor propio λ , definimos entonces: $E^- = \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda$, y $E^+ = \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_\lambda$.

Proposición 4.2. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hiperbólico. Existen $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, y subespacios E^- y E^+ con $E^- \oplus E^+ = \mathbb{R}^n$ tales que:

- $\|A^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^-$
- $\|A^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ para todo $v \in E^+$

A E^- y E^+ se les llama subespacio estable e inestable respectivamente.

Definición 4.3. Sea M una variedad diferenciable. $f : U \subseteq M \rightarrow M$ un difeomorfismo sobre su imagen definido en el abierto U , de clase C^1 , y sea p un punto periódico de período n , cuya órbita está incluida en U . Decimos que p es un punto periódico hiperbólico para f si el diferencial de f^n en el punto p , $(Df^n)_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es un mapa lineal hiperbólico. A su órbita le llamaremos órbita periódica hiperbólica.

Definición 4.4. Sea N una variedad Riemanniana, $\varphi : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ un flujo suave, y $\Lambda \subseteq N$ un conjunto φ_t -invariante ($\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$). Se dice que Λ es hiperbólico para el flujo φ_t si existe una métrica Riemanniana en un abierto U conteniendo a Λ , $C > 0$, y $\lambda < 1 < \mu$ tales que para todo $x \in \Lambda$ existe una descomposición de T_xN :

$$T_xN = E_x^+ \oplus E_x^0 \oplus E_x^-$$

tal que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(x) \in E_x^0 - \{0\}$, $\dim E_x^0 = 1$, $D\varphi_t(E^\pm) = E^\pm$, y además

$$\|D\varphi_t|_{E_x^-}\| \leq C\lambda^t,$$

$$\|D\varphi_{-t}|_{E_x^+}\| \leq C\mu^{-t}.$$

Definición 4.5. Un flujo de clase C^1 en una variedad compacta $\varphi_t : N \rightarrow N$, se dice *Anosov* si N es un conjunto hiperbólico para φ_t .

Teorema 4.6. Sea Λ un conjunto hiperbólico para un flujo $\varphi_t : N \rightarrow N$ de clase C^r , $r \in \mathbb{N}$, y sean λ y μ las constantes en la definición 4.4, y $t_0 > 0$. Luego para cada $x \in \Lambda$ existe un par de C^r -discos encajados, $W_{loc}^s(x)$ y $W_{loc}^u(x)$, llamados variedades estable e inestable local respectivamente, tales que:

- $T_xW_{loc}^s(x) = E_x^-$, $T_xW_{loc}^u(x) = E_x^+$
- $\phi_t(W_{loc}^s(x)) \subseteq W_{loc}^s(\phi_t(x))$ y $\phi_{-t}(W_{loc}^u(x)) \subseteq W_{loc}^u(\phi_{-t}(x))$ para todo $t \geq t_0$
- Para todo $\delta > 0$ existe $C(\delta)$ tal que
 - $dist(\phi_t(x), \phi_t(y)) < C(\delta)(\lambda + \delta)^t dist(x, y)$ para todo $y \in W_{loc}^s(x)$ y para todo $t > 0$
 - $dist(\phi_{-t}(x), \phi_{-t}(y)) < C(\delta)(\mu - \delta)^{-t} dist(x, y)$ para todo $y \in W_{loc}^u(x)$ y para todo $t > 0$.

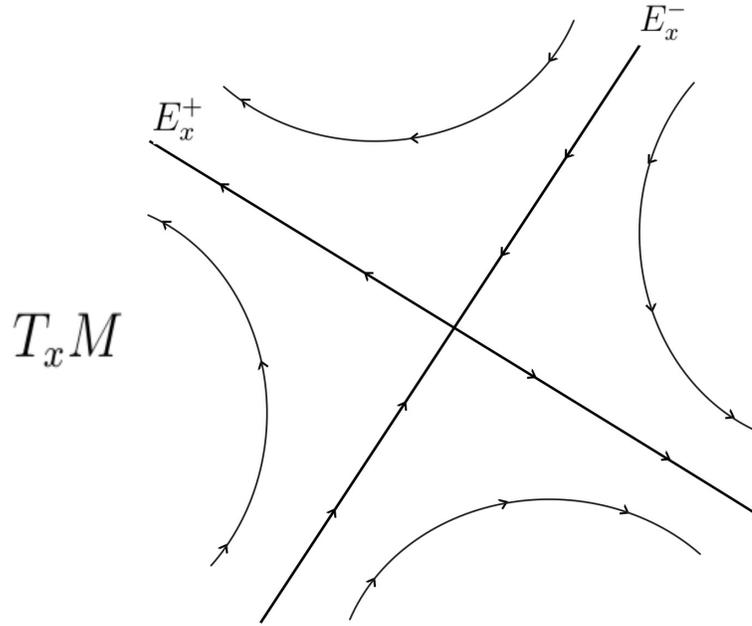


Figure 2: Descomposición de $T_x M$.

- Existe una familia continua de entornos de x , $\{U_x\}$ tales que:
 - $W_{loc}^s(x) = \{y \text{ tal que } \phi_t(y) \in U_{\phi_t(x)}, t > 0, \text{dist}(\phi^t(x), \phi^t(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$
 - $W_{loc}^u(x) = \{y \text{ tal que } \phi_{-t}(y) \in U_{\phi_{-t}(x)}, t > 0, \text{dist}(\phi^{-t}(x), \phi^{-t}(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$

Definición 4.7. Definimos

$$W^s(x) := \bigcup_{t>0} \phi_{-t}(W_{loc}^s(\phi_t(x)))$$

y

$$W^u(x) := \bigcup_{t>0} \phi_t(W_{loc}^u(\phi_t(x)))$$

y les llamaremos *variedad estable fuerte global* y *variedad inestable fuerte global* en x respectivamente. Se caracterizan por cumplir:

- $W^s(x) = \{y \in N \text{ tal que } \text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$
- $W^u(x) = \{y \in N \text{ tal que } \text{dist}(\phi_{-t}(x), \phi_{-t}(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$

Definición 4.8. Las variedades

$$W^{0s}(x) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^s(x))$$

y

$$W^{0u}(x) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^u(x))$$

serán las variedades *estable débil* e *inestable débil* de x respectivamente. Además $T_x W^{0s} = E_x^0 \oplus E_x^-$ y $T_x W^{0u} = E_x^0 \oplus E_x^+$.

Nos proponemos probar que en el tangente unitario, T^1M , de una variedad compacta de curvatura negativa, el flujo geodésico ϕ_t es de Anosov. Esto es, que todo T^1M es un conjunto hiperbólico para el flujo. La siguiente proposición nos da una condición suficiente para verificar que un conjunto es hiperbólico. Damos previamente una definición.

Definición 4.9. Un cono \mathcal{C} en un espacio vectorial V , es un subconjunto tal que existe una forma cuadrática $Q_{\mathcal{C}}$ no degenerada en V , de modo que $\mathcal{C} = \{v \in V \text{ tal que } Q_{\mathcal{C}}(v) \geq 0\}$

Proposición 4.10. Sea φ un flujo en una variedad Riemanniana N . Un conjunto $\Lambda \subset N$ compacto, φ_t -invariante será hiperbólico, si existen constantes $\lambda < 1 < \mu$ tales que, para todo x en Λ existe una descomposición de $T_x N$, $E_x^0 \oplus S_x \oplus T_x$, no necesariamente invariante por φ_t , una familia de conos horizontales $\{H_x\}$ con $S_x \subset H_x$ para todo x , asociados a la descomposición $S_x \oplus (E_x^0 \oplus T_x)$, una familia de conos verticales V_x con $T_x \subset V_x$ para todo x , asociados con la descomposición $(S_x \oplus E_x^0) \oplus T_x$ tales que para todo $t > 0$ se cumple:

1. $D\varphi_t(H_x) \subseteq \text{Int}H_{\varphi_t(x)}$ y $D\varphi_{-t}(V_x) \subseteq \text{Int}V_{\varphi_{-t}(x)}$
2. $\|D\varphi_t(\xi)\| \geq \|\xi\| \mu^t$ para todo $\xi \in H_x$
3. $\|D\varphi_{-t}(\xi)\| \geq \|\xi\| \lambda^t$ para todo $\xi \in V_x$

Observación 4.1. Decir que H_x es un cono horizontal asociado a la descomposición $S_x \oplus (E_x^0 \oplus T_x)$, es decir que podemos escribir cada v de $T_x N$ como $(v_{S_x}, v_{E_x^0 \oplus T_x})$, y que $|v_{S_x}| \geq |v_{E_x^0 \oplus T_x}|$. Análogo para los conos verticales V_x .

La proposición anterior, es un corolario directo de la siguiente.

Proposición 4.11. Sean $\lambda' < \mu'$ y $\gamma_m, \gamma'_m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ y $L_m : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ una sucesión de mapas lineales invertibles que cumplen las siguientes condiciones:

- $L_m(H^{\gamma_m}) \subseteq \text{Int}(H^{\gamma_{m+1}})$,

- $L_m^{-1}(V^{\gamma'_{m+1}}) \subseteq \text{Int}(V^{\gamma'_m})$,
- $\|L_m(u, v)\| > \mu' \|(u, v)\|$ para todo $(u, v) \in H^{\gamma_m}$,
- $\|L_m(u, v)\| < \lambda' \|(u, v)\|$ para todo $(u, v) \in L^{-1}(V^{\gamma'_{m+1}})$.

Entonces, si definimos

$$E_m^+ := \bigcap_{i=0}^{\infty} L_{m-1} \circ L_{m-2} \circ \dots \circ L_{m-i}(H^{\gamma_{m-i}})$$

y

$$E_m^- := \bigcap_{i=0}^{\infty} L_m^{-1} \circ L_{m+1}^{-1} \circ \dots \circ L_{m+i}^{-1}(V^{\gamma'_{m+i+1}}),$$

entonces E_m^+ será un subespacio de dimensión k dentro de H^{γ_m} , y E_m^- será un subespacio de dimensión $n - k$ dentro de $V^{\gamma'_m}$.

Por una prueba de esta proposición, ver Prop. 6.2.12 en [12].

4.3 Ejemplos

Como hemos dicho, vamos a probar más adelante que un ejemplo de flujo de Anosov, son los flujos geodésicos en variedades compactas de curvatura estrictamente negativa. Sin embargo podemos dar ahora una forma de construir flujos de Anosov mediante la suspensión de un difeomorfismo de Anosov. Veamos previamente algunas definiciones.

Definición 4.12. Sea N una variedad diferenciable y $f : U \subset N$ un difeomorfismo sobre su imagen, de clase C^1 . Si $\Lambda \subset U$ es un conjunto f -invariante, diremos que Λ es un *conjunto hiperbólico* para f , si existen constantes $\lambda < 1 < \mu$ tal que para todo $x \in \Lambda$ la secuencia de diferenciales

$$(Df)_{f^n(x)} : T_{f^n(x)}N \longrightarrow T_{f^{n+1}(x)}N$$

admite un (λ, μ) -splitting, esto es, para todo $x \in \Lambda$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe una descomposición

$$T_{f^n(x)}N = E_{f^n(x)}^+ \oplus E_{f^n(x)}^-$$

donde

$$\|(Df)_{f^n(x)}(v)\| \leq \lambda \|v\| \text{ para todo } v \in E_{f^n(x)}^-$$

y

$$\|(Df)_{f^n(x)}^{-1}(u)\| \leq \mu^{-1} \|u\| \text{ para todo } u \in E_{f^{n+1}(x)}^+.$$

Definición 4.13. Decimos que $f : N \longrightarrow N$ es un *difeomorfismo de Anosov* si N es un conjunto hiperbólico para f .

Ejemplo 4.1. (*Difeomorfismo de Anosov en el Toro*) Supongamos que nuestra variedad es el toro \mathbb{T}^2 , pensado como $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, con la relación de equivalencia

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si } (c - a, d - b) \in \mathbb{Z}^2.$$

Luego definimos la proyección canónica

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, \quad \pi(a, b) = \overline{(a, b)}.$$

Considero $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ definida mediante

$$\pi\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pi^{-1}(x)\right)$$

Es claro que si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Luego si \mathcal{O} es una órbita de F , $\pi(\mathcal{O})$ será una órbita de f . Por otra parte, los valores propios de A serán $\lambda = (3 - \sqrt{5})/2 < 1$ y $\sigma = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$. Los subespacios propios asociados a estos valores propios, S_λ y S_σ , son rectas por el origen y además son invariantes por F . Es claro también que $\mathbb{R}^2 = S_\lambda \oplus S_\sigma$. Luego $\pi(S_\lambda)$ y $\pi(S_\sigma)$ serán invariantes por f . Observar que $F|_{S_\sigma}$ expande las distancias hacia el futuro (en la medida que iteramos) y las contrae hacia el pasado, y lo mismo sucede con f . De modo que $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ es un difeomorfismo de Anosov.

Definición 4.14. Sea $f : N \longrightarrow N$ un difeomorfismo en una variedad diferenciable. Considero la variedad $N_f := N \times [0, 1]$, donde identifico los pares de la forma $(x, 1)$ con los pares de la forma $(f(x), 0)$, para todo $x \in N$. El *flujo de suspensión* será el flujo determinado por el campo "vertical" $\frac{\partial}{\partial t}$.

Supongamos ahora que $N = \mathbb{T}^2$, $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov, y considero la variedad de suspensión $\mathbb{T}_f = \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$. Podemos darle a \mathbb{T}_f un atlas, con parametrizaciones que se obtienen a partir de las parametrizaciones de \mathbb{T}^2 , que le otorgan una estructura de variedad diferenciable. Podemos ahora realizar la identificación

$$T_{(x,t)}\mathbb{T}_f \simeq T_x\mathbb{T}^2 \times T_t\mathbb{R}.$$

Consideramos el flujo $\varphi_t : \mathbb{T}_f \longrightarrow \mathbb{T}_f$ que se obtiene al integrar el campo $(0, 0, 1)$, o sea, si $\varphi(x, s) = (\hat{x}, \hat{s})$, entonces $(D\varphi_t)_{(x,s)}(v) = (0, 0, 1) \in T_{\hat{x}}\mathbb{T}^2 \times T_{\hat{s}}\mathbb{R}$.

Poniendo la métrica apropiada en \mathbb{T}_f (ver detalles en sección 2.4.1 de [13]), se tiene que φ_1 restricto a $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ se comporta exactamente como f . De modo que E^+ y E^- , los subfibrados estable e inestable de f , por ser f -invariantes resultaran ser también φ_1 -invariantes, y varían continuamente en $T(\mathbb{T}^2 \times \{0\})$. Veamos que se pueden extender a todo \mathbb{T}_f^2 . Si ponemos

$$E^-(\varphi_t(p, 0)) = D\varphi_t(E^-(p, 0)),$$

$$E^+(\varphi_t(p, 0)) = D\varphi_t(E^+(p, 0))$$

y

$$E^0 = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

Luego E^- , E^+ , y E^0 varían continuamente en $T\mathbb{T}_f$ y son invariantes por $D\varphi_t$. Consideremos $T^1\mathbb{T}_f$, el tangente unitario a \mathbb{T}_f . $D\varphi : T^1\mathbb{T}_f \times [0, 1] \rightarrow T^1\mathbb{T}_f$ es una función continua. Además $T^1\mathbb{T}_f \times [0, 1]$ es un compacto. Luego está acotada. Supongamos entonces que para $x \in \mathbb{T}_f$, se tiene $\|(D\phi_t)_x(v)\| < k$. Sean $x \in \mathbb{T}_f$ y $v \in E^-(x)$, y sea t_0 tal que $\varphi_{t_0}(x) \in \mathbb{T}^2 \times 0$, $(D\varphi_{t_0})_x(v) \in E^-(\varphi_{t_0}(x))$. Luego para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$\|(D\varphi_{t_0+n})_x(v)\| \leq \lambda^n \|(D\phi_{t_0})_x(v)\| \leq \lambda^n k \|v\|.$$

Entonces E^- se contrae hacia el futuro. Análogamente se prueba que E^+ se contrae hacia el pasado.

5 El flujo geodésico en curvatura negativa

5.1 Introducción

En este capítulo, verificaremos que el flujo geodésico en el tangente unitario T^1M , cuando M es compacta y con curvatura negativa, está en condiciones de hipótesis de la proposición 4.10, y por tanto es un flujo de Anosov. Para esto, trabajaremos en el tangente unitario, haciendo la siguiente identificación: dado $\theta = (p, v) \in TM$, un vector $\xi \in T_\theta TM$ se puede escribir de la forma $\xi = (J(0), J'(0))$, donde J es un campo de Jacobi a lo largo de γ_v . Recordemos que habíamos encontrado una descomposición de $T_\theta TM$ en subespacios vertical y horizontal, ambos isomorfos a T_pM (proposición 3.11). $J(0)$ representará la coordenada horizontal de ξ , ξ_H , y $J'(0)$ la coordenada vertical, ξ_V . De este modo tendremos que $T_\theta T^1M \simeq T_pM \oplus v^\perp$.

5.2 Los campos de Jacobi

Sea M una variedad compacta, Riemanniana. TM su fibrado tangente, T^1M el tangente unitario y R el tensor de curvatura que definimos anteriormente (2.16). Asumiremos que la curvatura seccional (definida en 2.20) para todos los subespacios

de dimensión 2 de T_pM y para todo p en M , es negativa. Como M es compacta, esta curvatura estará acotada. En particular, estará acotada inferiormente por cierto valor $-\eta < 0$.

Consideremos un campo de Jacobi J a lo largo de una geodésica γ de M . Por definición, este campo responde a la ecuación diferencial

$$\ddot{J} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0.$$

Proposición 5.1. *Un campo de Jacobi tangencial, (paralelo a $\dot{\gamma}$), será de la forma $J(t) = f(t)\dot{\gamma}(t)$ con $\ddot{f} = 0$.*

Proof. Se tiene que $\ddot{\gamma}(t) = 0$ por ser geodésica, y entonces $\ddot{J} = \ddot{f}\dot{\gamma}$, lo cual a su vez es igual a $-\langle R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J \rangle = 0$. \square

Corolario 5.2. *La proyección J^T de cualquier campo de Jacobi sobre la dirección de $\dot{\gamma}$ será también un campo de Jacobi.*

Proof. La proyección J^T será de la forma $f(t)\dot{\gamma}(t)$. Claramente, $f(t)$ será $\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$. Luego, $\ddot{f}(t) = \langle \ddot{J}, \dot{\gamma} \rangle = -\langle R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, J \rangle = 0$. De modo que J^T responde a la ecuación de Jacobi. \square

Corolario 5.3. *La componente de J perpendicular a $\dot{\gamma}$, J^\perp también será un campo de Jacobi.*

Proof. Se desprende directamente de la linealidad de la ecuación de Jacobi, ya que $J^\perp = J - J^T$. \square

Dado $p \in M$, $v \in T_pM$, consideremos la geodésica que en tiempo $t = 0$ pasa por p con velocidad v . Si $\{\phi_t\}$ es el flujo geodésico, por lo visto en el capítulo anterior, existe una familia de isomorfismos $j_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_pM \oplus T_pM$, definidos en el corolario 3.13, tales que $j_\theta(\xi) = (\xi_h, \xi_v)$ de modo tal que $j_{\phi_t(\theta)}(D\phi_t(\xi)) = (J(t), \dot{J}(t))$, donde J es un campo de Jacobi a lo largo de γ_v , con $J(0) = \xi_h$, $\dot{J}(0) = \xi_v$.

Eso nos permitirá describir la dinámica del flujo geodésico en términos de la evolución de los campos de Jacobi.

Observación 5.1. *Si la dimensión de M es n , entonces dado $x \in M$ existen n campos de Jacobi linealmente independientes, tales que $J(0) = v$, para todo $v \in T_xM$. Además, $\{J_1, \dots, J_n\}$ con $J_i(0) = v$ serán campos de Jacobi linealmente independientes, si y solo si $\{\dot{J}_1(0), \dots, \dot{J}_n(0)\}$ lo son en T_xM .*

Como hemos mencionado más arriba, los campos de Jacobi paralelos a la $\dot{\gamma}$ son de la forma $J(t) = f(t)\dot{\gamma}(t)$ con $\ddot{f} = 0$. De modo que f debe ser de la forma

$$f(t) = at + b.$$

Luego, forman un subespacio de dimensión 2 dentro del espacio de los campos de Jacobi. Los campos de Jacobi tangenciales, serán entonces de esta forma

$$J(t) = at\dot{\gamma}(t) + b\dot{\gamma}(t),$$

y se tiene

$$\dot{J}(t) = a\dot{\gamma}(t).$$

Ahora bien, si consideramos el fibrado tangente unitario T^1M , estaríamos considerando solamente en T_pM los vectores de módulo 1, por lo cual deberá ser $a = 1$. Entonces en T^1M , el subespacio de los campos de Jacobi tangenciales tendrá dimensión 1, y será el subespacio E^0 buscado (el que representa la dirección del flujo). Ahora alcanza ver que el espacio de los campos de Jacobi ortogonales, admite una descomposición en un espacio que se contrae exponencialmente por el flujo, y otro que se expande exponencialmente, ambos invariantes.

Poniendo $K(J) = -R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}$, un campo de Jacobi ortogonal verifica $\ddot{J} - K(J) = 0$. K será entonces un operador simétrico definido negativo.

La curvatura seccional negativa junto con la compacidad de la variedad, aseguran la existencia de k y r mayores que 0 tales que:

- $\langle K(J), J \rangle \leq -k\langle J, J \rangle$ siempre que $J \perp \dot{\gamma}$
- $\langle K(J), K(J) \rangle < \frac{1}{r^2}$ para todo $J \in T^1M$

En particular, cualquier cota superior de la curvatura seccional, puedo escribirla como $-k^2$.

Para ver la hiperbolicidad del flujo geodésico, introducimos una nueva norma en $T_pM \oplus T_pM$:

$$\| u, v \| = (\langle u, u \rangle + \epsilon \langle v, v \rangle)^{1/2}$$

para todo $u, v \in T_pM$ y para algún $\epsilon < \frac{1}{r}$

Observación 5.2. *El conjunto $C_\delta = \{(J, \dot{J}) \text{ tal que } \frac{\langle J, \dot{J} \rangle}{\|J, \dot{J}\|} \geq \delta\}$ es un cono en $T_pM \oplus T_pM$ en el sentido de la definición 4.9, ya que Q_δ definida mediante*

$$Q_\delta(J, \dot{J}) = \langle J, \dot{J} \rangle - \delta \| J, \dot{J} \|^2$$

es una forma cuadrática, y se tiene

$$C_\delta = \{(J, \dot{J}) \in T_pM \oplus T_pM \text{ tal que } Q_\delta(J, \dot{J}) \geq 0\}.$$

Lema 5.4. *Para todo $\delta < \frac{k}{1+r^{-3/2}}$, la familia de conos C_δ definida anteriormente es estrictamente invariante por el flujo $\{\phi_t\}$. Además los campos de Jacobi en C_δ se expanden exponencialmente.*

Proof. Desarrollando algunas operaciones, se puede verificar que

$$\frac{d}{dt} \frac{\langle J, \dot{J} \rangle}{\|J, \dot{J}\|} > 0$$

cuando $\frac{\langle J, \dot{J} \rangle}{\|J, \dot{J}\|} = \delta$, o sea, $\frac{\langle J, \dot{J} \rangle}{\|J, \dot{J}\|}$ es creciente cuando alcanza el valor δ , y que

$$\frac{\frac{d}{dt} \|J, \dot{J}\|}{\|J, \dot{J}\|} > 0.$$

Entonces los campos J de C_δ se expanden exponencialmente hacia el futuro. \square

Observación 5.3. *Teniendo en cuenta que $\phi_{-t}(v) = -\phi_t(-v)$, tenemos también conos invariantes que expanden hacia el pasado.*

Podemos ahora, en vista de la proposición 4.10 concluir el siguiente teorema.

Teorema 5.5. *Si M es una variedad compacta de curvatura seccional negativa, el flujo geodésico en T^1M es un flujo de Anosov.*

6 Definiciones y teoremas de medida y ergodicidad.

6.1 Introducción

Daremos a continuación algunas definiciones relativas a los espacios de medida y la teoría ergódica. Enunciaremos además en este sentido los resultados que emplearemos más adelante para demostrar la ergodicidad del flujo geodésico en curvatura negativa. Hemos extraído las definiciones y enunciados de esta sección principalmente de la sección 2.1 de [7], y de [4].

6.2 Transformaciones medibles

Definición 6.1. • Dados dos espacios de medida (X, \mathcal{A}, μ) y (Y, \mathcal{B}, ν) , se dice que una función $\psi : X \rightarrow Y$ es *medible*, si $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

- Diremos que ψ es *no singular*, si la preimagen de todo conjunto de medida nula en Y tiene medida nula en X .
- Una función medible y no singular de un espacio de medida en sí mismo, se llama *transformación medible*.

Definición 6.2. Sea m la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Un *flujo medible*, φ , en un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , es un mapa $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

- El mapa φ es medible respecto de la medida producto $\mu \times m$ en $X \times \mathbb{R}$
- Las funciones $\varphi_t : X \rightarrow X$ tal que $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$, son efectivamente un flujo, como lo definimos en 3.1.

Definición 6.3. • Una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice φ -invariante si $\mu(\{x \in X \text{ tal que } f(\varphi_t(x)) \neq f(x)\}) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente φ -invariante si $f(\varphi_t(x)) = f(x)$ para todo $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$.
- Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es φ -invariante si la función característica de A , χ_A , es una función φ -invariante.

Proposición 6.4. Sea φ un flujo medible en un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función φ -invariante. Luego, existe \hat{f} estrictamente invariante tal que $f = \hat{f} \mu - ctp$.

Proof. Consideremos $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\Phi(x, t) = \varphi_t(x)$, y ν la medida producto en $X \times \mathbb{R}$. Como f es φ -invariante, se tiene

$$\nu(\{(x, t) : f(\varphi_t(x)) = f(x)\}) = 1$$

Luego, el conjunto $A_f = \{x \in X \text{ tal que } f(\varphi_t(x)) = f(x) \text{ } m - ctp \text{ } t \in \mathbb{R}\}$ también tendrá medida total. Definimos entonces

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } \varphi_t(x) = y \in A_f \text{ para algún } t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

Tenemos que verificar que está bien definida, esto es, que no depende del y que tomamos. Pero claramente, si $\varphi_t(x) = y \in A_f$ y $\varphi_s(x) = z \in A_f$, entonces, por la definición de A_f debe ser $f(z) = f(y)$. Luego, sea x tal que f no es constante en la órbita de x , entonces $\hat{f}(\varphi_t(x)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De modo que resulta \hat{f} estrictamente invariante. □

Definición 6.5. • Un flujo medible φ en un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) se dice *ergódico*, si cualquier función φ -invariante es constante $\mu - ctp$. Esto es equivalente a decir que todo subconjunto de X , medible e invariante por φ tiene, o bien medida total, o bien medida nula.

- Decimos que el flujo φ preserva la medida μ , (o que es μ -invariante) si $\mu(\varphi_t(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación 6.1. Sea N una variedad de dimensión n , y $\psi : N \rightarrow N$ un difeomorfismo. Sea ω una forma de volumen en N , de modo que la medida de volumen, μ , queda determinada por

$$\mu(A) = \int_A \omega$$

para todo A Boreliano. El pull-back de ω por ψ , es la n -forma dada por

$$(\psi^*(\omega))_p(v_1, \dots, v_n) = w_{\psi(p)}(D\psi_p(v_1), \dots, D\psi_p(v_n)).$$

Sabemos además que

$$\underbrace{\int_{\psi(A)} \omega}_{=\mu(\psi(A))} = \int_A \psi^*(\omega) = |\det J\psi| \underbrace{\int_A \omega}_{=\mu(A)}.$$

De modo que la única forma de que ψ preserve el volumen, es que sea $|\det J\psi| = 1$.

Definición 6.6. Sea (X, \mathcal{A}) un espacio de medida y $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$ de funciones reales medibles se dice *subaditiva* si, para todo n, m mayores que 1, se cumple

$$f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ T^n$$

Se dice *aditiva* si se cumple

$$f_{n+m} = f_n + f_m \circ T^n$$

Observar que toda sucesión aditiva, es en particular subaditiva.

Observación 6.2. Una sucesión $\{f_n\}$ será aditiva si y solo si

$$f_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_1 \circ T^j \quad \forall n \geq 1$$

.

Proposición 6.7. Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión subaditiva de funciones reales medibles, tales que f_1 está en $L^1(\mu)$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos el siguiente conjunto

$$E_\alpha = \left\{ x \in X : \sup_{n \geq 1} \frac{f_n(x)}{n} > \alpha \right\}$$

Si $A \subset E_\alpha$ es medible e invariante por T , o sea $T^{-1}(A) = A$, entonces se tiene

$$\int_A f_1 d\mu \geq \alpha \mu(A).$$

La prueba de esta proposición se puede encontrar en el Teorema 2.2.6 de [7].

Corolario 6.8. *Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión subaditiva de funciones reales medibles, tales que f_1 está en $L^1(\mu)$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y definimos los conjuntos*

$$\overline{G_\alpha} = \left\{ x \in X : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n} > \alpha \right\}$$

$$\underline{G_\beta} = \left\{ x \in X : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n} < \beta \right\}$$

Luego, para todo $A \subseteq \overline{G_\alpha}$, $B \subseteq \underline{G_\beta}$ medibles con $T^{-1}(A) = A$, $T^{-1}(B) = B$, se tiene

$$\int_A f_1 d\mu \geq \alpha \mu(A)$$

$$\int_B f_1 d\mu \leq \beta \mu(B)$$

Esta prueba puede verse en 2.2.7 de [7].

Corolario 6.9. *Además si la sucesión es aditiva, los conjuntos $\overline{G_\alpha}$ y $\underline{G_\beta}$ son T -invariantes.*

Proof. Basta probar que $\liminf_n \frac{f_n}{n}$ y $\limsup_n \frac{f_n}{n}$ son T -invariantes.

$$\frac{f_{n+1}}{n+1} = \frac{f_1(x) + f_n(T(x))}{n+1} = \frac{f_1(x)}{n+1} + \frac{f_n(T(x))}{n} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\rightarrow 1}$$

Tomando límites superior e inferior en esa igualdad, se tiene el resultado. □

Teorema 6.10 (Birkhoff (Caso discreto)). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y sea $T : X \rightarrow X$ medible que preserva μ . Entonces, para toda función $f \in L^1(\mu)$ existe para μ -c.p. $x \in X$ el siguiente límite*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \hat{f}(x)$$

Además \hat{f} es T -invariante.

Proof. Sea $f_n = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$. Por la observación 6.2, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es aditiva. Si bien el teorema vale para $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, lo probaremos para f real. Separando luego f en sus partes real e imaginaria, se tiene la prueba para el caso complejo. Sea

$$G = \left\{ x \in X : \liminf \frac{f_n}{n} < \limsup \frac{f_n}{n}(x) \right\}$$

Lo que queremos ver es que $\mu(G) = 0$. Observar que

$$G = \bigcup_{\alpha > \beta} \overline{G_\alpha} \cap \underline{G_\beta}$$

esto es, todos los $x \in X$ tales que el $\limsup \frac{f_n}{n}(x)$ es mayor que algún α y el $\liminf \frac{f_n}{n}(x)$ es menor que algún β con $\alpha > \beta$. Luego, basta ver que para $A = \overline{G_\alpha} \cap \underline{G_\beta}$, $\mu(A) = 0$, para cualquier α, β . Como $\overline{G_\alpha}$ y $\underline{G_\beta}$ son T -invariantes, A también lo será. En vista de los corolarios anteriores tenemos

$$\beta\mu(A) \geq \int_A f d\mu \geq \alpha\mu(A)$$

y como $\alpha > \beta$, debe ser $\mu(A) = 0$. Entonces para μ -c.t.p $x \in X$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n}(x) = \hat{f}(x)$. Veamos ahora que \hat{f} es T -invariante μ -c.t.p. Esto se desprende directamente del corolario 6.9, ya que los límites superior e inferior de $\frac{f_n}{n}$ son invariantes por T , y coinciden con el límite en caso de existir. □

Consideremos ahora un flujo φ que preserve una medida finita sobre abiertos. Dada una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos

$$f_T^+(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dt$$

y

$$f_T^-(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_{-t}(x)) dt$$

Entonces se tienen las siguientes proposiciones.

Teorema 6.11 (Birkhoff (Para flujos)). *Si $f \in L^1(\mu)$ entonces los siguientes límites*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T^+(x)$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T^-(x)$$

existen y son iguales para μ -c.t.p $x \in X$. Y más aún f^+ y f^- son integrables respecto de μ y φ -invariantes.

Proof. Definimos $T(x) = \varphi_1(x)$ y $\bar{f}(x) = \int_0^1 f(\varphi_t(x)) dt$. Como φ_1 preserve la medida μ , T también lo hace. Y como $f \in L^1(\mu)$, también se tiene $\bar{f} \in L^1(\mu)$. Luego, definimos

$$\hat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{f}(T^j(x))$$

y esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f(\varphi_{t+j}(x)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(\varphi_t(x)) dt$$

y aplicando la proposición 6.10 a \bar{f} y T , este límite debe existir. □

Observación 6.3. Si $f \in L^2$ entonces f^+ y f^- son el mismo elemento \bar{f} de L^2 , y \bar{f} es la proyección de f sobre L^2 .

Proposición 6.12. Un flujo φ_t es ergódico para la medida μ , si y solo si para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple que

$$\bar{f} = \int f d\mu,$$

donde

$$\bar{f} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t) dt.$$

7 El ejemplo del bitoro

Es de interés ver que efectivamente existe alguna variedad Riemanniana en condiciones de hipótesis del teorema 1.1. Dedicaremos esta sección a mostrar un ejemplo concreto, el cual se puede encontrar en la sección 5.4 de [12].

Ejemplo 7.1. Consideremos el plano hiperbólico $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, del cual sabemos admite una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ con la que tendrá curvatura seccional constante negativa. (Ver capítulo 8.3 de [9]). El mapa $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definido mediante

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

tiene por imagen al conjunto

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Si ponemos en \mathbb{D} la métrica

$$\langle v, w \rangle := \langle Df^{-1}(v), Df^{-1}(w) \rangle_{\mathbb{H}},$$

f será una isometría, se preservará la métrica y por tanto la curvatura. Consideremos en \mathbb{D} un octógono geodésico, esto es, un octógono cuyos lados están contenidos en geodésicas. Con esta métrica, las geodésicas en \mathbb{D} estarán dadas por los arcos de circunferencia ortogonales a S^1 , y los diámetros de S^1 (por una prueba de esto ver

Teo. 5.4.9 en [12]). De modo que el octógono geodésico tendrá por lados arcos de circunferencias, y sus vértices v_i , $k = 0, 1, \dots, 7$ serán de la forma

$$d \cdot e^{-ki\pi/4},$$

donde $d \in (0, 1)$. Observar que si hacemos tender d a 1, la suma de los ángulos internos del octógono tiende a 0 , ya que las circunferencias en las que están contenidos los lados son tangentes entre sí cuando $d = 1$, mientras que si hacemos tender d a 0 , las circunferencias se parecen a rectas y los ángulos suman 6π como en un octógono euclídeo. Como la suma de los ángulos internos varía continuamente con d , podemos elegir d adecuado para que esta suma tome el valor que querramos entre 0 y 6π . Nombremos los lados del octógono $a_1, a_2, a_3, a_4, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ y \tilde{a}_4 como en la figura. Podemos identificar cada a_i con \tilde{a}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, mediante isometrías

$$\alpha_i : a_i \longrightarrow \tilde{a}_i, \text{ para todo } i.$$

Sea Γ el grupo generado por $\{\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c, \alpha_d\}$. Se puede probar que si logramos que la suma de los ángulos internos sea igual a 2π , (eligiendo el d apropiado), las identificaciones de los lados correspondientes del octógono hacen que todos los vértices “se peguen bien”, y $T := \mathbb{D}/\Gamma$ será una superficie. Una prueba de esto se puede encontrar en [10]. Además como el polígono era compacto, esta superficie será también compacta y tendrá además la misma curvatura seccional que \mathbb{D} , constante e igual a -1 .

Es posible dar una prueba simple de la ergodicidad del flujo geodésico en T^1M , cuando M es una variedad como la construida en el ejemplo anterior. (En el teorema principal, probamos esto mismo cuando la curvatura es negativa pero no necesariamente constante). Veremos previamente algunas ideas.

Dado $z \in \mathbb{H}$, podemos identificar $T_z\mathbb{H}$ con \mathbb{C} . Si $w = u + iv$ y $w' = u' + iv'$ son vectores de $T_z\mathbb{H}$, definimos el siguiente producto interno en $T_z\mathbb{H}$

$$\langle w, w' \rangle_z = \langle u + iv, u' + iv' \rangle := \operatorname{Re} \left[\frac{(u + iv)(u' + iv')}{(\operatorname{Im}(z))^2} \right].$$

Esta es la métrica que hace que \mathbb{H} tenga curvatura seccional constante y negativa. Sea \mathcal{M} el conjunto de las transformaciones de Möbius, esto es, las transformaciones $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Es sabido que todas las transformaciones de Möbius son isometrías para la métrica que definimos más arriba (ver Lema 5.4.5 en [12]).

Definición 7.1. Las líneas horizontales en \mathbb{H} , $\mathbb{R} + ir := \{t + ir : t \in \mathbb{R}\}$, se llaman *horociclos centrados en el infinito*. A los círculos tangentes al eje real por un punto $x \in \mathbb{R}$ se les llama *horociclos centrados en x* .

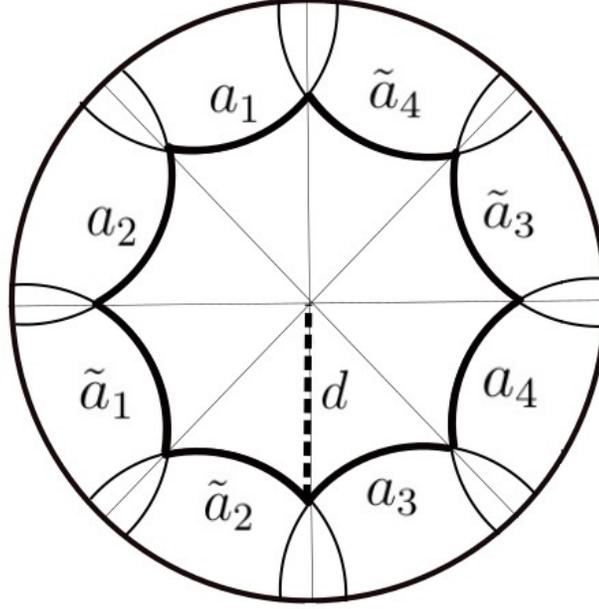


Figure 3: Octógono geodésico en \mathbb{D} .

Parametricemos ahora $S\mathbb{H}$, el tangente unitario de \mathbb{H} , poniendo coordenadas que nos permitan trabajar en él. Sea $q \in S\mathbb{H}$ un punto que utilizaremos como referencia. Tomemos otro $p \in S\mathbb{H}$, $p = (x, \xi)$, $x \in \mathbb{H}$, $\xi \in T_x\mathbb{H}$ con $\|\xi\| = 1$, y de modo tal que ξ no apunte verticalmente hacia abajo. Sea H_p el horociclo que tiene a ξ como vector normal apuntando hacia adentro (o hacia afuera), análogamente se define H_q , y γ la geodésica que une $H_p \cap \mathbb{R}$ con $H_q \cap \mathbb{R}$. Llamaremos t a la longitud orientada del arco de γ desde H_p hasta H_q . Denotemos además por v , a la longitud orientada del arco de H_p que va desde $H_p \cap \gamma$ hasta $x = \pi(p)$, donde $\pi : S\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es la proyección canónica, y por u a la longitud orientada del arco de H_q que va de $H_q \cap \gamma$ hasta $\pi(q)$, como se muestra en la figura 7. Luego el mapa

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow S\mathbb{H} : \psi(t, u, v) = p$$

es un difeomorfismo local que parametriza todo $S\mathbb{H}$, salvo cuando $p = (x, \xi)$ con ξ apuntando verticalmente hacia abajo, pero esto se cubre con otra parametrización que tome como punto de referencia $-q$ en vez de q . Sea $W^s(p)$ el conjunto de los vectores normales que apuntan hacia adentro de H_p . Observar que para todos estos vectores, las coordenadas u y t coinciden, por lo cual $W^s(p)$ resulta ser la curva de nivel

(t, u) para ψ . Luego $W^s(q) = \psi(\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R})$, y $W^{s0}(q) := \psi(\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ la variedad estable débil de q (Ver figura 7). $W^u(p)$ son los vectores unitarios normales a H_{-p} apuntando hacia afuera, que a su vez coincide con $-W_{-p}^s$. $W^u(q) = \psi(\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\})$, y $W^{u0}(q) := \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\})$ será la variedad inestable débil de q .

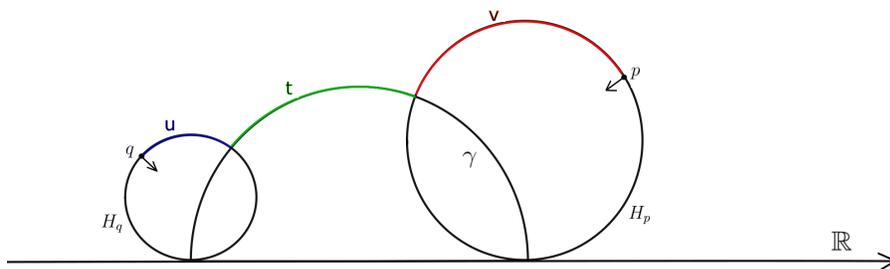


Figure 4: Coordenadas (t, u, v) de p .

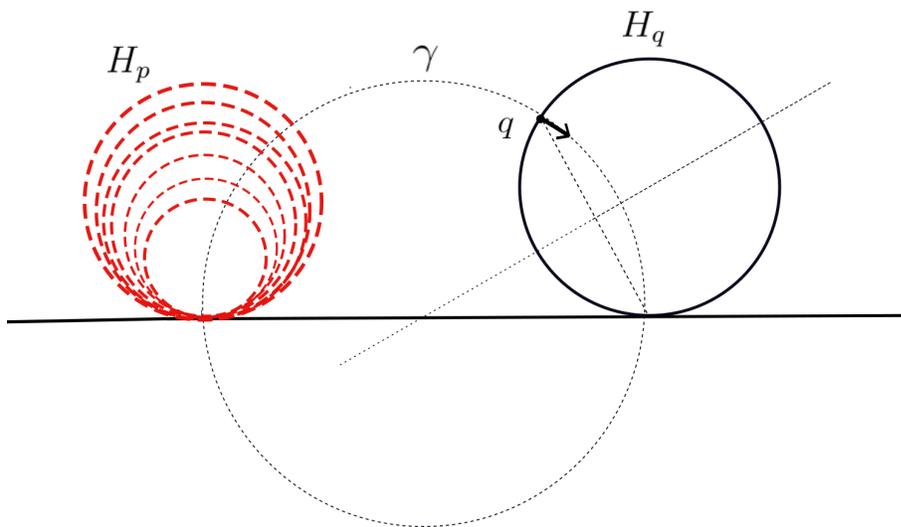


Figure 5: Los horociclos para p , con $p \in W^{s0}(q)$. Todos ellos tienen coordenadas $(t, 0, v)$, con $t, v \in \mathbb{R}$.

Observación 7.1. Las órbitas por el flujo geodésico de los puntos de $W^s(p)$ convergen a la órbita de p , como se muestra en la figura 7.

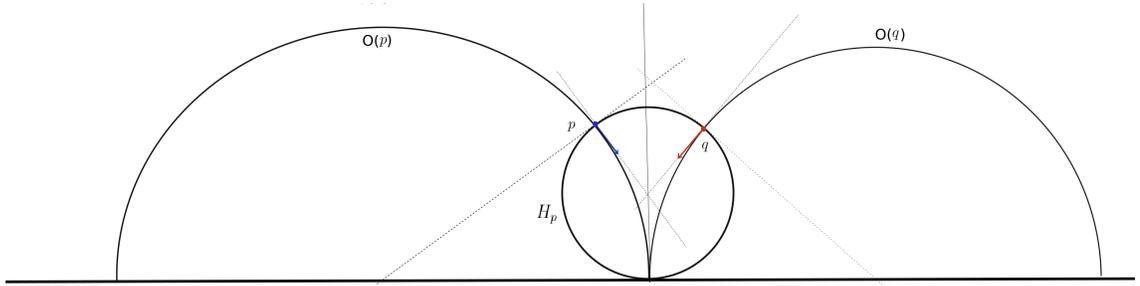


Figure 6: La órbita de $q \in W^s(p)$ se "pega" a la de p en el futuro.

Teorema 7.2. *Sea Γ un grupo discreto de isometrías sin punto fijos en \mathbb{H} , y de modo tal que $M := \mathbb{H}/\Gamma$ es compacto y conexo. Luego, el flujo geodésico en T^1M es ergódico para la medida de Liouville, m .*

Proof. En vista del teorema 6.12, basta verificar que para toda $f \in L^1$ se cumple que

$$\bar{f} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_t(x)) dt,$$

es constante m -ctp. A su vez, alcanza probarlo para f uniformemente continua, ya que estas son densas en L^1 . Por otro lado, si probamos que f es constante m -ctp en abiertos de M , esta constante debería mantenerse en las intersecciones de abiertos, y por ser M conexa, esto implicaría que es m -ctp constante en toda M .

Sea entonces f una función uniformemente continua. Por el teorema ergódico de Birkhoff (6.11), como el flujo geodésico ϕ_t preserva la medida de Liouville, se tiene que $\bar{f}(x)$ existe para casi todo $x \in M$. Supongamos que existe para cierto $p \in M$, y sea $q \in W^s(p)$. Luego, por la observación 7.1, dado $\epsilon > 0$ existe T_0 tal que si $T > T_0$ se tiene

$$|f(\phi_t(p)) - f(\phi_t(q))| < \epsilon.$$

Esto implica que

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T [f(\phi_t(p)) - f(\phi_t(q))] dt \right| < \epsilon$$

para T suficientemente grande. De modo que en el límite esto se anula, luego debe ser $\bar{f}^+(q) = \bar{f}^+(p)$. Además, por el teorema ergódico de Birkhoff, este límite siempre existe y es ϕ_t -invariante. Por tanto \bar{f}^+ será constante en las variedades estables. Consideremos ahora

$$\bar{f}^-(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^0 f(\phi_t(x)) dt.$$

Con un argumento análogo al utilizado para W^s , $\bar{f}^-(x)$ existirá y será constante en $W^u(x)$, y además \bar{f}^+ y \bar{f}^- coinciden en donde ambas están definidas. Sea U un

abierto de $S\mathbb{H}$. Ahora bien, la forma en que hemos parametrizado las variedades estable e inestable en este ejemplo, nos permite estar en condiciones de hipótesis del teorema de Fubini. Esto no sucede en el caso más general para el cual demostraremos la ergodicidad. Sin embargo probaremos que las foliaciones estable e inestable son *absolutamente continuas*, una propiedad que nos permitirá emplear un argumento similar al de Fubini para integrar en la variedad, y cuya definición daremos más adelante. Tenemos entonces, en este caso particular, que por el teorema de Fubini, existe un abierto $C \subset \mathbb{R}$ de medida total, tal que para todo $t_1 \in C$ se tiene

$$\bar{f}^+(t_1, u, v) = \bar{f}^-(t_1, u, v),$$

para casi todo par (u, v) . Luego, si t_1 y t_2 están en C , los correspondientes conjuntos de pares (u, v) de medida total se intersectan, y para todo (u, v) en esta intersección se cumple

$$\bar{f}^+(t_1, u, v) = \bar{f}^+(t_2, u, v).$$

Por lo tanto \bar{f}^+ es constante $m - ctp$ en U . □

8 Foliaciones

8.1 Introducción

En esta sección daremos la definición de foliación y veremos algunos ejemplos. También enunciaremos y demostraremos algunos de los resultados previos necesarios para demostrar el teorema 1.1. Estos enunciados y pruebas se extrajeron del apéndice de [2], [5] y [11].

8.2 Definiciones y ejemplos

Definición 8.1. Dado un espacio métrico X y φ un flujo en X . Llamaremos conjuntos *estable* e *inestable* a los siguientes conjuntos respectivamente:

$$V^s(x) = \{y \in X : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty\}$$

y

$$V^u(x) = \{z \in X : d(\varphi_t(x), \varphi_t(z)) \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow -\infty\}.$$

Proposición 8.2. Sea φ un flujo continuo en un espacio métrico compacto, que preserva una cierta medida positiva sobre abiertos, μ , y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible φ -invariante. Luego f es $\mu - ctp$ constante en los conjuntos estables e inestables, esto es, existen subconjuntos del espacio métrico N_s y N_u tales que para todo par de puntos $x, y \in X \setminus N_s$ tales que $y \in V^s(x)$, $f(x) = f(y)$, y para todo par de puntos $x, z \in X \setminus N_u$ con $z \in V^u(x)$, $f(x) = f(z)$.

Proof. Probaremos que f es constante $\mu - ctp$ en los conjuntos estables V^s , la prueba para los conjuntos inestables será análoga tomando los tiempos hacia el pasado. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que f es no negativa. Dado $C \in \mathbb{R}$, sea $f_C(x) = \min\{f(x), C\}$. Como f es φ -invariante, f_C también lo es. Además, si para todo $C \in \mathbb{R}$ probamos que f_C es constante ctp en $V^s(x)$, f también lo será.

Como f_C es medible, la podemos aproximar en L^1 por una función continua, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\int_X |f_C - h_n| d\mu < \frac{1}{n}$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff, existe para $\mu - ctp$ $x \in X$ el límite

$$h_n^+(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h_n(\varphi_t(x)) dt$$

Como μ y f_C son φ -invariantes tenemos además

$$\int_X |f_C(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_X |f_C(\varphi_t(y)) - h_n(\varphi_t(y))| d\mu(y) = \int_X |f_C(y) - h_n(\varphi_t(y))| d\mu(y)$$

Luego, como

$$f_C = \left[\int_0^T f_C dt \right] \frac{1}{T},$$

podemos escribir

$$\int_X |f_C(y) - \frac{1}{T} \int_0^T h_n(\varphi_t(y))| dt d\mu(y) \leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_X |f_C(y) - h_n(\varphi_t(y))| d\mu(y) dt < \frac{1}{n}$$

Observar que por estar acotada, h_n es uniformemente continua. Luego, para todo x donde exista $h_n^+(x)$ y para todo $y \in V^s(x)$, por la definición de $V^s(x)$ se cumple $h_n^+(x) = h_n^+(y)$, ya que para tiempos muy grandes $\varphi_t(x)$ estará “muy cerca” de $\varphi_t(y)$. Luego, existe un conjunto de medida nula, N_n tal que $h_n^+(x)$ existe y es constante en $V^s(x)$ para todo $x \in X \setminus N_n$. Entonces $f_C^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^+(x)$ será constante en los $V^s(x)$ para todo $x \in X \setminus (\cup N_n)$. Claramente resulta $f_C(x) = f_C^+(x)$ para ctp $x \in X$, de donde f_C será constante $\mu - ctp$ en los conjuntos estables. □

Definición 8.3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , y B^k la bola unitaria en \mathbb{R}^k . Una *foliación* de dimensión k en M , es una partición W de M en subvariedades $W(x)$, todas de clase C^1 y de dimensión k , tal que para todo $x \in M$, existe un entorno de x , U_x , y un homeomorfismo $w_x : B^k \times B^{n-k} \rightarrow U_x$ tal que

- $w_x(0, 0) = x$

- $w(B^k, z)$ es $W_U(w(0, z))$, la componente conexa de $W(w(0, z)) \cap U_x$ que contiene a $w(0, z)$.
- El mapa $w(\cdot, z) : B^k \rightarrow w(B^k, z)$ es un difeomorfismo de clase C^1 .

Diremos que es una foliación de clase C^1 , si los homeomorfismos w_x son además difeomorfismos.

Observación 8.1. *Los homeomorfismos w_x son parametrizaciones de M alrededor de x que forman un atlas de M . También los difeomorfismos $w_x(\cdot, z)$ son parametrizaciones de $W(x)$ alrededor de x y forman un atlas de $W(x)$.*

Daremos un ejemplo de foliación definida a través de una submersión. Daremos previamente la definición de submersión.

Definición 8.4. Un mapa diferenciable entre variedades, $f : M^m \rightarrow N^n$, es una *submersión* si el diferencial Df_x de f en un punto $x \in M$, es sobreyectivo para todo $x \in M$. Naturalmente la dimensión de N debe ser menor o igual a la de M .

Una submersión se puede expresar localmente de la siguiente forma: Dado $x \in M$ existen parametrizaciones $\psi : U \rightarrow M$ alrededor de x , donde $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, y $\tilde{\psi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ alrededor de $f(x)$, de modo tal que $\tilde{f} = \tilde{\psi}^{-1} \circ f \circ \psi : U_1 \times U_2 \rightarrow \tilde{U}$ cumple

$$\tilde{f}(u_1, u_2) = u_2.$$

(Ver pág. 20 de [11])

El ejemplo de foliación que daremos a continuación, ha sido extraído de la sección 1.1 de [5].

Ejemplo 8.1. Consideremos como variedad \mathbb{R}^{n+1} , con $n \geq 2$. Si identificamos \mathbb{R}^{n+1} con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, podemos manejar coordenadas de este modo: si $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, $w = (r, z, t)$, donde $t \in \mathbb{R}$, y $(r, z) = v \in \mathbb{R}^n$, con $r = \|v\|$ y $z = \frac{v}{\|v\|}$, siempre que $v \neq 0$. Es como si a su vez identificáramos localmente \mathbb{R}^n con $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$f(r, z, t) = (r^2 - 1)e^t$$

Es fácil ver que f definida de esta manera es una submersión de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R} . Luego, los conjuntos de nivel son todos preimágenes de valores regulares, y por tanto, variedades de dimensión $(n+1) - 1 = n$. Entonces W tal que $W(x) = f^{-1}(\{f(x)\})$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, es una foliación de \mathbb{R}^{n+1} en variedades de dimensión n .

Sea M una variedad Riemanniana con la distancia d inducida por la métrica, y m la forma de volumen inducida por esta métrica. Denotaremos por m_N al volumen inducido en una subvariedad N .

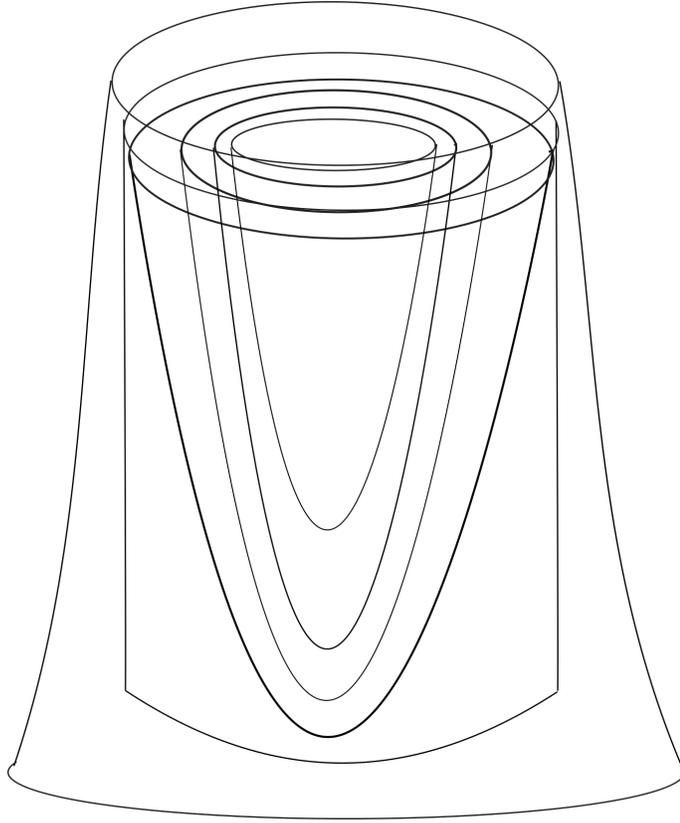


Figure 7: Foliación de \mathbb{R}^3 por los conjuntos de nivel del mapa $f(r, z, t) = (r^2 - 1)e^t$.

A continuación daremos dos definiciones para casos particulares de foliaciones, y veremos que uno es a su vez un caso particular del otro. Serán útiles ya que las foliaciones estable e inestable (W^s y W^u respectivamente) de T^1M inducidas por el flujo geodésico cuando M es compacta y de curvatura negativa, verificarán estas propiedades.

Definición 8.5. Sea W una foliación de dimensión k en M y L una subvariedad local transversal a W , esto es, para todo x en L , $T_xM = T_xW(x) \oplus T_xL$. Sea U un abierto de la siguiente forma

$$U := \bigcup_{x \in L} W_U(x)$$

donde $W_U(x)$ es como en la definición 8.3. Diremos entonces que W es *absolutamente continua* si dados L y U como arriba, existe una familia de funciones medibles δ_x :

$W_U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $A \subset U$ medible, se cumple

$$m(A) = \int_L \int_{W_U(x)} \chi_A(x, y) \delta_x(y) dm_{W(x)}(y) dm_L(x).$$

Definición 8.6. Sea W una foliación en M y $x_1 \in M$, $x_2 \in W(x_1)$. Sean L_1 y L_2 con $x_i \in L_i$, transversales C^1 locales a W . Consideramos $U_1 \subset L_1$ tal que $p(U_1) \subset L_2$, y $U_2 = p(U_1)$ entornos de x_1 y x_2 respectivamente, y un homeomorfismo $p : U_1 \longrightarrow U_2$ (llamado mapa de holonomía) con $p(x_1) = x_2$ y para todo $y \in U_1$ se tiene que $p(y) \in W(y)$. Entonces diremos que W es *transversalmente absolutamente continua*, si el mapa p es absolutamente continuo para cualquier par de transversales elegidas como arriba, esto es, existe una función positiva y medible $q : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ (el Jacobiano de p), tal que para todo $A \subset U_1$ medible se tiene

$$m_{L_2}(p(A)) = \int_{L_1} \chi_A(y) q(y) dm_{L_1}(y)$$

Nos interesa ver que que las foliaciones estable e inestable de T^1M por el flujo geodésico son absolutamente continuas, sin embargo probaremos que son transversalmente uniformemente continuas, en vista de la siguiente proposición.

Proposición 8.7. *Toda foliación transversalmente absolutamente continua, es absolutamente continua.*

La demostración de esta proposición se encuentra en la pág. 76 de [2] (apéndice).

Definición 8.8. Sea W una foliación en una variedad M , y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es constante *ctp* en las hojas de W , si existe $\tilde{M} \subseteq M$ de medida total tal que para todo $x \in \tilde{M}$ existe $\tilde{W}(x) \subseteq W(x)$ de medida total en $W(x)$ tal que f es constante en $\tilde{W}(x)$.

Definición 8.9. Dos foliaciones W_1 y W_2 se dicen *transversales* si $T_x W_1(x) \cap T_x W_2(x) = \{0\}$, para todo $x \in M$.

Proposición 8.10. *Sea M una variedad Riemanniana conexa, y sean W_1 y W_2 foliaciones transversales y absolutamente continuas de M , y tales que $T_x W_1(x) \oplus T_x W_2(x) = T_x M$ para todo $x \in M$. Consideramos $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y constante *ctp* en las hojas de W_1 y W_2 . Entonces f es constante *ctp* en M .*

Para demostrar esta proposición, precisaremos el siguiente lema.

Lema 8.11. *Sea W una foliación absolutamente continua en una variedad M , y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y casi todo punto constante en las hojas. Entonces, para toda L transversal a W existe $\tilde{L} \subseteq L$ medible, de medida total en L , tal que para todo $x \in \tilde{L}$ existe $\bar{W}(x) \subseteq W(x)$ de medida total en $W(x)$, tal que f es constante en $\bar{W}(x)$.*

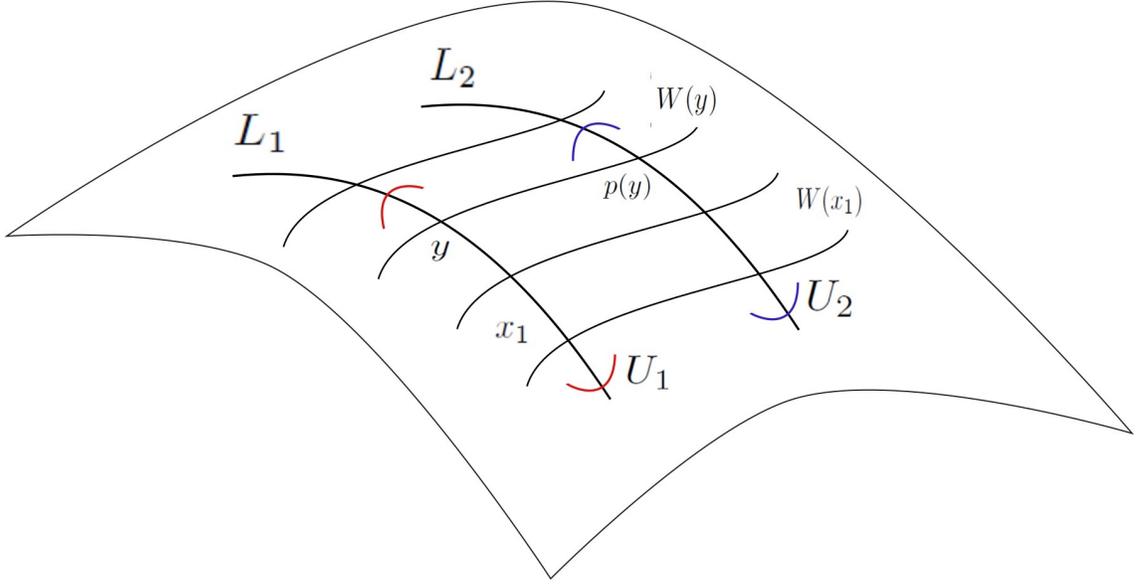


Figure 8: Foliación transversalmente absolutamente continua. “Medir” dentro de U_1 es como medir dentro de U_2 a menos de multiplicar por la función q .

Proof. Sea L transversal a W y \tilde{M} como en la definición 8.8. Considero un cubrimiento finito de L por abiertos U_i de M , donde los U_i son como en la definición 8.5. Defino $L_i = U_i \cap L$. Como W es absolutamente continua, dado $A_i \subset U_i$, se tiene

$$m(A_i) = m(A_i \cap \tilde{M}) = \int_{L_i(x)} \int_{W_{U_i}(x)} \delta_x(y) dm_{W(x)}(y) dm_L(x)$$

de modo que $\tilde{L}_i = \tilde{M} \cap L_i$ debe tener medida total en L_i . Luego, para todo $x \in \tilde{L}_i$ se tiene que f es $m_{W(x)}$ -ctp constante en $W(x)$, entonces para todo $x \in \tilde{L}$ existe $\overline{W}(x) \subset W(x)$ de medida total en $W(x)$ tal que f es constante en $\overline{W}(x)$. \square

Proof. (De la proposición 8.10) Sea $N_1 \subseteq M$ el subconjunto de medida nula tal que para todo $x \in M_1 = M \setminus N_1$, f es constante $m_{W_1(x)}$ -ctp $y \in W_1(x)$. Y sea $N_2 \subseteq M$ el subconjunto de medida nula tal que f es constante $m_{W_2(x)}$ -ctp $y \in W_2(x)$ para todo $x \in M_2 = M \setminus N_2$. Sea $x \in M$ y U un entorno de x . Por ser W_1 absolutamente continua, y en vista del lema 8.11, existe y tan cerca como se quiera de x tal que

$\hat{M}_1(y) := W_{1U}(y) \cap M_1$ tiene medida total en $W_{1U}(y)$. Como a su vez W_2 también es absolutamente continua, para *ctp* $z \in \hat{M}_1(y)$, $W_2(z) \cap M_2$ tiene medida total en W_2 . Luego f es *m-ctp* constante en U . Y como U es un abierto arbitrario y M es conexa, esto se cumple en toda la variedad, como quería ver. □

Definición 8.12. Dos foliaciones transversales se dicen *integrables* si W definida como sigue

$$W(x) = \bigcup_{y \in W_1(x)} W_2(y) = \bigcup_{z \in W_2(x)} W_1(z)$$

es una foliación de dimensión $d_1 + d_2$, donde d_1 y d_2 son las dimensiones de W_1 y W_2 respectivamente.

Lema 8.13. Sean W_1 y W_2 foliaciones transversales integrables en una variedad Riemanniana M , donde W_1 es una foliación C^1 y W_2 es absolutamente continua. Entonces W , definida como en 8.12, es absolutamente continua.

Proof. Sea L transversal a W . Elegimos U de modo tal que el conjunto $\hat{L} = \bigcup_{x \in L} W_{1U}(x)$ sea transversal a W_2 . Por la continuidad absoluta de W_2 , para todo $A \subseteq U$ se cumple:

$$\int_{\hat{L}} \int_{W_{2U}(y)} \chi(y, z) \delta_y(z) dm_{W_{2U}(y)}(z) dm_{\hat{L}}(y)$$

Luego como $\hat{L} = \bigcup_{x \in L} W_{1U}(x)$ esta foliada por las hojas de W_1 , al ser unión de ellas, podemos escribir:

$$\int_{\hat{L}} dm_{\hat{L}}(x) = \int_L \int_{W_{1U}(x)} j(x, y) dm_{W_{1U}(x)}(y) dm_L(x)$$

donde j es una función medible y positiva. Luego

$$m(A) = \int_L \int_{W_{1U}(x)} \int_{W_{2U}(y)} j(x, y) \chi_A(y, z) \delta_y(z) dm_{W_{2U}(y)}(z) dm_{W_{1U}(x)}(y) dm_L(x)$$

y eso es a su vez

$$\int_L \int_{W_U(x,y)} \hat{\delta}_{(x,y)}(z) \chi_A(y, z) dm_{W_U(x,y)} dm_L(x)$$

Y como L era una transversal elegida arbitrariamente, esto prueba que W es absolutamente continua. □

9 Continuidad absoluta y ergodicidad del flujo geodésico

Enunciaremos ahora los últimos resultados necesarios y demostraremos el teorema 1.1. También hemos extraído en general estos resultados del apéndice de [2] y

Definición 9.1. Si $\{\phi_t\}$ es un flujo diferenciable en una variedad M , llamaremos W^0 a la foliación dada por las órbitas del flujo, esto es

$$W^0(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$$

Definición 9.2. Sean H_1 y H_2 subespacios de T_xM , y consideramos la siguiente distancia entre ellos:

$$d(H_1, H_2) :=$$

$$\inf\{r : \exists x_1 \in H_1 \text{ tal que } B_2 \subseteq B(x_1, r) \text{ y } \exists x_2 \in H_2 \text{ tal que } B_1 \subseteq B(x_2, r)\},$$

donde B_1 y B_2 son las bolas unitarias de H_1 y H_2 respectivamente. Diremos que H_2 es θ -transversal a H_1 cuando

$$\min_{v_i \in H_i, |v_i|=1} \{\|v_1 - v_2\|\} \geq \theta.$$

Consideremos ahora $\{\phi_t\}$ el flujo geodésico en una variedad Riemanniana M , y E^s , E^u y E^0 como en la definición de conjunto hiperbólico. Definimos $E^{s0}(x) = E^s(x) \oplus E^0(x)$ y $E^{u0}(x) = E^u(x) \oplus E^0(x)$. $E^s(x)$ y $E^{u0}(x)$ son θ -transversales para algún θ , y lo mismo se cumple para $E^u(x)$ y $E^{s0}(x)$.

Lema 9.3. Si φ_t es un flujo de Anosov en N , para todo $\theta > 0$ existe $C_1 > 0$ tal que, para todo subespacio $H \subseteq T_xN$ con la misma dimensión que $E^s(x)$ y θ -transversal a $E^{u0}(x)$, y para todo $t \geq 0$ se tiene:

$$d(d_x\varphi_{-t}(H); E^s(\varphi_{-t}(x))) \leq C_1\lambda^t d(H; E^s(x))$$

Definición 9.4. Una distribución $E \subseteq TM$ se dice *Hölder continua*, si existen constantes A y $\alpha > 0$ constantes tales que, para todo $x, y \in M$ $d(E(x); E(y)) \leq A[d(x, y)]^\alpha$. A y α serán la constante y el exponente de Hölder respectivamente.

Definición 9.5. (*Métrica adaptada*) Dado φ_t un flujo de Anosov en una variedad N , y λ como en la definición de conjunto hiperbólico. Sea $\beta \in (\lambda, 1)$. Par $v_0 \in E^0$, $v_s \in E^s$ y $v_u \in E^u$ y $T > 0$ definimos:

$$\begin{aligned} |v_0| &= \|v_0\| \\ |v_s| &= \int_0^T \frac{\|d\varphi_t v_s\|}{\beta^t} dt \\ |v_u| &= \int_0^T \frac{\|d\varphi_{-t} v_u\|}{\beta^t} dt \end{aligned}$$

Observación 9.1. En vista de la definición de hiperbolicidad y de flujo de Anosov, debe ser

$$|v_s| \leq C \|v_s\| \int_0^T \frac{\lambda^t}{\beta^t} dt$$

Haciendo tender T a infinito, la integral de la derecha en la última inecuación converge, ya que $\lambda < \beta$. Si tomamos $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |d\varphi_r v_s| &= \int_0^T \frac{\|d\varphi_{t+r} v_s\|}{\beta^t} dt \leq \beta^r C \int_r^{r+T} \frac{\|d\varphi_t v_s\|}{\beta^t} dt = \\ &\beta^r C \left[\underbrace{\int_0^r \frac{\|d\varphi_t v_s\|}{\beta^t} dt}_A + \underbrace{\int_T^{T+r} \frac{\|d\varphi_t v_s\|}{\beta^t} dt}_B \right] \end{aligned}$$

Como $\|d\varphi_t v_s\| \leq C\lambda^t \|v_s\|$, cuando T es suficientemente grande, $B < A$. Finalmente obtenemos que

$$|d\varphi_r v_s| \leq \beta^r |v_s|$$

Análogamente con $|d\varphi_r v_u|$. De modo que, con esta nueva métrica, el flujo que era de Anosov lo seguirá siendo.

Proposición 9.6. *Las distribuciones E^s , E^u , E^{s0} , E^{u0} para un flujo de Anosov de clase C^2 son Hölder continuas.*

El siguiente teorema será clave para probar el teorema 1.1. Su prueba se puede encontrar en la pág. 148 de [2] (apéndice), y también en [1].

Teorema 9.7. *Sea M una variedad diferenciable, Riemanniana, compacta y con curvatura seccional negativa. Entonces las foliaciones W^s y W^u de T^1M son transversalmente absolutamente continuas.*

Precisaremos, por último, el siguiente lema para demostrar el teorema 1.1.

Lema 9.8. *Sea W una foliación absolutamente continua en una variedad M , y sea $N \subset M$ un conjunto nulo. Luego existe un conjunto también nulo, N_1 tal que para cualquier $x \in M \setminus N_1$, $W(x) \cap N$ tiene medida nula en $W(x)$.*

Proof. Consideramos L una transversal local a la foliación W . Por ser W absolutamente continua, sabemos que para casi todo $x \in L$, $W(x) \cap N$ tiene medida nula en $W(x)$. Sea \hat{L} el conjunto de medida total en L tal que para todo $x \in L \setminus \hat{L}$, $m_{W(x)}(W(x) \cap N) = 0$. Luego, el conjunto

$$U = \bigcup_{x \in \hat{L}} W(x)$$

tendrá medida total. Defino entonces $N_1 := M \setminus U$. □

Finalmente podemos dar la siguiente demostración.

Proof. (Del teorema 1.1) Denotaremos por m al volumen inducido por la métrica en la variedad M , λ_x a la medida de Lebesgue en $T_x T^1 M$, $x \in M$, y μ será la medida asociada a la forma de volumen de Liouville en $T^1 M$. Además $d\mu(x, v) = dm(x) \times d\lambda_x(v)$. Por ser M compacta, $m(M) < \infty$, y $\mu(T^1 M) = m(M)\lambda_x(T_x T^1 M)$. El flujo geodésico ϕ_t quedará determinado por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = v, \dot{v} = 0$$

Como hemos visto, el flujo geodésico preserva la medida de Liouville. De modo que estamos en condiciones de aplicar el teorema de Birkhoff 6.10 y la proposición 8.2. Sabemos por el teorema 9.7 que la foliación W^u es absolutamente continua y también lo es W^0 , luego W^{u0} será absolutamente continua, en vista del lema 8.13. Sea $f : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y ϕ -invariante. Luego, por la proposición 6.4, existe una función estrictamente invariante, \tilde{f} , que es $\mu - ctp$ igual a f . A su vez la proposición 8.2, existirá un conjunto nulo N_u , tal que \tilde{f} es constante en las hojas de W^u en $T^1 M \setminus N_u$. El lema 9.8 nos dice que existe otro conjunto nulo N_1 tal que N_u es un conjunto nulo en $W^{u0}(v)$ para todo $v \in T^1 M \setminus N_1$. De modo que f será constante ctp en las hojas de $W^u(v)$. Además, como \tilde{f} es estrictamente invariante por ϕ , es constante ctp en $W^{u0}(v)$, luego f es constante ctp en las hojas de W^{u0} . Ahora, W^{u0} y W^s son como en la proposición 8.10. Entonces f es constante ctp . Y como era f arbitraria entonces el flujo geodésico ϕ debe ser ergódico, como queríamos ver. \square

10 Consecuencias

Para finalizar, dedicaremos esta sección a probar una consecuencia de la ergodicidad del flujo geodésico, que se traduce en el siguiente teorema. Las definiciones y enunciados que mencionaremos a continuación, así como sus demostraciones se pueden encontrar en la sección 18.1 de [12].

Teorema 10.1. *Sea M una variedad Riemanniana de curvatura seccional estrictamente negativa. Luego, las geodésicas cerradas son densas en TM .*

Para probar esto, precisaremos algunas definiciones y resultados previos, que se pueden encontrar en el capítulo 18 de [12].

Definición 10.2. Sea (X, d) un espacio métrico, $U \subset M$ un abierto, y $f : U \rightarrow X$ una función. Para $a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, una secuencia $\{x_n\}$, con $a < x_n < b$.

- Se dice que $\{x_n\}$ es una ϵ -pseudo órbita o ϵ -órbita de f si

$$d(x_{n+1}, f(x_n)) < \epsilon \text{ siempre que } a < n < b.$$

- Se dice que $\{x_n\}$ está δ -sombreada por $O(x)$ (la órbita de $x \in X$), si

$$d(x_n, f^n(x)) < \delta \text{ siempre que } a < n < b.$$

Definición 10.3. Sea M una variedad Riemanniana y ϕ_t un flujo suave en M .

- Una curva diferenciable $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una ϵ -pseudo órbita o ϵ -órbita de ϕ_t si

$$\|\dot{c}(t) - \dot{\phi}(c(t))\| < \epsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Si c es periódica, se llama ϵ -órbita cerrada.

- Se dice que $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ está δ -sombreada por la órbita de $x \in M$, si existe una función $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $|\frac{d}{dt}s - 1| < \delta$, de modo tal que

$$d(c(s(t)), \phi_t(x)) < \delta \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Nos interesa demostrar el siguiente teorema.

Teorema 10.4. (*Lema de sombreado para flujos*) Sea M una variedad Riemanniana y ϕ_t un flujo suave en M . Consideremos Λ un conjunto hiperbólico para ϕ_t . Luego, existe un entorno abierto de Λ , U , tal que para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ -órbita contenida en U está δ -sombreada por una órbita periódica de ϕ_t .

Probaremos primero una versión análoga para difeomorfismos, ya que la prueba para el caso de flujos emplea un argumento similar.

Teorema 10.5. (*Lema de sombreado para difeomorfismos*) Sea M una variedad Riemanniana, $U \subset M$ abierto, y $f : U \rightarrow M$ un difeomorfismo. Sea Λ compacto, un conjunto hiperbólico para f . Luego existe un entorno de Λ , $U(\Lambda)$, tal que para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ de modo que toda ϵ -órbita en $U(\Lambda)$ está δ -sombreada por una órbita de f .

A su vez, este teorema es un corolario del siguiente teorema.

Teorema 10.6. (*Teorema de sombreado para difeomorfismos*) Sea M una variedad Riemanniana, d la distancia inducida por la métrica, $U \subset M$ un abierto, $f : U \rightarrow M$ un difeomorfismo, y $\Lambda \subset U$ un conjunto hiperbólico para f . Luego existe un entorno de Λ , $U(\Lambda)$, y ϵ_0, δ_0 positivos tales que para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ de modo tal que: si $f' : U(\Lambda) \rightarrow M$ es un difeomorfismo a menos de ϵ_0 de f en la topología C^1 , Y un espacio topológico y $g : Y \rightarrow Y$ un difeomorfismo, $\alpha : Y \rightarrow U(\Lambda)$ continua, tal que

$$d_{C^0}(\alpha g, f' \alpha) < \epsilon,$$

donde d_{C^0} es la distancia del supremo. Entonces existe $\beta : Y \rightarrow U(\Lambda)$ continua, tal que $\beta g = f' \beta$, y $d_{C^0}(\alpha, \beta) < \delta$. Además, β es localmente única, o sea, si $\hat{\beta} g = f' \hat{\beta}$ y $d_{C^0}(\alpha, \hat{\beta}) < \delta$, entonces $\hat{\beta} = \beta$.

Observación 10.1. Si en las hipótesis de este teorema ponemos $Y = \mathbb{Z}$, $f' = f$, $\epsilon_0 = 0$ y $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $g(n) = n+1$, ahora $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow U(\Lambda)$ es una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset U(\Lambda)$. Poniendo $\beta(n) = f^n(x)$, se cumple $\beta g = f' \beta$. Luego, $d(x_n, f^n(x)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De modo que tenemos el teorema 10.5.

Proof. (Idea de la demostración) Sean f' , Y , g y α como en el enunciado del teorema. El mapa β buscado es un punto fijo para el operador

$$F : C^0(Y, U(\Lambda)) \rightarrow C^0(Y, M)$$

$$\beta \mapsto f' \circ \beta \circ g^{-1}.$$

Intentaremos aplicar el teorema de la contracción al operador F , para poder probar la existencia de un punto fijo, el mapa β . Para esto, será necesario descomponer F en una parte lineal, y otra no lineal.

Para definir la distancia entre α y β , considero el espacio

$$C_\alpha^0(Y, TM) := \{v \in C^0(y, TM) \text{ tal que } v(y) \in T_{\alpha(y)}M, y \in Y\}$$

con la norma de la convergencia uniforme. Si $\theta > 0$ es suficientemente pequeño, el siguiente mapa \mathcal{A} en la bola de centro α y radio θ , $B(\alpha, \theta) \subset C_\alpha^0(Y, TM)$, está bien definido:

$$\mathcal{A} : B(\alpha, \theta) \rightarrow C^0(Y, TM) \text{ tal que } (\mathcal{A}\beta)(y) = \exp_{\alpha(y)}^{-1}\beta(y),$$

donde $\exp_{\alpha(y)}$ denota el mapa exponencial el espacio tangente a M en el punto $\alpha(y)$. Además, \mathcal{A} será un homeomorfismo sobre $B^\alpha(0, \theta) \subset C_\alpha^0(Y, TM)$. Supongamos ahora que α es un punto fijo para el mapa F^α definido como sigue

$$F^\alpha := \mathcal{A}F\mathcal{A}^{-1} : B(0, \theta) \rightarrow C_\alpha^0(Y, TM),$$

o sea

$$F^\alpha(v) = \mathcal{A}(F(\mathcal{A}^{-1}(v))),$$

luego

$$F(\mathcal{A}^{-1}(v)) = \mathcal{A}^{-1}(v),$$

entonces $\mathcal{A}^{-1}(v)$ es un punto fijo de F . Se puede probar que F^α es contractiva, por lo cual tendrá un único punto fijo, y como \mathcal{A} es un homeomorfismo sobre $B^\alpha(0, \theta)$, esto implica que F tiene un único punto fijo. □

Un teorema análogo al anterior pero para flujos es el siguiente:

Teorema 10.7. (*Teorema de sombreado para flujos*) Sea M una variedad Riemanniana, d la distancia inducida por la métrica, ϕ_t un flujo suave, y Λ un compacto hiperbólico para ϕ_t . Luego existe un entorno de Λ , $U(\Lambda)$, ϵ_0 , δ_0 positivos tales que para todo $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ de modo tal que: si $\psi_t : U(\Lambda) \rightarrow M$ es un flujo a menos de ϵ de ϕ_t en la topología C^1 , Y un espacio topológico y $\gamma_t : Y \rightarrow Y$ un flujo continuo, $\alpha : Y \rightarrow U(\Lambda)$ continua, con $\alpha(\gamma_t(y))$ es una curva de clase C^1 , y cuyo vector tangente $(\alpha \circ \gamma_t)|_0(y)$ en $\alpha(y)$ depende continuamente de y , y

$$\sup_{y \in Y} \{(\alpha \circ \dot{\gamma}_t)|_0(y), (\psi_t \circ \alpha)|_0(y)\} < \epsilon,$$

entonces existe un maa

$$s : Y \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } \left| \frac{d}{dt} s_y - 1 \right| < \delta$$

y $\beta \in C^0(y, U(\Lambda))$ tal que

$$\beta \gamma_{s(t)} = \phi_t \beta, \text{ y } \sup_{y \in Y} d(\alpha, \beta) < \delta.$$

La prueba de este teorema se basa en un argumento similar al empleado en la prueba del teorema 10.6, y se puede encontrar en el capítulo 18 de [12]. De 10.7 podemos concluir el teorema 10.4.

Observación 10.2. *La ergodicidad del flujo geodésico implica que existen órbitas densas en TM .*

Proof. De la definición de ergodicidad tenemos que, dados U y V subconjuntos abiertos de TM , existe cierto $t > 0$ para el que $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Como TM es un espacio métrico, considero una base numerable para la topología,

$$\mathcal{U} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Entonces, si considero ahora

$$\mathcal{A}_n = \{x \in TM \text{ tal que } \phi_t(x) \cap B_n \text{ es no vacío para algún } t\},$$

este conjunto es abierto por la continuidad de ϕ_t , y es denso por lo dicho más arriba. Luego

$$\mathcal{R} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

es residual, y por tanto denso. Luego, si $x \in \mathcal{R}$, su órbita $\{\phi_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es densa en TM . \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 10.1.

Proof. Sea $U \subset TM$ un abierto, y como existen órbitas densas, puedo considerar $x \in U$, tal que la órbita de x es densa y $B(x, \epsilon) \subset U$. Por el lema de sombreado para flujos, existe δ tal que toda ϵ -órbita está δ -sombreada por una órbita periódica. A su vez, como la órbita de x es densa, existe t_0 , tal que $\phi_{t_0}(x) \in B(x, \delta)$. Luego, existirá $y \in B(x, \epsilon)$ cuya órbita será periódica. Esto prueba que por todo abierto pasa una órbita periódica, o sea, una geodésica cerrada, por lo cual estas son densas, como quería probar. □

References

- [1] D. ANOSOV *Geodesic flows in closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol 90, (1967).
- [2] W. BALLMANN *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser (1995).
- [3] G. BOR Y R. MONTGOMERY *Poincaré y el problema de n-cuerpos*, Miscelánea Matemática, (Mayo de 2014).
- [4] M. BRIN y G. STUCK *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press (2003).
- [5] A. CANDEL y L. CONLON *Foliations I*, American Mathematical Society (1999).
- [6] U. CÁRCAMO *El origen fenomenológico de la teoría ergódica*, Revista Universidad EAFIT, Vol. 32, Núm. 103 (1996)
- [7] E. CATSIGERAS *Teoría ergódica de los sistemas dinámicos discretos*, (ISBN:978-9974-0-0949-3), Montevideo (2013).
- [8] S. CROVISIER Y R.POTRIE *Introduction to patially hyperbolic dynamics* (Julio, 2015)
- [9] M. DO CARMO *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston (1992).
- [10] R. FENN *What is the geometry of a surface?*, American Mathematical Monthly (1983).
- [11] V. GUILLEMIN Y A. POLLACK *Differential Topology*
- [12] A.KATOK y B. HASSELBLATT *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).

- [13] S. MARTINCHICH *Flujos de Anosov y grupo fundamental en 3-variedades*, Monografía de grado, CMAT (2015).
- [14] G. PATERNAIN *Geodesic Flows*, Birkhäuser, Boston (1999).
- [15] P. PETERSEN *Riemannian Geometry*, Springer (2006).