Tesis de Maestría

Clases homoclínicas genéricas con interior

Por: Rafael Potrie Altieri

Orientador: Dr. Martín Sambarino

Maestría en Matemática

PEDECIBA

Universidad de la República

Uruguay

13 de Agosto de 2008

Resumen

En esta tesis presentamos resultados genéricos de difeomorfismos de variedades relacionados con una conjetura de [ABD] que afirma que una clase homoclínica genérica con interior ha de ser toda la variedad. En particular, damos una prueba nueva para el caso en dimensión 2 (este resultado se encontraba probado en [ABCD]) y una prueba para un caso particular en dimensión 3 (por ejemplo, cuando la clase homoclínica se encuentra lejos de tangencias).

Abstract

We present generic results for diffeomorphisms related to a conjecture in [ABD] asserting that a generic homoclinic class with interior should be the whole manifold. In particular, we give a new proof of this conjecture in dimension 2 (this result was proved in [ABCD]) and a proof in a particular case in dimension 3 (for example, when the class is far from tangencies).

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La dinámica diferenciable se interesa en estudiar los vínculos entre las propiedades de la aplicación tangente de un difeomorfismo y sus propiedades asintóticas que son de carácter más bien topológico.

El estudio tiene su orígen en los trabajos de Smale (ver en particular [Sm2])[1] que luego de estudiar dinámicas que aparecen a partir de campos gradientes extiende la noción de punto periódico hiperbólico definiendo lo que llamó (y aún lleva ese nombre) conjuntos hiperbólicos [2] y para los cuales hay, hoy en día, una comprensión bastante completa (ver [Sh2, KH]). Esto consistió en estudiar las propiedades topológicas aseguradas por dicho comportamiento del mapa tangente del difeomorfismo (la hiperbolicidad).

Smale mismo, junto con Palis, propuso una conjetura que apuntaba en la otra dirección (ver [PaSm]), es decir, como una propiedad topológica puede repercutir en la dinámica de la aplicación tangente. Naturalmente, la conjetura tiene que ver con una propiedad topológica que persiste frente a perturbaciones, sino muy poco se podría afirmar sobre el comportamiento de la derivada (de hecho, mapas topológicamente equivalentes pueden no ser iguales desde el punto de vista de su aplicación tangente) . Este camino fue vastamente transitado, y en particular, vale la pena destacar el aporte de Mañe, que no solo probó la conjetura (ver [M4]) sino que también trabajó en diversos problemas relacionados con la pregunta: "¿Qué consecuencias tiene una cierta propiedad robusta en la dinámica de la aplicación tangente?". Esta pregunta fue sumamente estudiada en diversas formas y aún hoy es fuente de investigación.

[1] Un resultado anterior, también relacionado a este enfoque es el Teorema de Hartman Grobman, pero fue Smale que sistematizó este estudio.

[2] Paralelamente, ideas similares surgieron también en la escuela Rusa, en particular de Anosov, pero con un enfoque más dirigido a las consecuencias ergódicas de la dinámica de la aplicación tangente.

El estudio de propiedades robustas resultó insuficiente en el deseo de describir "casi todas" las dinámicas y fue sustituido por el estudio de propiedades genéricas y su vinculación con la dinámica de la aplicación tangente.

Fuera de algunos resultados aislados, en particular temas asociados a dinámicas parcialmente hiperbólicas fuertes y el trabajo [PS2] acerca de las consecuencias de la descomposición dominada en superficies, pocos trabajos apuntan en la dirección inicial, es decir, la de intentar estudiar repercusiones dinámicas a partir de las propiedades de la derivada. Es sobre este problema (en un caso muy particular) que trata el centro de este trabajo.

1.1. Presentación informal de los resultados

Este trabajo se centra en el siguiente problema: "¿Puede ser que un difeomorfismo genérico admita una clase homoclínica con interior, pero que no sea toda la variedad?"[3].

Es conocido que en el caso hiperbólico la respuesta es negativa, y de hecho, se espera que lo sea en general, como lo afirma una conjetura de Abdenur, Bonatti y Diaz (ver [ABD]) y pretendemos dar en este trabajo, evidencias de que la conjetura debería ser cierta. De hecho, la probamos en algunos casos conocidos (siguiendo fundamentalmente [ABD]) y en otros nuevos.

En las pruebas aparecen diversas herramientas de dinámica genérica que presentamos en el Capítulo 2. En el Capítulo 3, probamos la conjetura en algunos casos conocidos, asumiendo algunas hipótesis globales, y otras locales en las clases homoclínicas. Vale la pena notar, que las hipótesis que asumimos en dicho capítulo, si bien a veces se encuentran relacionadas con la dinámica de la aplicación tangente, son de carácter muy fuerte (hiperbolicidad, o hiperbolicidad parcial fuerte). También sacaremos conclusiones genéricas de la existencia de dichas clases, en particular vinculadas a como debe ser la dinámica de la aplicación tangente (descomposición dominada), esto será la base de lo que se trabaja en el Capítulo 4. En este último, se prueba la conjetura en algunos casos particulares, sobre todo asumiendo dimensiones bajas, y en particular, fibrados unidimensionales para la descomposición dominada.

Vale la pena mencionar, que en dicho capítulo, trabajaremos en la presencia[4] de un fenomeno genérico muy poco comprendido que es la existencia de infinitas clases homoclínicas (ver [BD]) lo cual hace el trabajo desafiante. Sin embargo, parece razonable enfrentarse a este fenómeno patológico con este enfoque ya que las clases salvajes (las que son acumuladas por infinitas clases homoclínicas) con interior presentan una dificultad intermedia entre las

[3] Las definiciones precisas se encuentran en el siguiente capítulo

[4] De hecho, en realidad probaremos que no está presente, pero después de obtener las conclusiones, no como hipótesis.

clases aisladas (ya muy estudiadas) y las clases salvajes sin más propiedades. Esto se debe a que en general, las técnicas involucran hacer perturbaciones en puntos de la clase; cuando la clase es aislada, no es difícil ver que el punto que se perturba se mantiene en la clase mientras que con clases salvajes eso no se puede asegurar. En el caso con interior, se tiene la propiedad de que este tiene una cierta robustez, con lo cual, si se perturba un punto que pasa por el interior, uno se asegura de mantenerse en la clase.

El resultado nuevo, principal de este trabajo, que se presentará en el Capítulo 4 es el siguiente:

Teorema 1.1.1. *Sea $f : M^3 \to M^3$ un difeomorfismo genérico con una clase homoclínica H con interior no vacío que admite una descomposición dominada en tres subfibrados, entonces, $H = M$ y el difeomorfismo es parcialmente hiperbólico fuerte.*

Como se observa, la hipótesis es meramente de la aplicación tangente. La estrategia de la prueba consiste en utilizar el hecho de que los fibrados son unidimensionales y por lo tanto los integran curvas y aprovechar eso para obtener consecuencias dinámicas de estas variedades invariantes. No hay, aún, un buen entendimiento de lo que ocurre con las variedades centrales de dimensiónes mayores que uno con lo cual los argumentos aquí utilizados no pueden ser directamente aplicados al caso general en dimensión 3 o al caso de dimensión cualquiera.

Antes de pasar al desarrollo sistemático del trabajo, queremos hacer unas aclaraciones que tienen que ver con la dinámica genérica.

Relacionado con el problema central de este trabajo, vale la pena mencionar que no es difícil construir un ejemplo para el cual exista una clase homoclínica con la propiedad de tener interior no vacío y no ser toda la variedad. La construcción es heurísticamente muy simple, consideremos un difeomorfismo de Anosov Lineal en $\mathbb{T}^2$ y lo que hacemos es "explotar" uno de sus puntos fijos a un círculo con dinámica Morse-Smale (la construcción detallada se encuentra en [K]) y luego "tapar" el círculo con un disco con un pozo en su interior y el disco como cuenca de atracción. El resultado final es un difeomorfismo (que de hecho se puede hacer C^∞) en $\mathbb{T}^2$ para el cual hay una clase homoclínica que consiste en toda la variedad menos el disco, y por ende tiene interior no vacío. Lo interesante del ejemplo (ya que se pueden hacer muchos otros) es que se puede construir cumpliendo con varias propiedades genéricas que usualmente se utilizan, a saber, sus puntos periódicos son hiperbólicos, y son densos en el conjunto no errante.

Sin embargo, veremos en el Capítulo 4, que un difeomorfismo genérico, que admita una clase homoclínica con interior en una superficie ha de ser transitivo (de hecho, conjugado a un Anosov Lineal de $\mathbb{T}^2$).

Capítulo 2

Dinámica Genérica

2.1. Introducción

En este Capítulo repasaremos algunos resultados de la dinámica genérica. Esta versa sobre el estudio de propiedades satisfechas por un conjunto “grande” de difeomorfismos, donde “grande” se considera a un conjunto abierto y denso o en su defecto residual de estos. La elección de que el conjunto sea residual es natural, debido a que gracias al Teorema de Baire, se cumplirá que si se tienen dos propiedades genéricas (es decir, que son satisfechas por un conjunto residual de difeomorfismos), los difeomorfismos que satisfagan ambas propiedades serán también genéricos. La exposición está basada fundamentalmente en el libro [BDV] a pesar de que este es un tema en que actualmente se trabaja mucho y muchos avances que utilizaremos no llegaron a ser incluidos y los referenciaremos cuando corresponda.

Empezamos definiendo los conceptos a utilizar. Por simplicidad, haremos todas las definiciones para el caso de la topología C^1, que es el contexto en el que se enmarca esta tesis, aclarando aquí, que la teoría se puede extender a contextos más generales (aunque aún no hay muchos avances en estos). Asumiremos que el lector se encuentra familiarizado con los resultados expuestos en el apéndice de este trabajo.

Definición 2.1.1. Sea M una variedad compacta, conexa y sin borde. $\mathcal{D}iff^1(M)$ es el conjunto de los difeomorfismos de M dotado de la topología C^1, es decir, $f_n \to f$ si f_n y sus derivadas primeras convergen uniformemente a f y su derivada respectivamente.

Definición 2.1.2. Dado un espacio topológico X, un *conjunto residual* es un conjunto que es intersección numerable de abiertos densos. Un espacio se dice *de Baire* si se cumple que los conjuntos residuales son densos.

Un teorema fundamental en la teoría de la dinámica genérica afirma que $\mathcal{D}iff^1(M)$ es un espacio de Baire.

Teorema 2.1.1. *$\mathcal{D}iff^1(M)$ es un espacio de Baire.*

La prueba de este teorema es clásica, se puede encontrar, por ejemplo, en [Less, Gua].

Dos Teoremas importantes en esta teoría, tanto por su enunciado como por su importancia histórica, son los siguientes, con los que cerramos la introducción.

Teorema 2.1.2 (Kupka-Smale [Sm1, Kup])**.** *Existe un conjunto residual $\mathcal{KS}$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ tal que si $f \in \mathcal{KS}$, entonces, todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos y además, las variedades invariantes de los puntos periódicos de f se intersectan transversalmente.*

Una prueba de este Teorema se puede encontrar en el libro de Robinson [Rob].

Teorema 2.1.3 (Teorema de densidad de Pugh [Pu1, Pu2])**.** *Existe un conjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ donde si $f \in \mathcal{R}$ entonces $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.*

La prueba del Teorema de densidad de Pugh se basa en lo que es llamado el “Closing Lemma”, que permite, mediante una pequeña perturbación, crear un punto periódico a partir de uno no errante. Si bien el problema es muy sencillo de plantear y no resulta a simple vista tan complejo, contiene realmente mucha dificultad y requirió de ideas muy originales su resolución. Es recomendable la lectura de [Gua] como introducción al resultado (si bien contiene temas más avanzados).

A partir de ahora, la frase “Genericamente ocurre P” se leera como “Existe un conjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ donde si $f \in \mathcal{R}$ entonces ocurre P”, así como la frase “f es un difeomorfismo genérico” referirá a que f pertenece a un conjunto residual $\mathcal{R}$.

2.2. Tipos de Recurrencia

Dado que en dinámica se estudia el comportamiento asintótico de los puntos luego de que la ley bajo estudio actue por un largo tiempo, es común focalizarse en el estudio de puntos que posean alguna forma de recurrencia, ya que en el resto, la dinámica es similar a una translación y no tiene mucho interés su estudio.

Dentro de los tipos de recurrencia más estudiados se encuentran los puntos periódicos, el conjunto límite, el conjunto no errante y el conjunto recurrente por cadenas.

Definición 2.2.1 (Tipos de Recurrencia)**.**

- $Per(f) = \{p \in M \ : \ \exists n \ ; \ f^n(p) = p\}$ el conjunto de puntos periódicos.

- $L(f) = \overline{\{y \in M \ : \ \exists x\ , n_j \to \pm\infty \ : \ f^{n_j}(x) \to y\}}$ el conjunto límite de f.

- $\Omega(f) = \{x \in M \ : \ \forall \varepsilon > 0 \exists n > 0\ ;\ f^n(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\}$ el conjunto no errante de f.

- $\mathcal{R}(f) = \{x \in M \ : \ \forall \varepsilon > 0 \exists x = x_0, \dots x_n = x \ : \ d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon\}$ el conjunto recurrente por cadenas.

Es muy sencillo demostrar las inclusiones $\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$. También es cierto que las inclusiones pueden ser estrictas (ver [Sh2]), aunque algunos de esos ejemplos no son tan fáciles de construir.

En un trabajo reciente, Bonatti y Crovisier ([BC]) lograron probar que genéricamente, todos estos conjuntos son iguales. Esto es de gran importancia ya que por un lado, es sencillo trabajar con el conjunto de los puntos periódicos (que además, gracias al Teorema de Kupka Smale, sabemos que genéricamente son hiperbólicos y sus variedades invariantes se intersectan transversalmente) y al mismo tiempo, el conjunto recurrente por cadenas posee propiedades muy interesantes. Por una prueba de este Teorema junto con otras consecuencias y motivaciones para la utilización del conjunto recurrente por cadenas, recomendamos la lectura de [Sam].

Teorema 2.2.1 (Bonatti-Crovisier [BC])**.** *Genéricamente,* $\overline{Per(f)} = \mathcal{R}(f)$

La prueba de este resultado se basa en un "closing lemma" para pseudo-orbitas, utilizaremos durante el trabajo muchas consecuencias de este resultado (además del resultado mismo) que es una generalización importante del Teorema de densidad de Pugh.

Una de las consecuencias más importantes de este Teorema, tiene que ver con otro Teorema, el Teorema de Conley que asegura que todo homeomorfismo admite una función de tipo "gradiente", es decir, que decrece en las órbitas y es constante en las clases de recurrencia (ver [Rob, Sam] por ejemplo). De esta manera, se pueden de alguna manera separar las clases de recurrencia, y en particular, con el teorema de Bonatti Crovisier, definir una noción aceptable de pieza básica de un difeomorfismo. En la sección siguiente formalizaremos un poco más esto.

2.3. Clases homoclínicas

Las clases homoclínicas fueron introducidas por Newhouse (en [New]) donde estudia una generalización del Teorema Espectral de Smale para difeomorfismos hiperbólicos (ver [Sm2] y el apéndice de este trabajo). Son clases de equivalencia de puntos periódicos que poseen muy ricas propiedades dinámicas.

El Teorema Espectral, dice que para un difeomorfismo hiperbólico, la dinámica se descompone en finitas piezas transitivas y con puntos periódicos densos. Una de las principales motivaciónes de la dinámica genérica fue encontrar una noción adecuada de pieza básica, problema resuelto en [BC] (ver también [Sam]).

El primer candidato fueron las clases homoclínicas que pasamos a definir.

Definición 2.3.1. Sea f un difeomorfismo y p un punto periódico hiperbólico. La *clase homoclínica* de p es $H(p, f) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$.

Observación 2.3.1. La clase también se puede definir mediante la siguiente relación de equivalencia en los puntos periódicos, $p \sim q$ si $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ y $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$. De esta manera, si denotamos $X(p)$ a la clase de equivalencia del punto p, entonces es sencillo corroborar que $H(p, f) = \overline{X(p)}$. También es sencillo ver que f restricto a la clase homoclínica es transitivo. (Ver [New] o [KH]).

Dentro de los puntos recurrentes por cadenas, se puede definir la siguiente relación $x \dashv y$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-pseudo órbita de x a y, es decir, existen puntos $x = x_0, \dots x_n = y$ cumpliendo $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon$. Las clases de equivalencia de la relación $\vdash\dashv$ ($x \vdash\dashv y$ si y solo si $x \dashv y$ y $y \dashv x$) se llaman *clases de recurrencia* y las denotaremos $\mathcal{C}(x)$.

Es fácil ver que dado $x \in H(p, f)$, se cumple que $H(p, f) \subset \mathcal{C}(x)$. Una de las consecuencias del Teorema 2.2.1 de Bonatti y Crovisier es que la otra inclusión también es cierta en un contexto genérico.

Teorema 2.3.1 ([BC, CMP])**.** *Genéricamente, si $p \in \mathcal{C}(x)$ es un punto periódico, entonces, $\mathcal{C}(x) = H(p)$. En particular, genéricamente, dos clases homoclínicas son iguales o disjuntas.*

Parte de este resultado había sido previamente probado en [CMP], el resto se prueba en [BC]. La idea es que las clases homoclínicas son conjuntos transitivos saturados (ver [CMP] o [Gua] por la prueba adaptada a difeomorfismos), es decir que contienen a todo conjunto transitivo que intersectan (esto prueba que las clases homoclínicas son iguales o disjuntas). La prueba se basa en la siguiente proposición que también será de utilidad independiente y tiene que ver con la estabilidad Lyapunov que revisaremos en la próxima sección.

Proposición 2.3.2 ([CMP])**.** *Genericamente, $H(p) = \overline{W^s(p)} \cap \overline{W^u(p)}$*

Utilizando que las clases homoclínicas son clases de recurrencia, con el "Closing Lemma para Pseudo-Orbitas" de [BC] se puede probar que que si hubiesen dos clases homoclínicas no iguales deberían ser disjuntas. Esto es porque los puntos periódicos hiperbolicos son densos en $\mathcal{C}(x)$, entonces, si hubiesen dos clases homoclínicas distintas que se intersectan, estarían en la misma clase de recurrencia y como hay una pseudo-orbita de una a otra se puede construir un punto periódico arbitrariamente cercano "uniendolas", y por lo tanto, llegando a un absurdo.

Vale la pena notar que es falso que en un conjunto residual todas las clases de recurrencia sean clases homoclínicas (en [BD] se encuentra un conjunto abierto de difeomorfismos, que adentro de él contiene un conjunto residual de difeomorfismos que tienen clases de recurrencia sin puntos periódicos), las clases de recurrencia sin puntos periódicos, son llamadas aperiodicas. Igual es fácil notar que las clases de recurrencia aperiodicas de difeomorfismos genéricos tienen que ser acumuladas por puntos periódicos ya que estos son densos en el conjunto recurrente por cadenas. De hecho, tenemos el siguiente corolario, que permite atacar el problema principal de este trabajo desde un punto de vista más local.

Corolario 2.3.3. *Genéricamente, si una componente conexa de $\Omega(f)$ tiene interior, entonces es periódica y es una clase homoclínica.*

Demostración. Como tiene interior y los puntos periódicos son densos en $\Omega(f)$, la componente conexa contiene una clase homoclínica. Como además dos clases de recurrencia son iguales o disjuntas, la componente entera es una clase homoclínica.

$\square$

Otra cosa interesante de estudiar es cuantas clases de recurrencia se tienen. Utilizando un resultado clásico que dice que una función semicontinua es continua en un conjunto residual (ver el apéndice de [Pot] por una prueba) Abdenur prueba lo siguiente:

Proposición 2.3.4 ([Ab])**.** *Existe un residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ donde la función que a un difeomorfismo le asigna la cantidad de clases de recurrencia es continua, en particular, localmente constante.*

Como consecuencia, logra dar la siguiente dicotomía dentro de los difeomorfismos genéricos

Teorema 2.3.5 ([Ab])**.** *Existe un residual $\mathcal{R} = \mathcal{T} \cup \mathcal{W}$ de forma tal que $\mathcal{T}$ y $\mathcal{W}$ son abiertos en $\mathcal{R}$ y se cumple que si $f \in \mathcal{T}$ entonces tiene finitas clases de recurrencia y si $f \in \mathcal{W}$ tiene infinitas.*

Además, logra describir la dinámica en el conjunto $\mathcal{T}$ mediante una especie de descomposición espectral y formas débiles de hiperbolicidad ("volume hyperbolicity" que es una propiedad intermedia entre descomposición dominada e hiperbolicidad parcial fuerte).

Muchas veces es útil estudiar las clases homoclínicas con un enfoque local, es decir, sin importarnos que ocurre con la dinámica en el resto de la variedad. Una versión local, para clases homoclínicas del conjunto $\mathcal{T}$ son las clases aisladas (en contraposición a las clases salvajes).

Definición 2.3.2. Decimos que una clase homoclínica H es *aislada*, si existe un entorno U de H para el cual H es el conjunto invariante maximal (i.e. $H = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$). En caso contrario, decimos que es una clase *salvaje*.

Es bueno mencionar que en el contexto genérico no es difícil ver que una clase salvaje es acumulada por infinitas clases de recurrencia, en particular, clases homoclínicas. Al respecto, un difeomorfismo genérico va a estar en $\mathcal{T}$ si y solo si todas sus clases son aisladas, con lo cual, decir algo acerca de las clases homoclínicas aisladas es más general que decirlo acerca de los difeomorfismos en $\mathcal{T}$.

Por último, damos una propiedad genérica de las clases homoclínicas que también tiene que ver con el hecho de que varian semicontinuamente:

Proposición 2.3.6. *Existe un residual $\mathcal{R}$ donde las clases homoclínicas varian continuamente respecto de $g \in \mathcal{R}$. Lo mismo ocurre con la clausura de las variedades invariantes de los puntos periódicos y con el conjunto no errante.*

2.4. Estabilidad Lyapunov y genericidad

En esta sección revisaremos el concepto de estabilidad Lyapunov que tiene mucho que ver con el concepto de igual nombre estudiado en los libros de ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo [Sot]).

Definición 2.4.1. Un conjunto compacto $f-$invariante Λ se dice *estable Lyapunov* si para todo entorno abierto U de Λ existe un entorno $V \subset U$ tal que $f^k(V) \subset U$ $\forall n > 0$.

Un primer resultado genérico que tiene que ver con la estabilidad Lyapunov, es que la clausura de las variedades invariantes de los puntos periódicos es, para difeomorfismos genéricos, estable Lyapunov. Esto fue probado en [CMP] y es uno de los pasos importantes para probar la Proposición 2.3.2([1]).

Proposición 2.4.1 ([CMP]). *Genéricamente, la clausura de la variedad estable (inestable) de un punto periódico es estable Lyapunov para f^{-1} (f).*

[1]En [CMP] este hecho está probado para flujos, por una adaptación de la prueba a difeomorfismos ver [Gua].

Corolario 2.4.2. *Genéricamente, una clase homoclínica con interior es estable Lyapunov para f y f^{-1}.*

Demostración. Como las clases homoclínicas son invariantes, tomando un punto periódico p en el interior de la clase, su variedad estable local se encontrará contenida en la clase, y por lo tanto la variedad estable entera. Por la Proposición 2.3.2, tendremos que $H = \overline{W^s(p)}$ y por la Proposición 2.4.1 tenemos que H es estable Lyapunov para f^{-1}. La estabilidad Lyapunov para f es análoga.

□

Observación 2.4.1. Como corolario de la Proposición 2.3.2 tenemos que si $H(p, f)$ es estable Lyapunov para f, entonces $H(p, f) = \overline{W^u(p)}$ (análogamente para estable Lyapunov para f^{-1} y la variedad estable). Esto sale de que la proposición nos da una de las inclusiones y para ver la otra, basta ver que dado un entorno de $H(p, f)$, la variedad inestable de p, esta en ese entorno. Eso sale directamente de la estabilidad Lyapunov de $H(p, f)$ y de que $W^u(p) = \bigcup_{n>0} f^{n\pi(p)}(W^u_{loc}(p))$ ($\pi(p)$ denota el período de p). En particular, también es inmediato observar que genericamente, una clase homoclínica es estable Lyapunov para f si y solo si se cumple $H(p, f) = \overline{W^u(p)}$ (en virtud de la Proposición 2.4.1).

♢

Para concluir vamos a citar un resultado de [BC] que tiene que ver con la estabilidad Lyapunov de las clases homoclínicas (de hecho, de los conjuntos invariantes) y da una consecuencia bastante fuerte que será útil en este trabajo. Antes daremos una definición.

Definición 2.4.2. Un conjunto Λ invariante para f es un *quasi atractor* si existe una familia de entornos $\{U_n\}$ de Λ que cumple que $f(\overline{U_n}) \subset U_n$ y que $\Lambda = \bigcap_n U_n$. (Análogamente se define *quasi repulsor*).

Teorema 2.4.3 ([BC])**.** *Genericamente, un conjunto Λ estable Lyapunov para f es un quasi atractor.*

Demostración. Sección 5.3 de [BC]

□

2.5. Clases homoclínicas con interior, propiedades genéricas

En esta sección veremos algunas consecuencias genéricas de que las clases homoclínicas tengan interior no vacío.

Proposición 2.5.1 (Teorema 4 de [ABD]). *Existe un residual $\mathcal{R}$ de forma tal que si $f \in \mathcal{R}$ y U es un abierto tal que $\overline{U} \subset int(H(p,f))$ entonces existe $\mathcal{U}$ entorno de f de forma tal que para todo $g \in \mathcal{R} \cap \mathcal{U}$ se cumple que $U \subset H(p_g, g)$ donde p_g es la continuación del punto p para g.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $O \subset M$ un abierto no vacío. Sea $\mathcal{R}_0$ un residual de $\mathcal{D}iff^1(M)$ tal que:

- $\Omega(f)$ varía continuamente.
- $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ y $f \in \mathcal{KS}$.
- Una componente conexa del interior de $\Omega(f)$ es una clase homoclínica.
- Las clases homoclínicas son disjuntas o iguales, y son clases de recurrencia por cadenas.

Denotamos como $A(O)$ el conjunto de difeomorfismos $f \in \mathcal{R}_0$ para los cuales O no está contenido en $\Omega(f)$, que claramente es abierto en $\mathcal{R}_0$. En particular, existe un abierto $\tilde{A}(O)$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ tal que $\underline{A(O)} = \tilde{A}(O) \cap \mathcal{R}_0$.

Sea $\tilde{B}(O) = \mathcal{D}iff^1(M) \backslash \overline{\tilde{A}(O)}$, por lo tanto, si $B(O) = \tilde{B}(O) \cap \mathcal{R}_0$ tenemos que $A(O) \cup B(O)$ es abierto y denso en $\mathcal{R}_0$. Consideremos el conjunto residual $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{R} = \bigcap_n A(O_n) \cup B(O_n)$ donde $\{O_n\}$ es una base numerable de la topología de M.

Sea $f \in \mathcal{R}$ y U tal que $\overline{U} \subset int(\Omega(f))$. Sea $O_{i_1}, \ldots O_{i_k}$ un cubrimiento de $\overline{U}$ contenido en $int(\Omega(f))$. Claramente, $f \in B(O_{i_j})$ $\forall 1 \leq j \leq k$.

Sea $p \in U$ un punto periódico hiperbólico de f y $\mathcal{U}$ un entorno de f para el cual esta definida la continuación de p ($\forall g \in \mathcal{U}$ está definido p_g).

Dado $g \in \mathcal{R} \cap \mathcal{U}$, se cumple que claramente $\overline{O_{i_j}} \subset \Omega(g)$ (pues $\Omega(f)$ varía continuamente, y como f no se puede aproximar por difeomorfismos para los cuales O_{i_j} no este contenido en Ω se tiene lo deseado) por lo cual $\overline{U} \subset \Omega(g)$. Ahora, por las propiedades genéricas elegidas, si $\overline{U}$ está en el interior de $H(p,f)$ entonces $\overline{U}$ va a estar contenido en el interior de $H(p_g, g)$. □

Ahora pasamos a dar las ideas principales del siguiente resultado que será muy utilizado. Antes de enunciarlo daremos la definición de descomposición dominada que será de gran importancia en el trabajo (de todas maneras a partir de este momento asumiremos dominio de sus propiedades que pueden ser encontradas en el Apéndice de este trabajo).

Definición 2.5.1. Sea $\Lambda \subset M$ un compacto invariante. Decimos que admite *descomposición dominada* si cumple que el tangente tiene una descomposición invariante en subfibrados $T_\Lambda M = E^1 \oplus \ldots \oplus E^k$ de forma tal que existen $l > 0$([2]) y $0 < \lambda < 1$ de forma tal que para todo $x \in \Lambda$ se cumple que

$$\|Df^l_x|_{E^i(x)}\| \|Df^{-l}_{f^l(x)}|_{E^j(f^l(x))}\| < \lambda$$

Decimos que el conjunto es *parcialmente hiperbólico* si admite una descomposición dominada en la cual uno de los fibrados extremales es hiperbólico (i.e. $\|Df^n|_E\| \to 0$ con $n \to +\infty$ o $n \to -\infty$). Decimos que es *parcialmente hiperbólico fuerte* si cumple eso con ambos subfibrados extremales y que es *hiperbólico* si hay una descomposición dominada en 2 subfibrados ambos de ellos hiperbólicos.

Teorema 2.5.2. *Genéricamente, si una clase homoclínica tiene interior, admite descomposición dominada.*

Este Teorema se basa en el siguiente Teorema de [BDP]

Teorema 2.5.3 ([BDP])**.** *Existe un residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}iff^1(M)$ de forma que si $f \in \mathcal{R}$ y $H(p,f)$ es una clase homoclínica de una silla p se cumple una de las siguientes:*

- *O bien $H(p,f)$ admite descomposición dominada*
- *O bien $H(p,f)$ está contenido en la clausura del conjunto de pozos y fuentes de f.*

Vamos a tratar de dar un ezbozo de la prueba de este Teorema, pero sin entrar en detalles puesto que se iría demasiado lejos del objetivo del trabajo.

Esbozo de Demostración. La idea es la siguiente, si no hay dominación, entonces habrán puntos periódicos cuya derivada se puede perturbar a transformaciones lineales que sean homotecias. Esas perturbaciones se pueden realizar dinámicamente gracias a un resultado de Franks ([F], ver también la sección 4.3). Esta idea apareció por primera vez en el trabajo de Mañe sobre la conjetura de estabilidad en dimensión 2 (ver [M2] o [Pot]).

En dimensión dos, esta idea es suficiente, ya que si la clase no admite descomposición dominada, entonces, habrá puntos periódicos para los cuales no hay suficiente dominación por mucho tiempo, y se los podrá perturbar para que sus direcciones estables e inestables

[2] En [Gou1] se prueba que siempre existe una métrica para la cual se puede considerar $l = 1$.

formen ángulos pequeños y luego mediante una nueva pequeña perturbación convertirlos en pozos o fuentes (ver [Pot] capítulo 3).

En dimensiones mayores este argumento es insuficiente, ya que es posible que hayan puntos con ángulos pequeños entre sus espacios estables e inestables, pero no se puedan perturbar a pozos, de hecho, el argumento recién esbozado, permite cambiar el índice del punto periódico, que en dimensiones mayores a dos, no asegura conseguir un pozo o una fuente. Para pasar por alto este inconveniente, en [BDP] introducen el concepto de transiciones, que en definitiva, utiliza el hecho de que si en una clase homoclínica hay dos puntos del mismo índice, se tiene un conjunto hiperbólico que los contiene a ambos, luego, utilizando el shadowing lemma, se pueden encontrar puntos periódicos que pasen un tiempo arbitrariamente largo cerca de uno, y luego otro tiempo también arbitrariamente largo cerca del otro (y el tiempo que estan lejos acotado por una "transición" de tiempo acotado); y de esta manera, logran "mezclar" las derivadas de los puntos. Como los puntos de un índice dado, para una clase homoclínica genérica son densos en esta, la no dominación en la clase es equivalente a la no dominación en los puntos de un índice dado, entonces, basta ver que no habiendo dominación de ningún indice, se pueden mezclar las derivadas de los puntos periódicos para obtener, mediante pequeñas perturbaciones, que las derivadas sean homotecias y concluir la prueba (con argumentos de genericidad de por medio).

□

Con este Teorema, es inmediata la prueba del Teorema 2.5.2 ya que claramente si una clase homoclínica tiene interior, esta no puede estar contenida en la clausura del conjunto de pozos y fuentes del difeomorfismo (que son puntos que no pueden estar en la clase homoclínica).

2.6. Otras propiedades genéricas relacionadas con la descomposicíon dominada

En esta sección repasaremos algunas propiedades relacionadas con la descomposición dominada que nos servirán para obtener consecuencias de nuestro resultado principal.

Primero, enunciaremos un resultado acerca de la existencia de descomposición dominada lejos de tangencias homoclínicas. Las tangencias homoclínicas, son puntos de intersección no transversal entre las variedades invariantes de los puntos periódicos. Este resultado tiene como gérmen el resultado bidimensional de Pujals y Sambarino donde prueban que si un difeomorfismo no puede ser aproximado por difeomorfismos con tangencias homoclínicas, entonces, este admite descomposición dominada. Este resultado fue generalizado por Wen a dimensiones mayores, probando que si el conjunto de puntos periódicos de índice i (para un difeomorfismo genérico ([3])) no admite descomposición dominada, entonces, se puede crear una tangencia mediante una pequeña perturbación del difeomorfismo. Este resultado, si bien es en dimensiones mayores, es más débil que el de Pujals y Sambarino, pues no logra mantener las relaciones homoclínicas. Este problema fue recientemente solucionado por Gourmelon y enunciamos el resultado más general.

Teorema 2.6.1 ([PS1, Wen, Gou2])**.** *Si la clase homoclínica de un punto periódico silla p no admite descomposición dominada de índice igual al de p, entonces, una pequeña perturbación permite crear una tangencia asociada a p. Además, se puede crear preservando una cantidad finita arbitraria de relaciones homoclínicas.*

Daremos una breve idea de la prueba de este Teorema, la idea es utilizar el hecho de que si los ángulos entre las variedades estables e inestables de los puntos periódicos de índice igual al de p son suficientemente grandes, entonces, existe descomposición dominada como la deseada (esto tiene que ver con lo mencionado en la sección anterior). Por lo tanto, el Teorema se reduce a ver que si hay ángulos pequeños, una pequeña perturbacion se puede realizar generando una tangencia asociada al punto periódico. En dimensión dos, esto consiste en tomar como carta el mapa exponencial y realizar cuidadosas perturbaciones que permiten crear dicha tangencia, en dimensiones mayores, Gourmelon comienza con el caso bidimensional, y mediante ciertos cocientes logra probar el Teorema por inducción.

Por último, vamos a comentar una consecuencia más del trabajo [BDP] que será de utilidad.

Proposición 2.6.2 ([BDP])**.** *Sea H una clase homoclínica genérica de un difeomorfismo de una variedad de dimensión 3 sin puntos periódicos con valores propios complejos. Entonces, H admite una descomposición dominada del tipo $T_H M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$.*

Esto es un Corolario de lo probado en la sección 5 de [BDP]. Lo que prueban, es que si no hay descomposición dominada de cierto índice, entonces pueden crear valores propios complejos. Esto es muy sencillo de ver en dimensión 2 (de hecho ya lo esbozamos en la sección anterior) y en dimensiones mayores, la dificultad no aumenta más allá de los problemas de algebra lineal que aparecen en estas. Si dos fibrados no se encuentran dominados, habrán puntos periódicos con ángulos pequeños entre esos subespacios, una pequeña perturbación, hace posible encontrar un valor propio complejo ahi.

[3] Su enunciado es más general e involucra el conjunto de puntos preperiódicos de indice i, que para difeomorfismos genéricos coincide y eso es lo que utilizaremos

Capítulo 3

Clases homoclínicas con interior, Casos Conocidos

3.1. Introducción

En esta sección estudiaremos algunos casos conocidos de la siguiente conjetura de [ABD] que es el centro de este trabajo.

Conjetura 1 ([ABD]). *Genéricamente, si* $int(\Omega(f)) \neq \emptyset$*, entonces,* f *es transitivo.*

Es fácil ver que, gracias a los resultados vistos en el capítulo anterior, la conjetura se reduce al estudio de clases homoclínicas, y a probar que si un difeomorfismo genérico admite una clase homoclínica con interior, entonces, esta ha de ser toda la variedad. En este capítulo vamos a mostrar el resultado en varios contextos donde es conocido, y nos basaremos en [ABD] para eso.

3.2. Caso Hiperbólico

El primer caso que estudiaremos es el hiperbólico, que si bien es simple, vale la pena para empezar a sentirle el gusto a los argumentos que se intentaran utilizar, y ver como las variedades invariantes resultan una herramienta importante para atacar el problema.

Teorema 3.2.1. *Sea* $H = H(p, f)$ *la clase homociínica de* p *para* $f : M \to M$ *difeomorfismo. Supongamos que* $f|_H$ *es hiperbólico y que* H *tiene interior no vacío. Entonces,* f *es transitivo.*

Demostración. Primero, vamos a probar que el conjunto tiene estructura de producto local (esto es inmediato en el caso que f sea Axioma A, o tenga conjunto límite hiperbólico, pero no en el caso general, como se comentará en la observación posterior a esta prueba). Para ver esto, utilizaremos el Teorema de la variedad estable (ver [Sh2] o el apéndice de este trabajo). Por definición, la clase homoclínica es la clausura de las intersecciones transversales de un punto periódico p, pero como fue comentado en el capítulo anterior (ver observación 2.3.1) es también la clausura de los puntos periódicos homoclínicamente relacionados a p. Es fácil ver que si se toman dos puntos periódicos cercanos q y r en H (homoclínicamente relacionados a p), de forma tal que $W^s_\varepsilon(q) \cap W^u_\varepsilon(r) = \{x\}$ se cumplirá que $x \in H$ pues gracias al $\lambda-$lemma (ver apéndice) este se puede aproximar por intersecciones transversales de $W^s(q)$ con $W^u(q)$, y siendo q homoclinicamente relacionado con p y H cerrada, x pertenecerá a H. Ahora, dados dos puntos x, y en H, de forma tal que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) = \{z\}$ los podemos aproximar por puntos periódicos homoclínicamente relacionados a p (que son densos) y por el Teorema de la variedad estable, sus variedades estables e inestables se intersectarán en una sucesión de puntos en H que convergerá a z completando la prueba de que H tiene estructura de producto local.

Basta probar entonces, gracias a la estructura de producto local, que todo punto tiene un entorno de su variedad estable en la clase homoclínica. A partir de eso, y utilizando el resultado para f^{-1} se obtiene, gracias a la estructura de producto local y el teorema de invariancia del dominio ([Hat]), un entorno del punto contenido en la clase, probando que todo punto es interior y terminando la prueba.

Para ver que dado $y \in H$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^s_\varepsilon(y) \subset H$ consideramos un punto periódico q, homoclinicamente relacionado con p (estos son densos, ver [New] aunque es fácil de probar). Como H es también la clase homoclínica de q, tenemos que $H = \overline{W^s(q) \pitchfork W^u(q)}$ con lo cual $W^s(q)$ es densa en H.

Al mismo tiempo, como $W^s(q) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n\pi(q)}(W^s_\gamma(q))$ $\forall\gamma$, y como $q \in int(H)$ que es invariante, concluimos que $W^s(q) \subset int(H)$.

Sea $y_n \in W^s(q)$ tal que $y_n \to y$, entonces, consideramos $W^s_\varepsilon(y_n) \subset W^s(q) \subset int(H)$ y por el teorema de la variedad estable junto con que la clase homoclínica es cerrada concluimos que $W^s_\varepsilon(y) \subset H$.

□

Observación 3.2.1. Es importante en la hipótesis que el conjunto hiperbólico sea una clase homoclínica ya que hay ejemplos de conjuntos hiperbólicos con interior no vacío que no son toda la variedad (ver [Fi]), de hecho, el ejemplo cumple que no esta incluido en ningun invariante maximal hiperbólico.

3.3. Caso Parcialmente Hiperbolico Fuerte

En esta sección probaremos otro caso en donde la Conjetura es conocida. El caso parcialmente hiperbólico fuerte.

Teorema 3.3.1. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f. Supongamos que $T_H M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ es una descomposición parcialmente hiperbólica con E^s y E^u no triviales. Entonces, f es transitivo.*

La prueba de este resultado tiene dos argumentos fundamentales que repasaremos antes de comenzarla. Uno es el argumento de Brin, que nos servirá también más adelante en el trabajo, y otro, es un resultado de Dolgopyat y Wilkinson, que muestra que la accesibilidad es un fenomeno común dentro de los difeomorfimos parcialmente hiperbólicos. La prueba es mucho más sencilla si se asume la hipótesis de que la descomposición parcialmente hiperbólica esta definida en toda la variedad, de hecho, en ese caso, no es necesario entrar en la demostración del resultado de Dolgopyat y Wilkinson, y en una primera lectura, recomendamos saltearse las secciones 3.3.2 y 3.3.4.

3.3.1. El argumento de Brin

Brin, en [Br] prueba el siguiente resultado, utilizando un argumento que nos será de utilidad. Prueba que si un difeomorfismo parcialmente hiperbólico es accesible y su conjunto no errante es toda la variedad, entonces, el difeomorfismo es de hecho transitivo.

Definición 3.3.1. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico, decimos que es accesible si cumple la propiedad de que dados dos puntos $x, y \in M$ existe una forma de unirlos mediante arcos formados por arcos estables e inestables.

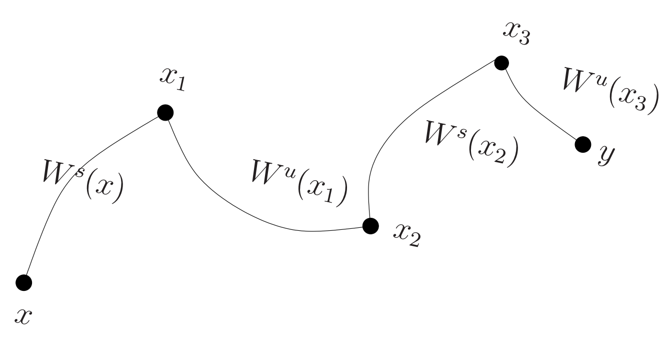

Figura 3.1: Caminos su.

Esos arcos, se llaman caminos su (ver figura 3.1), en general, se define la clase de accesibilidad de un punto x para un difeomorfismo parcialmente hiperbólico como el conjunto de puntos a los cuales se puede acceder desde x mediante caminos su (es muy sencillo comprobar que esto es una relación de equivalencia).

El argumento fundamental que utiliza para probar su resultado, que será utilizado varias veces en este trabajo permite probar que si un punto $x \in int(\Omega(f))$, entonces, su variedad estable fuerte y su variedad inestable fuerte se encuentran también en el interior de Ω.

Proposición 3.3.2 (Argumento de Brin)**.** *Sea $x \in int(\Omega(f))$ donde se cumple que $\Omega(f)$ admite una descomposición parcialmente hiperbólica del tipo $T_\Omega M = E^c \oplus E^u$. Entonces, $W^u(x) \subset int(\Omega)$.*

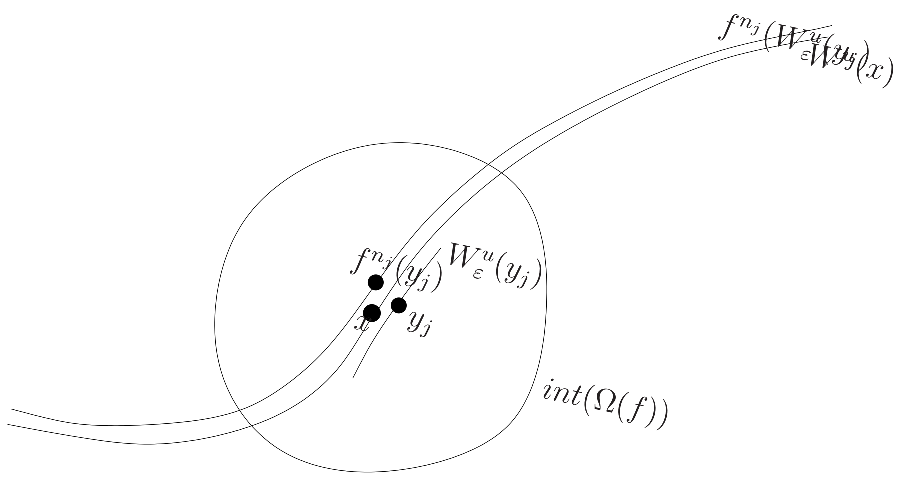

Figura 3.2: Argumento de Brin.

Demostración. Sea $y_j \to x$ de forma tal que existe $n_j \to \infty$ de forma tal que $f^{n_j}(y_j) \to x$.

Como y_j (para j grande) esta también en $int(\Omega(f))$ se cumple que existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que cualquiera sea j suficientemente grande, se cumple que $W^u_\varepsilon(y_j) \subset int(\Omega(f))$.

Utilizando la convergencia C^1 de las variedades inestables fuertes, logramos probar que $W^u(x) \subset \Omega(f)$ ya que la sucesión $f^{n_j}(W^u_\varepsilon(y_j))$ converge en compactos a $W^u(x)$, el interior del no errante es invariante y el no errante es cerrado.

Como este argumento vale para cualquier punto en un pequeño entorno de x, se concluye lo deseado.

□

3.3.2. Accesibilidad Estable

En esta sección haremos un esbozo de un trabajo de Dolgopyat y Wilkinson, donde prueban que la accesibilidad estable es una propiedad densa dentro de los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con la topología C^1. Esta sección tiene como proposito convencer al lector de que la prueba de este resultado tiene los suficientes componentes locales como para ser generalizada al caso de interés. De todas maneras, lo aquí expuesto tiene importancia solo para la subsección 3.3.4, siendo el resultado también utilizado en la sección 3.3.3 pero no la prueba.

Decimos que f es establemente accesible, si f tiene un entorno $\mathcal{U}$ en la topología C^1 de forma tal que si $g \in \mathcal{U}$ entonces g es accesible (observar que el conjunto de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos es abierto).

Teorema 3.3.3 (Dolgopyat, Wilkinson [DW])**.** *El conjunto de los difeomorfismos parcialmente hiperbolicos establemente accesibles es abierto y denso en la topología C^1 dentro de los difeomorfismos parcialmente hiperbolicos.*

La prueba se divide escencialmente en 3 etapas. Primero, se muestra que se puede conseguir una familia de discos centrales de forma de que el difeomorfismo sea accesible módulo estos discos, además, que lo sea uniformemente (que definiremos pronto) con lo cual se prueba que se logra perturbarlo y dejarlo establemente accesible módulo esos discos. Por ultimo, se prueba que mediante una pequeña perturbación se puede lograr accesibilidad dentro de esos discos.

Formalmente, las etapas son las siguientes. Lo enunciaremos y daremos la idea de la prueba asumiendo que la dirección central es integrable, el caso general también es cierto pero involucra muchos argumentos técnicos.

Lema 3.3.4 ([DW] Lemma 1.2)**.** *Sea f un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y Kupka-Smale. Entonces, dado J existe una familia de discos centrales $\mathcal{D}$ de forma tal que:*

1. *Los diametros de los discos son menores que $1/J$.*
2. *$f^i(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq J$.*
3. *f es uniformemente accesible módulo $\frac{1}{2}\mathcal{D}$, es decir, dados $x, y \in M$ existen discos $D_1 \dots D_n$ de forma tal que hay caminos su de x a D_1, de D_i a D_{i+1} y de D_n a y todos con una cantidad acotada de segmentos de longitud también acotada.*

Lema 3.3.5 ([DW] Lemma 1.3)**.** *Existe $\delta_0 > 0$ de forma tal que dado $0 < \delta < \delta_0$, una familia de discos centrales $\mathcal{D}$ y un difeomorfismo f uniformemente accesible módulo $\frac{1}{2}\mathcal{D}$ se cumple* *que para cualquier $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ existe $\sigma > 0$ de forma tal que todo g que este a distancia C^1 menor que δ de f y distancia C^0 menor que σ se cumple que g es accesible módulo $\beta\mathcal{D}$, en particular, f es establemente accesible módulo $\beta\mathcal{D}$.*

Lema 3.3.6 ([DW] Lemma 1.1)**.** *Sea f un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y $\delta > 0$ dado. Entonces, existe J de forma tal que si existe una familia de discos centrales $\mathcal{D}$ cumpliendo que:*

1. *Los diametros de los discos son menores que $1/J$.*

2. *$f^i(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq J$.*

Entonces, $\forall \beta \in (0, 1)$ y $\sigma > 0$ existe $g \in \mathcal{D}iff^1(M)$ de forma tal que $d_{C^1}(f, g) < \delta$ y $d_{C^0}(f, g) < \sigma$ y se cumple que g es establemente accesible en los discos de $\mathcal{D}$.

Como claramente ser establemente accesible módulo una familia de discos y establemente accesible en los discos implica ser establemente accesible, es directo que estos tres lemas implican el teorema.

Pasamos a esbozar la prueba de estos lemas con el propósito de convencer al lector que la prueba utiliza solamente argumentos suficientemente locales (que especificaremos) y el resultado podrá ser utilizado en un caso más general en la sección 3.3.4. Para eso, entre otras cosas, supondremos por simplicidad que el fibrado central es únicamente integrable.

Esbozo de Demostración del Lema 3.3.4. Este es el más sencillo. Como f es Kupka Smale, existen finitos puntos de período menor que $2J$. Sean $U_1, \ldots, U_m$ entornos pequeños de dichos puntos (pequeños de forma que el complemento de su union sea conexo y que todo punto de ahi se pueda unir con el exterior por medio de un camino *su* de una sola pata).

Sea $A = M \setminus \bigcup U_i$ conexo. Todo punto en A (que es compacto) tiene un entorno de diámetro suficientemente pequeño que no se vuelve a cortar en sus primeros $2J$ iterados. Tomando un subcubrimiento finito, como los elegimos suficientemente pequeños, podemos suponer que mediante un camino *su* de longitud uno, podemos ir de uno de los abiertos a algún otro atravesando las centrales.

Ahora tomamos en cada uno de los abiertos un disco central, si llegase a pasar que en menos de J iterados esos discos se corten entre si, basta "correrlos" levemente por la dirección inestable para obtener discos con la misma propiedad y que no se intersecten (en el caso que el fibrado central no sea únicamente integrable, este paso adquiere alguna dificultad mayor, pero puramente técnica, ver sección 2 de [DW]).

$\square$

Esbozo de Demostración del Lema 3.3.5.

La idea es ver que si se perturba como permite el Lema, las foliaciones se mantienen cerca.

Es para eso que se utiliza la distancia C^0, porque la idea es que si una hoja de la foliación estable pasa por p y q nos basta que al perturbar, la hoja por p pase cerca de q.

Esto es posible, pues tomando una centro inestable V por q, eligiendo una distancia C^0 pequeña entre f y g se logra que $d(g^n(p), g^n(V))$ sea suficientemente pequeña para n grande y como V es centro inestable, se logra un punto de la estable de p cerca de q como se quería.

Para ver que este argumento es semi local, lo importante a observar es que lo único que se utiliza de la globalidad, es que las foliaciones sigan definidas para los iterados de V . En particular, este argumento funciona para un compacto invariante K parcialmente hiperbólico, contenido en un abierto invariante U también parcialmente hiperbólico (esto es lo que vamos a asegurar para poder aplicar estos argumentos al caso de interés).

$\square$

Esbozo de Demostración del Lema 3.3.6. Esta representa la parte más difícil de la prueba y es donde se realizan las perturbaciones para llegar de un lado al otro de los discos centrales. Las perturbaciónes, como es razonable esperar, van a ser todas locales (en entornos de los discos centrales, y ahi es que se utiliza que demoran en retornar).

Si bien son perturbaciones locales, los argumentos utilizan los arcos estables e inestables y sus iterados, por lo cual también para que funcionen los argumentos se necesitará de una hipótesis que asegure que los arcos estables e inestables no "salgan" del lugar donde estan definidos (basta lo mismo que en el Lema anterior).

$\square$

3.3.3. Prueba en el caso parcialmente hiperbólico en toda la variedad

Vamos a asumir primero que toda la variedad admite la descomposición invariante parcialmente hiperbólica. En este caso, gracias al resultado de Dolgopyat y Wilkinson (ver sección 3.3.2), podemos suponer (dado que asumimos que el difeomorfismo es genérico) que es establemente accesible.

Ahora, basta aplicar el Argumento de Brin (Proposición 3.3.2) para concluir que el conjunto no errante es toda la variedad dado que sabemos que todo punto en el interior de la clase homoclínica es no errante y el Argumento de Brin nos da que la clase homoclínica es saturada por sus estables e inestables, por lo tanto, por ser accesible, la única posibilidad es que sea toda la variedad y por lo tanto, f transitivo.

3.3.4. Prueba en el caso general

La idea es adaptar el argumento anterior para el caso local, esta vez, haciendo un más fuerte uso de las propiedades genéricas. Escencialmente, utilizaremos el hecho de que la clase es estable Lyapunov tanto para f como para f^{-1} para conseguir aplicar el argumento de Dolgopyat y Wilkinson. Al mismo tiempo, utilizaremos la continuidad de la clase, de forma tal de mostrar que si esta no es toda la variedad, la podemos hacer "explotar" mediante pequeñas perturbaciones utilizando la accesibilidad local.

Primero, necesitamos un resultado que nos permita aplicar el Teorema de Dolgopyat y Wilkinson en nuestro contexto, por lo visto en la sección 3.3.2 basta ver que dado un conjunto parcialmente hiperbólico H, invariante y estable Lyapunov para f y f^{-1} (recordar que por el Corolario 2.4.2 las clases homoclinicas con interior son estables Lyapunov para f y f^{-1}) existe un entorno compacto U, f-invariante y parcialmente hiperbolico de H.

Lema 3.3.7. *Sea H un conjunto compacto y f invariante que es estable Lyapunov para f y f^{-1}. Entonces, para todo V entorno de H existe un entorno compacto U de H, de forma tal que $H \subset U \subset V$ y U es f-invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea W entorno compacto de H contenido en el interior de V. Usando la estabilidad Lyapunov de H para f, tenemos un entorno W_1 (también lo podemos suponer compacto) contenido en W y tal que $f^n(W_1) \subset W$ para todo n positivo. Sea $W_2 = \bigcup_{n>0} f^n(W_1)$. Ahora, por la estabilidad Lyapunov de f^{-1} hay un entorno compacto W_3 cuya órbita pasada no se sale de W_2, y como por definición la orbita futura de W_2 esta en W_2, tenemos que la órbita completa de W_3 está contenida en W_2. Entonces, el conjunto U buscado es $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(W_3)}$.

□

Completemos entonces la prueba del Teorema. Sea H una clase homoclínica con interior admitiendo una descomposición parcialmente hiperbólica fuerte. Sea V un entorno de H forma tal que todo punto cuya órbita se mantenga en V se le pueda definir la descomposición parcialmente hiperbólica (V es un entorno adaptado, ver Apéndice). Ahora, sea U un entorno compacto invariante contenido en el interior de V y K otro entorno compacto invariante contenido en el interior de U. Por ser f un difeomorfismo genérico, podemos suponer que la clase homoclínica H varia continuamente, por lo cual, hay un entorno $\mathcal{U}$ de f para el cual $H_g \subset int(K)$ $\forall g \in \mathcal{U}$. Podemos suponer que $\mathcal{U}$ verifica que también todo $g \in \mathcal{U}$ es parcialmente hiperbólico en cualquier compacto invariante contenido en V. Ahora, el resultado de Dolgopyat Wilkinson en este contexto implica que existe un abierto y denso de $\mathcal{U}$ de forma tal que para todo g en ese abierto y denso, hay accesibilidad estable a todos los puntos de U. Esto nos lleva a un absurdo pues entonces, para g cerca de f conseguimos que H_g no esté contenida en K, utilizando nuevamente el argumento de Brin.

3.4. Clases homoclinicas aisladas

En esta sección vamos a probar el siguiente resultado de [ABD]

Teorema 3.4.1. *Genéricamente, si una clase homoclínica tiene interior, entonces es salvaje (i.e. es acumulada por infinitas clases homoclínicas), o es toda la variedad.*

Como en el caso parcialmente hiperbólico, este resultado también tiene una versión global cuya prueba es más sencilla, pero en este caso, la versión global se basa en un resultado de [CM] que asegura que para los difeomorfismos genéricos con finitas clases homoclínicas (los difeomorfismos de $\mathcal{T}$ ver Teorema 2.3.5) se cumple que hay finitos atractores y repulsores y sus cuencas forman un abierto y denso de la variedad. De esa forma, es fácil probar que en el caso de $f \in \mathcal{T}$, si hay una clase homoclínica con interior entonces es toda la variedad. Esto se debe, a que por tener interior, y el resultado de [CM], la clase tiene que ser un atractor y un repulsor simultaneamente, eso implica que es toda la variedad, ya que si no lo fuera, tendrían que haber entornos U y V de forma tal que $H = \bigcap_{n>0} f^n(U) = \bigcap_{n<0} f^n(V)$ y que $f(\overline{U}) \subset U$ y $f^{-1}(\overline{V}) \subset V$. Claramente, si H no es todo, tiene que existir un punto en $U \backslash V$ que al futuro tiene que caer en V que contradice que $f^{-1}(V) \subset V$.

Naturalmente, la hipótesis global, si bien ayuda a pensar el problema, no debería afectar el resultado en si, ya que no tendría sentido pensar que la existencia de la clase homoclínica con interior está "generando" clases salvajes en otra parte de la variedad.

En este caso, la prueba general no es tanto más difícil utilizando el Teorema 2.4.3 probado en [BC].

Demostración. Supongamos que H no es toda la variedad. Como H es una clase homoclínica genérica con interior, es estable Lyapunov para f y f^{-1} con lo cual, el Teorema 2.4.3 nos asegura que H es un quasi atractor y un quasi repulsor simultaneamente. Por lo tanto, existen sucesiones de entornos $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ que cumplen que $f(\overline{U_n}) \subset U_n$, $f^{-1}(\overline{V_n}) \subset V_n$ y se cumple que $H = \bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n$.

Se puede suponer (tomando subfamilias de $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$) que se cumple que $\overline{V_{n+1}} \subset U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset V_n \ \forall n$.

Sea $D_n = \overline{U_n} \backslash V_n$, tienen interior no vacío y son compactos, disjuntos y se cumple que $f(D_n) \subset int(D_n)$. Por lo tanto, como f es genérico y en D_n hay puntos no errantes, tiene que haber un punto periódico p_n en D_n y por la invariancia de los D_n las clases homoclínicas de p_n son distintas para todo n.

□

Capítulo 4

Clases homoclínicas con interior. Dimensiones bajas

4.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos algunos resultados que tienen que ver con la Conjetura 1 en dimensiones bajas (dimensión dos y tres). Los resultados de esta sección tienen que ver con los resultados en [PoS], la diferencia radica fundamentalmente en que los resultados aquí presentados tienen menos prerequisitos al mismo tiempo que son menos generales. Una excepción es el Teorema 4.5.1 que no aparece en [PoS] y su prueba si utiliza prerequisitos que no aparecen antes en esta tesis.

Primero estudiaremos algunas propiedades de la descomposición dominada de codimensión uno, siguiendo [PS3] y [LS] y sacaremos algunas conclusiones generales para clases homoclínicas con interior que admiten una descomposición dominada de codimensión uno. Luego, pasaremos al caso de dimensión dos y tres, donde las clases con interior no vacío siempre admiten dicha descomposición y probaremos la conjetura en dimensión dos (esto también fue hecho, con otra prueba en [ABCD]) y en dimensión tres cuando se tiene descomposición dominada en tres subfibrados (esto tiene como corolarios, por ejemplo, que lejos de tangencias la conjetura es cierta, o que si no hay periódicos con valores propios complejos también).

La prueba en dimensión tres, tiene como paso importante probar que no hay puntos periódicos en el borde de la clase, y se espera pueda servir para terminar de probar la conjetura en dimensión 3. La dificultad en el caso de que haya valores propios complejos tiene que ver con el hecho de que hay un fibrado de la descomposición dominada que tiene dimensión 2 y es indescomponible con lo cual es muy difícil trabajar. De hecho, al momento, el autor no conoce trabajos en los cuales se deduzcan propiedades dinámicas cuando se posee un fibrado extremal no hiperbólico de dimensión dos o mayor.

4.2. Descomposición dominada de codimensión uno

4.2.1. Propiedades de Denjoy

En esta sección estudiaremos el trabajo [PS3], en particular estaremos interesados en el Teorema 3.1 de ese trabajo. Este Teorema es una generalización a dimensiones mayores de un resultado de [PS1] que contiene, escencialmente las ideas de la prueba. Las mismas ideas también se encuentran trabajadas en [Pot] (en dimensión dos, pero los argumentos son muy similares) por lo cual simplemente se esbozarán las ideas.

La idea es estudiar el conjunto límite de un arco que integre el fibrado que tiene dimensión uno cuando se cuenta con dicha descomposición dominada.

Supongamos que tenemos un conjunto invariante Λ con descomposición dominada $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$ donde $dim(E^2) = 1$. Si tenemos un arco que integre la dirección E^2, sería esperable, por la descomposición dominada, que, o bien se "agrande" al iterarlo hacia el futuro y se comporte como "variedad inestable", o bien se mantenga pequeño, pero en dicho caso, debería aparecer algún conjunto atractor (pues la dominación nos da que si E^2 no contrae al pasado, entonces E^1 debe contraer mucho hacia el futuro). Es sobre eso exactamente que trata el Teorema 3.1 de [PS3].

Antes, recordemos que un conjunto con descomposición dominada, admite un entorno adaptado, es decir, un entorno de forma tal que todo compacto invariante dentro de el admite descomposición dominada (ver [BDV]).

Sea I un arco que integra el fibrado E^2. Si este no fuese inestable (es decir $\ell(f^{-n}(I)) \to 0$) entonces, se podría encontrar un arco que integre a E^2 y no crezca al futuro. Esto se puede ver asi, si $\ell(f^{-n}(I)) \nrightarrow 0$, existe una sucesión que se mantiene mayor que cierto δ. Llamemosle a esos arcos $I_{n_k} = f^{-n_k}(I)$. Se puede conseguir (ver Lema 3.4.6 de [Pot]) entonces un arco J que integre a E^2 y se mantenga pequeño al futuro tomando límites de los arcos I_{n_k} (obviamente, si se mantienen suficientemente cerca, también se puede suponer que el arco se mantendrá en el entorno adaptado).

Teniendo un arco que integra el fibrado E^2 y se mantiene de longitud acotada hacia el futuro, no es difícil, mediante el uso de la dominación, conseguir probar que la contracción en el fibrado E^1 va a ser uniforme (ver Lema 3.4.5 de [Pot]) y por lo tanto, los puntos en dicho arco, tendrán variedades estables fuertes (que integran el fibrado E^1) de tamaño uniforme. Con lo cual, teniendo un arco I que integra el fibrado E^2 y se mantiene de longitud acotada hacia el futuro, se encuentra que el conjunto $W^{ss}_{\varepsilon}(f^n(I)) = \bigcup_{x\in f^n(I)} W^{ss}_{\varepsilon}(x)$ está bien definido y es un abierto.

Definimos, para un arco $I \subset M$ el conjunto $\omega(I) = \bigcup_{x\in I} \omega(x)$.

Teorema 4.2.1 ([PS3]). *Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y Λ un compacto invariante que admite una descomposición dominada de codimensión uno $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$ (donde $dim(E^2) = 1$). Entonces, existe δ_0 de forma tal que si I es un intervalo que integra el fibrado E^2 y cumple que $\ell(f^n(I)) < \delta < \delta_0$ $\forall n \geq 0$ y su órbita se mantiene en un entorno adaptado de Λ, el conjunto límite de I verifica una de las siguientes posibilidades:*

1. *$\omega(I) \subset \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es una curva periodica simple y cerrada normalmente atractora y de forma tal que $f^m|_{\mathcal{C}}$ tiene número de rotación irracional.*
2. *Existe un arco periódico normalmente atractor J de forma tal que $I \subset W^s(J)$ y $f^m|_J$ es la identidad.*
3. *$\omega(I)$ esta contenido en el conjunto de puntos periódicos de f restricto al entorno adaptado de Λ y además alguno de los puntos periódicos es semi-atractor (atrae un abierto) o atractor hiperbólico.*
4. *Ninguna de las anteriores e I es errante (es decir, $W^{ss}_{\varepsilon}(f^n(I)) \cap W^{ss}_{\varepsilon}(f^m(I)) = \emptyset$ para $n \neq m$).*

La idea de la prueba es la siguiente, si I no es errante, entonces, existe n y m tal que $W^{ss}_{\varepsilon}(f^n(I)) \cap W^{ss}_{\varepsilon}(f^m(I)) \neq \emptyset$, entonces, tomando $f^{(n-m)k}(I)$ converjen a la misma cosa, pues $f^{(n-m)}(I)$ corta la estable de I, entonces los puntos límites serán iguales.

Por un lado, si $\ell(f^n(I)) \to 0$, entonces, el ω-límite de I será un punto periódico semi-atractor o atractor. Si no, entonces $f^n(I)$ converjerá a algun arco L, tomando $\bigcup_k f^{(n-m)k}(L)$ obtendremos una curva normalmente atractora. Si es un círculo, si tiene puntos periódicos, alguno va a ser semiatractor o atractor, si no, tendrá numero de rotación irracional. Analogamente, si es un arco, y la dinámica no es la identidad, alguno de los puntos fijos va a ser semiatractor o atractor.

En el caso genérico, el resultado adquiere una forma bastante más compacta.

Corolario 4.2.2. *Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ un difeomorfismo genérico y Λ un compacto invariante que admite una descomposición dominada de codimensión uno $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$ (donde $dim(E^2) = 1$). Entonces, existe δ_0 de forma tal que si I es un intervalo que integra el fibrado E^2 y cumple que $\ell(f^n(I)) < \delta < \delta_0$ $\forall n \geq 0$ y su órbita se mantiene en un entorno adaptado de Λ, el conjunto límite de I verifica una de las siguientes posibilidades:*

1. *$\omega(I)$ esta contenido en el conjunto de puntos periódicos de f restricto al entorno adaptado de Λ y además alguno de los puntos periódicos es un atractor hiperbólico (pozo).*

2. *Ninguna de las anteriores e I es errante. En este caso, $\ell(f^n(I)) \to 0$.*

Demostración. Como las opciones 1. y 2. no son genéricas (un círculo normalmente atractor con número de rotación irracional tiene puntos no errantes aislados de los puntos periódicos y la identidad en un intervalo tiene puntos fijos no hiperbolicos) y los puntos periódicos semiatractores genéricos son pozos, lo único que hay que probar es que si I es errante, entonces su longitud tiende a cero. Esto se debe a que si no lo hiciera, existiría una subsucesión $\ell(f^{n_j}(I)) \geq \gamma$. Sea una subsucesión de $f^{n_j}(I)$ que converja, claramente, cuando esten suficientemente cerca uniformemente, como ambas integran E^2, sus estables van a ser suficientemente paralelas y es claro que eso implica que se tienen que cortar, llegando a un absurdo.

$\square$

4.2.2. Integrabilidad y propiedades dinámicas de los fibrados de dimensión uno

En esta sección presentaremos algunos resultados obtenidos por Pablo Lessa y Martín Sambarino sobre las propiedades dinámicas de las curvas que integran un fibrado de dimensión uno extremal en una descomposición dominada (ver [Less, LS]).

Primero, vamos a enunciar un Teorema clásico de [HPS] (Teorema 5.5). El Teorema no es exactamente el que enunciaremos, pero en la prueba se puede apreciar que lo que se está probando es el siguiente Teorema (de hecho, esto es aclarado por los autores al final de la prueba, ver también [M1], Proposition 2.3). Sea $I^k_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)^k$ y $Emb^1(I^k_1, M)$ el conjunto de los encajes de I^k_1 en M con la topología C^1.

Teorema 4.2.3 ([HPS])**.** *Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y Λ un compacto invariante que admite una descomposición dominada $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$, con $dim(E^2) = k$. Entonces, existe una función continua $\varphi^2 : \Lambda \to Emb^1(I^k, M)$ de forma tal que si definimos $W^2_\varepsilon(x) = \varphi^2(x)(I^k_\varepsilon)$ entonces:*

1. *$T_x W^2_\varepsilon(x) = E^2(x)$*

2. *Para todo $0 < \varepsilon_1 < 1$ existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $f^{-1}(W^2_{\varepsilon_2}(x)) \subset W^2_{\varepsilon_1}(f^{-1}(x))$*

En particular, para todo ε_1 existe δ de forma tal que si se tienen dos puntos x, y tal que $y \in W^2_{\varepsilon_1}(x)$ y se cumple que $d(f^{-j}(y), f^{-j}(x)) < \delta$ para todo $0 \leq j \leq n$ entonces, $f^{-j}(y) \in W^2_{\varepsilon_1}(f^{-j}(x))$ $\forall 0 \leq j \leq n$.

Teniendo en cuenta este Teorema, los resultados de la sección anterior y la dinámica genérica, Lessa y Sambarino consiguen probar el siguiente Teorema:

Teorema 4.2.4. *Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ un difeomorfismo genérico y Λ un compacto invariante que admite una descomposición dominada $T_\Lambda M = E^1 \oplus E^2$, con $dim(E^2) = 1$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe δ de forma tal que para todo $x \in \Lambda$ se cumple que*

$$f^{-n}(W^2_\delta(x)) \subset W^2_\varepsilon(f^{-n}(x)) \qquad \forall n \geq 0$$

En particular, $W^2_\delta(x) \subset W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M \ : \ d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \varepsilon \ \forall n \geq 0\}$.

Es importante no confundir la notación $W^u_\varepsilon(x)$ (ver la definición en el enunciado del Teorema). Dicha notación es usual en el sentido que es así que se define el conjunto inestable ε de un punto, pero en general, en los contextos que es utilizada vale también que los puntos de $W^u_\varepsilon(x)$ son también asintóticos a la órbita de x en el pasado, cosa que no ocurre necesariamente en este caso. En la sección siguiente veremos que esto sí ocurre en el caso genérico cuando se tiene una clase homoclínica con interior y descomposición dominada de codimensión uno, para eso introduciremos la notación $W^{uu}_\varepsilon(x)$.

4.3. Clases homoclínicas con interior, algunas propiedades

En esta sección probaremos algunas propiedades que poseen las clases homoclínicas con interior de difeomorfismos genéricos. Daremos alguna propiedad general, pero nos concentraremos fundamentalmente en el caso de tener descomposición dominada de codimensión uno. Como Corolario de una de estas propiedades, probaremos la Conjetura 1 en dimensión dos.

Antes de comenzar, enunciaremos el siguiente Lema de Franks (ver [F, Pot]) que es una herramienta muy útil de perturbación en la topología C^1:

Teorema 4.3.1 (Lema de Franks [F])**.** *Sea $f \in Diff^1(M)$. Dado $\mathcal{U}(f)$ entorno C^1 de f, $\exists \mathcal{U}_0(f)$ y $\varepsilon > 0$ tal que si $g \in \mathcal{U}_0(f)$, $\theta = \{x_1, \dots, x_m\}$ y*

$$L : \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{x_i}M \to \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{g(x_i)}M \quad \textit{tal que} \quad \left\| L - Dg|_{\bigoplus T_{x_i}M} \right\| < \varepsilon$$

Entonces, existe $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$ tal que $D\tilde{g}_{x_i} = L|_{T_{x_i}M}$ (eso ya implica que $g(x_i) = \tilde{g}(x_i)$) y si R es un conjunto compacto disjunto de θ se puede considerar $\tilde{g} = g$ en R.

Denotaremos $\pi(p)$ como el período de un punto periódico p.

Empezamos por mostrar que para una clase homoclínica con interior, los puntos periódicos tienen algun tipo de hiperbolicidad en el período.

Lema 4.3.2. *Sea H una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f. Entonces, existe $\lambda < 1$ de forma tal que para todo $p \in Per(f|_H)$, se tiene que $\|D_p f^{k\pi(p)}\| \geq \lambda^{-k\pi(p)}$ $\forall k \geq 1$, o lo que es lo mismo, el mayor valor propio de $Df^{\pi(p)}$ es mayor que $\lambda^{-\pi(p)}$.*

Demostración. Primero veamos algunas propiedades elementales de transformaciones lineales y sus normas. La primeras dos son muy elementales y dan escencialmente el vínculo entre los valores propios y la norma de una transformación lineal , la tercera permitirá utilizar el Lema de Franks.

1. Si γ es el mayor valor propio de $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ entonces $\|T^k\| \geq \gamma^k$ pues $\|T^k\| = \sup \frac{\|T^k v\|}{\|v\|}$ y como un vector propio v_0 asociado a γ cumple $Tv_0 = \gamma v_0$ se tiene $\frac{\|T^k v_0\|}{\|v_0\|} = \gamma^k$.

2. Si γ es el mayor valor propio de $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ y cumple que $\gamma < \lambda_1$, entonces, existe n_0 de forma tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $\|T^n\| < \lambda_1^n$ ([1]).

3. Si $T = T_k \cdots T_1$ con $T_i : E_i \to E_{i+1}$ donde $E_i \cong \mathbb{R}^k$ y $E_{k+1} = E_1$ es una transformación lineal de forma tal que $\gamma = \alpha^k$ es el mayor valor propio de T, entonces, si $\alpha = 1 + \varepsilon/2$ entonces la transformación lineal $\tilde{T} = \tilde{T}_k \cdots \tilde{T}_1$ donde $\tilde{T}_i = \frac{1}{1+\varepsilon} T_i$ es una transformación lineal contractiva ([2]).

Entonces, vamos a probar que existe un $\lambda \in (0,1)$ de forma tal que para todo $p \in Per(f|_H)$ se cumple que el mayor valor propio de $D_p f^{\pi(p)}$ es mayor o igual a $\lambda^{-\pi(p)}$, por 1) esto prueba el Lema.

Supongamos que eso es falso, entonces, para todo $\lambda < 1$ existe $p \in Per(f|H)$ de forma tal que el mayor valor propio de $D_p f^{\pi(p)}$ es menor que $\lambda^{-\pi(p)}$.

Sea U un abierto de forma tal que $\overline{U} \subset int(H)$. Como f es genérico, la Proposición 2.5.1 nos asegura que existe $\mathcal{U}$ entorno de f de forma tal que para todo g en un residual de $\mathcal{U}$ se cumple que $U \subset H_g$ (H_g la continuación de H para g).

El Lema de Franks implica que existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que si fijamos una cantidad finita de puntos cualquiera, podemos perturbar el difeomorfismo f en un entorno arbitrariamente

[1] Esta propiedad es muy sencilla y tiene que ver con la forma canónica de Jordan de las matrices.

[2] Esto es bien simple pues $\tilde{T}_i = \frac{1}{1+\varepsilon} Id_{E_{i+1}} T_i$ entonces, $\tilde{T} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^k} T$ pues se cumple la conmutación $\frac{1}{1+\varepsilon} Id_{E_{i+1}} T_i = T_i \frac{1}{1+\varepsilon} Id_{E_i}$. Por lo tanto, como los vectores propios son los mismos, los valores propios se encontrarán multiplicados por $\frac{1}{(1+\varepsilon)^k}$ y por lo tanto serán todos contractivos.

pequeño de los puntos, manteniendonos en $\mathcal{U}$ y de forma que la derivada en esos puntos sea la que se desee siempre que este a menos de ε de la original.

Elijamos $1 < \lambda^{-1} < 1 + \varepsilon/2$ y sea $p \in Per(f|_H)$ de forma tal que el menor valor propio de $D_p f^{\pi(p)}$ es menor o igual que $\lambda^{-\pi(p)}$. Como f es genérico, los puntos periódicos de igual índice que p son densos en H, por lo tanto, tenemos $q \in U \cap Per(f)$ de igual índice que p, y en particular, homoclínicamente relacionado con este.

Sea $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ y $y \in W^s(q) \cap W^u(p)$, con lo cual, el conjunto $\Lambda = \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q) \cup \mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}(y)$ es hiperbólico (basta considerar como espacios invariantes los tangentes a las variedades estables e inestables, y como las órbitas de x e y tienden a las de p y q la hiperbolicidad es inmediata).

Para β arbitrario sea $\{f^{-N}(y), \dots, f^n(y), f^{-n}(x), \dots f^N(x)\}$ una β pseudo órbita cerrada en Λ que denotaremos como $\wp_n^N$. Es claro que dado $\beta > 0$ existe n_0 de forma tal que si $N > n > n_0$ entonces la pseudo órbita elegida es una β pseudo órbita. Al mismo tiempo, eligiendo N suficientemente grande con respecto a n, podemos hacer que la pseudo órbita se mantenga cerca de la órbita de p por un tiempo arbitrariamente largo en comparación con el resto de la órbita.

También se cumple, que para todo $\alpha > 0$ existe β de forma tal que una β-pseudo órbita periódica, es α-sombreada por un punto periódico (por el Shadowing Lemma para conjuntos hiperbólicos, ver [Sh2] o el apéndice de este trabajo). Elijamos entonces α de forma tal que:

(a) $B_{2\alpha}(q) \subset U$.

(b) Si $d(f^i(x), f^i(y)) < 2\alpha$ $\forall 0 \leq i \leq \pi(p) - 1$ entonces, $\frac{\|Df_x^{\pi(p)}\|}{\|Df_y^{\pi(p)}\|} < 1 + c$ (c lo elegiremos después).

Sea $\beta < \alpha$ dado por el Shadowing Lemma para dicho α y n_0 de forma tal que $\forall j > n_0$, $f^j(x)$ y $f^{-j}(y)$ están en $B_{\beta/2}(p)$ y $f^j(y)$ y $f^{-j}(x)$ están en $B_{\beta/2}(q)$.

Por la propiedad 2) de las transformaciones lineales se cumple que considerando $\lambda_1 = 1 + 3\varepsilon/4$ podemos conseguir, si l_0 suficientemente grande, que $\|Df_p^{l_0\pi(p)}\| < \lambda_1^{l_0\pi(p)}$.

Consideramos N y c verificando que (con $k \geq \sup_{x \in M} \|Df_x\|$)

$$\left(\prod_{j=n_0}^{N} (1+c)^{\pi(p)} \|Df_p^{l_0\pi(p)}\| \right)^2 k^{4n_0} \leq (1+\varepsilon)^{4n_0 + 2Nl_0\pi(p)}$$

Estos valores existen pues si c es pequeño, y N mucho más grande que n_0 se cumple que, dado que $(1+c)\lambda_1 < 1 + \varepsilon$ se consigue lo deseado ([3]).

[3]Una forma sencilla de ver esto es la siguiente propiedad de analisis básico, si $a < 1 + \varepsilon$ y $K > 0$ fijo,

Teniendo esto, consideramos la β-pseudo órbita $\wp_{n_0}^{Nl_0\pi(p)+n_0}$ que será sombreada por una órbita periódica r, que por como elegimos α va a verificar que tiene período $4n_0 + 2Nl_0\pi(p)$, pasa por U y verifica que

$$\|Df_r^{\pi(r)}\| < (1+\varepsilon)^{\pi(r)}$$

Esto implica, por la propiedad 1) de transformaciones lineales, que su mayor valor propio es menor que $(1+\varepsilon)^{\pi(r)}$. Ahora, componiendo en la órbita de r sus derivadas con homotecias de razón $(1+\varepsilon)^{-1}$ y teniendo en cuenta la propiedad 3) de transformaciones lineales que mencionamos. conseguimos, mediante el Lema de Franks construir un pozo en U, lo cual contradice la Proposición 2.5.1 pues el pozo es persistente, entonces habrá algun mapa en el residual con un pozo en U, una contradicción.

$\square$

De ahora en más, nos concentraremos en el caso de descomposición dominada de codimensión uno. Lo primero que probaremos, es que para una clase homoclínica con interior, los fibrados unidimensionales extremales se integran dando lugar a variedades con propiedades dinámicas, en particular, también son únicamente integrables.

Lema 4.3.3. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f que admite descomposición dominada de codimensión uno $T_HM = E^1 \oplus E^2$ con $dim(E^2) = 1$. Entonces, existe ε y δ de forma tal que para todo $x \in H$ se cumple que $W^2_\delta(x) \subset W^{uu}_\varepsilon(x) = \{y \in W^u_\varepsilon(x) \quad : \quad d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \to 0\}$*

Demostración. Primero vamos a ver que la tesis del Lema se cumple para los puntos periódicos, y utilizando eso, vamos a ver que se cumple en general. Utilizaremos ε de forma tal que $B_\varepsilon(H)$ este contenida en el entorno adaptado de H, y de forma tal que si dos puntos tienen su orbita a menos de ε entonces el cociente de las normas de sus diferenciales es mayor que λ dado por el Lema 4.3.2 ([4]). Sea δ asociado a ε por el Teorema 4.2.4.

Dado que simplifica los cálculos, utilizaremos también la norma adaptada dada por [Gou1] que nos dice que existe una métrica en el tangente y $\gamma \in (0,1)$ tal que $\|Df|_{E^1}\| < \gamma \|Df|_{E^2}\|$

entonces, existe l de forma tal que $Ka^l < (1+\varepsilon)^{l+1}$ dado que, como $(\frac{a}{1+\varepsilon})^l \to 0$ existe alguno de forma tal que es menor que $\frac{1+\varepsilon}{K}$.

[4]Esto es, para el λ dado por el Lema 4.3.2, si $d(x,y) < \varepsilon$, entonces

$$\frac{\|Df_x\|}{\|Df_y\|} < \lambda^{-1}$$

(observamos que podemos pasar multiplicando ya que gracias a que E^2 es unidimensional se tiene $\|Df^{-1}|_{E^2}\| = \|Df|_{E^2}\|^{-1}$).

Sea p un punto periódico para el cual hay un $y \in W^2_\delta(p)$ para el cual $d(f^{-n}(y), f^{-n}(p)) \nrightarrow 0$. El Teorema de Hartman Grobman (ver [Sh2] o el Apéndice de este trabajo) implica, dado que p no es un pozo, que el conjunto de puntos de $W^2_\delta(p) \cap W^{uu}_\varepsilon(p)$ es abierto en $W^2_\delta(p)$ y contiene a p.

Como $W^2_\delta(p)$ es de dimensión uno y $W^2_\delta(p) \cap W^{uu}_\varepsilon(p) \neq W^2_\delta(p)$, hay un punto z_0 en una de las componentes conexas de $W^2_\delta(p)\backslash\{p\}$ (llamemosle I_δ) que es el primero que no está en $W^{uu}_\varepsilon(x)$. Como $f^{2\pi(p)}(I_\delta) \subset W^2_\varepsilon(p)$ (esto es por el Teorema 4.2.4) e intersecta I_δ, ese primer punto tiene que ser fijo para $f^{2\pi(p)}$ ya que $I_\delta \cap W^{uu}_\varepsilon(p)$ es un intervalo abierto invariante que contiene a z_0 en el borde y $f^{2\pi(p)}(z_0) \notin I_\delta \cap W^{uu}_\varepsilon(p)$. Dado que f es genérico, z_0 tiene que ser un punto periódico hiperbólico. Como atrae puntos de $W^2_\delta(p)$, y como su órbita queda en el entorno adaptado de H, tiene descomposición dominada de codimensión uno, por lo tanto, dado que en la dirección E^2 contrae, es un pozo.

Como $d(f^i(p), f^i(z_0)) < \varepsilon$ (por el Teorema 4.2.4) entonces, si $k \geq 1$ tenemos

$$\|Df_p^{2k\pi(p)}|_{E^2}\| = \prod_{i=0}^{2k\pi(p)-1} \|Df_{f^i(p)}|_{E^2}\| < \lambda^{-2k\pi(p)} \prod_{i=0}^{2k\pi(p)-1} \|Df_{f^i(z_0)}|_{E^2}\| =$$
$$= \lambda^{-2k\pi(p)} \|Df_{z_0}^{2k\pi(p)}|_{E^2}\| < \lambda^{-2k\pi(p)}$$

pues $\|Df_{z_0}^{2k\pi(p)}|_{E^2}\| < 1$. Como $\|Df_x|_{E^1}\| < \gamma \|Df_x|_{E^2}\|$ $\forall x$ (con $\gamma < 1$) se cumple entonces que el mayor valor propio de $Df^{2\pi(p)}$ no puede ser mayor que $\lambda^{-2\pi(p)}$ contradiciendo el Lema anterior.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in H$ y un pequeño arco $I \subset W^2_\delta(x)$ conteniendo a x de forma tal que $\ell(f^{-n}(I)) \nrightarrow 0$. Ya sabemos, por el Teorema 4.2.4 que $\ell(f^{-n}(I)) \leq \varepsilon$ entonces, tomando $n_j \to +\infty$ tal que $\gamma \leq \ell(f^{-n_j}(I)) \leq \varepsilon$ podemos tomar límite de estos arcos (ver Lema 3.4.6 de [Pot]) obteniendo un arco J que integra el fibrado E^2 de forma tal que $\ell(f^n(J)) \leq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ y conteniendo un punto $z \in J \cap H$ (un punto límite de $f^{-n_j}(x)$).

Ahora, podemos utilizar el Corolario 4.2.2 para llegar a un absurdo. Es fácil ver que la primera opción no puede ocurrir porque contradeciría lo probado para los puntos periódicos (en caso que $\omega(J) \cap H$ sea un periódico silla, va a tener su inestable va a tener longitud pequeña).

Por otro lado, si J es errante, tenemos que no puede ser acumulado por puntos periódicos (pues tiene variedades estables de tamaño uniforme). Dado que f es genérico, para llegar a un absurdo basta ver que los puntos de J son recurrentes por cadenas (Teorema 2.2.1). Por el Corolario 4.2.2, siendo J errante, se tiene que $\ell(f^n(J)) \to 0$ ($|n| \to +\infty$), entonces, como $z \in H \cap J$, fijado ϵ, y $y \in J$ tenemos que para algun iterado futuro k_1 y uno pasado $-k_2$, $f^{k_1}(y)$ está a menos de ϵ de $f^{k_1}(z)$ y $f^{-k_2}(y)$ está a menos de ϵ de $f^{-k_2}(z)$. Como las clases homoclinicas son clases de recurrencia, hay una ϵ pseudo orbita de $f^{k_1}(z)$ a $f^{-k_2}(z)$ y por lo tanto, y es recurrente por cadenas y por lo tanto está acumulado por puntos periódicos y J no puede ser errante.

□

Como Corolario de las propiedades dinámicas de W^2, tenemos que es únicamente integrable.

Corolario 4.3.4. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f que admite decomposición dominada de codimensión uno $T_H M = E^1 \oplus E^2$ con $dim(E^2) = 1$. Entonces, E^2 es unicamente integrable*

Demostración. Es directo a partir de que estan dinámicamente definidas y la descomposición dominada. Ver Lema 3.4.2 de [Pot] (si bien es en dimensión dos, la prueba es idéntica en el caso de codimensión uno).

□

Otro corolario, que nos permitirá utilizar el argumento de Brin es el siguiente:

Corolario 4.3.5. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f que admite decomposición dominada de codimensión uno $T_H M = E^1 \oplus E^2$ con $dim(E^2) = 1$. Entonces, para todo $L > 0$ y $l > 0$ existe n_0 de forma tal que si I es un arco compacto que es tangente al fibrado E^2 en todos sus puntos y tiene longitud menor que L, $\ell(f^{-n}(I)) < l \ \forall n > n_0$.*

Demostración. Primero es fácil observar que para cualquier arco compacto tangente a E^2 en todos sus puntos su longitud irá a cero en el pasado (basta tomar un cubrimiento finito donde es inestable que existe por el Lema 4.3.3).

Supongamos entonces que existe $L > 0$ y $l > 0$ de forma tal que para todo $j > 0$ existe un arco I_j, tangente al fibrado E^2 y de longitud menor que L, y $n_j > j$ de forma tal que $\ell(f^{-n_j}(I_j)) > l$. Como si "alargamos" un poco I_j la propiedad se seguirá cumpliendo, podemos suponer que $\ell(I_j) \in (L/2, L)$.

Podemos suponer (quizas tomando subsucesiones) que I_j converje uniformemente a un arco J que integra E^2 y verifica $L/2 \leq \ell(J) \leq L$ (ver, por ejemplo, el Lema 3.4.6 de [Pot]).

Como la longitud de L es finita e integra el fibrado E^2 sabemos que $\ell(f^{-n}(J)) \to 0$ con $n \to +\infty$.

Sea $\varepsilon = l/2$ y δ dado por el Teorema 4.2.4 que nos dice que $W^2_\delta(x) \subset W^u_\varepsilon(x)\ \forall x$.

Sea n_0 de forma tal que $\forall n \geq n_0$ se cumple que $\ell(f^{-n}(J)) < \delta/4$. Sea también γ suficientemente pequeño ([5]) de forma tal que si $x \in B_\gamma(J)$ entonces $d(f^{-k}(x), f^{-k}(J)) < \delta/4$ $\forall 0 \leq k \leq n_0$.

Si ahora consideramos j suficientemente grande (en particular $j > n_0$) de forma tal que $I_j \subset B_\gamma(J)$ obtenemos que $\ell(f^{-n_0}(I_j)) < \delta$ y por lo tanto $\ell(f^{-n}(I_j)) < \varepsilon < l\ \forall n \geq n_0$, con lo cual $n_j < n_0$ lo cual resulta absurdo pues supusimos $j > n_0$ y $n_j > j$ por construcción.

□

Lema 4.3.6. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f que admite descomposición dominada de codimensión uno $T_H M = E^1 \oplus E^2$ con $dim(E^2) = 1$. Entonces, $int(H)$ y ∂H son saturados por las variedades $W^2(x)$ (es decir, para todo $x \in int(H)$ (resp. ∂H), se cumple que $W^2_\varepsilon(x) \subset int(H)$ (resp. ∂H).*

Demostración. Basta probarlo para el interior, porque a partir de eso se deduce en el borde ya que H es cerrada, y las variedades varian continuamente (observar que la variedad de un punto del borde no puede "entrar" al interior).

Para probar que el interior es saturado por las variedades W^2 vamos a utilizar el argumento de Brin. Sea $x \in int(H)$, entonces, es no errante. Sea $y_j \to x$ tal que $f^{n_j}(y_j) \to x$ con $n_j \to \infty$. Ahora, utilizando el Corolario 4.3.5 y usando que $W^2_\gamma(y_j) \subset int(H)$ y la continuidad de las variedades centro inestables, tenemos lo deseado.

□

Corolario 4.3.7. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f que admite descomposición dominada de codimensión uno $T_H M = E^1 \oplus E^2$ con $dim(E^2) = 1$. Entonces no hay puntos periódicos en ∂H con dimensión inestable* 1.

Demostración. Por ser una clase homoclínica genérica, la variedad inestable de todo punto periódico tiene que ser densa en la clase. Si hubiese un punto periódico con variedad inestable de dimensión uno en el borde, esta tendría que estar contenida en el borde y no podría ser densa.

□

Corolario 4.3.8. *Genéricamente, una clase homoclínica con interior para un difeomorfismo de una superficie es toda la variedad. De hecho, si una clase homoclínica de un difeomorfismo*

[5] Dicho γ está dado por la continuidad uniforme de f^{-k} $\forall 0 \leq k \leq n_0$ y por que J es compacto.

genérico en una superficie tiene interior, entonces la variedad es $\mathbb{T}^2$ y el difeomorfismo es un Anosov.

Demostración. Por el Teorema 2.5.2, una clase homoclínica genérica con interior tiene descomposición dominada, por ser de dimensión dos, ambos fibrados son unidimensionales.

Supongamos que no es toda la variedad, entonces, si nos paramos en un punto del borde de la clase, entonces, las variedades $W^1_\varepsilon(x)$ y $W^2_\varepsilon(x)$ estan contenidas también en el borde. Como varian continuamente, con la saturación se cubre un abierto con puntos del borde de la clase, lo cual es absurdo.

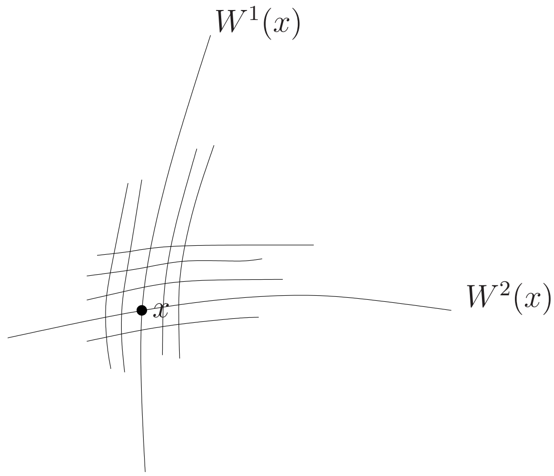

Figura 4.1: Prueba de la conjetura en dimensión dos.

Una vez que sabemos que es transitivo, sabemos que hay un entorno del difeomorfismo en el cual hay un conjunto residual de difeomorfismos transitivos también (ver Proposición 2.5.1) y esto implica que es un difeomorfismo de Anosov, y la única superficie que los admite es el toro $\mathbb{T}^2$ (ver [Pot], el argumento hay que adaptarlo de robustamente transitivo a genéricamente transitivo, pero es trivial, porque la robustez se utiliza en que f tiene un entorno sin pozos ni fuentes, y esto se cumple, ya que los pozos y fuentes existen en un conjunto abierto de difeomorfismos).

□

4.4. Clases homoclinicas con interior, dimensión 3

En esta sección probaremos la Conjetura 1 en algunos casos particulares para difeomorfismos en dimensión 3.

Teorema 4.4.1. *Sea $H = H(p, f)$ una clase homoclínica con interior de un difeomorfismo genérico f en una variedad de dimensión 3 que admite decomposición dominada del tipo $T_H M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ con $dim(E^i) = 1$. Entonces, $H = M$ y f es parcialmente hiperbólico fuerte.*

Demostración.

Paso 1:

Primero vamos a probar que es suficiente con ver que los puntos de índice 2 (para los cuales $E^s(p) = E^1 \oplus E^2$) la variedad centro estable (W^{12}_δ) contiene un entorno del punto de tamaño uniforme alrededor del punto que se encuentra dentro de la clase. Esto es suficiente pues dado $y \in \partial H$, si tenemos un punto periódico de índice 2 arbitrariamente cerca (si hay uno, son densos en la clase pues la genericidad de f implica que podemos asumir que es la clase homoclínica de un punto de índice 2) y por lo tanto, se cumple que $W^3_\varepsilon(y) \cap W^{12}_\varepsilon(p) \neq \emptyset$ entonces, por la saturación del interior por las variedades W^3 tenemos que y esta en el interior, lo cual es absurdo. Si no hay puntos de índice 2, se puede ver que el argumento vale también para W^{23}.

Paso 2:

Sea entonces un punto periódico de índice 2 de f en H. Por el Corolario 4.3.7 se cumple que $p \in int(H)$.

Como tenemos descomposición dominada $T_H M = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ podemos juntar los fibrados, definiendo $E^{12} = E^1 \oplus E^2$ y $E^{23} = E^2 \oplus E^3$ para obtener descomposiciones dominadas del tipo $T_H M = E^{12} \oplus E^3$ y $T_H M = E^1 \oplus E^{23}$. Por el Teorema 4.2.3 se cumple que hay variedades localmente invariantes que integran E^{12} y E^{23}. Claramente, la intersección de ambas, nos dará una variedad localmente invariante que integra E^2 ([6]).

Sea I una componente conexa de $W^2_\delta(p) \backslash \{p\}$ con δ de forma tal que $f(W^2_\delta(p)) \subset W^2(f(p))$ ([7]), vamos a ver que tiene que estar contenida en $int(H)$ (eso es suficiente ya que $int(H)$ es saturado por los conjuntos W^1).

Ordenemos I empezando por p, es decir, dado que I es un intervalo, y uno de sus extremos es p, lo pensamos como (p, d). Como p es de índice 2, hay un entorno de p en I de puntos de forma tal que $f^{2\pi(p)}(x) < x$ para cualquier x en ese entorno (esto se cumple pues existe

[6] Basta observar que el conjunto $f(W^{12}_\varepsilon(x))$ contiene un entorno abierto de $W^{12}_\varepsilon(f(x))$, ese entorno cortado con $W^{23}_\delta(f(x))$, al iterarlo al pasado quedará contenido en $W^{12}_\varepsilon(x) \cap W^{23}_\varepsilon(x)$. Analogamente, se ve el resto de las invariancias.

[7] Sería tentador, dado que p es periódico, tomar una potencia de f y considerarlo fijo, con lo cual se tendría que la variedad esa es invariante, pero esto no funciona, pues al tomar iterados, disminuye el valor de δ y perdemos la uniformidad buscada.

un ν de forma tal que $f^{2\pi(p)}(W^2_\nu(p)) \subset W^2_\delta(p)$ y el punto es atractor en un entorno de p en $W^{12}_\varepsilon(p)$). Consideramos entonces $x_0 \in I$ de forma tal que $f^{2\pi(p)}((p, x_0)) \subset (p, x_0)$ (donde esto tiene sentido, recordar que las variedades son solamente localmente invariantes). Llamemos J_0 al conjunto (p, x_0) que claramente integra el fibrado E^2 y está en el interior de H.

Por lo tanto, si consideramos el conjunto $J = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(J_0)$ tenemos un intervalo de variedad centro (integrando E^2) de forma tal que está contenido en $int(H)$. Si J llegase a tener longitud grande entonces tenemos probado el teorema pues saturando por las variedades estables (integrando E^1) obtenemos un tamaño grande de centro estables contenido en el interior de la clase y vimos que eso era suficiente.

Si J no tiene longitud grande, entonces, como integra E^2 (que es un fibrado continuo) y la variedad es compacta, se tiene que cumplir que J muere en un punto q_1 que necesariamente tiene que ser periódico de período $2\pi(p)$. El punto q_1 tiene que ser de dimensión estable 1 (recordar que siendo genérico, el difeomorfismo f es Kupka-Smale, con lo cual dado que los puntos de J tienden a q_1 al pasado tiene dimensión inestable al menos 2 y como pertenece a la clase (por ser de acumulación de J) no puede ser una fuente.

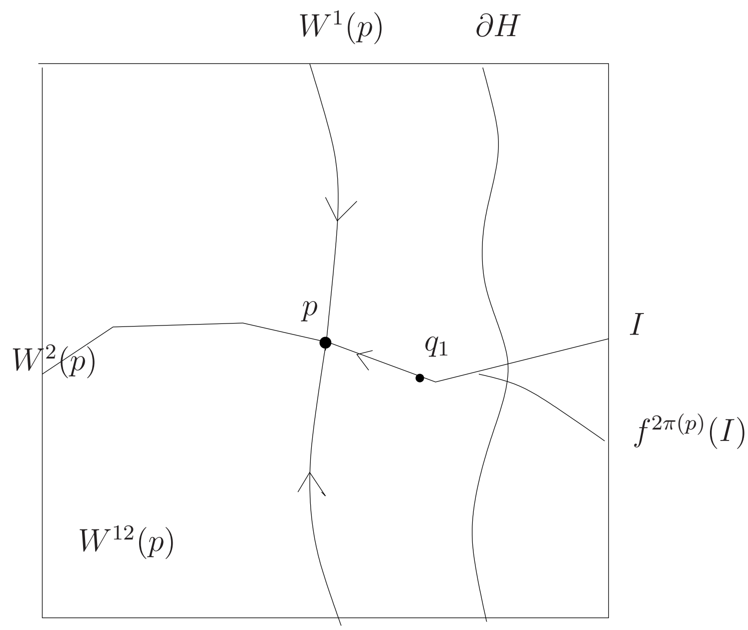

Figura 4.2: Encontrando a q_1.

Ahora es fácil ver que se puede aplicar el mismo argumento al punto q_1 trabajando en la variedad centro inestable (que integra a $E^2 \oplus E^3$). Una diferencia es que no será necesario tomar como período el doble del período de q_1 pues ya sabemos que J es uno de los arcos de su variedad centro y esta es invariante por $f^{2\pi(p)}$. Por lo tanto, si aplicar de nuevo el proceso no permite encontrar un tamaño uniforme en la variedad centro estable de p podremos conseguir un nuevo punto periódico del mismo período que q_1 y continuar el proceso inductivamente hasta o bien tener un tamaño uniforme que nos asegura probar lo deseado o bien hasta llegar a una contradicción con el hecho de que el difeomorfismo es Kupka-Smale y por lo tanto tiene solo una cantidad finita de puntos periódicos de un período dado.

Esto prueba que f es transitivo.

Paso 3:

Una vez que es transitivo podemos utilizar el siguiente teorema probado por primera vez en [DPU] (aplicando ideas de [M2]) y enunciado asi por primera vez en [Ab]:

Teorema 4.4.2 ([DPU])**.** *Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M^3)$ de forma tal que admite una descomposición dominada en 3 subfibrados. Si existe un entorno $\mathcal{U}$ de f y un residual $\mathcal{R}$ de forma tal que para todo $g \in \mathcal{R} \cap \mathcal{U}$, g es transitivo, entonces f es parcialmente hiperbólico fuerte.*

A partir de este teorema es inmediato ver que es parcialmente hiperbólico fuerte ya que los resultados genéricos que probamos para los difeomorfismos con clases homoclínicas con interior nos ponen en las hipotesis del Teorema.

$\square$

Corolario 4.4.3. *Sea f un difeomorfismo genérico en dimensión 3. Si H es una clase homoclínica con interior que no tiene puntos periódicos con valores propios complejos, entonces, $H = M$.*

Demostración. La Proposición 2.6.2 nos permite ponernos en las hipótesis del Teorema 4.4.1

$\square$

Corolario 4.4.4. *Sea f un difeomorfismo genérico en dimensión 3 lejos de tangencias homoclínicas, con puntos periódicos de indices 1 y 2, entonces, si H es una clase homoclínica con interior, $H = M$.*

Demostración. El Teorema 2.6.1 nos permite ponernos en las hipotesis del Teorema anterior.

$\square$

Observación 4.4.1. De hecho, el Teorema 2.6.1 nos pone en las hipótesis del Teorema 4.4.1 solo pidiendo que la clase se encuentre lejos de tangencias, lo cual es más general. También vale la pena observar que es importante pedir que haya puntos de ambos índices, pues, a diferencia de en clases homoclínicas aisladas, en el caso de ser salvajes las clases no podemos asegurar que si todos los puntos son de igual índice la clase sea hiperbólica (ver [ABCDW]). En el caso de dimensión 3, veremos que igual esto se puede arreglar, pero lleva más trabajo. Vale la pena observar también que un resultado reciente de Yang permite probar en general que para difeomorfismos lejos de tangencias, la existencia de una clase homoclínica con interior implica que el difeomorfismo es transitivo (ver [Y] Theorem 3).

4.5. Aplicación del Teorema principal

El siguiente Teorema es una aplicación del resultado principal del trabajo. Muchas de las herramientas de su demostración ya fueron trabajadas, las otras, requieren algunos prerequisitos que no fueron introducidos pero que serán debidamente citados. Fundamentalmente, utilizaremos un resultado de [M2] y una adaptación de un resultado de [PPV] que a su vez adapta un resultado de [M4]. También haremos uso del Lema de Pliss que está presentado en el apéndice de este trabajo.

Teorema 4.5.1. *Sea f un difeomorfismo genérico en dimensión 3 y H una clase homoclínica con interior lejos de tangencias homoclínicas, entonces, $H = M$.*

Lo primero que veremos es que gracias al Teorema Principal (Teorema 4.4.1) este Teorema se puede reducir al siguiente Lema que probaremos luego.

Lema 4.5.2. *Sea $f : M^3 \to M^3$ un difeomorfismo genérico. Sea H una clase homoclínica de f con interior que verifica que existe $\mathcal{U}$ entorno de f y $\mathcal{R}$ conjunto residual de forma tal que para todo $g \in U \cap \mathcal{R}$ se cumple que los puntos periódicos de H_g (la continuación de H para g) tienen todos igual índice. Entonces H es hiperbólica para f.*

Demostración del Teorema 4.5.1. Como estamos en el contexto genérico podemos utilizar el siguiente argumento de genericidad. Sea $\mathcal{R}$ un conjunto residual con la propiedad que si $f \in \mathcal{R}$ y H es una clase con interior de f entonces H es la clase homoclínica de todos sus puntos periódicos y existe un entorno $\mathcal{U}$ de f y $U_f \subset H$ de forma tal que todo $g \in \mathcal{R} \cap \mathcal{U}$ verifica lo mismo y $U_f \subset H_g$ (ver Proposición 2.5.1 y Teorema 2.3.1). Sea $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{R} \ : \ f$ posee una clase homoclínica con interior con puntos periódicos de distinto índice $\}$. El conjunto $\mathcal{B}$ es claramente abierto en $\mathcal{R}$ (pues como el interior de la clase persiste y tiene puntos periódicos de ambos índices, y estos aparecen en U hay un entorno de f con esta propiedad). Sea $\tilde{\mathcal{B}}$ un abierto de $\mathcal{D}iff^1(M)$ tal que $\mathcal{B} = \mathcal{R} \cap \tilde{\mathcal{B}}$. Sea ahora $\mathcal{A}$ el complemento de la clausura de $\tilde{\mathcal{B}}$. Entonces, basta probar el Teorema en $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}$ pues en $\mathcal{B}$ es el Corolario 4.4.4 y $(\mathcal{R} \cap \mathcal{A}) \cup \mathcal{B}$ es claramente residual.

En $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}$ el Lema 4.5.2 implica que la clase es hiperbólica y por el Teorema 3.2.1 queda probado el Teorema.

$\square$

Para probar el Lema 4.5.2 la estrategia es ver que si la clase no es hiperbólica, se puede conseguir cambiar de índice a alguno de sus puntos periódicos. Esto tiene dos etapas, por un lado, ver que si en el período los puntos no son suficientemente hiperbólicos, mediante el lema de Franks se les puede cambiar el índice. La segunda etapa consiste, en una vez obtenido lo anterior, ver que si existen puntos de período cada vez mayor que "demoran" cada vez más en hacerse hiperbólicos[8], entonces, podemos conseguir un punto períodico con mala contracción en el período contradiciendo lo antes probado.

Utilizaremos entonces el siguiente Lema de Mañe. El enunciado que utilizaremos es el mismo que en [M2] pero modificado de forma tal de evitar dar definiciones. Es una consecuencia del Lema de Franks junto con un uso muy ingenioso de propiedades de álgebra lineal.

Lema 4.5.3 (Lemma II.5 de [M2])**.** *Sea f un difeomorfismo y $\mathcal{A}$ un conjunto de puntos periódicos de f de forma tal que existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que para todo $p \in \mathcal{A}$ se cumple que si perturbamos menos de ε el diferencial de f en cada paso de la órbita no podemos cambiar el índice de p. Entonces, existen $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ y $\lambda < 1$ de forma tal que todos los periódicos de período mayor que n_0 cumplen que $\prod_{i=1}^{k} \|Df^{m_0}|_{E^s(f^{im_0}(p))}\| < \lambda^k$ con $k = [\pi(p)/m_0]$ (donde $E^s(p)$ es el subespacio asociado a los valores propios de módulo menor que 1 de $Df^{\pi(p)}$ en T_pM).*

No podemos aplicar este Lema inmediatamente en nuestro caso pues si considerasemos todos los puntos de la clase con interior, a priori no podemos asegurar que no podamos cambiar el índice de estos (podríamos hacerlo y "sacarlos" de la clase con la perturbación). Sin embargo, un argumento muy similar al del Lema 4.3.2 permite probar que si a un punto periódico se le pudiese cambiar el índice por una pequeña perturbación, lo mismo ocurriría con un punto en el interior "persistente" de la clase.

Lema 4.5.4. *Sea $f : M^3 \to M^3$ un difeomorfismo genérico. Sea H una clase homoclínica de f con interior que verifica que existe $\mathcal{U}$ entorno de f y $\mathcal{R}$ conjunto residual de forma tal que*

[8] El hecho de que en el período sean hiperbólicos no implica que en todos los pasos lo sean, por ejemplo, podría ocurrir que en los primeros $\pi(p) - 1$ pasos el diferencial sea una isometría y en el último contraiga $\lambda^{\pi(p)}$ en la dirección estable y expanda lo análogo en la dirección inestable.

para todo $g \in U \cap \mathcal{R}$ se cumple que los puntos periódicos de H_g (la continuación de H para g) tienen todos igual índice. Entonces, todo punto periódico en H verifica que si se perturba su derivada suficientemente poco, sigue siendo del mismo índice.

Demostración. Recordar que en estas condiciones, suponiendo que los puntos tienen estable de dimensión 2 hay una descomposición dominada en H del tipo $T_H M = E \oplus F$ con $dim(E) = 2$.

La prueba es muy similar a la del Lema 4.3.2 por lo cual solo mostraré las diferencias. Si hay un punto p que se puede perturbar poco cambiando el índice lo podemos relacionar homoclínicamente con uno en el interior persistente de la clase y por lo tanto encontrar un punto periódico q en la clase, que pertenecerá a la clase luego de una pequeña perturbación y cuya orbita acompaña la órbita de p por un tiempo arbitrariamente largo en relación a su período.

Hay dos opciones para que se pueda perturbar el punto periódico p para cambiar su índice, o bien su espacio estable se descompone en dos subfibrados invariantes asociados a valores propios diferentes o no. En el segundo caso la prueba es simple pues es inmediato que el punto q va a heredar un valor propio suficientemente cercano a 1.

El primer caso tampoco es difícil, pero es un poco más delicado. Hay que tener en cuenta lo siguiente. Para poder cambiar el índice de p es necesario que p posea un valor propio cercano a 1. Dentro de $E(p)$ al hacer actuar $Df^{\pi(p)}$ una forma de "ubicar" este valor propio es mediante un cono rodeando al vector propio asociado que iterado hacia el futuro quedará contenido dentro de si mismo definiendo asintóticamente la dirección de dicho valor propio. De esta forma, al acompañar q al punto p este "heredará" una dirección con similares propiedades y se podrá argumentar analogamente.

$\square$

Ahora sabemos que $\exists \lambda \in (0,1)$ de forma tal que todo punto periódico de período suficientemente grande cumple que $\prod_{i=0}^{\pi(p)} \|Df|_{E^s(f^i(p))}\| < \lambda^{\pi(p)}$ [9]. Un conocido teorema debido a Pliss (ver [M4] Section II, o el Apéndice de este trabajo) nos dice que existe una proporción, independiente del punto periódico, de puntos en la órbita que son efectivamente hiperbólicos (con una constante posiblemente menor). Si estos estuviesen equidistribuidos, el teorema quedaría probado. En caso contrario, se obtienen "huecos" muy grandes donde la órbita no se va haciendo hiperbólica, pero si se tiene que hay buenas variedades estables e inestables, con lo cual se puede conseguir un puntos periódico que acompañe dicho trayecto violando lo probado anteriormente.

[9] En realidad sabemos que existe m_0 de forma tal que para los puntos periódicos de período grande se cumple $\prod_{i=0}^{k} \|Df^{m_0}|_{E^s(f^{im_0}(p))}\| < \lambda^{im_0}$. Sin embargo, consideraremos $m_0 = 1$ para simplificar los cálculos.

La prueba de esto se basa en los resultados de la sección II de [M4] pero cambiando el hecho de que F sea hiperbólico por el hecho de que tiene propiedades dinámicas como está hecho en la sección 5 de [PPV] (en particular la Proposition 5.16).

Pasamos a dar una prueba del Lema 4.5.2.

Demostración del Lema 4.5.2. Tenemos que para los puntos periódicos de período suficientemente grande, se cumple que

$$\prod_{i=0}^{\pi(p)} \|Df|_{E^s(f^i(p))}\| < \lambda^{\pi(p)}$$

Considerando $0 < \lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$ se tiene que hay puntos en la órbita que son λ_2-hiperbólicos (por el Lema de Pliss)[10]. Para un p dado, estos puntos son l con $l \geq c\pi(p)$. Hay dos opciones, o bien estos puntos están equidistribuidos, o no lo están. Si ocurriese el primer caso, entonces el fibrado E tiene que ser hiperbólico pues los puntos de período mayor que cierto numero son densos y estos serían uniformemente hiperbolicos.

En caso contrario, deben haber "huecos" arbitrariamente grandes donde no es ni siquiera λ_1-hiperbólico (en caso contrario, el Lema de Pliss daría nuevos puntos que son λ_2-hiperbólicos en el "hueco", una contradicción). Los bordes de estos "huecos" los podemos llamar p_k y q_k y suponer que convergen con $k \to \infty$ a puntos x e y respectivamente. Ambos tendrán variedades estables de tamaño uniforme (por ser ambos λ_2-hiperbólicos) y asi mismo inestables (pues sabemos que nuestros puntos cuentan con variedades inestables con propiedades dinámicas).

Por lo tanto, llegaríamos a un absurdo en el caso que encontrasemos un punto periódico en la clase que acompañe al segmento de órbita que une algún p_k con q_k y el tiempo en que acompaña es grande proporcionalmente a su período (esto se debe a que dicho punto periódico no podrá contraer mas que λ_1 en su dirección estable contradiciendo lo antes probado).

Esto se obtiene de la siguiente manera (ver figura 4.3): Primero, observamos que tanto y como x poseen variedades estables e inestables obtenidas como límite de las mismas para los puntos p_k y q_k. Podemos considerar entonces, cerca de ellos pequeños entornos B_y y B_x cuyo borde sea un cilindro "paralelo" a las estables e inestables de estos puntos.

[10]Por λ-hiperbólicos denotamos a puntos de forma tal que

$$\prod_{i=0}^{k} \|Df|_{E(f^i(x))}\| < \lambda^k \qquad \forall\ k \geq 1$$

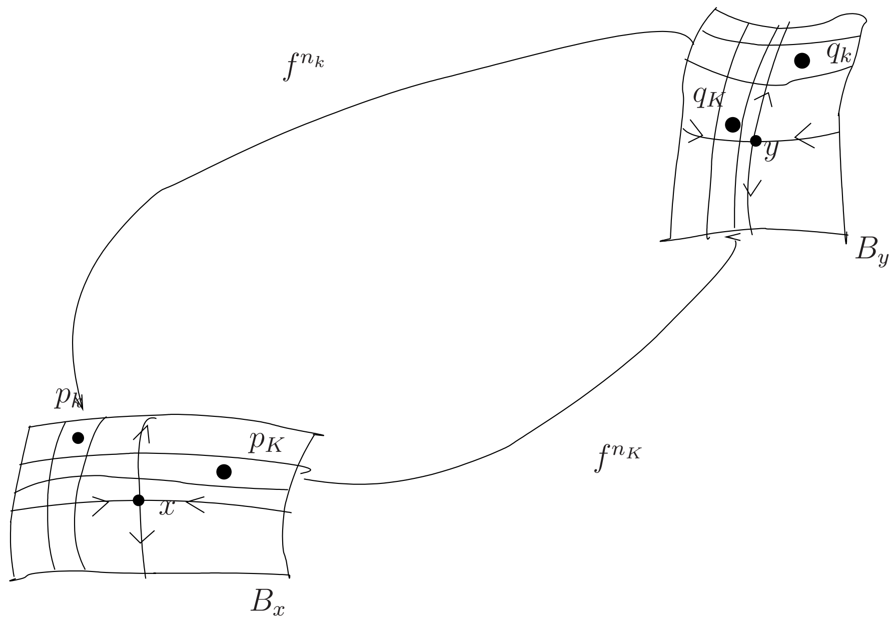

Figura 4.3: Encontrar un punto periódico.

Tomando q_k suficientemente cerca de x, como posee estables e inestables grandes, sabemos que para un iterado $f^{n_k}(q_k) = p_k$ y se cumple que un pequeño entorno que atraviesa a lo largo de la dirección estable de B_y se transforma por f^{n_k} en un entorno de p_k que atraviesa B_x a lo largo de la dirección inestable (como si se elige suficientemente pequeño el entorno podemos asegurar que los puntos cercanos a la órbita de q_k tienen también estables e inestables en esos iterados, esta afirmación se comprueba fácilmente). Ahora, podemos hacer lo mismo considerando p_K suficientemente cercano a x de forma tal que $f^{n_K}(p_K) = q_K$ y también habrá un entorno que atraviesa B_x a lo largo de la dirección estable que se transforma en uno que atraviesa en la dirección inestable a B_y. Es sencillo observar que este procedimiento nos da un punto periódico de período $n_k + n_K$ que acompaña n_K pasos la órbita de p_K. Esto implica que podemos suponer que la contracción en la dirección estable del punto periódico encontrado no es buena, con lo cual, si probamos que el punto se encuentra en la clase, llegamos a un absurdo y probamos que la dirección E es hiperbólica.

En efecto, obtuvimos un punto periódico r de período n_k+n_K de forma tal que $d(f^i(r), f^i(p_K)) < \delta$ $\forall 0 \leq i \leq n_K$ y $d(f^{n_K+i}(r), f^i(q_k)) < \delta$ $\forall 0 \leq i \leq n_k$. Podemos suponer que δ es suficientemente pequeño de forma tal que $\frac{\|Df_x|_E\|}{\|Df_y|_E\|} \geq \text{máx}\{\frac{\lambda}{\lambda_1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\}$ cuando $d(x,y) < \delta$. Al mismo tiempo, sea $\tau > 0$ de forma tal que $\tau \leq \text{mín}_x\{\|Df_x v\|/\|v\|\}$. Entonces como $\prod_{j=1}^{i} \|Df_{f^j(p_K)}\| \geq \lambda_1^i$ $\forall 0 \leq i \leq n_K$, se cumple que $\prod_{i=1}^{\pi(r)} \|Df_{f^i(r)}|_E\| \geq \lambda^{n_K} \tau^{n_k}$ que como n_k está fijo podemos hacer que sea mayor que $\lambda^{\pi(r)}$ eligiendo n_K suficientemente grande (esto muestra que probando que $r \in H$ llegamos a un absurdo con el Lema 4.5.3[11]).

Analogamente, considerando $\Upsilon \geq \text{máx}_x\{\|Df_x v\|/\|v\|\}$ obtenemos que como $\|Df^i_{p_K}\| \leq \lambda_2^i$ $\forall 0 \leq i \leq n_K$ podemos considerar que $\prod_{i=1}^{\pi(r)} \|Df_{f^i(r)}|_E\| \leq \lambda_3^{n_K}\Upsilon^{n_k}$ que nuevamente nos permite considerar $\|Df_r^{\pi(r)}|_E\| \leq \lambda_3^{\pi(r)}$. De hecho, esto vale en todos los pasos, pues en lo que estamos considerando, el peor caso es en el período. Es decir, tenemos $\prod_{i=1}^{n} \|Df_r^i|_E\| \leq \lambda_3^n$ $\forall n \geq 0$.

Ahora, como δ lo podemos achicar manteniendo el resultado obtenido, y el punto que encontremos tendrá contracción de orden λ_3 en E, tendrá una variedad estable de tamaño suficientemente grande como para asegurar que intersecta la variedad inestable de p_K. Esto implica que (mediante iterados negativos) la variedad estable del r acumula en la clase, pero utilizando la estabilidad Lyapunov de la clase (ver Corolario 2.4.2), esto implica que el punto pertenece a la clase[12] y queda probado que E es hiperbólico.

La prueba de que F es hiperbólico ahora sale inmediatamente utilizando que E lo es y los mismos argumentos de arriba.

$\square$

[11]Recordar que habiamos supuesto $m_0 = 1$ por simplicidad.

[12]La estabilidad Lyapunov al pasado implica que existen entornos arbitrariamente pequeños de la clase invariantes para el pasado, con lo cual, dado que la variedad estable acumula en la clase y sus iterados pasados convergen al punto periódico, el punto periódico ha de estar en todos esos entornos y por consiguiente en la clase.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Dinámica Hiperbólica

Nos basaremos fundamentalmente en [Sh2, KH, Sm2, New, Pot].

5.1.1. Hiperbolicidad Local

Definición 5.1.1. Dado $f : M \to M$ un difeomorfismo y p tal que $f(p) = p$, se dice que es un *punto fijo hiperbólico* sii $Df_p : T_pM \to T_pM$ es una transformación lineal hiperbólica, es decir, no tiene valores propios de módulo uno. El *índice* del punto periódico será la dimensión del espacio estable de la transformación lineal.

Teorema 5.1.1 (Hartman)**.** *Sea $f : M \to M$ difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico entonces, $\exists U$ entorno de p, V entorno del 0 en T_pM y $h : U \to V$ homeomorfismo tal que $h \circ f = Df_p \circ h$. Es decir, f es localmente conjugado a su parte lineal.*

Definición 5.1.2. El *conjunto estable local* de un punto fijo p es

$$W^s_\beta(p) = \{x \in B(p, \beta) \ : \ f^n(x) \in B(p, \beta) \ \ \forall n \geq 0\}$$

El *conjunto estable* de un punto fijo p es

$$W^s(p) = \{x \in M \ : \ f^n(x) \to p \ \ n \to +\infty\}$$

Análogamente se definen los *conjuntos inestables* $W^u_\beta(p, f) = W^s_\beta(p, f^{-1})$ y $W^u(p, f) = W^s(p, f^{-1})$.

Observación 5.1.1. A partir del Teorema de Hartman (Teorema 5.1.1) se observa que los conjuntos estables e inestables locales son variedades topológicas inmersas y se ve también que

$$W^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\beta(p)) \quad \text{y} \quad W^u(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(W^u_\beta(p))$$

$\diamondsuit$

Teorema 5.1.2 (Variedad Estable). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^r y p un punto fijo hiperbólico. $T_pM = E^s \oplus E^u$ la descomposición del espacio tangente según los valores propios de módulo mayor o menor que uno. Entonces, $\exists \beta > 0$ tal que $W^s_\beta(p)$ es una subvariedad encajada de clase C^r en M que cumple que $T_pW^s_\beta(p) = E^s$ y $W^s_\beta(p) \subset W^s(p)$. Además, si $f_n \xrightarrow{C^r} f$ entonces $W^s_\beta(p_n, f_n) \to W^s_\beta(p, f)$ uniformemente C^r en compactos.*

Teorema 5.1.3 (λ-Lemma). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, p un punto fijo hiperbólico y D^u un disco compacto en $W^u(p)$ cualquiera. Sea D una variedad de igual dimensión que $W^u(p)$ tal que $D \cap W^s(p) \neq \emptyset$ y la intersección es transversal. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $\forall n > n_0$ existe $D_n \subset D$ tal que $f^n(D_n)$ está $\varepsilon - C^1$ cerca de D^u.*

Definición 5.1.3. Un punto p es periódico hiperbólico para f si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que p es fijo hiperbólico para f^k. Le definimos sus variedades estables e inestables como las variedades estables de p para f^k

Se desprende de la definición que valen todos los teoremas enunciados cambiando puntos fijos por periódicos y las demostraciones son análogas.

5.1.2. Conjuntos Hiperbólicos

La idea de punto periódico hiperbólico, se extiende a lo que se le llamará conjuntos hiperbólico.

Definición 5.1.4. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^r con M variedad riemanniana y $\Lambda \subset M$ $f-$invariante. Se dirá que es *hiperbólico* para f si es posible escribir $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ donde E^s, E^u son dos subfibrados Df invariantes y existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\forall n > 0$

$$\|Df^n|_{E^s}\| \leq C\lambda^n \quad \text{y} \quad \left\|Df^{-n}|_{E^u}\right\| \leq C\lambda^n$$

Proposición 5.1.4. *E^s_x y E^u_x dependen continuamente de x y su dimensión es localmente constante.*

Proposición 5.1.5. *Sea Λ compacto e hiperbólico para $f : M \to M$ difeomorfismo C^1 entonces, existe U abierto entorno de Λ y $\mathcal{U}(f)$ entorno C^1 de f tal que si $K \subset U$ compacto invariante para $g \in \mathcal{U}$ entonces K es hiperbólico para g.*

Definición 5.1.5. La *variedad estable local* de un punto x es

$$W^s_\beta(x) = \{y \in M \ : \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \beta \ \forall n \geq 0\}$$

La *variedad estable* de un punto x es

$$W^s(x) = \{y \in M \ : \ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ con } n \to +\infty\}$$

Análogamente se definen las *variedades inestables* $W^u_\beta(p, f) = W^s_\beta(p, f^{-1})$ y $W^u(p, f) = W^s(p, f^{-1})$.

Vale observar la simetría en las definiciones que implica que si $x \in W^s_\beta(y) \Rightarrow y \in W^s_\beta(x)$ y que $y \in W^s(x) \Rightarrow W^s(x) = W^s(y)$.

Teorema 5.1.6 (Variedad Estable)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^r y Λ un conjunto hiperbólico. $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ la descomposición hiperbólica del tangente. Entonces, $\exists \beta > 0$ tal que $\forall x \in \Lambda$ $W^s_\beta(x)$ es una subvariedad encajada de clase C^r en M que cumple que $T_p W^s_\beta(x) = E^s_x$ y $W^s_\beta(x) \subset W^s(p)$. Además, estas variedades varían continuamente en subconjuntos compactos al variar f y x.*

Es posible definir una estructura de producto local para los conjuntos localmente maximales, es decir, para los cuales existe un entorno U de forma tal que $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$.

Teorema 5.1.7 (Estructura de producto local)**.** *Sea Λ un conjunto hiperbólico, entonces, admite una estructura de producto local (i.e. existe δ de forma tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste de un único punto que pertenece a Λ) si y solo si Λ es localmente maximal.*

Teorema 5.1.8 (Shadowing Lemma)**.** *Sea Λ un conjunto hiperbólico cerrado para $f : M \to M$ difeomorfismo C^r. Si Λ tiene estructura de producto local entonces para todo $\beta > 0$ existe $\alpha > 0$ de forma tal de que toda $\alpha-$pseudo órbita ($d(x_{n+1}, f(x_n)) \leq \alpha$) es $\beta-$sombreada por una órbita de Λ (es decir que existe $y \in \Lambda$ tal que $d(f^n(y), x_n) < \beta$).*

Definición 5.1.6. Un difeomorfismo $f : M \to M$ es *Axioma A* si cumple que $\overline{\text{Per}\, f} = \Omega(f)$ y $\Omega(f)$ es un conjunto hiperbólico[1]

[1]Recordar que $\Omega(f)$ es el conjunto de los puntos *no errantes* de f, es decir,

$$\Omega(f) = \{x \in X : \forall U \text{ entorno de } x \ \exists n \text{ tal que } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

Teorema 5.1.9 (Descomposición Espectral). *Si f es Axioma A entonces se puede descomponer $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_N$ donde los Λ_j son disjuntos invariantes compactos y transitivos. Además, cada $\Lambda_j = \Lambda_{j_1} \cup \ldots \cup \Lambda_{jk}$ donde los Λ_{j_k} son disjuntos y cíclicos ($f(\Lambda_{j_i}) = \Lambda_{j_{i+1}}$ por lo tanto, invariantes por f^k) y además, f^k es topológicamente mixing*[2] *en Λ_{j_i}.*

Este Teorema fue generalizado por Newhouse para el caso en que el conjunto límite es hiperbólico y no hay cíclos (ver [New]).

5.2. Formas débiles de hiperbolicidad

Esta sección está basada en [BDV, Pot]

Definición 5.2.1. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^1 y $\Lambda \subset M$ un subconjunto invariante. Se dice que una descomposición de $T_\Lambda M = E \oplus F$ es una *descomposición dominada* sii es Df invariante, las dimensiones de los fibrados son constantes[3] y además se cumple que existe un valor $n > 0$ de forma tal que

$$\left\|Df^n_x|_{E(x)}\right\| \left\|Df^{-n}_{f^n(x)}|_{F(f^n(x))}\right\| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Lambda$$

Observación 5.2.1. La definición es equivalente a pedir que exista n tal que $\forall s \in E$ y $u \in F$ de norma 1 se cumpla que:

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n u\|} < \frac{1}{2}$$

Proposición 5.2.1. *Si $T_\Lambda M = E \oplus F$ descomposición dominada con $dimE = k$. Entonces,*

$s \in E \Leftrightarrow$ fijados $k+1$ vectores l.i. existe uno de ellos w de forma tal que existe n_0 que cumple que si $n > n_0$

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n w\|} < \frac{1}{2}$$

Proposición 5.2.2. *Sea Λ un conjunto $f-$invariante con descomposición dominada, entonces, para todo ε existe un entorno U de Λ y un entorno C^1 $\mathcal{U}$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}$ el conjunto invariante maximal de g en $\overline{U}$ admite una descomposición dominada. En particular, si $\Lambda = M$ el conjunto invariante maximal será siempre M. El entorno U se llamará* entorno adaptado*.*

---

[2]Un homeomorfismo es *topológicamente mixing* si para todos U y V abiertos, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

[3]Esta no es la definición más general, ver [BDV].

Hiperbolicidad Parcial

Se utilizará la notación $m\{L\} = \|L^{-1}\|^{-1}$ donde L es un isomorfismo lineal entre espacios normados.El valor $m\{L\}$ mide la mínima expansión del operador L.

Definición 5.2.2. $f : M \to M$ difeomorfismo y Λ invariante, es *parcialmente hiperbólico fuerte* sii el tangente se descompone en tres subfibrados no triviales $T_\Lambda M = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$ invariantes por Df para los cuales existen constantes $0 < \lambda < \mu < 1$ para las cuales se cumple que para todo $x \in M$ vale que

$$\|Df|_{E^{ss}(x)}\| < \lambda \qquad \|Df^{-1}|_{E^{uu}(x)}\| < \lambda$$

$$\|Df|_{E^c(x)}\| < \mu^{-1} \qquad m\{Df|_{E^c(x)}\} > \mu$$

De la misma forma que en el caso de la descomposición dominada, se puede asegurar la robustez de esta descomposición (y la existencia de un entorno adaptado).

Se presentarán resultados (sin prueba) acerca de las consecuencias de la hiperbolicidad parcial sobre la existencia de variedades invariantes. La referencia para estos resultados es [HPS]. Como introducción a esos resultados es recomendable leer [Sh2] (que si bien no contiene todas las demostraciones, presenta los resultados y las ideas generales).

Por un lado, se tiene que los fibrados E^{ss} y E^{uu} son nicamente integrables y dan lugar a laminaciones $\mathcal{F}^{ss}$ y $\mathcal{F}^{uu}$.

Teorema 5.2.3 (Laminaciones Estables e Inestables)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un entorno de f de forma tal que toda $g \in \mathcal{U}$ sean parcialmente hiperbolicos en Λ_g (invariante maximal de un entorno adaptado de Λ_f) con iguales constantes. Entonces, existen laminaciones $\mathcal{F}^{ss}(g)$ y $\mathcal{F}^{uu}(g)$ tal que para todo $x \in \Lambda$ la lámina por x (los denotamos $\mathcal{F}^{ss}(x,g)$ y $\mathcal{F}^{uu}(x,g)$) es una variedad C^1 de forma tal que $T_x\mathcal{F}^{ss}(x,g) = E^{ss}_g(x)$ y $T_x\mathcal{F}^{uu}(x,g) = E^{uu}_g(x)$. Además, estas subvariedades dependen continuamente (en la topología C^1 en compactos) del punto $x \in \Lambda$ y el difeomorfismo $g \in \mathcal{U}$ y tiene propiedades dinámicas.*

Lema 5.2.4. *Sea $\mathcal{U}$ un entorno de f de forma tal que toda $g \in \mathcal{U}$ sea parcialmente hiperbólica con iguales constantes. Dado $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$ existe r_0 tal que si $g \in \mathcal{U}$ y $x \in M$ cumple que*

$$\prod_{j=0}^{n} \|Dg^{-1}|_{E^{cu}(g^{-j}(x))}\| < \lambda^n \quad 1 \le n \le m$$

entonces $g^{-m}(W^{cu}_{r_0}(x,g)) \subset W^{cu}_{\lambda_1^m r_0}(g^{-m}(x),g)$.

Se puede estudiar casos más generales de descomposición dominada, que pueden ser útiles y no son más dificiles de definir. En particular, vale el siguiente teorema:

Teorema 5.2.5 ([BDP])**.** *Dado Λ invariante que admite descomposición dominada, existe una única descomposición de $T_\Lambda M = E^1 \oplus \ldots \oplus E^k$ de forma que la descomposición*

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{i} E^j\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=i+1}^{k} E^j\right)$$

es dominada y además, es maximal, en el sentido que no puede ser sustituida por una refinación.

5.3. Lema de Pliss

En esta sección probaremos un resultado debido a Pliss.

La primera aplicación que se le dió fue para probar que los difeomorfismos de $\mathcal{F}(M)$ no pueden tener infinitos pozos o sillas y fue presentada por Pliss (en [Pl]).

Es un resultado puramente aritmético que muestra como si en un período grande se da una contracción exponencial medianamente fuerte entonces se puede asegurar que habrán "tiras" hiperbólicas (se le llaman tiempos hiperbólicos) para las cuales la contracción exponencial se da en todos los pasos.

La utilidad de esto es muy grande pues son muchas las circunstancias donde se conoce la contracción únicamente en tiempos grandes. La demostración que se presentará se basa en [M3]. Una versión más simple y muy interesante ya que puede resultar muy útil (se demuestra el mismo resultado, pero para puntos periódicos) con una demostración también más simple se puede encontrar en [Less] (capítulo 5).

Para encontrar más aplicaciones de este resultado ver [Wen2] o [BDV].

Una explicación de lo que es un tiempo hiperbólico puede ser mejor entendida en vistas de una figura (Figura 5.1).

Supongamos que se tiene un producto $\prod_{n=1}^{N} a_n < \lambda^N$ donde $0 < \lambda < 1$. Lo que interesa en general es tener una propiedad del tipo $\prod_{i=1}^{n} a_i < \lambda^n \ \forall n$. Esto en general no será posible, pero el Lema de Pliss da algo que en muchos casos logra suplir esa exigente condición.

La idea es que si se tiene contracción exponencial en una tira suficientemente larga (de N pasos) van a haber valores n_j para los cuales haya contracción exponencial en todos los pasos (para un valor λ_1 tal que $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$). Visto en la figura 5.1, si los arcos indican contracción exponencial el Lema de Pliss asegura que la existencia de el arco grande implica la existencia de valores n_j (además nos da una cota inferior que tiende a infinito con N para

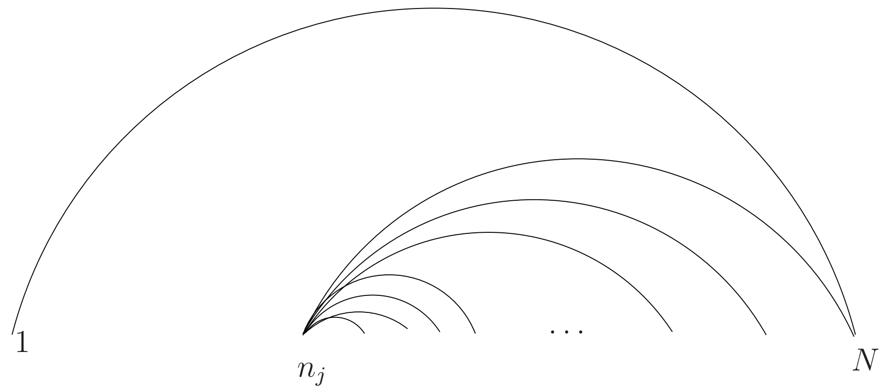

Figura 5.1: Tiempo Hiperbólico

la cantidad de valores!!!) para los cuales exista contracción hiperbólica en todos los pasos (como se ve en la figura).

El enunciado más utilizado (sacado de [PS1]) parece tener que ver con la dinámica tangente pero es puramente aritmético como se hará evidente al realizar la prueba.

Teorema 5.3.1 (Lema de Pliss)**.** *Dado $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, existen, un entero positivo $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$ y $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f) > 0$ con la siguiente propiedad: Si $x \in M$, $S \subset T_xM$ cumple que existe $n > N$ donde vale (si $S_i = Df^i(S)$),*

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

Entonces, existen $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_2^j \; ; \; r = 1, \ldots, l \;\; ; \; 1 \leq j \leq n - n_r$$

Además, $l \geq cn$.

El enunciado puede parecer sumamente recargado. Mucha de la recarga (tanto en la notación como en el enunciado) se apoya en que el teorema asegura también la existencia de una cantidad grande de "tiempos hiperbólicos" cosa que resulta sumamente importante en algunas circunstancias.

A mi gusto, conviene primero entender la parte del enunciado que asegura la existencia y luego ver el hecho de que estos momentos son muchos. En definitiva, lo que dice es que si hay buena contracción exponencial de valor γ_1 en un tiempo suficientemente grande (mayor a N)

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

entonces existirá un punto $1 < n_r < n$ en el cual se cumpla que

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_2^j \quad 1 \leq j \leq n - n_r$$

que es contracción exponencial en todos los pasos. El tiempo grande (n) que se pide para poder asegurar la existencia de n_r va a estar dado naturalmente por la contracción γ_1 la contracción que se pretende asegurar γ_2 y naturalmente también por una cota del valor de $\|Df\|$ (que siendo la variedad compacta existe) y por eso la dependencia con f. Ahora, se ve también que si no sabemos de la existencia de muchos valores n_r con esa propiedad no sabremos si esas tiras son aceptablemente largas (pues n_r perfectamente podría ser $n-1$). Para eso, el teorema también proporciona una constante $c > 0$ que dependerá de los mismos factores que asegura la existencia de por lo menos $l \geq cn$ valores distintos, y por lo tanto una tira de largo al menos cn.

Ahora, siguiendo a [M3] se probará el siguiente Lema que implica el Teorema 5.3.1.

Lema 5.3.2. *Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y $H > 0$, existen $N = N(\lambda, \varepsilon, H) \in \mathbb{Z}^+$ y $c = c(\lambda, \varepsilon, H)$ de forma tal que si $a_1, \ldots, a_n$ ($n > N$) cumplen que $|a_j| \leq H$ $\forall j = 1 \ldots n$ y se cumple*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\lambda$$

Entonces existen $1 \leq n_1 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+r} a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \varepsilon) \; j = 1 \ldots l \; ; \; 0 < r \leq n - n_j$$

Además, $l \geq cn$.

Primero se verá como de este lema se deduce el Teorema 5.3.1. La idea es transformar los productos en sumas mediante logaritmos y utilizar que la función f está definida en M compacta y por lo tanto su diferencial acotado.

Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, y a partir de ellos se define $H = \log(K)$ (donde $K = \text{máx}_{x \in M}\{\|Df_x\|\}$), $\lambda = \log(\gamma_1)$ y $\varepsilon = \log(\gamma_2) - \log(\gamma_1)$. Entonces, el Lema 5.3.2 da constantes N y c de forma tal que se cumple que si $n > N$, $|a_i| < H$ y

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\lambda$$

entonces existen $1 \leq n_1 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+r} a_i \leq (n-n_j)(\lambda+\varepsilon)\ j = 1\ldots l\ ;\ 0 < r \leq n-n_j$$

y además $l \geq cn$.

Traduciendo esto, se ve que si se considera un subespacio $S \subset T_xM$ y se cumple que para $n > N$

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

entonces tomando logaritmos se llega a que:

$$\sum_{i=1}^{n} \log\left(\|Df|_{S_i}\|\right) < n\lambda$$

Entonces, tomando $a_i = \log\left(\|Df|_{S_i}\|\right)$ se ve que se cumple que $|a_i| < H$ y por lo tanto se tienen los valores n_j deseados los cuales deshaciendo los logaritmos nos dan la tesis del teorema.

Se observa que el Lema 5.3.2 es más general que el Teorema 5.3.1,ya que en ningún momento se usa que γ_1 y γ_2 sean menores que 1 de hecho se puede utilizar la siguiente versión inversa. El enunciado es el siguiente

Teorema 5.3.3 (Lema de Pliss inverso)**.** *Dado $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, existen, un entero positivo $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$ y $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f) > 0$ con la siguiente propiedad: Si $x \in M$, $S \subset T_xM$ cumple que existe $n > N$ donde vale (si $S_i = Df^i(S)$),*

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_2^n$$

Entonces, existen $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_1^j\ ;\ r = 1, \ldots, l\ \ ;\ 1 \leq j \leq n-n_r$$

Además, $l \geq cn$.

La demostración es análoga, pero hay que observar que si

$$\prod a_i \leq \gamma^n \Rightarrow \prod \frac{1}{a_i} \geq \gamma^{-n} = (\gamma^{-1})^n$$

Por último, se pasa a la demostración del Lema 5.3.2

Demostración del Lema 5.3.2. La idea consiste en tener en cuenta que como los pasos de la suma están acotados, no puede ser que se mantenga por encima de una curva con pendiente $\lambda + \varepsilon$ por mucho tiempo pues sino no va a tener “tiempo” para bajar (ver figura 5.2 para ver lo que se quiere obtener). Para que las cuentas sean más sencillas, se restará la pendiente $\lambda + \varepsilon$ de forma tal que lo que se busca es que las sumas en adelante se mantengan por debajo de las sumas parciales hasta un número anterior (ver figura 5.3).

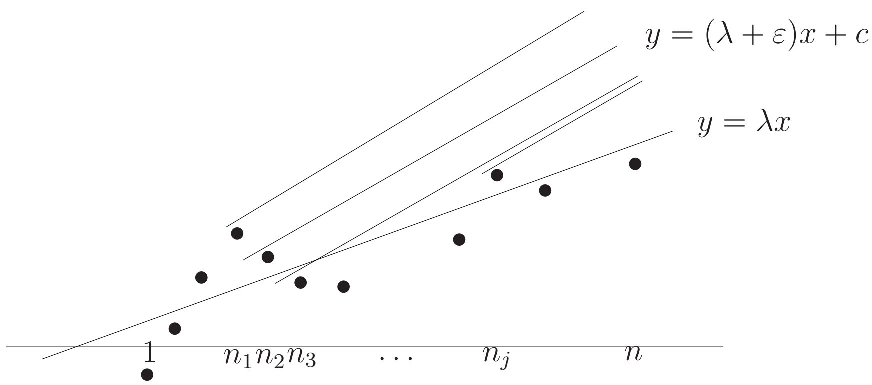

Figura 5.2: Buscando los n_j

Por eso, se considera $b_i = a_i - (\lambda + \varepsilon)$ y $S_i = \sum_{j=1}^{i} b_j$ que por hipótesis va a cumplir $S_n \leq -n\varepsilon$.

Si se considera ahora, a los enteros $n_1 < \ldots < n_l$ entre 1 y n que cumplan que $S_{n_j} \geq S_k$ $\forall n \geq k \geq n_j$. Estos van a ser los valores buscados pues para estos se cumple que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n_j} b_j - \sum_{j=1}^{k} b_j = - \sum_{j=n_j+1}^{k} b_j = - \sum_{j=n_j+1}^{k} a_j + (k - n_j)(\lambda + \varepsilon) \Rightarrow \sum_{j=n_j+1}^{k} a_j \leq (k - n_j)(\lambda + \varepsilon)$$

Está claro que $n_l = n$, ahora falta ver que hay alguno (por lo que se comentó antes de que es bueno saber que haya alguno) y luego acotar la cantidad por debajo.

Para que haya más de uno, basta considerar n suficientemente grande (de forma tal que el máximo de S_i no se alcance en S_n, recordar que $|S_1| \leq H + (|\lambda| + \varepsilon)$ y $S_n \leq -n\varepsilon$). Entonces tomando

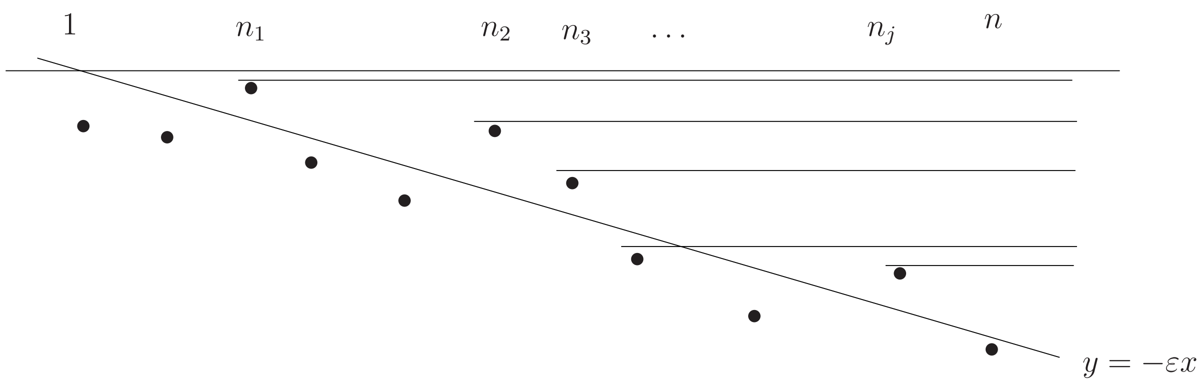

Figura 5.3: Sumas parciales de b_i

$$n > \frac{H + |\lambda| + \varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow S_n \leq -n\varepsilon < -(H + |\lambda| + \varepsilon) \leq a_1 - (|\lambda| + \varepsilon) = b_1 = S_1$$

Por lo tanto existe $m = 1 \ldots n-1$ tal que S_m es el máximo valor de S_j con $1 \leq j \leq n$ y por lo tanto m es uno de los n_j buscados.

Para estimar el valor de l (recordar que aún se pueden elegir el valor de N cumpliendose que sea mayor que $\frac{H+\lambda+\varepsilon}{\varepsilon}$ y aún no se eligió c).

Se sabe que si $1 \leq j \leq l$ se cumple que $S_{n_{(j+1)}} \geq S_{n_j+1}$ pues si fuese $S_{n_{(j+1)}} < S_{n_j+1}$ se podría considerar $n_{(j+1)} = n_j + 1$.

Entonces se tiene

$$S_{n_{(j+1)}} \geq S_{n_j+1} = S_{n_j} + b_{n_j+1} \geq S_{n_j} - (H + |\lambda| + \varepsilon)$$

Por lo tanto, trabajando por inducción se concluye que

$$S_{n_j} \geq S_{n_1} - (j-1)(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

que en particular da (recordando que $n_l = n$)

$$-n\varepsilon \geq S_n = S_{n_l} \geq S_{n_1} - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

pero además $S_1 \leq S_{n_1}$ (pues si no fuese así, se podría tomar $n_1 = 1$) entonces se llega a que

$$-n\varepsilon \geq S_1 - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon) \geq -H - |\lambda| - \varepsilon - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon) = -l(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

pues $S_1 = b_1 = a_1 - (\lambda + \varepsilon)$ y $|a_1| < H$. Resumiendo, se obtuvo que

$$l(H + |\lambda| + \varepsilon) \geq n\varepsilon \Rightarrow l \geq n\frac{\varepsilon}{(H + |\lambda| + \varepsilon)}$$

Por lo tanto finaliza la demostración eligiendo $N > \frac{H+|\lambda|+\varepsilon}{\varepsilon}$ y $c < \varepsilon(H + |\lambda| + \varepsilon)$.

$\square$

Bibliografía

[Ab] F. Abdenur, Generic robustness of spectral decompositions, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **36** (2003) 213–224.

[ABCD] F.Abdenur , C. Bonatti, S. Crovisier y L.Diaz, Generic diffeomorphisms on compact surfaces. *Fund. Math.* **187** (2005), 127–159.

[ABCDW] F.Abdenur , C. Bonatti, S. Crovisier, L.Diaz y L.Wen, Periodic points and homoclinic classes *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2007)

[ABD] F. Abdenur, C. Bonatti y L.Diaz, Nonwandering sets with non empy interior, *Nonlinearity* **17** (2004), 175–191.

[BC] C. Bonatti y S. Crovisier, Recurrence et Generite, *Inventiones Math.* **158** (2004), 33–104.

[BD] C. Bonatti y L. Diaz, On maximal transitive sets of diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES* **96** (2002), 171–197.

[BDP] C. Bonatti, L.J. Díaz y E.R. Pujals, A C^1- generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Annals of Math.* **158** (2003), 355-418.

[BDV] C. Bonatti, L.J. Díaz y M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, *Springer-Verlag* (2005).

[Br] M. Brin, Topological transitivity of a certain class of dynamical systems, and flows of frames on manifolds of negative curvature. (Russian) *Funkcional. Anal. i Priložen* **9** (1975), 9–19.

[CM] C. M. Carballo y C. A. Morales, Homoclinic classes and finitude of attractors for vector fields on n-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), 85–91.

[CMP] C. M. Carballo , C. A. Morales y M. J. Pacifico, Homoclinic classes for generic C^1 vector fields, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), 403–415.

[DPU] L.Diaz, E. Pujals y R.Ures, Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math.* 183 (1999), 1–43.

[DW] D. Dolgopyat y A. Wilkinson, Stable accessibility is C^1 dense. *Geometric methods in dynamics. II. Astérisque* No. 287 (2003), xvii, 33–60.

[Fi] T. Fisher, Hyperbolic sets with nonempty interior. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **15** (2006), 433–446.

[F] J. Franks, Nessesary conditions for stability of diffeomorphisms, *Transactions of the A.M.S.* **158**, 301-308 (1971).

[Gou1] N. Gourmelon, Addapted metrics for dominated splitting, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **27** (2007), 1839-1849.

[Gou2] N. Gourmelon, Generation of homoclinic tangencies by C^1 perturbations. *Prepublications del Institute Math. de Bourgogne* 502 (2007).

[Gua] P. Guarino, Perturbaciones de sistemas dinámicos en la topología C^1, *Monografía de Licenciatura* CMAT (2007). Disponible en http://imerl.fing.edu.uy/ssd/publicaciones/publicaciones.htm.

[Hat] A. Hatcher, Algebraic Topology, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2002.

[HPS] M. Hirsch,C. Pugh y M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[K] A. Katok, Bernoulli diffeomorphisms on surfaces, *Ann. of Math.* **110** (1979), 529–547.

[KH] A. Katok y B. Hasselblatt; Introduction to the modern theory of Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press* (1995).

[Kup] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques. *Contributions to Differential Equations* **2** (1963) 457–484.

[Less] P. Lessa, Dinámica Genérica en Superficies, *Monografía de Licenciatura* CMAT (2006). Disponible en http://imerl.fing.edu.uy/ssd/publicaciones/publicaciones.htm.

[LS] P. Lessa y M.Sambarino, Invariant Manifolds for codimension one dominated splitting. En preparación.

[M1] R. Mañe, Contributions to the stability conjecture, *Topology* **17** (1978), 383-396.

[M2] R. Mañe, An Ergodic Closing Lemma, *Annals of Math.*, **116** (1982), 503-540.

[M3] R.Mañe, Teoria Ergódica,*Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1983).

[M4] R. Mañe, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. IHES*,**66** (1987), 161-210.

[New] S. Newhouse, Hyperbolic Limit Sets, *Transactions of the A.M.S* **167** (1972), 125–150.

[PPV] M.J. Pacifico, E. Pujals y J. Vieitez, Robustly expansive homoclinic classes, *Ergodic Theory and Dyn. Syst.* **25** (2005), 271-300.

[PaSm] J. Palis y S.Smale, Structural Stability Theorems *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S* vol. 14 (1970), 223–231.

[Pl] V.A. Pliss, On a conjecture of Smale, *Diff. Uravnenija* **8** (1972), 268-282.

[Pot] R. Potrie, Transitividad robusta en superficies, *Monografía de Licenciatura* CMAT (2007). Disponible en http://imerl.fing.edu.uy/ssd/publicaciones/publicaciones.htm.

[PoS] R.Potrie y M. Sambarino, Codimension one generic homoclinic classes with interior, Preprint.

[PS1] E.R. Pujals y M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Math.* **151** (2000), 961-1023.

[PS2] E.R. Pujals y M. Sambarino, On the dynamics of dominated splitting, por aparecer en *Annals of Math.*.

[PS3] E.R. Pujals y M. Sambarino, Integrability on codimension one dominated splitting, *Bull. Braz. Math. Soc., N.S.* **38** (2007) 1-19.

[Pu1] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math* **89**, 956-1009, (1967).

[Pu2] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, *Amer. J. Math* **89**, 1010-1021, (1967).

[Rob] C. Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995).

[Sam] A. Sambarino, Piezas elementales de la dinámica genérica, *Monografía de Licenciatura* CMAT (2007). Disponible en http://imerl.fing.edu.uy/ssd/publicaciones/publicaciones.htm.

[Sh2] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag* (1987).

[Sm1] S. Smale, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **17** (1963) 97–116.

[Sm2] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin A.M.S.* **73** (1967), 747-817.

[Sot] J. Sotomayor, Liçoes de Ecuaçoes Diferenciaes,*Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1979).

[Wen] L. Wen, Homoclinic tangencies and dominated splittings. *Nonlinearity* **15** (2002), 1445–1469.

[Wen2] L. Wen, Selection of quasi-hyperbolic strings, *Notas de curso* International Conference on Global Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, USA (2006).

[Y] J. Yang, Lyapunov stable chain recurrent classes. *Preprint* arXiv:0712.0514v1 [math.DS] (2007)