TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE EN DIMENSION DOS.

RAFAEL POTRIE

RESUMEN. La idea es hacer una demostración del clasico Teorema de la Variedad Estable para conjuntos hiperbolicos en el contexto un poco más sencillo (por alguna cuenta nomas) de estar en dimensión dos. La prueba es sacada de [KH] solo que cambiando un poco el orden. Por ahora es una version preliminar y le faltan partes a la prueba.

1. INTRODUCCIÓN

La idea de esta nota es dar una prueba del Teorema de Variedad Estable para conjuntos hiperbólicos de superficies. La prueba está basada en la prueba del libro [KH] donde se prueba el Teorema sin restricciones dimensionales. En realidad estas restricciones no son "graves", de hecho, con la prueba aca presentada rápidamente se puede reconstruir la prueba general. El Teorema en que nos basamos para hacer la prueba, el Teorema de Haddamard-Perron, tiene un enunciado más general que el que introducimos y puede ser realmente útil para aplicaciones (donde no haya hiperbolicidad, o la haya en un solo fibrado).

Dado un difeomorfismo $f : M \to M$ donde M es una superficie compacta, decimos que un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ es un *conjunto hiperbólico* si se cumple que para todo $x \in \Lambda$ existen subfibrados unidimensionales $E^s(x)$, $E^u(x)$ que verifican que $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$. Además, los subfibrados son invariantes, es decir, $D_xf(E^\sigma(x)) = E^\sigma(f(x))$ $(\sigma = s, u)$ y además existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ de forma tal que

$$\|D_xf^n_{/E^s(x)}\| < C\lambda^n \quad ; \quad \|D_xf^{-n}_{/E^u(x)}\| < C\lambda^n \qquad n \geq 0$$

De hecho, es bien conocido y no dificil de demostrar que mediante un cambio de norma se puede considerar que $C = 1$. Esa es la norma que utilizaremos y llamaremos *métrica adaptada*.

El estudio de estos conjuntos fue iniciado por Smale. Un resultado clave en ese estudio es que existe el Teorema de la Variedad estable que permite traducir la propiedad del diferencial a una propiedad en la propia variedad (siendo en muchos casos más simple de testear la propiedad en el tangente, por ejemplo mediante el uso de conos). Una vez que se prueba el Teorema de la Variedad estable, bien se podría definir homeomorfismos hiperbólicos (salvo quizas para estudiar las propiedades ergódicas) y estudiar los teoremas conocidos (Teorema espectral, Shadowing Lemma, etc).

Otra razón de la importancia de estos conjuntos es su robustez, si consideramos un conjunto hiperbólico Λ para un difeomorfismo f y un entorno suficientemente pequeño U, existe siempre un entorno $\mathcal{U}$ del difeomorfismo de forma tal que para cualquier $g \in \mathcal{U}$ se verifica que si Λ_g es el invariante maximal en U, entonces Λ_g es también un conjunto hiperbólico. Además, si Λ es invariante maximál, entonces la dinámica de g en Λ_g es conjugada a la de f en Λ. Esta razón adquiere una importancia aún mayor después de un célebre Teorema de Mañe que (escencialmente) da el recíproco de esto (que hoy ya se encuentra completado). De esta manera, sabemos que los conjuntos hiperbólicos representan las dinámicas que persisten a perturbaciones C^1.

Enunciaremos ahora el Teorema de la Variedad Estable y referimos al lector a [KH] por más información.

Teorema 1.1 (Teorema de la Variedad Estable)**.** *Sea Λ un conjunto hiperbólico para f difeomorfismo C^1 de una superficie. Entonces, existe $\delta > 0$ un mapa $\phi^s : \Lambda \times [-1, 1] \to M$ continuo tal que:*

- $W^s_{loc}(x) = \phi^s(x, [-1, 1])$ *es una variedad C^1 tangente a E^s en $x = \phi^s(x, 0)$ y $\phi^s(x, \cdot)$ es un encaje C^1 que varia continuamente con $x \in \Lambda$.*

4 de noviembrede 2009. Version PRELIMINAR.

- $f(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(f(x))$ *y se cumple que si* $y \in W^s_{loc}(x)$ *entonces* $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ *con* $n \to \infty$.
- *La variedad es única en el sentido de que si* $W^s(x) = \{y \in M \ : \ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0\}$ *entonces* $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_{loc}(f^n(x))$.
- *El mapa* ϕ^s *varia continuamente con* $g \in \mathcal{U}$ *entorno de* f *(esto requiere alguna precision que no voy a hacer, si no se entiende, se puede ignorar, igual no lo voy a probar con mucha precisión).*

2. Teorema de Hadamard-Perron

Teorema 2.1. *Sea* $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *funciones de la forma* $f_m(x, y) = (A_m x+\alpha_m(x, y), B_m y+\beta_m(x, y))$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}$. *Tenemos que además se cumple que* $0 < |B_m| < \lambda < 1 < \lambda^{-1} < |A_m| \ \forall m \in \mathbb{Z}$. *Entonces, existe* $\gamma_0 > 0$ *tal que para todo* $\gamma \in (0, \gamma_0)$ *se cumple que existe* $\delta = \delta(\gamma, \lambda)$ *de forma tal que si*

- $|\alpha_m(x, y)| < \delta$ *y* $|\beta_m(x, y)| < \delta$.
- $|(D\alpha_m)_{(x,y)}(v, w)| < \delta \sqrt{v^2 + w^2}$ *y* $|(D\beta_m)_{(x,y)}(v, w)| < \delta \sqrt{v^2 + w^2}$.
- $\alpha_m(0, 0) = \beta_m(0, 0) = 0$.

Entonces, existe una familia $\varphi^+_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de funciones de clase* C^1 *y con derivada siempre menor a* γ *que verifican que si* $W^+_m = \mathrm{graf}(\varphi^+_m) = \{(x, \varphi^+_m) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ *entonces se cumple:*

(i) $f_m(W^+_m) = W^+_{m+1}$.
(ii) *Existe* $\nu \in (\lambda, 1)$ *tal que se cumple que si* $\xi \in W^+_m$ *entonces*

$$||f^{-1}_{m-k} \circ \ldots \circ f^{-1}_{m-1}(\xi)|| < \nu^k ||\xi||$$

(iii) *Las variedades están caracterizadas por la propiedad (ii).*

Demostracion de la existencia de variedades Lipchitz. Vamos a primero probar que existen las variedades y que son Lipchitz. Despues, un argumento no muy complejo nos permitirá ver que son diferenciables.

Consideramos el conjunto de funciones reales $C^0_\gamma(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \varphi(0) = 0 \ ; \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma|x - y|\}$.

Dada una función real φ y una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con ciertas condiciónes podemos definir $f_*(\varphi)$ como una función que verifique que graf $f_*(\varphi) = f(\mathrm{graf}\,\varphi)$. Evidentemente esto no siempre estará bien definido, probaremos que para las funciones f_m y el conjunto de funciones reales $C^0_\gamma(\mathbb{R})$ tenemos más que estar bien definida:

Lema 2.1. *Para cualquier* $m \in \mathbb{Z}$ *tenemos que* $(f_m)_*(C^0_\gamma(\mathbb{R})) \subset C^0_\gamma(\mathbb{R})$ *si* γ *y* δ *fueron bien elegidos.*

Demostracion. Para $\varphi \in C^0_\gamma(\mathbb{R})$, definimos $G^m_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $G^m_\varphi(x) = A_m x + \alpha_m(x, \varphi(x))$, es decir la primer coordenada de aplicar f_m a un punto del grafico de φ.

Entonces, se cumple que la definición de $(f_m)_*$ nos dice que (si esta bien definida) se tiene que verificar:

$$(f_m)_*\varphi(G^m_\varphi(x)) = B_m\varphi(x) + \beta_m(x, \varphi(x))$$

es decir la segunda coordenada de la imagen de un punto de graf φ por f_m. Por ende, para probar que está bien definido basta ver que G^m_φ es biyectiva. Para eso basta ver que

$$|G^m_\varphi(x)| = |A_m x + \alpha_m(x, \varphi(x))| > \lambda^{-1}|x| - \delta||(x, \varphi(x))|| > \left(\lambda^{-1} - \delta \sqrt{1 + \gamma^2}\right)|x|$$

con lo cual, si $\delta < \lambda^{-1}/ \sqrt{1 + \gamma^2}$ estamos (recordar que como $|\varphi(x)| < \gamma|x|$ entonces $||(x, \varphi(x))|| < \sqrt{1 + \gamma^2}|x|$).

Ahora llamamos $\tilde{\varphi} = (f_m)_*\varphi$ que ya sabemos está bien definida. Evidentemente $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Veamos que es también $\gamma-$Lipchitz:

$$|\tilde{\varphi}(G^m_\varphi(x)) - \tilde{\varphi}(G^m_\varphi(y))| = |B_m(\varphi(x) - \varphi(y)) + \beta_m(x, \varphi(x)) - \beta_m(x, \varphi(x))| <$$

$$< \lambda|\varphi(x) - \varphi(y)| + \delta||(x - y, \varphi(x) - \varphi(y))|| < \left(\lambda\gamma + \delta \sqrt{1 + \gamma^2}\right)|x - y|$$

Entonces, por una cuenta analoga a la que hicimos para estimar $|G^m_\varphi(x)|$ tenemos que $|G^m_\varphi(x) - G^m_\varphi(y)| > \left(\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}\right)|x-y|$ y por lo tanto

$$\frac{|\tilde{\varphi}(G^m_\varphi(x)) - \tilde{\varphi}(G^m_\varphi(y))|}{|G^m_\varphi(x) - G^m_\varphi(y)|} < \frac{\lambda\gamma + \delta\sqrt{1+\gamma^2}}{\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}}$$

Es facil ver que si δ es suficientemente pequeño [1] (fijado γ, que supondremos siempre menor que uno) tendremos que la función $\tilde{\varphi}$ es γ-Lipchitz.

□

La idea ahora, es poner una métrica que haga que el espacio $C^0_\gamma(\mathbb{R})$ sea completo y donde esta aplicación sea una contracción.

Definimos entonces

$$d(\varphi, \psi) = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x) - \psi(x)|}{|x|}$$

que dado que las funciónes son $\gamma-$Lipchitz, tenemos que esta acotada por 2γ ($d(\varphi,\psi) \leq \frac{|\varphi(x)|}{|x|} + \frac{|\psi(x)|}{|x|}$). Además, no es difícil ver que con esta métrica, el espacio $C^0_\gamma(\mathbb{R})$ es completo (si φ_n es una sucesión de Cauchy, evidentemente converge puntualmente, además, esta norma permite acotar uniformemente la distancia de un elemento de la sucesión a dicho limite puntual).

Veamos que las funciones elegidas contraen en esta distancia

Lema 2.2. *Para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ tenemos (si γ y δ fueron bien elegidos) que existe $\eta < 1$ tal que $d((f_m)_*\varphi, (f_m)_*\psi) < \eta d(\varphi, \psi)$ donde $\varphi, \psi \in C^0_\gamma(\mathbb{R})$.*

Demostracion. Sean $\tilde{\varphi} = (f_m)_*\varphi$ y $\tilde{\psi} = (f_m)_*\psi$.

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(G^m_\varphi(x)) - \tilde{\psi}(G^m_\varphi(x))| &\leq |\tilde{\varphi}(G^m_\varphi(x)) - \tilde{\psi}(G^m_\psi(x))| + |\tilde{\psi}(G^m_\psi(x)) - \tilde{\psi}(G^m_\varphi(x))| \leq \\ &\leq |B_m(\varphi(x) - \psi(x))| + |\beta_m(x,\varphi(x)) - \beta_m(x,\psi(x))| + \gamma|G^m_\varphi(x) - G^m_\psi(x)| < \end{aligned}$$

$$< (\lambda+\delta)|\varphi(x) - \psi(x)| + \gamma|\alpha_m(x,\varphi(x)) - \alpha_m(x,\psi(x))| < (\lambda + \delta(1+\gamma))d(\varphi,\psi)|x|$$

Ya habiamos calculado en el lema anterior que $|G^m_\varphi(x)| \geq \left(\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}\right)|x|$ entonces

$$d(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) < \frac{\lambda + \delta(1+\gamma)}{\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}} d(\varphi, \psi)$$

Con lo cual, si elegimos bien[2] δ y γ tenemos lo deseado.

□

Consideremos entonces el conjunto $C^0_\gamma = \{\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \ : \ \varphi_m \in C^0_\gamma(\mathbb{R})\}$. Definimos en este espacio la métrica

$$d(\{\varphi_m\}, \{\psi_m\}) = \sup_{m\in\mathbb{Z}} d(\varphi_m, \psi_m)$$

que lo hace un espacio métrico completo. El lema anterior nos permite probar que el mapa $f_* : C^0_\gamma \to C^0_\gamma$ dado por

---

[1]Se tiene que cumplir (es facil despejar para verlo) que $\delta < \frac{(\lambda^{-1}-\lambda)\gamma}{(1+\gamma)\sqrt{1+\gamma^2}}$. Observar que $\delta \to 0$ con $\gamma \to 0$ lo cual es razonable, sino, habria un δ para el cual sirve cualquier γ y los razonamientos que hacemos darian que la variedad invariante es la dada por la función nula que obviamente no necesariamente es el caso. Observar también que si suponemos $\gamma < 1$, que lo haremos, esta cota es más fuerte que la hayada antes para que G^m_φ sea biyectiva.

[2]Alcanza despejar para ver que sirve $\delta < \frac{\lambda^{-1}-\lambda}{1+\gamma+\sqrt{1+\gamma^2}}$ Dependiendo de γ puede que esta cota sea mejor o peor que la hayada en el Lema anterior. Lo que es cierto es que si γ es muy pequeño, esta cota es peor.

$$f_*\{\varphi_m\} = \{(f_m)_*(\varphi_m)\}$$

es una contracción y por lo tanto tiene un punto fijo. Es decir, existe una familia $\{\varphi_m^+\}$ de funciónes en $C^0_\gamma(\mathbb{R})$ que verifica que $\varphi_{m+1}^+ = (f_m)_*(\varphi_m^+)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Claramente esta familia es única entre las que son γ-Lipchitz y además, notar que si variamos poco los mapas f_m, de forma de variar poco el mapa f_*, la familia varia poco en la familia que dimos!.

La propiedad (*ii*) del Teorema se deduce del siguiente Lema mediante una inducción directa.

Lema 2.3. *Si γ y δ son bien elegidos, se cumple que $\exists \nu \in (\lambda, 1)$ tal que si $\xi \in \{(x,y) \ : \ \gamma|x| \geq |y|\}$ entonces $\|\xi\| < \nu\|f_m(\xi)\|$.*

Demostracion. Supongamos que $\xi = (x,y)$. Como $|x| \geq \gamma|y|$ tenemos $\|\xi\| \leq \sqrt{1+\gamma^2}|x|$. También tenemos

$$\|f_m(x,y)\| = \|(A_m x + \alpha_m(x,y), B_m y + \beta_m(x,y))\| > \left(\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}\right)|x|$$

Con lo cual tenemos que $\|\xi\| < \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\lambda^{-1}-\delta\sqrt{1+\gamma^2}}\|f_m(\xi)\|$ y eligiendo bien δ y γ estamos[3].

□

Como la familia φ_m^+ verifica que todos los iterados tienen los graficos contenidos en el conjunto dado por el Lema de arriba, tenemos que paso a paso se va a cumplir que la norma de los iterados pasados va a ir yendo a cero exponencialmente.

Para ver que la familia queda caracterizada, usamos que si los puntos NO estan en el cono que definimos arriba, entonces no se va a verificar la contracción y por lo tanto se van a acercar a la "otra" variedad (intentaremos hacer esto más prolijamente al estudiar la diferenciabilidad).

□

Observacion 2.1. Se puede ver, si en vez de usar $C^0_m(\mathbb{R})$ usamos las funciones que pasan por la orbita por f_m de algun punto dado, que podemos construir las variedades para todos estos puntos. Con un argumento no muy complicado, usando que las variedades quedan caracterizadas, podemos ver que estas variedades varian uniformemente en compactos con el punto.

◊

Demostracion de la diferenciabilidad de las variedades. La idea es la siguiente, ahora vamos a trabajar con el diferencial de los f_m y ver que en todo punto solo puede haber un subespacio invariante "horizontal" y uno "vertical".

Definimos, para todo $\xi = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ el $\eta-$cono horizontal $H_\eta^\xi = \{(v,w) \in T_\xi\mathbb{R}^2 \ : \ |w| \leq \eta|v|\}$. Analogamente, definimos el η-cono vertical $V_\eta^\xi = \{(v,w) \in T_\xi\mathbb{R}^2 \ : \ |v| \leq \gamma|w|\}$.

Lema 2.4. *Si δ y γ son bien elegidos, entonces, existe $\kappa < 1$ tal que $D_\xi f_m(H_\gamma^\xi) \subset H_{\kappa\gamma}^{f_m(\xi)}$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$.*

Demostracion. Sea $(v,w) \in H_\gamma^\xi$ y $(v',w') = Df_m(v,w)$.

$$|v'| = |A_m v + D\alpha_m(v,w)| > \lambda^{-1}|v| - \delta\sqrt{v^2+w^2} \geq \left(\lambda^{-1} - \delta\sqrt{1+\gamma^2}\right)|v|$$

$$|w'| = |B_m w + D\beta_m(v,w)| < \left(\lambda + \delta\sqrt{1+\gamma^2}\right)|v|$$

[3]Aca alcanza que $\delta < \frac{\lambda^{-1}}{\sqrt{1+\gamma^2}} - 1$ con lo cual hay que pedir en particular que $\gamma < \sqrt{\lambda^{-2}-1}$. En el [KH] las cotas son mejores, no se bien como hace, porque ahi permite que no sean estables o inestables con lo cual queda mejor seguro porque aca necesitamos $\lambda^{-1} > 1$.

Con lo cual, si elegimos bien γ y δ obtenemos lo deseado[4].

□

Obvio que hay un Lema análogo para V_γ^ξ con Df_m^{-1}. Consideramos $\xi_k = f_{m-k}^{-1} \circ \ldots \circ f_{m-1}^{-1}(\xi)$ y sea

$$E_\xi^+ = \bigcap_{k>0} Df_{m-1} \circ \ldots \circ Df_{m-k}(H_\gamma^{\xi_k})$$

Lema 2.5. *E_ξ^+ es un subespacio.*

Demostracion. Por el Lema anterior, es una intersección decreciente. Por lo tanto, observando que en cada paso es un cono, E_ξ^+ es también un cono (i.e. es cerrado por producto por escalares y por la suma también si nos restringimos a una componente conexa luego de sacar el cero, evidentemente los conos se mandan en conos por transformaciones lineales).

Supongamos que no es un subespacio, entonces, tenemos que un cierto vector $(v, w) \in E_\xi^+$ se escribe como $(v, w') + (0, w'')$ con $(v, w') \in E_\xi^+$ y $w'' \neq 0$. Como $(0, w'')$ está en V_γ^ξ, sus iterados pasados por Df_m^{-1} también lo estarán, y mediante un cálculo simple (donde alcanzan las cotas ya consideradas para δ y γ) obtenemos que su norma se expande. A partir de un momento, como la norma de (v, w') y la de (v, w) a pasado deberían achicarse, se llega a una contradicción.

□

Vamos a ver que las variedades W_m^+ son tangentes en todos sus puntos a los subespacios E^+ que recién construimos. Recordar que $W_m^+ = \operatorname{graf} \varphi_m^+$ donde φ_m^+ es una función $\gamma-$Lipchitz.

Definimos el *conjunto tangente* a W_m^+ en $\xi = (x, \varphi_m^+(x))$ como $\tau_\xi W_m^+ = \{(v, w) \in T_\xi \mathbb{R}^2 \; : \; \exists x_n \to x \; ; \; \lim_n \frac{\varphi_m^+(x_n) - \varphi_m^+(x)}{x_n - x} = \frac{w}{v}\}$. Evidentemente, como las funciones φ_m^+ son $\gamma-$Lipchitz, tenemos que $\tau_\xi W_m^+ \subset H_\gamma^\xi$ para todo $\xi \in W_m^+$. Al mismo tiempo, es evidente que estos subconjuntos, son Df_m-invariantes, y por lo tanto, obtenemos que coinciden con E_ξ^+. Esto muestra que las variedades W_m^+ son diferenciables y sus derivadas son los subespacios E_ξ^+.

□

3. Teorema de la variedad estable

Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto compacto hiperbólico (transitivo por simplicidad) para un difeomorfismo C^1 de M, superficie compacta.. Podemos suponer M tiene una métrica adaptada con lo cual tendremos que para todo $\xi \in \Lambda$ se verifica que tenemos una descomposición invariante $E^s \oplus E^u$ y se verifica que

$$||Df_\xi^n v|| < \lambda^n ||v|| \qquad v \in E^s \backslash \{0\} \; , \; n \geq 0$$

$$||Df_\xi^{-n} v|| < \lambda^n ||v|| \qquad v \in E^u \backslash \{0\} \; , \; n \geq 0$$

Eligiendo un vector unitario $s \in E^s$ y uno $u \in E^u$, podemos definir un producto interno que hace que si $v_1 = a_1 s + b_1 u$ y $v_2 = a_2 s + b_2 u$ entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$ que verifica que si bien varia continuamente, no necesariamente varia diferenciablemente con el punto donde la medimos (porque hay que ver bien los coeficientes en la metrica riemanniana original de este nuevo producto interno, observar que se puede aproximar por una metrica C^∞ que tb será adaptada y los angulos "casi" perpendiculares).

Vamos a intentar llevar esta situación al contexto del Teorema probado en la sección anterior.

Como M es compacta, tenemos que existe $\eta > 0$ tal que para cualquier punto $\xi \in M$ se cumple que $\exp_x : B(0, \eta) \to M$ esta bien definida y es un difeomorfismo (estamos usando una metrica que sea una

[4]Basta elegir $\delta < \frac{\lambda^{-1} - \lambda}{2\sqrt{1+\gamma^2}}$. Ver que con esto se obtiene, sabiendo cuanto es δ, cual es el ángulo a partir del cual los conos horizontales se mapean adentro de ellos mismos.

extensión de la de arriba, si se quiere la aproximación diferenciable, pero por simplicidad vamos a asumir que los ángulos son rectos, sino se hace cambio de coordenadas después).

Dado entonces $\xi \in \Lambda$, definimos los siguientes mapas $\tilde{f}_m : B(0,\eta) \to \mathbb{R}^2$ dados por $\tilde{f}_m(x) = \exp^{-1}_{f^{m+1}(\xi)} \circ f \circ \exp_{f^m(\xi)}(x)$.

Elegimos γ y δ para que funcione el Teorema de Hadamard Perron y entonces podemos, utilizando la continuidad uniforme de Df elegir $\eta' < \eta$ de forma tal que si "pegamos" $\tilde{f}_m$ con la parte lineal, podemos construir una sucesión de mapas $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verificando las hipotesis del Teorema de Hadamard Perron. Esto lo enunciamos en el siguiente Lema no muy difícil.

Lema 3.1 (Lema de extensión)**.** *Sea U entorno abierto del 0 en $\mathbb{R}^n$. Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo local tal que $f(0) = 0$. Para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y un difeomorfismo $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de forma tal que $\|\overline{f} - Df_0\|_{C^1} < \varepsilon$ y $\overline{f} = f$ en $B(0,\delta)$. Además, δ depende únicamente del módulo de continuidad de $f - Df_0$ cerca de 0.*

Demostracion. Sea ν tal que f está η-C^1 cerca de Df_0 en $B(0,\nu)$. Sea $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ tal que $\rho = 1$ en $B(0,\delta)$ y $\rho = 0$ en $B(0,\nu)^c$ con $\delta < \nu/6$. Pedimos también que $\|D\rho\| < 2/\nu$.

Tomamos $\overline{f} = \rho f + (1 - \rho Df_0)$, con lo cual $\overline{f} - Df_0 = \rho(f - Df_0)$.

Por como elegimos ν, tenemos que $\|\overline{f} - Df_0\|_{C^0} < \eta$. Al mismo tiempo, $\|D(\overline{f} - Df_0)\| \leq \|D\rho(f - Df_0)\| + \|\rho(Df - Df_0)\| < \frac{\eta}{\nu} + \frac{\eta}{2}$.

Si elegimos η convenientemente, tenemos lo deseado. Observar que $\frac{\eta}{\nu}$ depende del módulo de continuidad y es la única restricción para la elección.

$\square$

Las variedades invariantes que conseguimos, al menos la parte que se mantiene (a futuro, o a pasado, segun que variedad hablemos) en la bola de radio η' bajara por la exponencial a unas variedades estables e inestables, que tendrán tamaño uniforme, y por las consideraciones hechas en la sección anterior variaran continuamente con el punto y con el difeomorfismo.

Referencias

[KH] Katok Hasselblat, Introduction to the modern theory of dynamical systems.

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay
E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy